确定性推理

一、推理基本概念

1. 推理构成：形式（前提结论逻辑关系）+内容（前提结论具体内容）
2. 逻辑形式有效性：可以从真前提（内容为真）得到真结论（但形式有效本身并不保证结论为真）

   逻辑形式可靠性：推理有效+推理前提全部为真
3. **推理分类**：

<u>按知识确定性</u>：

1) 确定性推理=自然推理（直接通过逻辑规则推导）+归结演绎（永真性->不可满足性）

2) 不确定推理=似然推理（概率论）+模糊推理（模糊逻辑）

<u>按逻辑基础</u>：

1) 演绎推理（普遍->特殊）
2) 归纳推理（特殊->普遍）
3) 默认推理（知识不完全，无否定证据则认为结论成立，按照默认认识进行推理，遇到矛盾再回溯修改）

<u>按推理方向</u>：

1) 正向推理（数据驱动）
2）逆向推理（目标驱动）
3）混合推理（先正后逆/先逆后正）
4）双向推理（同时正逆）

<u>按过程单调性</u>：单调（推理时一定是在增强/靠近结论）/非单调（可能发生冲突导致知识库需修改）

二、推理逻辑基础

1. **命题逻辑**：
   1) 命题：陈述句+真值唯一
   2) 原子命题：不包含联结词（五大）
   3) 文字：命题&其否定（后面有谓词逻辑可以扩展为谓词&其否定）
   4) 范式：析取/合取范式（不唯一），主析取/合取范式（唯一）

   命题逻辑局限性：最小单位过大，无法处理整体&部分关系
2. **谓词逻辑**（分解拓展命题为个体和谓词，并增加量词）：
   1) 谓词：

      作用：表示个体属性&个体关系

      构成：谓词符号+个体符号（可以为函数）
   2) 量词（任意/存在）对应有量词辖域（如多量词出现，后在前辖域，这影响化简过程），约束/自由变元（影响化简），换名规则（子句集化简）
   3) 辖域收扩：只需要记住只有$\forall$对$\wedge$，$\exists$对$\vee$有分配律，其他都没有

4) 原子谓词公式：单谓词，无联结词

5) 谓词公式真值可能：永真/可满足（包含永真）/永假（不可满足）

6) 逻辑推理：（题目：已知每位航天员或者在太空空间站或者在地面，且并不是每位航天员都在太空空间站，请证明有些航天员在地面。）

■ **解：设** $astronaut(x)$ **：** x **是航天员，** $onground(x)$ **：** x **在地面，**

$inspace(x)$ **：** x **在空间空间站**

前提： $(\forall x)(astronaut(x) \to ongroud(x) \vee inspace(x))$,

$\neg(\forall x)(astronaut(x) \to inspace(x))$

结论： $(\exists x)(astronaut(x) \wedge ongroud(x))$

$\neg(\forall x)(astronaut(x) \to inspace(x)) \Rightarrow (\exists x)\neg(astronaut(x) \to inspace(x))$

$\Rightarrow (\exists x)\neg(\neg astronaut(x) \vee inspace(x))$

$\Rightarrow (\exists x)(astronaut(x) \wedge \neg inspace(x))$

$\Rightarrow astronaut(a) \wedge \neg inspace(a)$ **a是航天员，a不在太空空间站**

$\Rightarrow \neg inspace(a)$ **航天员a不在太空空间站**

$(\forall x)(astronaut(x) \to ongroud(x) \vee inspace(x))$

$\Rightarrow astronaut(a) \to ongroud(a) \vee inspace(a)$

$\Rightarrow ongroud(a) \vee inspace(a)$ **航天员a在太空空间站或地面**

$$\left.\begin{array}{l}\neg inspace(a) \\ ongroud(a) \vee inspace(a)\end{array}\right\} \Rightarrow ongroud(a)$$

航天员a在地面

$\Rightarrow astronaut(a) \wedge ongroud(a)$

a是航天员，a在地面

$\Rightarrow (\exists x)(astronaut(x) \wedge ongroud(x))$

某些航天员在地面

三、自然演绎推理

1. 演绎推理为必然性推理，不产生新知识（只产生隐性知识）
2. 演绎推理内容：
   1) 三段论：大前提（一般性知识）+小前提（个别实例特殊性知识）=>针对实例特殊判断（即 A->B∧B->C=>A->C）
   2) 假言推理（演绎）：基本思想：大前提（条件句：如果（条件）就（结果））+小前提（条件）=>结果

      分类：

      a) 充分条件假言推理：肯定前件=>肯定后件，否定后件=>否定前件
      b) 必要条件假言推理：肯定后件=>肯定前件，否定前件=>否定后件
      c) 充分必要条件假言推理：肯定/否定前件<=>肯定/否定后件
3. **自然演绎**（从已知事实出发，按照命题/谓词逻辑规则进行推理，得到结论）：

组成：1)假言推理（P,P->Q=>Q）2)拒取式推理（¬Q,P->Q=>¬P）

3)假言三段论（P->Q，Q->R=>P->R）

四. 归纳演绎推理

分类：

1. 完全归纳：考查了每一个实例（所有对象/子类），是必然性推理

2. 不完全归纳（或然性推理）：只考查了部分实例，包括简答枚举+科学归纳法（基于简单枚举，加入科学分析）

五. 归结演绎推理

1. 用途：定理证明&问题求解
2. 基础知识：
    1) 归纳演绎流程：谓词公式->前束范式->斯科伦范式->子句集->扩充子句集（结论证明：加入结论否定/问题求解：加入问题否定∨答案容器）->归结直到 NIL（空子句）
    2) 谓词公式范式：1° 前束范式（量词（全称和存在，不能有否定）只出现在最前面，母式无量词，联结词不能有单向/双向蕴含） 2° 斯科伦范式（在前束范式基础上，再消去所有存在量词，且将母式化成析取范式）
    3) **前束范式化简求解步骤**（从复合谓词公式开始）：

    Step1:消去 $\rightarrow$ & $\leftrightarrow$

    Step2:减少¬（即双重否定等价肯定）

    Step3:¬深入（化出去的量词不能包含否定，使用¬∀等价于∃，¬∃等价于∀）

    Step4:约束易名（所有约束变量都尽量不同，一般都有）（只要是一个量词辖域中出现与其同名的都需要进行更换）

    Step5:辖域扩张（即量词前移）

    注：这样化简出来的前束范式未必唯一，化简时需要注意量词之间的辖域关系

    4) **斯科伦范式化简求解步骤**（从前束范式开始）：

    Step1:消去全部存在量词：

    1）若存在量词左侧无任何全称量词，直接使用一个未使用过的个体常量在谓词公式中进行替代，并删去对应存在量词

    2）若存在量词左侧有全称量词，则构建一个斯科伦函数（变量是其左侧全部全称量词）（注意多个斯科伦函数名不能相互冲突，且也不能与现存函数/谓词等冲突）

    Step2:将母式化为合取范式（易漏）

    5) 文字：原子谓词公式&其否定，互补文字：P（正文字）&¬P（负文字）
    6) 子句：文字析取式
    7) 子句集：字句合取式（默认其中全部变元都受全称量词约束，因此外面量词省略，花括号括起来，里面析取式之间用逗号隔开）
    8) 空子句（NIL）：无文字子句，永假（无法被任何解释满足）
    9) **子句集化简求解步骤**（从斯科伦范式开始）：

    Step1:直接省略掉母式前的全部全称量词，并将母式改写成子句集形式（花括

号扩起，相邻子句之间使用逗号进行分隔）

Step2:重命名（子句集中任两个子句不含相同名称变量）

■ **将下列谓词公式化为子句集**

$$(\forall x)((\neg P(x)\vee\neg Q(x))\rightarrow(\exists y)(S(x,y)\wedge Q(x)))\wedge(\forall x)(P(x)\vee B(x))$$

- **1）消去蕴含符号** $\alpha\rightarrow\beta\equiv\neg\alpha\vee\beta$

$$\Leftrightarrow(\forall x)(\neg(\neg P(x)\vee\neg Q(x))\vee(\exists y)(S(x,y)\wedge Q(x)))\wedge(\forall x)(P(x)\vee B(x))$$

- **2）把否定符号移到每个谓词前面** $\neg(\neg\alpha)\equiv\alpha$

$$\Leftrightarrow(\forall x)((P(x)\wedge Q(x))\vee(\exists y)(S(x,y)\wedge Q(x)))\wedge(\forall x)(P(x)\vee B(x))$$

- **3）变量标准化，重新命名变元**

$$\Leftrightarrow(\forall x)((P(x)\wedge Q(x))\vee(\exists y)(S(x,y)\wedge Q(x)))\wedge(\forall w)(P(w)\vee B(w))$$

- **4）消去存在量词，引入Skolem函数**

$$\Leftrightarrow(\forall x)((P(x)\wedge Q(x))\vee(S(x,f(x))\wedge Q(x)))\wedge(\forall w)(P(w)\vee B(w))$$

- **5）化为前束形**

$$\Leftrightarrow(\forall x)(\forall w)(((P(x)\wedge Q(x))\vee(S(x,f(x))\wedge Q(x)))\wedge(P(w)\vee B(w)))$$

- **6）化为标准形** $P\wedge(Q\vee R)\equiv(P\wedge Q)\vee(P\wedge R)$

$$\Leftrightarrow(\forall x)(\forall w)(((Q(x)\wedge P(x))\vee(Q(x)\wedge S(x,f(x))))\wedge(P(w)\vee B(w)))$$

$$\Leftrightarrow(\forall x)(\forall w)((Q(x)\wedge(P(x)\vee S(x,f(x))))\wedge(P(w)\vee B(w)))$$

$$\Leftrightarrow(\forall x)(\forall w)(Q(x)\wedge(P(x)\vee S(x,f(x)))\wedge(P(w)\vee B(w)))$$

仅全称量词　　**简单析取式（或）**　　**合取范式（与）**

- **7）略去全称量词，导出母式**

$$Q(x)\wedge(P(x)\vee S(x,f(x)))\wedge(P(w)\vee B(w))$$

- **8）子句集变量标准化，使不同子式中的变元不同名**

$$Q(x)\wedge(P(y)\vee S(y,f(y)))\wedge(P(w)\vee B(w))$$

- **9）消去合取词，用子句集表示**

$$\{Q(x),P(y)\vee S(y,f(y)),P(w)\vee B(w)\}$$

可以看出，子句集也未必唯一

10) 子句集不可满足：对任意解释，子句集中子句都不能同时取得真值

11) 定理: G 为谓词公式，S 为其对应子句集，则在不可满足性上二者等价（G 不可满足<=>S 不可满足）

12) 海伯伦域:

构造方法：H_0 为 S（上文子句集）中所有个体常项构成集合（若无，往该集合中随意增加任一个个体常量）

$H_{i+1}=H_i\cup${S 中函数在 H_i 上全部实例}（函数变元遍取 H_i 全部元素）

13) 子句集中一旦出现 NIL，因为子句之间合取的关系，子句集必然是不可满足的

14) 归结原理（归结树展示）：

1. 命题逻辑：C1，C2 为子句集中两子句，C1 中 L1 与 C2 中 L2 为互补文字，则可将 L1 从 C1 中剔除，将 L2 从 C2 中剔除，将 L1,L2 剩余部分析取合成为 C12（C12 实为 C1&C2 推论）
2. 谓词逻辑：

   1° 若谓词无变量，退化同 1】

   2° 否则，就利用子句集中所有变元都受全称量词约束性质，为了进行上述归结操作对变量进行合适赋值，化为 1】

   【最一般合一】：达成合一效果（置换，使得谓词公式表达一致），且赋值操作数最少
3. 归结原理具体应用（在以上基础知识背景下）

应用 1（归结反演证明结论）：

Step1：将前提表为谓词公式 P

Step2：将待证明结论表为谓词公式 Q

Step3：将{P，¬Q}（将永真转为不可满足证明）化为子句集 S

Step4：运用以上归结原理（14），每次归结产生结果放入子句集中

Step5：归结直到 NIL 出现，停止，归结反演证明结论成功

■ 利用归结原理如下推论证明：
“有些学生喜欢任一教师。没有任一学生喜欢任一庸师。所以没有庸师的教师”

证明：1）定义谓词，并将前提用谓词公式表示

$student(x)$ ：**x 是学生**

$teacher(x)$ ：**x 是教师**

$quacks(x)$ ：**x 是庸师**

$like(x, y)$ ：**x 喜欢 y**

C_1： $(\exists x)(student(x) \wedge (\forall y)(teacher(y) \rightarrow like(x, y)))$

C_1： $(\forall x)(student(x) \rightarrow (\forall y)(quacks(y) \rightarrow \neg like(x, y)))$

G： $(\forall x)(teacher(x) \rightarrow \neg quacks(x))$

$\neg G$： $\neg(\forall x)(teacher(x) \rightarrow \neg quacks(x))$

3）将前提和结论化为子句集

C_1： $(\exists x)(student(x) \wedge (\forall y)(teacher(y) \rightarrow like(x, y)))$

$\Leftrightarrow (\exists x)(\forall y)(student(x) \wedge (\neg teacher(y) \vee like(x, y)))$

$\Leftrightarrow (\forall y)(student(a) \wedge (\neg teacher(y) \vee like(a, y)))$

C_2： $(\forall x)(student(x) \rightarrow (\forall y)(quacks(y) \rightarrow \neg like(x, y)))$

$\Leftrightarrow (\forall x)(student(x) \rightarrow (\forall y)(\neg quacks(y) \vee \neg like(x, y)))$

$\Leftrightarrow (\forall x)(\forall y)(\neg student(x) \vee (\neg quacks(y) \vee \neg like(x, y)))$

$\neg G$： $\neg(\forall x)(teacher(x) \rightarrow \neg quacks(x))$

$\Leftrightarrow \neg(\forall x)(\neg teacher(x) \vee \neg quacks(x)) \Leftrightarrow teacher(b) \wedge quacks(b)$

4）得到 $\{C_1, C_2, \neg G\}$ 子句集

$$\{student(a), \neg teacher(y) \vee like(a,y), \neg student(x) \vee \neg quacks(y) \vee \neg like(x,y), teacher(b), quacks(b)\}$$

$$\Rightarrow \{student(a), \neg teacher(y) \vee like(c,y), \neg student(x) \vee \neg quacks(z) \vee \neg like(x,z), teacher(b), quacks(d)\}$$

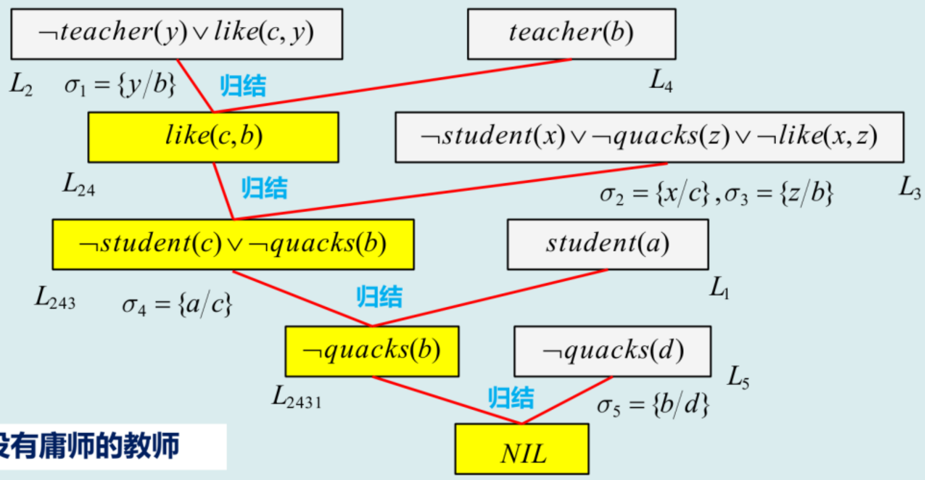
$L_1:\ student(a)$

$L_2:\ \neg teacher(y) \vee like(c,y)$

$L_3:\ \neg student(x) \vee \neg quacks(z) \vee \neg like(x,z)$

$L_4:\ teacher(b)$

$L_5:\ quacks(d)$



故，没有庸师的教师

应用 2（归结反演求解问题）（思想和应用 1 一样，Answer(x)仅为了省去回退而存在）：

Step1：将前提表为谓词公式 F，并化为子句集 S

Step2：将需要求解问题形式表示为 Q（x）（如需要求解谁是小偷，可以设置为 Q(x)：x 为小偷），得到ㄱQ(x)∨Answer(x)

Step3：将ㄱQ(x)∨Answer(x)加入 S，得到扩充子句集 S'

Step4：对 S'使用归结原理

Step5：最后得到结果只剩 Answer(个体常量）这个个体常量就是答案（可以不唯一，重复多次使用归结原理）

- **已知A、B、C三人中有个人从不说真话，也有人从不说假话。有人向这三个人分别提出同一问题："谁是说谎者？"，三个人回答如下：**
  A答："B和C都是说谎者"；
  B答："A和C都是说谎者"；
  C答："A和B中至少有一个是说谎者"。
  求证谁是老实人、谁是说谎者?

证明：1）定义谓词，并将已知前提谓词公式表示

$T(x)$ **：x说真话**

- **A答："B和C都是说谎者"**
  - **A说真话：** $A_1:\ T(A) \rightarrow (\neg T(B) \wedge \neg T(C))$
  - **A说假话：** $A_2:\ \neg T(A) \rightarrow (T(B) \vee T(C))$

- **B答："A和C都是说谎者"**
  - **B说真话：** $B_1:\ T(B)\to(\neg T(A)\wedge\neg T(C))$
  - **B说假话：** $B_2:\ \neg T(B)\to(T(A)\vee T(C))$
- **C答："A和B中至少有一个是说谎者"**
  - **C说真话：** $C_1:\ T(C)\to(\neg T(A)\vee\neg T(B))$
  - **C说假话：** $C_2:\ \neg T(C)\to(T(A)\wedge T(B))$

2）应用等价关系，将上述谓词公式范式化

$$A_1:\ T(A)\to(\neg T(B)\wedge\neg T(C))\Leftrightarrow\neg T(A)\vee(\neg T(B)\wedge\neg T(C))$$
$$\Leftrightarrow\underline{(\neg T(A)\vee\neg T(B))}\wedge\underline{(\neg T(A)\vee\neg T(C))}$$

$$A_2:\neg T(A)\to(T(B)\vee T(C))\Leftrightarrow T(A)\vee(T(B)\vee T(C))$$
$$\Leftrightarrow\underline{T(A)\vee T(B)\vee T(C)}$$

$$B_1:T(B)\to(\neg T(A)\wedge\neg T(C))=\neg T(B)\vee(\neg T(A)\wedge\neg T(C))$$
$$\Leftrightarrow(\neg T(B)\vee\neg T(A))\wedge\underline{(\neg T(B)\vee\neg T(C))}$$

$$B_2:\ \neg T(B)\to(T(A)\vee T(C))\Leftrightarrow T(B)\vee(T(A)\vee T(C))$$
$$\Leftrightarrow T(B)\vee T(A)\vee T(C)$$

$$C_1:\ T(C)\to(\neg T(A)\vee\neg T(B))\Leftrightarrow\underline{\neg T(C)\vee\neg T(A)\vee\neg T(B)}$$

$$C_2:\ \neg T(C)\to(T(A)\wedge T(B))\Leftrightarrow T(C)\vee(T(A)\wedge T(B))$$
$$\Leftrightarrow\underline{(T(C)\vee T(A))}\wedge\underline{(T(C)\vee T(B))}$$

3）将上述谓词公式化为子句集

$L_1:\ \neg T(A)\vee\neg T(B)$

$L_2:\ \neg T(A)\vee\neg T(C)$

$L_3:\ T(A)\vee T(B)\vee T(C)$

$L_4:\ \neg T(B)\vee\neg T(C)$

$L_5:\ \neg T(C)\vee\neg T(A)\vee\neg T(B)$

$L_6:\ T(C)\vee T(A)$

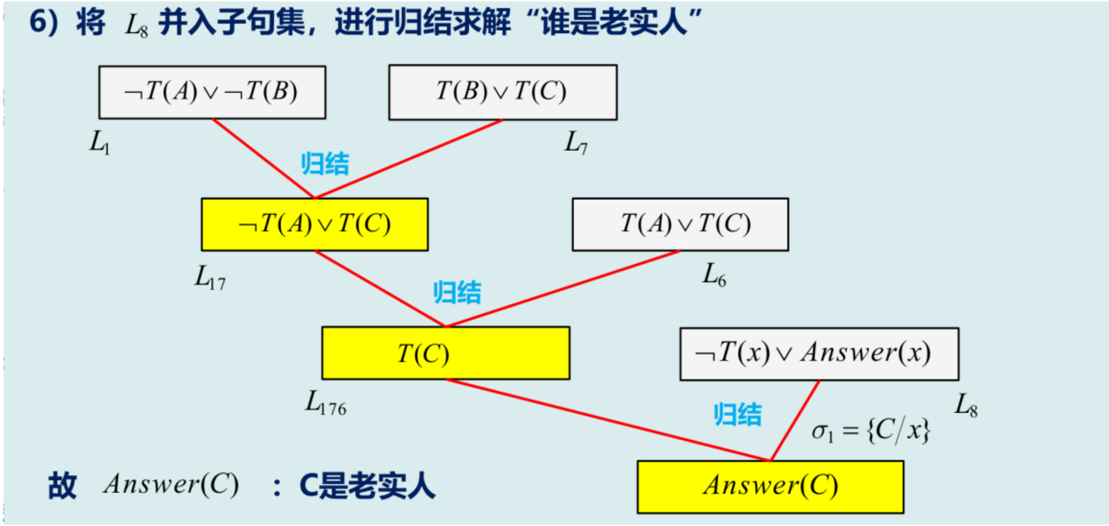
$L_7:\ T(C)\vee T(B)$

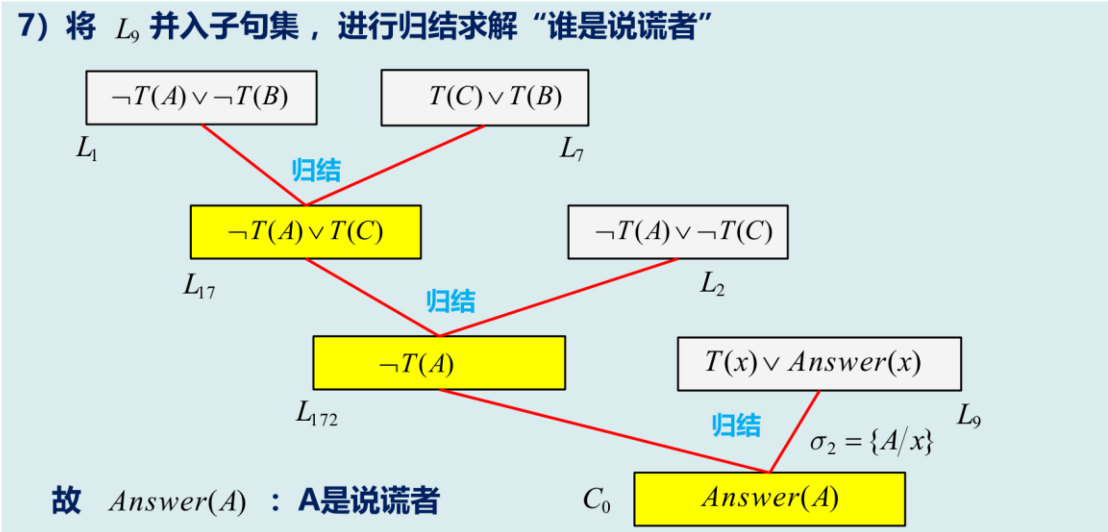
4）将"谁是老实人"表示为谓词公式，并否定其后再与谓词 $Answer$ 构成析取式

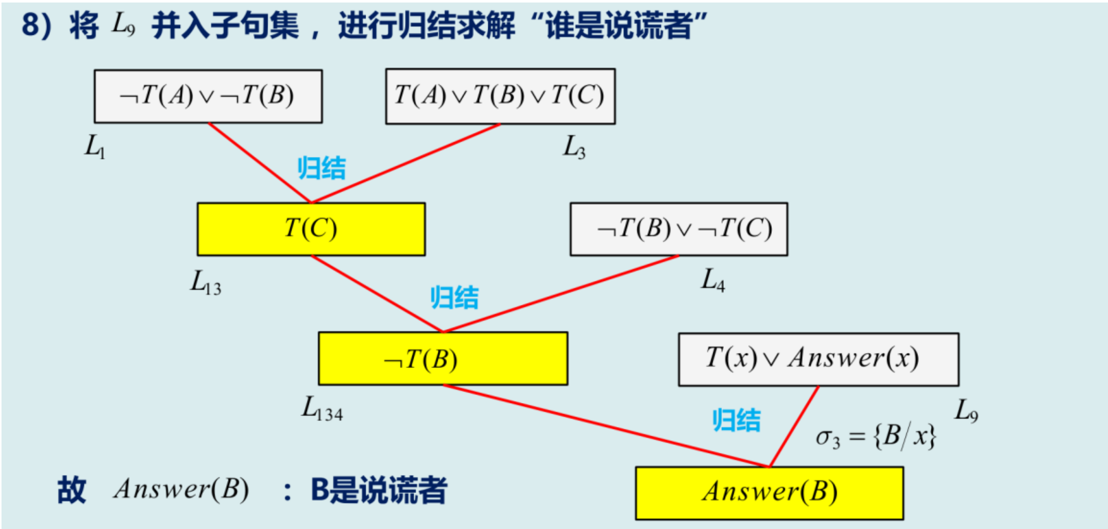
$$L_8:\ \neg T(x)\vee Answer(x)$$

5）将"谁是说谎者"表示为谓词公式，并否定其后再与谓词 $Answer$ 构成析取式

$$L_9:\ T(x)\vee Answer(x)$$







六. 2024 年真题:

选择题:

1】下列四个哪个不对（）

A. P—＞Q 相关（未回忆具体内容）

B. 给一个谓词公式，说它不是前束范式。（未回忆具体公式）

C. 小明在北京记为 P，在西安记为 Q，那么在西安或北京记为 PVQ

D. 推理方向包括前向，逆向，混合和双向。

解析：C 应使用排斥或而不是相容或（小明不可能既在北京又在西安）

简答题：

3. 化简为斯科伦范式。

$$(\forall x)((\neg P(x) \vee \neg Q(x)) \rightarrow (\exists y)(S(x,y) \wedge Q(x))) \wedge (\forall x)(P(x) \vee B(x))$$

略答：3.解：$(\forall x)((\neg P(x) \vee \neg Q(x)) \rightarrow (\exists y)(S(x,y) \wedge Q(x))) \wedge (\forall x)(P(x) \vee B(x))$

$\Leftrightarrow (\forall x)(\neg(\neg P(x) \vee \neg Q(x)) \vee (\exists y)(S(x,y) \wedge Q(x))) \wedge (\forall x)(P(x) \vee B(x))$ （蕴涵消除）

$\Leftrightarrow (\forall x)((P(x) \wedge Q(x)) \vee (\exists y)(S(x,y) \wedge Q(x))) \wedge (\forall x)(P(x) \vee B(x))$ （德摩根律）

$\Leftrightarrow (\forall x)(\exists y)((P(x) \wedge Q(x)) \vee (S(x,y) \wedge Q(x))) \wedge (\forall z)(P(z) \vee B(z))$ （辖域扩张）

$\Leftrightarrow (\forall x)(\exists y)((P(x) \vee (S(x,y) \wedge Q(x))) \wedge (Q(x) \vee (S(x,y) \wedge Q(x)))) \wedge (\forall z)(P(z) \vee B(z))$ （分配律）

$\Leftrightarrow (\forall x)(\exists y)((P(x) \vee S(x,y)) \wedge Q(x)) \wedge (\forall z)(P(z) \vee B(z))$ （运用两次吸收律）

$\Leftrightarrow (\forall x)(\exists y)(\forall z)(((P(x) \vee S(x,y)) \wedge Q(x)) \wedge (P(z) \vee B(z)))$ （辖域扩张 化为前束范式）

$\Leftrightarrow (\forall x)(\exists y)(\forall z)((P(x) \vee S(x,y)) \wedge Q(x) \wedge (P(z) \vee B(z)))$ （母式化为合取范式）

$\Leftrightarrow (\forall x)(\forall z)((P(x) \vee S(x,f(x))) \wedge Q(x) \wedge (P(z) \vee B(z)))$ （引入Skolem函数 消去存在量词 得到斯科伦范式）

2】（1）小李的老师是王老师

（2）小李和小张是同学

（3）若 x,y 为同学，则 x 的老师为 y 的老师

将以上三信息用谓词逻辑表示，并归结反演求出小张的老师是谁。

4. 解：设谓词 $T(x,y)$ 表示 x 的老师是 y，$C(x,y)$ 表示：x 和 y 是同学

设个体常량：小李表示为 L、小张表示为 Z，王老师表示为 W

则：(1) 可表示为 $T(L,W)$ ①　(2) 可表示为 $C(L,Z)$ ②

(3) 可表示为 ~~(∀x)(∀…~~ $(\forall x)(\exists m)(\forall y)((C(x,y) \wedge T(x,m)) \rightarrow T(y,m))$ ③

将③化为子句集 S：~~③ ⇔ (∀x)(∃m)(∀y)((C(x,y) ∧ T(x,m)) → T(y,m)) (蕴~~

③ $\Leftrightarrow (\forall x)(\exists m)(\forall y)(\neg(C(x,y) \wedge T(x,m)) \vee T(y,m))$ （消除蕴涵）

$\Leftrightarrow (\forall x)(\exists m)(\forall y)(\neg C(x,y) \vee \neg T(x,m) \vee T(y,m))$ （德摩根律）

$\Leftrightarrow (\forall x)(\forall y)(\neg C(x,y) \vee \neg T(x,f(x)) \vee T(y,f(x)))$ （引入Skolem函数 消去存在量词 得到斯科伦范式）

$\Leftrightarrow S = \{\neg C(x,y) \vee \neg T(x,f(x)) \vee T(y,f(x))\}$ （化为子句集）

要求解的问题为 $T(Z,t)$ 则将 $\neg T(Z,t) \vee Answer(t)$ ①.②并入 S 形成扩充子句集 S' =

$\{\neg C(x,y) \vee \neg T(x,f(x)) \vee T(y,f(x)), \neg T(Z,t) \vee Answer(t), T(L,W), C(L,Z)\}$

下面对 S' 进行归结求解问题：

$\boxed{\neg C(x,y)} \vee \neg T(x,f(x)) \vee T(y,f(x))$ 与 $\boxed{C(L,Z)}$，$x=L, y=Z$ 得 $\boxed{\neg T(L,f(L))} \vee T(Z,f(L))$

$\boxed{\neg T(L,f(L))} \vee T(Z,f(L))$ 与 $\boxed{T(L,W)}$，$f(L)=W$ 得 $\boxed{T(Z,W)}$

$\boxed{T(Z,W)}$ 与 $\boxed{\neg T(Z,t)} \vee Answer(t)$，$t=W$ 得 $Answer(W)$

因此，归结反演得出小张的老师为王老师