不确定性推理

似然推理（概率论）

一、概率推理

1. 全概率公式

若$\{B_i\}$为完备事件组（互不相交且构成全体样本空间），则有

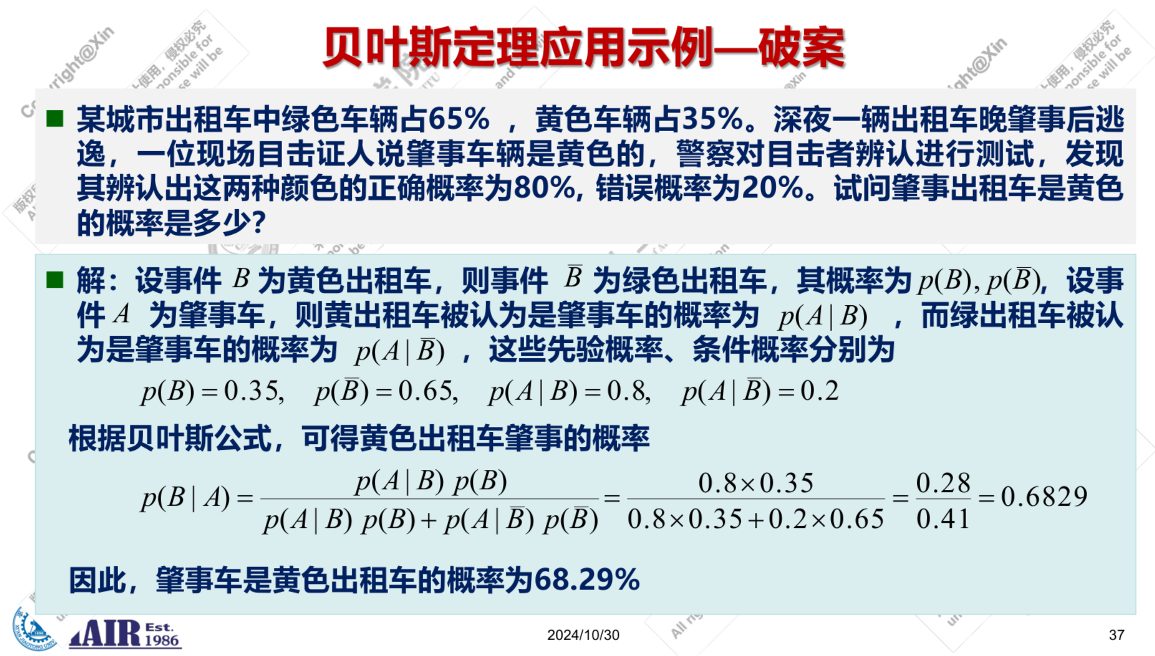
$$P(A)=\sum_i P(A|B_i)P(B_i)$$

2. 贝叶斯公式

根据先验概率和条件概率，可以得到后验概率：

$$P(B_i|A)=\frac{P(A|B_i)P(B_i)}{P(A)}=\frac{P(A|B_i)P(B_i)}{\sum_j P(A|B_j)P(B_j)}$$

应用：



3. 概率方法不确定性推理

3.1 单证单论

产生式形式：$\text{IF}\quad E\quad \text{THEN}\quad H$

假设H为某一假设，E为某一证据，则根据贝叶斯公式，有

$$P(H|E)=\frac{P(E|H)P(H)}{P(E)}$$

其中，$P(E|H)$是结论出现时证据出现的概率，称为似然概率。

3.2 单证多论

$$P(H_i|E) = \frac{P(E|H_i)P(H_i)}{\sum_k P(E|H_k)P(H_k)}$$

3.3 多证多论

$$P(H_i|E_1, E_2, \ldots, E_m) = \frac{P(E_1|H_i)P(E_2|H_i)\ldots P(E_m|H_i)P(H_i)}{\sum_k P(E_1|H_k)P(E_2|H_k)\ldots P(E_m|H_k)P(H_k)}$$

概率推理的示例1

H_1, H_2, H_3 $\qquad\qquad E$

$$p(H_1)=0.2, \quad p(H_2)=0.5, \quad p(H_3)=0.3$$

$$p(E\,|\,H_1)=0.1, \quad p(E\,|\,H_2)=0.3, \quad p(E\,|\,H_3)=0.7$$

求在该证据下3个结论发生的概率

■ **解：单证据多结论概率计算公式**

$$p(H_1\,|\,E)=\frac{p(E\,|\,H_1)p(H_1)}{\sum_{k=1}^{3} p(E\,|\,H_k)p(H_k)}=\frac{0.1\times 0.2}{0.1\times 0.2+0.3\times 0.5+0.7\times 0.3}=0.0526$$

$$p(H_2\,|\,E)=\frac{p(E\,|\,H_2)p(H_2)}{\sum_{k=1}^{3} p(E\,|\,H_k)p(H_k)}=\frac{0.15}{0.38}=0.3947$$

$$p(H_3\,|\,E)=\frac{p(E\,|\,H_3)p(H_3)}{\sum_{k=1}^{3} p(E\,|\,H_k)p(H_k)}=\frac{0.21}{0.38}=0.5526$$

二、主观贝叶斯方法

1. 基本思想

在主观贝叶斯方法中，通过使用一组充分性度量LS和必要性度量LN来表示知识的不确定性，其具体的产生式形式为：

$$\text{IF} \quad E \quad \text{THEN} \quad (LS, LN) \quad H \quad (p(H))$$

其中，LS为充分性度量，表示E对H的支持程度，取值区间$[0, +\infty)$；LN为必要性度量，表示$\neg E$对H的支持程度，取值区间$[0, +\infty)$。$p(H)$为没有任何证据下H的先验概率，由专家给出。

2. 几率

信任度：$p(H|E)$表示在有证据E的情况下，某种假设H为真的信任度

几率定义为某种事件H为真的概率与其为假的概率之比：

$$O(H) = \frac{p(H)}{p(\neg H)} = \frac{p(H)}{1 - p(H)}$$

反过来有

$$p(H) = \frac{O(H)}{1 + O(H)}$$

几率实质上表示证据的不确定性，将概率从$[0, 1]$映射到$[0, +\infty)$。

3. 充分性因子（LS）

充分性因子定义为

$$LS=\frac{O(H|E)}{O(H)}=\frac{p(E|H)}{p(E|\neg H)}$$

则有

$$O(H|E)=LS\cdot O(H)$$

- **当 $LS>1$ 时，$O(H\mid E)>O(H)$，说明证据 E 支持结论 H，LS 越大，支持越充分**
- **当 $LS\to\infty$ 时，$O(H\mid E)\to\infty$，即 $p(H\mid E)=1$，说明证据 E 将导致结论 H 为真**
- **当 $LS=1$ 时，$O(H\mid E)=O(H)$，说明证据 E 对结论 H 没有影响**
- **当 $LS<1$ 时，$O(H\mid E)<O(H)$，说明证据 E 不支持结论 H**
- **当 $LS=0$ 时，$O(H\mid E)=0$，说明证据 E 的存在使结论 H 为假**

4. 必要性因子（LN）

必要性因子定义为

$$LN=\frac{O(H|\neg E)}{O(H)}=\frac{p(\neg E|H)}{p(\neg E|\neg H)}$$

则有

$$O(H|\neg E)=LN\cdot O(H)$$

- **当 $LN>1$ 时，$O(H\mid\neg E)>O(H)$，说明证据 $\neg E$ 支持结论 H，LN 越大，支持越充分**
- **当 $LN\to\infty$ 时，$O(H\mid\neg E)\to\infty$，即 $p(H\mid\neg E)=1$，说明证据 $\neg E$ 的存在将导致结论 H 为真**
- **当 $LN=1$ 时，$O(H\mid\neg E)=O(H$，说明证据 $\neg E$ 对结论 H 没有影响**
- **当 $LN<1$ 时，$O(H\mid\neg E)<O(H)$，说明证据 $\neg E$ 不支持结论 H，即证据不存在，导致结论为真的可能性降低**
- **当 $LN=0$ 时，$O(H\mid\neg E)=0$，说明证据 $\neg E$ 的存在使结论 H 为假**

5. LS和LN的关系

- 证据存在 E 和证据不存在 $\neg E$ 不会同时支持或同时排斥结论 H，根据数学意义上的取值范围，充分性度量 LS 与必然性度量 LN 间仅存在3种情况：

$$\begin{cases} LS > 1 \quad \text{and} \quad LN < 1 \\ LS < 1 \quad \text{and} \quad LN > 1 \\ LS = LN = 1 \end{cases}$$

- 当证据 E 对结论 H 支持越强烈，LS 就越大，而 LN 就越小，反之亦然
- 虽然已有LS、LN的计算公式，但实际上领域专家并不一定真按公式计算规则的LS、LN，而往往是凭经验给出
- 领域专家根据经验所提供的LS、LN通常不满足这一理论上的限制，常常在承认E支持H（即LS>1）的同时却否认E反对H（即LN<1）

6. 组合证据可信度计算

已知当前观察S下每个单一证据E_i的概率为$p(E_i|S)$，则可用最大最小法计算组合证据的可信度。

对于合取证据$E = E_1 \wedge E_2 \wedge ... \wedge E_n$，可信度为

$$p(E|S) = \min\{p(E_1|S), p(E_2|S), \ldots, p(E_n|S)\}$$

对于析取证据$E = E_1 \vee E_2 \vee ... \vee E_n$，可信度为

$$p(E|S) = \max\{p(E_1|S), p(E_2|S), \ldots, p(E_n|S)\}$$

对于非证据有

$$p(\neg E|S) = 1 - p(E|S)$$

7. 主观贝叶斯方法推理

将先验概率$p(H)$更新为后验概率$p(H|E)$时分3种不同情况：证据肯定存在、证据不存在或者证据不确定：

a. 证据确定为真 (p(E)=1)

$$p(H|E) = \frac{LS \cdot p(H)}{(LS-1) \cdot p(H) + 1}$$

b. 证据确定为假 (p(E)=0)

$$p(H|\neg E) = \frac{LN \cdot p(H)}{(LN-1) \cdot p(H) + 1}$$

c. 证据不确定 (杜达公式)

当证据E非真非假时，结论H依赖于证据E，而E基于当前观察S的可信度为$p(E|S) \in [0, 1]$，则$p(H|S)$可按杜达公式计算：

$$p(H|S) = p(H|E) \cdot p(E|S) + p(H|\neg E) \cdot p(\neg E|S)$$

当$p(E|S)$为0或1时，杜达公式分别简化为前两种情况。

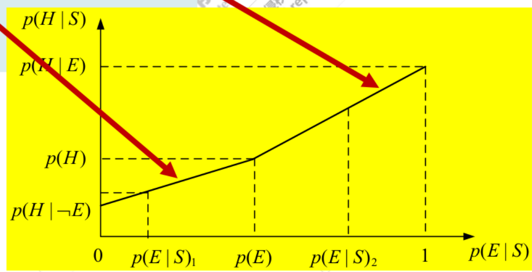
当$p(E|S) = p(E)$时，杜达公式简化为全概率公式：

$$p(H|S) = p(H) = p(H|E) \cdot p(E) + p(H|\neg E) \cdot p(\neg E)$$

当$p(E|S)$不为$0,1$或$p(E)$时，$p(H|S)$需要用分段线性插值计算：

- 当证据 E 自身也不确定时，即 $p(E \mid S)$为其他值（非上述3个特例），则结论 H 的后验概率 $p(H \mid S)$ 的计算需要通过分段线性插值函数计算

$$p(H \mid S)=\begin{cases} p(H)+\dfrac{p(H \mid E)-p(H)}{1-p(E)}(p(E \mid S)-p(E), \\ \qquad \text{for} \quad p(E) \le p(E \mid S) \le 1 \\ p(H \mid \neg E)+\dfrac{p(H)-p(H \mid \neg E)p(\neg E \mid S)}{p(E)}p(E \mid S), \\ \qquad \text{for} \quad 0 \le p(E \mid S) \le p(E) \end{cases}$$



部分证据 S 对全部证据 E 的影响通过公式传给结论H

2024/10/30

多证据推理的结论合成

如果有多条证据$E_1, E_2, ..., E_m$支持同一结论H，且各证据相互独立，则后验几率计算公式为

$$O(H|E_1, E_2, ..., E_n)=\frac{O(H|E_1)}{O(H)}\frac{O(H|E_2)}{O(H)}\cdots\frac{O(H|E_n)}{O(H)}\cdot O(H)$$

- 某天气预报的专家系统中，某地的下雨先验概率为 $p(H)=0.03$
  - 若刮西北风3~4级（设为E1），则会下雨，其充分性因子、必要性因子分别为12，1
  - 若空气湿度为10%~90%（设为E2），则会下雨，其充分性因子、必要性因子分别为23，1
  - 若前一天下雨（设为E3），则会下雨，其充分性因子、必要性因子分别为76，1

当3个证据必然发生时，试求下雨的概率

- 解：利用已知条件可得如下产生式知识表示

$$\begin{aligned} &R_1: \text{ IF } E_1 \text{ THEN } (12,1) \; H \; (p(H)) \\ &R_2: \text{ IF } E_2 \text{ THEN } (23,1) \; H \; (p(H)) \\ &R_3: \text{ IF } E_3 \text{ THEN } (76,1) \; H \; (p(H)) \end{aligned}$$

其中 $LS_1=12, LN_1=1, LS_2=23, LN_2=1, LS_3=76, LN_3=1$

- **证据E1（刮西北风）发生时，结论（即下雨）的概率可计算为**

$$p(H \mid E_1)=\frac{LS_1 \cdot p(H)}{(LS_1-1)\cdot p(H)+1}=\frac{12\times 0.03}{(12-1)\times 0.03+1}=0.2707$$

- **在证据E1的基础上，证据E2（湿度）也发生时，结论（即下雨）的概率可计算为**

$$p(H \mid E_1,E_2)=\frac{LS_2 \cdot p(H\mid E_1)}{(LS_2-1)\cdot p(H\mid E_1)+1}=\frac{23\times 0.2707}{(23-1)\times 0.2707+1}=0.8951$$

- **在证据E1和E2的基础上，证据E3（前一天下雨）也发生时，结论（即下雨）的概率可计算为**

$$p(H \mid E_1,E_2,E_3)=\frac{LS_3 \cdot p(H\mid E_1,E_2)}{(LS_3-1)\cdot p(H\mid E_1,E_2)+1}=\frac{76\times 0.8951}{(76-1)\times 0.8951+1}=0.9985$$

三、可信度方法

1. 可信度因子模型

格式：$\text{IF} \quad E \quad \text{THEN} \quad H \quad (CF(H,E))$

- **可信度因子 $\mathrm{CF}(H,E)$ 的定义为信任与不信任的差，即**

$$\mathrm{CF}(H,E)=MB(H,E)-MD(H,E),\quad \mathrm{CF}(H,E)\in[-1,1]$$

- **MB (measure belief) 信任度量：表示证据E对前提结论H的信任增长度**
- **MD (measure disbelief) 不信任度量：表示证据E对前提结论H的不信任增长度**

$$MB(H,E)=\begin{cases}1, & p(H)=1\\ \dfrac{\max\{p(H\mid E),p(H)\}-p(H)}{1-p(H)}, & p(H)\neq 1\end{cases}$$

$if\ MB(H,E)>0,\ p(H\mid E)>p(H)$

证据E的出现会增加结论H的信任程度

$$MD(H,E)=\begin{cases}1, & p(H)=0\\ \dfrac{\min\{p(H\mid E),p(H)\}-p(H)}{-p(H)}, & p(H)\neq 0\end{cases}$$

$if\ MD(H,E)>0,\ p(H\mid E)<p(H)$

证据E的出现会增加结论H的不信任程度

MB和MD具有互斥性，即二者至少有一个为0，则CF取值区间为$[-1,1]$。
实际应用中，CF通常由专家给出。

可信度和概率的区别：

$$CF(H,E)+CF(\neg H,E)=0$$
$$p(H|E)+p(\neg H|E)=1$$

若 $\mathrm{CF}(H,E)>0$，$\mathrm{CF}(H,E)$ 的值越大，则证据E支持结论H越真
若 $\mathrm{CF}(H,E)<0$，$\mathrm{CF}(H,E)$ 的值越小，则证据E支持结论H越假
若 $\mathrm{CF}(H,E)=0$，则证据E的出现与否与H无关

若对于同一个证据E存在多个互不相容的结论$H_1,H_2,\ldots,H_n$，则有

$$\sum_{i=1}^{n} CF(H_i,E)\leq 1$$

2. 证据的不确定性表示

证据的不确定性用可信度因子表示为$CF(E)$.

对于多个证据$E_1, E_2, \ldots, E_n$，其合取证据$E = E_1 \wedge E_2 \wedge \ldots \wedge E_n$的可信度因子为

$$CF(E) = \min\{CF(E_1), CF(E_2), \ldots, CF(E_n)\}$$

其析取证据$E = E_1 \vee E_2 \vee \ldots \vee E_n$的可信度因子为

$$CF(E) = \max\{CF(E_1), CF(E_2), \ldots, CF(E_n)\}$$

3. 可信度推理

结论H的可信度$CF(H)$可按下列公式计算：

$$CF(H) = CF(H, E) \cdot \max\{0, CF(E)\}$$

当证据某种程度为真时，结论的可信度为知识的可信度；当证据某种程度为假时，知识不能使用。即在推理中未考虑假证据对结论的影响。

P.S. 如果一个证据E_i题目中未提到观察到时，默认$CF(E_i) = 0$.

两条证据支持同一结论时的综合可信度：

$$\mathrm{CF}_{12}(H) = \begin{cases} \mathrm{CF}_1(H) + \mathrm{CF}_2(H) - \mathrm{CF}_1(H) \cdot \mathrm{CF}_2(H), & \mathrm{CF}_1(H) \geq 0, \mathrm{CF}_2(H) \geq 0 \\ \mathrm{CF}_1(H) + \mathrm{CF}_2(H) + \mathrm{CF}_1(H) \cdot \mathrm{CF}_2(H), & \mathrm{CF}_1(H) < 0, \mathrm{CF}_2(H) < 0 \\ \dfrac{\mathrm{CF}_1(H) + \mathrm{CF}_2(H)}{1 - \min\{|\mathrm{CF}_1(H)|, |\mathrm{CF}_2(H)|\}}, & \mathrm{CF}_1(H) \times \mathrm{CF}_2(H) < 0 \end{cases}$$

对于多条证据，可通过递归计算综合可信度。

- **设有如下一组不确定性推理的知识规则**

R1: IF E_1 AND E_2 THEN E_3 (1.0)

R2: IF E_3 OR E_4 THEN E_5 (0.8)

R3: IF E_5 THEN H (0.8)

R4: IF E_6 THEN H (0.9)

已知其中4个证据的可信度为 $\mathrm{CF}(E_1) = 0.7, \mathrm{CF}(E_2) = 0.5, \mathrm{CF}(E_4) = 0.4, \mathrm{CF}(E_6) = 0.8$

求结论的综合可信度 $\mathrm{CF}(H)$

- **解：1）求4条知识规则的可信度**

- **R1:**
$$\begin{aligned} \mathrm{CF}(E_3) &= \mathrm{CF}(R_1) \times \max\{0, \mathrm{CF}(E_1 \text{ AND } E_2)\} \\ &= \mathrm{CF}(R_1) \times \max\{0, \min\{\mathrm{CF}(E_1), \mathrm{CF}(E_2)\}\} \\ &= 1.0 \times \max\{0, \min\{0.7, 0.5\}\} \\ &= 1.0 \times \max\{0, 0.5\} \\ &= 1.0 \times 0.5 = 0.5 \end{aligned}$$

- **R2:**
$$\begin{aligned} \mathrm{CF}(E_5) &= \mathrm{CF}(R_2) \times \max\{0, \mathrm{CF}(E_3 \text{ OR } E_4)\} \\ &= \mathrm{CF}(R_2) \times \max\{0, \max\{\mathrm{CF}(E_3), \mathrm{CF}(E_4)\}\} \\ &= 0.8 \times \max\{0, \max\{0.5, 0.4\}\} \\ &= 0.8 \times \max\{0, 0.5\} \\ &= 0.8 \times 0.5 = 0.4 \end{aligned}$$

IF E THEN H $(\mathrm{CF}(H, E))$

$\mathrm{CF}(H) = \mathrm{CF}(H, E) \times \max\{0, \mathrm{CF}(E)\}$

“与”组合证据

$\mathrm{CF}(E) = \min\{\mathrm{CF}(E_1), \mathrm{CF}(E_2)\}$

“或”组合证据

$\mathrm{CF}(E) = \max\{\mathrm{CF}(E_1), \mathrm{CF}(E_2)\}$

- **R3：** $CF_1(H)=CF(H,E_5)\times\max\{0,CF(E_5)\}$
  $=0.8\times\max\{0,0.4\}$
  $=0.8\times0.4=0.32$

IF E THEN H (CF(H,E))
$CF(H)=CF(H,E)\cdot\max\{0,CF(E)\}$

- **R4：** $CF_2(H)=CF(H,E_6)\times\max\{0,CF(E_6)\}$
  $=0.9\times\max\{0,0.8\}$
  $=0.9\times0.8=0.72$

2）根据结论不确定性的合成公式，综合可信度计算为

$$CF(H)=CF_{12}(H)=CF_1(H)+CF_2(H)-CF_1(H)\times CF_2(H)$$
$$=0.32+0.72-0.32\times0.72$$
$$=0.8096$$

$CF_1(H)\geq0, CF_2(H)\geq0$

所以，结论H的综合可信度为 $CF(H)=0.8096$

4. 带阈值的可信度推理

带阈值限度的知识不确定性

- 在CF模型中引入阈值限度来限制不合乎要求的证据及相应的知识的运用
- 带阈值限度的知识不确定性表示：

前提假设（hypothesis）（结论）

IF E THEN H (CF(H,E), l)

证据（evidence） 可信度 阈值

- 知识可信度 $CF(H,E)$ 的取值范围：
  $0\leq CF(H,E)\leq1$
- $CF(H,E)=0\rightarrow p(H\mid E)=0$ 证据绝对否定结论
- $CF(H,E)=1\rightarrow p(H\mid E)=1$ 证据绝对支持结论

- 阈值 l 的取值范围：
  $0<l\leq1$
- 证据的可信度满足阈值规定知识适用的条件：
  $CF(E)\geq l$
  ➡ 知识规则才能够被使用

带阈值限度的结论不确定性合成算法

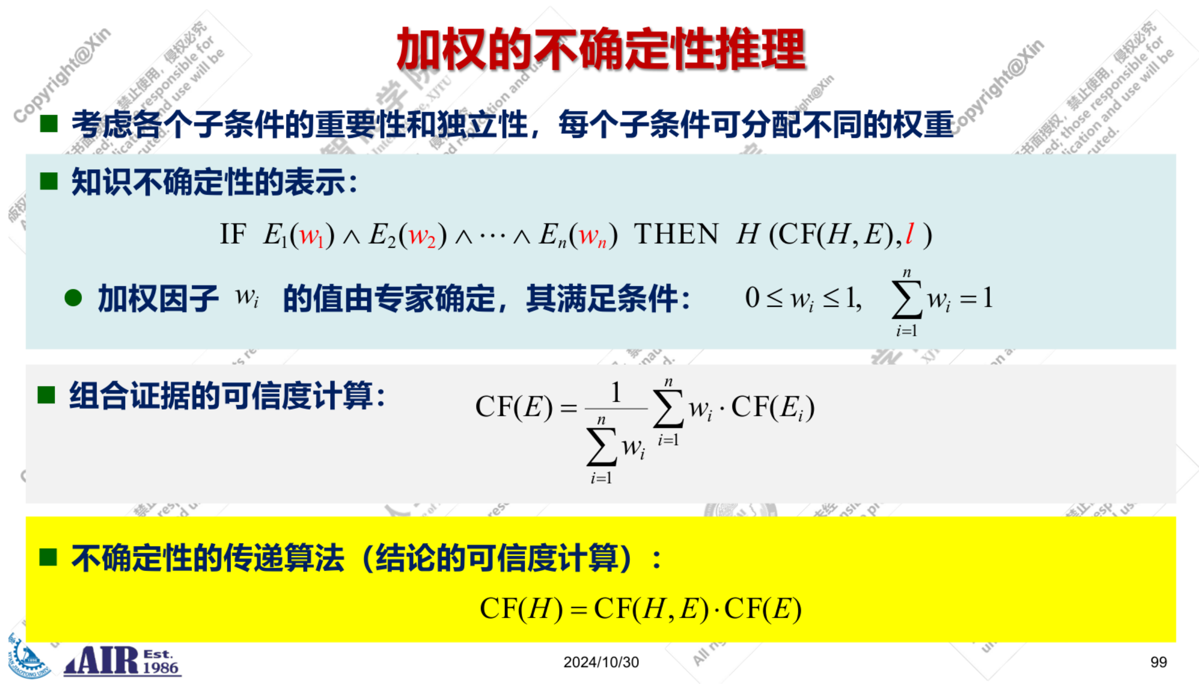
- 设多条不同阈值限度的知识规则都有相同的结论，即

IF E_1 THEN H (CF(H,E_1), l_1), $\cdots$, IF E_n THEN H (CF(H,E_n), l_n)

- 若每条知识规则都满足，即 $CF(E_i)\geq l_i$ ，则利用各自的结论可信度 $CF_i(H)$ ，可计算结论的综合可信度 $CF(H)$ ：

- 1）极大值法： $CF(H)=\max\{CF_1(H),CF_2(H),\cdots,CF_n(H)\}$
- 2）加权求和法： $CF(H)=\dfrac{1}{\sum_{i=1}^{n}CF(H,E_i)}\sum_{i=1}^{n}CF(H,E_i)\cdot CF(E_i)$
- 3）有限和法： $CF(H)=\min\left\{\sum_{i=1}^{n}CF_i(H),1\right\}$
- 4）递推法： $C_1=CF(H,E_1)\cdot CF(E_1)$
  $C_k=C_{k-1}+(1-C_{k-1})CF(H,E_k)\cdot CF(E_k)$

5. 加权的可信度推理



注意，存在阈值时，算出$CF(E)$后还要判断是否有$CF(E) \geq l$.

四、证据理论

1. 基本概念

识别框架W为变量x的所有可能取值组成的非空集合，其中的元素互不相容：

$$W = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$$

$m(A)$为A的基本概率赋值，表示证据对命题A的信任程度。

幂集2^W为识别框架W的所有子集组成的集合，包含2^n个元素：

$$2^W = \{A | A \subseteq W\}$$

基本概率分配函数为识别框架的幂集2^W中的每一个子集A分配一个值$m(A)$，满足：

$$\sum_{A \subseteq W} m(A) = 1, \quad m(\emptyset) = 0$$

2. 信任函数和似然函数

对于对应识别框架W子集的命题A，其信任函数$Bel(A)$定义为：

$$Bel(A) = \sum_{B \subseteq A} m(B)$$

其似然函数$Pl(A)$定义为：

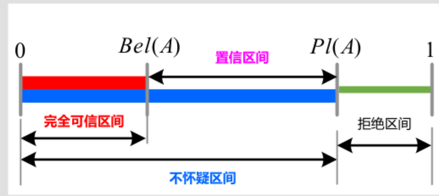
$$Pl(A) = 1 - Bel(\neg A) = \sum_{B \cap A \neq \emptyset} m(B)$$

信任函数和似然函数的关系：

$$0 \leq Bel(A) \leq Pl(A) \leq 1$$

$Bel(A)$表示置信下限，$Pl(A)$表示置信上限，$Pl(A)-Bel(A)$表示不确定性，$[Bel(A),Pl(A)]$表示置信区间。

- **在证据理论中，信任函数 $Bel(A)$ 和似然函数 $Pl(A)$ 综合表示证据的不确定性**
- **信任函数 $Bel(A)$ 和似然函数 $Pl(A)$ 分别表示对命题 A 信任程度的置信区间的下限和上限，即两元组 $[Bel(A),Pl(A)]$ 表示信任区间**
- **命题 A 的完全可信区间：$[0,Bel(A)]$**
- **命题“A 为真的”不可怀疑区间：$[0,Pl(A)]$**



$[Bel(A),Pl(A)]=[1,1]$ ：**表示命题A为真**

$[Bel(A),Pl(A)]=[0,0]$ ：**表示命题A为假**

$[Bel(A),Pl(A)]=[0,1]$ ➡ $Bel(\neg A)=1-Pl(A)=0$ ：**对A完全无知，对非A也不信任**

$[Bel(A),Pl(A)]=[0.5,0.5]$ ：**表示无法完全确定命题A是否为真**

3. 德普斯特证据组合

设识别框架W有P组概率分配函数$m_1,m_2,\dots,m_P$，则其组合的概率分配函数m为：

$$m(A)=(m_1\oplus\dots\oplus m_P)(A)=\frac{1}{K}\sum_{\cap A_i=A}\prod_{i,p}m_p(A_i)$$

其中，$K=1-\sum_{\cap A_i=\emptyset}\prod_{i,p}m_p(A_i)$ 为归一化因子。

对于两组概率分配函数m_1和m_2，其组合公式为：

$$m(A)=(m_1\oplus m_2)(A)=\frac{1}{K}\sum_{B\cap C=A}m_1(B)m_2(C)$$

其中，$K=1-\sum_{B\cap C=\emptyset}m_1(B)m_2(C)$.

$K=0$时表示所给证据矛盾。

$$W=\{b,w\}$$

$$m_1(\{b\},\{w\},\{b,w\},\varnothing)=(0.3,0.5,0.2,0) \qquad b:black$$

$$m_2(\{b\},\{w\},\{b,w\},\varnothing)=(0.6,0.3,0.1,0) \qquad w:white$$

- **求2组概率分配函数 m_1,m_2 的正交和**

解：根据正交和公式

$$K=1-\sum_{\cap A_i=\varnothing}\prod_{\substack{1\le i\le n\\1\le p\le P}}m_p(A_i)=1-\sum_{x\cap y=\varnothing}m_1(x)m_2(y)$$

$$=1-(m_1(\{b\})m_2(\{w\})+m_1(\{w\})m_2(\{b\}))=1-(0.3\times0.3+0.5\times0.6)=0.61$$

$$m(\{b\})=\frac{1}{K}\sum_{x\cap y=\{b\}}m_1(x)m_2(y)$$

$$=\left(m_1(\{b\})m_2(\{b\})+m_1(\{b\})m_2(\{b,w\})+m_1(\{b,w\})m_2(\{b\})\right)/0.61$$

$$=(0.3\times0.6+0.3\times0.1+0.6\times0.2)/0.61=0.33/0.61=0.5410$$

$$m(\{w\})=\frac{1}{K}\sum_{x\cap y=\{w\}} m_1(x)m_2(y)$$
$$=\left(m_1(\{w\})m_2(\{w\})+m_1(\{w\})m_2(\{b,w\})+m_1(\{b,w\})m_2(\{w\})\right)/0.61$$
$$=(0.5\times0.3+0.5\times0.1+0.3\times0.2)/0.61=0.26/0.61=0.4262$$

$$m(\{b,w\})=\frac{1}{K}\sum_{x\cap y=\{b,w\}} m_1(x)m_2(y)=\frac{1}{0.61}\left(m_1(\{b,w\})m_2(\{b,w\})\right)$$
$$=\frac{1}{0.61}(0.2\times0.1)=\frac{0.02}{0.61}=0.0328$$

所以，经过证据组合后得到的概率分配函数为：

$$m(\{b\},\{w\},\{b,w\},\varnothing)=(0.5410,0.4262,0.0328,0)$$

4. 证据理论推理

基本的证据理论推理过程包括以下步骤：

1. 确定识别框架W，写出幂集对应每个证据的基本概率赋值$m_p(A_i)$；
2. 使用德普斯特证据组合计算综合的概率分配函数$m(A)$；
3. 根据要求计算信任函数$Bel(A)$和似然函数$Pl(A)$.

一般来说默认$m(\emptyset)=0.$
如果结论有且仅有一个，则$|A|\neq 1$时$m(A)=0.$

- **一起谋杀案有3个犯罪嫌疑人分别为Peter、Paul和Mary，2个目击证人为W1和W2，目击证人分别指证犯罪嫌疑人，得到两个mass函数 m1 和 m2如下**

	Peter	Paul	Mary
证人W1：$m_1(\cdot)$	0.86	0.13	0.01
证人W2：$m_2(\cdot)$	0.02	0.90	0.08

在该案件中罪犯只能有1个，根据3个目击者的证据确定3个嫌疑人中的哪一个是犯人?

- **解：该问题的识别框架为：** $W=\{Peter,Paul,Marry\}$ **，其基本概率分配函数分别为** $m(\{Peter\}),m(\{Paul\}),m(\{Marry\})$

根据证据规则，将上述2个不同规则得到的概率分配函数组合，可得到

$$K=1-\sum_{\cap A_i=\varnothing}\prod_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le p\le P}} m_p(A_i)=1-\sum_{x\cap y=\varnothing} m_1(x)m_2(y)$$
$$=1-(m_1(\{Peter\})m_2(\{Paul\})+m_1(\{Peter\})m_2(\{Marry\})+m_1(\{Paul\})m_2(\{Marry\})$$
$$+m_2(\{Peter\})m_1(\{Paul\})+m_2(\{Peter\})m_1(\{Marry\})+m_2(\{Paul\})m_1(\{Marry\}))$$
$$=1-(0.86\times0.90+0.86\times0.08+0.13\times0.08+0.02\times0.13+0.02\times0.01+0.90\times0.01)$$
$$=1-0.865=0.135$$

$$m(\{Peter\})=\frac{1}{K}\sum_{x\cap y=\{Peter\}} m_1(x)m_2(y)=\frac{1}{K}\left(m_1(\{Peter\})m_2(\{Peter\})\right)$$
$$=0.86\times0.02/0.135=0.1274$$

$$m(\{Paul\}) = \frac{1}{K}\sum_{x\cap y=\{Paule\}} m_1(x)m_2(y) = \frac{1}{K} m_1(\{Paule\})m_2(\{Paul\})$$
$$= 0.13\times 0.90/0.135 = 0.8667$$
$$m(\{Marry\}) = \frac{1}{K}\sum_{x\cap y=\{Marry\}} m_1(x)m_2(y) = \frac{1}{K} m_1(\{Marry\})m_2(\{Marry\})$$
$$= 0.01\times 0.08/0.135 = 0.0059$$

- 根据得到的合成结果，可得到各假设嫌疑人的信任函数和似然函数如下

$$Bel(\{Peter\}) = m(\{Peter\}) = 0.1274,\quad Pl(\{Peter\}) = 1 - Bel(\{\neg Peter\}) = 0.1274$$
$$Bel(\{Paul\}) = m(\{Paul\}) = 0.8667,\quad Pl(\{Paul\}) = 1 - Bel(\{\neg Paul\}) = 0.8667$$
$$Bel(\{Marry\}) = m(\{Marry\}) = 0.0059,\quad Pl(\{Marry\}) = 1 - Bel(\{\neg Marry\}) = 0.0059$$

Paul：凶手　**根据两个目击证人指证的证据，Paul是凶手的概率最大**

5. Zadeh悖论

设识别框架$W = \{H_1, H_2, H_3\}$，有两组证据：

证据	H_1	H_2	H_3
$m_1(\cdot)$	0.99	0.00	0.01
$m_2(\cdot)$	0.00	0.99	0.01

使用德普斯特证据组合计算综合的概率分配函数m：

$$m(H_1) = 0,\quad m(H_2) = 0,\quad m(H_3) = 1$$

Zadeh悖论说明德普斯特证据组合有时无法解决证据严重或完全冲突的情况，且概率分配函数的微小变化可能会导致组合证据的概率分配函数产生较大变化。

近似推理（模糊逻辑）

一、模糊逻辑

1. 模糊集合和隶属度

模糊集A是定义在某一论域X上的集合，其每个元素$x \in X$都具有一个隶属度$\mu_A(x)$，表示x属于模糊集A的程度，取值范围为$[0, 1]$：

$$A = \{(x, \mu_A(x), x \in X)\}$$

模糊集A完全由其隶属函数$\mu_A(x)$唯一确定。当隶属度$\mu_A(x)$仅取0或1时，模糊集退化为普通集合。

模糊集可用**Zadeh表示法**表示：

模糊集合的表示：扎德（Zadeh）表示法

- 模糊集合的表示包含该集合的元素、该元素属于这个集合的隶属度
- 通常用“隶属度/元素”的形式表示模糊集合

● 1）当论域是离散且元素数目有限时，模糊集合的扎德表示为

$$A=\frac{m_A(x_1)}{x_1}+\frac{m_A(x_2)}{x_2}+\cdots+\frac{m_A(x_n)}{x_n}=\sum_{i=1}^{n}\frac{m_A(x_i)}{x_i}$$

或

$$A=m_A(x_1)/x_1+m_A(x_2)/x_2+\cdots+m_A(x_n)/x_n=\sum_{i=1}^{n}m_A(x_i)/x_i$$

$/,-$ ：表示分隔符，并不表示分数

$+,\sum$ ：表示模糊集合在论域上的整体，不表示求和运算

表示在离散论域上模糊集合的元素与其隶属度的对应关系

● 2）当论域是连续，或者元素数目无限时，模糊集合的扎德表示为

$$A=\int_{x\in X}\frac{m_A(x)}{x} \qquad 或 \qquad A=\int_{x\in X}m_A(x)/x$$

$\int$ ：表示论域中各元素与其隶属度对应关系的总控，不表示积分运算

2. 模糊集合的基本运算

模糊集合的运算实际上是逐点对隶属函数进行相应的运算。

设A和B为定义在同一论域X上的模糊集，则有：

- 相等：$A=B \iff \mu_A(x)=\mu_B(x), \forall x\in X$
- 包含：$A\subseteq B \iff \mu_A(x)\le\mu_B(x), \forall x\in X$
- 并集：$\mu_{A\cup B}(x)=\max\{\mu_A(x),\mu_B(x)\}$
- 交集：$\mu_{A\cap B}(x)=\min\{\mu_A(x),\mu_B(x)\}$
- 补集：$\mu_{\neg A}(x)=1-\mu_A(x)$

3. 模糊集合的代数运算

设A和B为定义在同一论域X上的模糊集，则有：

- 代数和：$\mu_{A+B}(x)=\mu_A(x)+\mu_B(x)-\mu_A(x)\cdot\mu_B(x)$
- 代数积：$\mu_{A\cdot B}(x)=\mu_A(x)\cdot\mu_B(x)$
- 有界和：$\mu_{A\oplus B}(x)=\min\{1,\mu_A(x)+\mu_B(x)\}$
- 有界积：$\mu_{A\otimes B}(x)=\max\{0,\mu_A(x)+\mu_B(x)-1\}$

P.S. 有时也用$\vee$表示取最大值运算，$\wedge$表示取最小值运算。

二、笛卡尔积与模糊关系

1. 笛卡尔积

对于两个非空集合X和Y，其笛卡尔积$X\times Y$定义为：

$$X\times Y=\{(x,y)|x\in X,y\in Y\}$$

2. 模糊关系

设两个离散模糊集合A, B的隶属函数分别为：

$$\mathbf{m}_A = [\mu_A(x_1), \mu_A(x_2), \ldots, \mu_A(x_m)]$$
$$\mathbf{m}_B = [\mu_B(y_1), \mu_B(y_2), \ldots, \mu_B(y_n)]$$

则其模糊关系$R = A \times B$的隶属函数为：

$$\mu_{A\times B} = \mathbf{m}_A^T \circ \mathbf{m}_B$$

元素的外积运算为取最小值运算：$x \circ y = \min\{x, y\} = x \wedge y$

■ **已知输入模糊集合 A 和输出模糊集合 B 分别为**

$$A = 1/a_1 + 0.8/a_2 + 0.5/a_3 + 0.2/a_4 + 0.0/a_4, \quad B = 0.7/b_1 + 1.0/b_2 + 0.6/b_3 + 0.0/b_4$$

求模糊集合 A 到 B 的模糊关系

■ **解：**

$$R = A \times B = \boldsymbol{m}_A^T \circ \boldsymbol{m}_B = \begin{bmatrix} 1.0 \\ 0.8 \\ 0.5 \\ 0.2 \\ 0.0 \end{bmatrix} \circ [0.7 \quad 1.0 \quad 0.6 \quad 0.0]$$

$$= \begin{bmatrix} 1.0\wedge 0.7 & 1.0\wedge 1.0 & 1.0\wedge 0.6 & 1.0\wedge 0.0 \\ 0.8\wedge 0.7 & 0.8\wedge 1.0 & 0.8\wedge 0.6 & 0.8\wedge 0.0 \\ 0.5\wedge 0.7 & 0.5\wedge 1.0 & 0.5\wedge 0.6 & 0.5\wedge 0.0 \\ 0.2\wedge 0.7 & 0.2\wedge 1.0 & 0.2\wedge 0.6 & 0.2\wedge 0.0 \\ 0.0\wedge 0.7 & 0.0\wedge 1.0 & 0.0\wedge 0.6 & 0.0\wedge 0.0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.7 & 1.0 & 0.6 & 0.0 \\ 0.7 & 0.8 & 0.6 & 0.0 \\ 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.0 \\ 0.2 & 0.2 & 0.2 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \end{bmatrix}$$

3. 模糊关系的合成

模糊关系的合成可以类比矩阵乘法，将加法替换为取最大值运算，乘法替换为取最小值运算：

$$X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}, Y = \{y_1, y_2, y_3\}, Z = \{z_1, z_2\}$$

$$R_1 = X \times Y = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.2 & 0.5 \\ 0.2 & 0.4 & 0.9 \\ 1.0 & 0.0 & 0.7 \end{bmatrix} \qquad R_2 = Y \times Z = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.9 \\ 0.7 & 0.8 \\ 0.0 & 1.0 \end{bmatrix}$$

求模糊关系 R_1, R_2 **的合成** S

■ **解：根据模糊关系的合成运算规则，可得**

先取最小再取最大

$$S = R_1 \circ R_2 = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.2 & 0.5 \\ 0.2 & 0.4 & 0.9 \\ 1.0 & 0.0 & 0.7 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 0.1 & 0.9 \\ 0.7 & 0.8 \\ 0.0 & 1.0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (0.8\wedge 0.1)\vee(0.2\wedge 0.7)\vee(0.5\wedge 0.0) & (0.8\wedge 0.9)\vee(0.2\wedge 0.8)\vee(0.5\wedge 1.0) \\ (0.2\wedge 0.1)\vee(0.4\wedge 0.7)\vee(0.9\wedge 0.0) & (0.2\wedge 0.9)\vee(0.4\wedge 0.8)\vee(0.9\wedge 1.0) \\ (0.1\wedge 0.1)\vee(0.0\wedge 0.7)\vee(0.9\wedge 0.0) & (1.0\wedge 0.9)\vee(0.0\wedge 0.8)\vee(0.7\wedge 1.0) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.1\vee 0.2\vee 0.0 & 0.8\vee 0.2\vee 0.5 \\ 0.1\vee 0.4\vee 0.0 & 0.2\vee 0.4\vee 0.9 \\ 0.1\vee 0.0\vee 0.0 & 0.9\vee 0.0\vee 0.7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.8 \\ 0.4 & 0.9 \\ 0.1 & 0.9 \end{bmatrix}$$

三、模糊推理和决策

1. 模糊推理

已知输入为A，输出为B；给出输入A'，输出B'可用模糊关系合成计算：

$$B' = A' \circ R, \quad \text{where} \enspace R = A \times B$$

2. 模糊决策

得到的输出B'是一个模糊向量，需要将其转化为确定值才能应用。常用的决策方法如下。

a. 最大隶属度法

选择隶属度最大的元素对应的值作为推理结果；若有多个最大值，取其平均值。

b. 重心法（加权平均决策法）

计算隶属函数的重心作为推理结果：

$$b' = \frac{\sum\limits_i b_i \cdot \mu(b_i)}{\sum\limits_i \mu(b_i)}$$

c. 中位数法

将模糊集的中位数，即论域上将隶属函数曲线与横坐标围成的面积平分的元素值作为推理结果。

2024年真题

1.（概率推理）小明母亲去家长会的概率是0.75，母亲不去条件下父亲去的概率是0.8，母亲去条件下父亲去的概率是0.25，求小明父亲去条件下母亲去的概率。

设A表示母亲去家长会，B表示父亲去家长会，则有：
$P(A) = 0.75$，$P(B|\neg A) = 0.8$，$P(B|A) = 0.25$
应用贝叶斯公式，有

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B|A)P(A) + P(B|\neg A)P(\neg A)} = \frac{0.25 \times 0.75}{0.25 \times 0.75 + 0.8 \times 0.25} \approx 0.4839$$

2.（多证据主观贝叶斯推理）$p(H) = 0.1$，LS分别为$15, 20, 24$，LN均为1，E_1, E_2, E_3均为必然发生，求$p(H|E_1, E_2, E_3)$。

由于E_1, E_2, E_3均为必然发生，则有

$$p(H|E_1) = \frac{LS_1 \cdot p(H)}{(LS_1 - 1) \cdot p(H) + 1} = 0.625$$

$$p(H|E_1, E_2) = \frac{LS_2 \cdot p(H|E_1)}{(LS_2 - 1) \cdot p(H|E_1) + 1} \approx 0.9709$$

$$p(H|E_1, E_2, E_3) = \frac{LS_3 \cdot p(E_1, E_2)}{(LS_3 - 1) \cdot p(E_1, E_2) + 1} \approx 0.9988$$

也可以先分别算出$O(H|E_i)$，再使用公式：

$$O(H|E_1, E_2, E_3) = \frac{O(H|E_1)}{O(H)} \frac{O(H|E_2)}{O(H)} \frac{O(H|E_3)}{O(H)} \cdot O(H)$$

最后将$O(H|E_1, E_2, E_3)$化为$p(H|E_1, E_2, E_3)$，结果相同。

3.（概率推理）黄绿出租车问题

参考PPT原题

4.（证据理论推理）一个星星的分类存在争议，经查阅A,B两篇资料，总结出以下mass函数。求三个种类的信任函数与似然函数，并说明该星最可能是哪种星。

	行星	矮行星	小行星
$m_1(\cdot)$	0.6	0.3	0.1
$m_2(\cdot)$	0.2	0.7	0.1

设识别框架W={行星, 矮行星, 小行星}，已知概率分配函数m_1和m_2，则根据德普斯特证据组合，有

$$K = 1 - \sum_{B \cap C = \emptyset} m_1(B) m_2(C) = 0.34$$

代入公式计算组合概率分配函数$m(A)$:

$$m(A) = (m_1 \oplus m_2)(A) = \frac{1}{K} \sum_{B \cap C = A} m_1(B) m_2(C)$$

解得

$$m(\text{行星}) \approx 0.353, \quad m(\text{矮行星}) \approx 0.618, \quad m(\text{小行星}) \approx 0.029$$

由于证据A, B只将mass分配给单一元素，因此信任函数和似然函数都等于概率分配函数:

$$\begin{aligned} Bel(\text{行星}) &= Pl(\text{行星}) \approx 0.353 \\ Bel(\text{矮行星}) &= Pl(\text{矮行星}) \approx 0.618 \\ Bel(\text{小行星}) &= Pl(\text{小行星}) \approx 0.029 \end{aligned}$$

矮行星的信任度和似然度最高，因此该星最可能是矮行星。