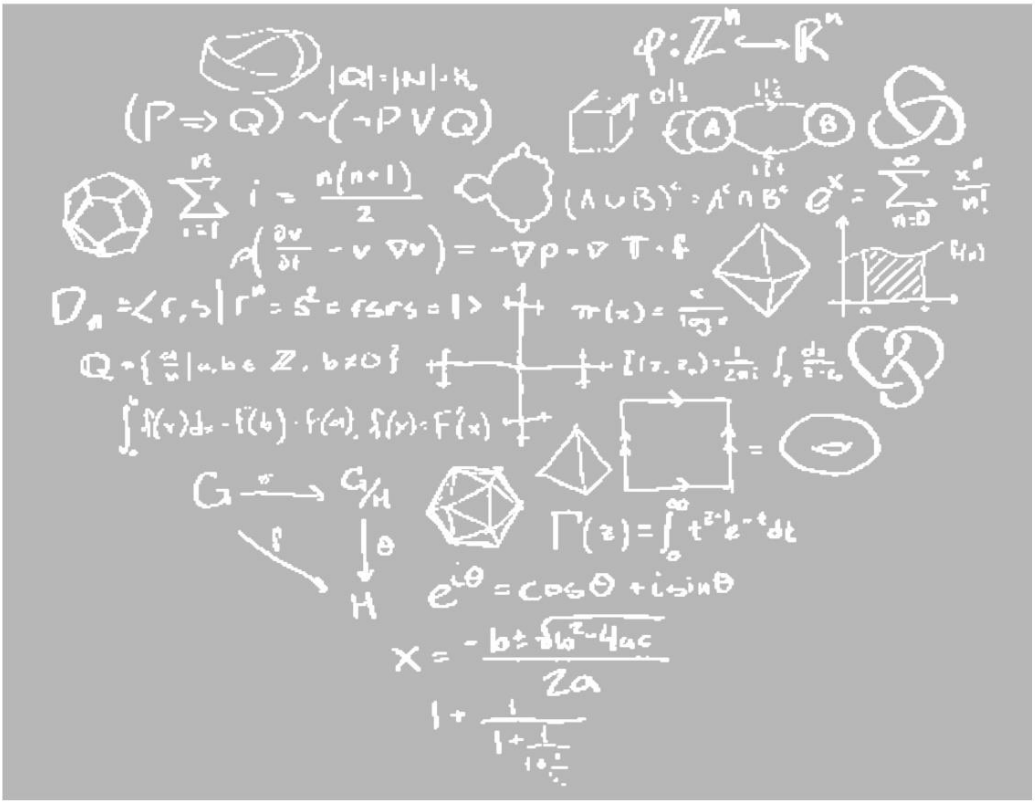
study

2019年第一学期版

# 线性代数

## 期中小助手



仲英学业辅导中心出品

学辅公众号

学粉群 5.1

# 线性代数小助手

**编写人员:**(根据编写章节顺序排名) 电气 87 赵寒亭, 电气 88 林秉烽, 自动化 82 齐立鹏, 统计 81 孔令杰, 电气 811 杨洲畅, 自动化 86 张亦斌, 自动化 83 谭维玮, 应数 81 刘克

**排版人员:** 数试 81 王辰扬

感谢学业辅导中心各位工作人员与志愿者的努力工作, 使本资料可以按时完工. 由于编者们的能力与精力限制, 以及本资料是仲英学业辅导中心首次采用 LaTeX 排版, 难免有错误之处. 如果同学们在本资料中发现错误, 请联系仲英学业辅导中心: **XJTUzyxuefu@163.com**, 我们将在修订时予以更正.

从第 3 周开始, **每晚 19:30-21:30**, 学辅志愿者在东 21 舍 118 学辅办公室值班, 当面为学弟学妹们答疑.

同时, 我们也有线上答疑平台——学粉群.

**18 级学粉群：646636875, 928740856;**

**19 级学粉群：902493560,756433480.**

期中考试与期末考试前, 我们还会举办考前讲座. 学辅还有新生专业交流会, 转专业交流会, 英语考试讲座等活动, 消息会在学粉群和公众号上公布, 欢迎同学们参与.

仲英书院学业辅导中心

2019 年 9 月 23 日

# 目录

# 第一章　行列式

## 1.1　重要性质

1. 行列式与它的转置行列式相等.
2. 互换行列式的两行 (列), 行列式变号.
3. 行列式某一行 (列) 所有元素的公因子可以提到行列式符号的外面.
4. 若行列式的某一行 (列) 的元素都是两数之和, 那么行列式等于两个行列式的和.
5. 行列式某一行 (列) 加上另外一行 (列) 的 k 倍, 行列式值不变.

## 1.2　典型行列式计算

### 1.2.1　对角行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & & & * \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & & & 0 \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ * & & & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\dots a_{nn}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & & & a_{1n} \\ & & a_{2(n-1)} & \\ & \dots & & \\ a_{n1} & & & * \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} * & & & a_{1n} \\ & & a_{2(n-1)} & \\ & \dots & & \\ a_{n1} & & & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2(n-1)}\dots a_{n1}$$

### 1.2.2 范德蒙行列式

此类型关键在于转化为对应形式.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdot & x_n & \\ x_n^2 & x_2^2 & x_3^2 & \cdot & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \cdot & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1\le i<j\le n}(x_j - x_i)$$

**例 1.2.1** 计算行列式

$$D_{n+1} = \begin{vmatrix} a^n & (a-1)^n & \cdots & (a-n)^n & \\ a^{n-1} & (a-1)^{n-1} & \cdots & (a-n)^{n-1} & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ a & a-1 & \cdots & a-n & \\ 1 & 1 & \cdots & & 1 \end{vmatrix}$$

**解** 从第 $n+1$ 行开始, 第 $n+1$ 行经过 $n$ 次相邻对换, 换到第一行; 第 $n$ 行经过 $n-1$ 次对换换到第 2 行;...; 经 $n+(n-1)+\cdots+1=\frac{n(n+1)}{2}$ 次行变换, 得

$$D_{n+1} = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a & a-1 & \cdots & a-n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a^{n-1} & (a-1)^{n-1} & \cdots & (a-n)^{n-1} \\ a^n & (a-1)^n & \cdots & (a-n)^n \end{vmatrix}$$

此行列式为范德蒙行列式, 可得

$$\begin{aligned} D_{n+1} =& (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \prod_{1\le i<j\le n+1}[(a-j+1)-(a-i+1)] \\ &= (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \prod_{1\le i<j\le n+1}(i-j) \\ &= (-1)^{1+2+\cdots+n} \prod_{1\le i<j\le n+1}(i-j) \\ &= \prod_{1\le i<j\le n+1}(j-i) \end{aligned}$$

**评注:** 此题和范德蒙行列式形式类似, 交换顺序即可求解.

**例 1.2.2** 求方程

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 4 & 15 \\ 1 & x & x^2 & x^3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 4 & 15 \\ 1 & x & x^2 & x^3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 0 & 2 & 5 & 12 \\ 1 & x & x^2 & x^3 \end{vmatrix} = 0$$

的根.

**解** 由题意知

$$左 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 1 & 4 & 15 \\ 1 & x & x^2 & x^3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 0 & 2 & 5 & 12 \\ 1 & x & x^2 & x^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & x & x^2 & x^3 \end{vmatrix} = 0$$

即 $(2-1)(3-1)(x-1)(3-2)(x-2)(x-3)=0$, 所以方程的根为 $x=1,2,3$.

**评注:** 该题应用重要性质 1,4 以及范德蒙行列式的计算.

**例 1.2.3** $(\star\star\star\star\star)$ 缺项范德蒙行列式的计算: 求行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix}$ 的值.

**解** 构造

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & y \\ a^2 & b^2 & c^2 & y^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix} &= (b-a)(c-b)(c-a)(y-a)(y-b)(y-c) \\ &= [-y^3+(a+b+c)y^2-(ab+ac+bc)y+abc](a-b)(a-c)(b-c) \\ &= (b-a)(c-b)(c-a)(a+b+c)y^2+\cdots \end{aligned}$$

根据行列式性质可知,$-\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix}$ 实际上是 $y^2$ 的系数, 所以

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = -(b-a)(c-b)(c-a)(a+b+c)$$

**评注:** 缺项范德蒙行列式的计算需要先补成范德蒙行列式的形式, 然后寻找对应展开项求解.

### 1.2.3 箭式行列式

($\star\star\star\star\star$) 箭型 (爪型) 行列式关键在于化为上三角或下三角行列式后计算.

$$\begin{vmatrix} x_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ b_2 & x_2 & 0 & \cdots & 0 \\ b_3 & 0 & x_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_n & 0 & 0 & \cdots & x_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 - \sum\limits_{k=2}^{n} \frac{a_k b_k}{x_k} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ b_2 & x_2 & 0 & \cdots & 0 \\ b_3 & 0 & x_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_n & 0 & 0 & \cdots & x_n \end{vmatrix} = \left( x_1 - \sum_{k=2}^{n} \frac{a_k b_k}{x_k} \right) \prod_{k=2}^{n} x_k$$

**例 1.2.4** 计算行列式

$$\begin{vmatrix} a_0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a_1 & & & \\ 1 & & a_2 & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ 1 & & & & a_n \end{vmatrix}$$

**解**

$$\begin{vmatrix} a_0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a_1 & & & \\ 1 & & a_2 & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ 1 & & & & a_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_0 - \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k} & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ & a_1 & & & \\ & & a_2 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & a_n \end{vmatrix} = \left( a_0 - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k} \right) \prod_{k=1}^{n} a_k$$

**例 1.2.5** 计算行列式

$$D = \begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+a_2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+a_3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+a_4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1+a_5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1+a_6 \end{vmatrix}$$

**解**

$$
\begin{aligned}
D &= \begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+a_2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+a_3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+a_4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1+a_5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1+a_6 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -a_1 & a_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -a_1 & 0 & a_3 & 0 & 0 & 0 \\ -a_1 & 0 & 0 & a_4 & 0 & 0 \\ -a_1 & 0 & 0 & 0 & a_5 & 0 \\ -a_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_6 \end{vmatrix} (\text{将第 1 行的 } -1 \text{ 倍加到下面每一行}) \\
&= \begin{vmatrix} 1+a_1+\frac{a_1}{a_2}+\cdots+\frac{a_1}{a_n} & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_6 \end{vmatrix} (\text{将每一列的 } \frac{a_1}{a_n} \text{ 加到第 1 列}) \\
&= \left(1+\sum_{i=1}^{6}\frac{1}{a_i}\right)\prod_{i=1}^{6} a_i
\end{aligned}
$$

### 1.2.4　各行 (列) 之和相等型

($\star\star\star\star\star$) 采取累加后提取公因子的方式处理.

**例 1.2.6** 计算行列式

$$
\begin{vmatrix} x+a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & x+a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & x+a_3 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & x+a_n \end{vmatrix}
$$

**解**

$$
\begin{vmatrix}
x+a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\
a_1 & x+a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\
a_1 & a_2 & x+a_3 & \cdots & a_n \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & x+a_n
\end{vmatrix}
$$
$$
=\begin{vmatrix}
x+a_1+a_2+\cdots+a_n & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\
x+a_1+a_2+\cdots+a_n & x+a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\
x+a_1+a_2+\cdots+a_n & a_2 & x+a_3 & \cdots & a_n \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
x+a_1+a_2+\cdots+a_n & a_2 & a_3 & \cdots & x+a_n
\end{vmatrix}
$$
$$
=\left(x+\sum_{k=1}^{n}a_k\right)\begin{vmatrix}
1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\
1 & x+a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\
1 & a_2 & x+a_3 & \cdots & a_n \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
1 & a_2 & a_3 & \cdots & x+a_n
\end{vmatrix}=\left(x+\sum_{k=1}^{n}a_k\right)\begin{vmatrix}
1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\
0 & x & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 0 & x & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & x
\end{vmatrix}
$$
$$
=\left(x+\sum_{k=1}^{n}a_k\right)x^{n-1}
$$

**评注:** 每一行的和都相同, 将各列统统加到第一列, 即可提取出来, 最终化为上三角或下三角行列式.

### 1.2.5 三对角行列式

($\star\star\star\star\star$) 采用递推关系式求解.

**例 1.2.7** 求下面行列式的值.

$$
D_n=\begin{vmatrix}
a+b & ab & & & \\
1 & a+b & ab & & \\
 & 1 & a+b & \ddots & \\
 & & \ddots & \ddots & ab \\
 & & & 1 & a+b
\end{vmatrix}
$$

**解** 按第 1 行展开:

$$
D_n=(a+b)D_{n-1}-abD_{n-2}
$$

这是高中常见的二阶线性递推, 可以直接求解. 也可变形为

$$D_n - aD_{n-1} = b(D_{n-1} - aD_{n-2})$$

由于初始条件

$$\begin{cases} D_1 = a + b \\ D_2 = (a+b)^2 - ab = a^2 + ab + b^2 \end{cases}$$

从而

$$\frac{D_n - aD_{n-1}}{b^n} = \frac{D_{n-1} - aD_{n-2}}{b^{n-1}} = \frac{D_2 - aD_1}{b^2} = 1$$

所以

$$D_n - aD_{n-1} = b^n$$

由对称性

$$D_n - bD_{n-1} = a^n$$

联立并结合初始条件解得

$$D_n = \sum_{k=0}^{n} a^k b^{n-k} = \begin{cases} na^n, & a = b \\ \frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a-b}, & a \neq b \end{cases}$$

**例 1.2.8** 计算行列式

$$D_5 = \begin{vmatrix} 1-a & a & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1-a & a & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1-a & a & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1-a & a \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1-a \end{vmatrix}$$

**解**　设 $D_5$ 左上角的 $k$ 阶子式为 $D_k$, 由于 $D_k$ 形式相似, 故先将 $2\sim 5$ 行加到第 1 行再按第 1 行展开可得

$$
\begin{aligned}
D_5 &= \begin{vmatrix} -a & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1-a & a & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1-a & a & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1-a & a \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1-a \end{vmatrix} \\
&= -a\cdot(-1)^{1+1}D_4 + (-1)^{1+5}\begin{vmatrix} -1 & 1-a & a & 0 \\ 0 & -1 & 1-a & a \\ 0 & 0 & -1 & 1-a \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} \\
&= -D_4 + 1 \\
&= \cdots (\text{逐次利用递推公式}) \\
&= 1 - a + a^2 - a^3 + a^4 - a^5
\end{aligned}
$$

### 1.2.6　两线型行列式

($\star\star\star$) 直接展开法或数学归纳法.

**例 1.2.9** 证明

$$
D_{2n} = \begin{vmatrix} a_n & & & & & b_n \\ & \ddots & & & \vdots & \\ & & a_1 & b_1 & & \\ & & c_1 & d_1 & & \\ & \vdots & & & \ddots & \\ c_n & & & & & d_n \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^{n}(a_i d_i - b_i c_i)
$$

**解**　当 $n=2$ 时

$$
\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{vmatrix} = a_1 d_1 - b_1 c_1
$$

因而原命题成立.

假设当 $n=k$ 时原命题成立, 即

$$D_{2k}=\begin{vmatrix} a_k & & & & & b_k \\ & \ddots & & & \vdots & \\ & & a_1 & b_1 & & \\ & & c_1 & d_1 & & \\ & \vdots & & & \ddots & \\ c_k & & & & & d_k \end{vmatrix}=\prod_{i=1}^{k}(a_id_i-b_ic_i)$$

则 $n=k+1$ 时

$$\begin{aligned} D_{2(k+1)}=&\begin{vmatrix} a_{k+1} & & & & & b_{k+1} \\ & \ddots & & & \vdots & \\ & & a_1 & b_1 & & \\ & & c_1 & d_1 & & \\ & \vdots & & & \ddots & \\ c_{k+1} & & & & & d_{k+1} \end{vmatrix} \\ =&a_{k+1}d_{k+1}D_{2k}-b_{k+1}c_{k+1}D_{2k}(\text{按第一行展开}) \\ =&D_{2k}(a_{k+1}d_{k+1}-b_{k+1}c_{k+1}) \\ =&\prod_{i=1}^{k+1}(a_id_i-b_ic_i) \end{aligned}$$

由数学归纳法原理, 原命题成立.

**评注:** 出现无穷个数, 且形式有规律, 则可以考虑采用数学归纳法.

### 1.2.7 一类特殊行列式的计算

($\star\star\star\star\star$) 特征: 含较多某元素或相邻行 (列) 差相同

**例 1.2.10** 计算行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & 2 & 3 & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2 & 2 & 2 & \cdot & n \end{vmatrix}$$

**解**　先给其它列减去第 1 列, 再按第二列展开:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & 2 & 3 & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2 & 2 & 2 & \cdot & n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 2 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2 & 0 & 0 & \cdots & n-2 \end{vmatrix} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 2 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2 & 0 & \cdots & n-2 \end{vmatrix} = -2(n-2)!$$

**评注:**　每行含有较多的 2, 因此考虑用第一行 (列) 去消其他行列中的 2, 使其化为 0, 进而化为上三角或下三角求解.

**例 1.2.11**　计算 $n$ 阶矩阵 $\boldsymbol{D}_n = (a_{ij})_n$ 的行列式, 其中 $a_{ij} = |i-j|$.

**解**　由 $\boldsymbol{D}_n$ 定义知

$$\begin{aligned} |\boldsymbol{D}_n| &= \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & n-3 & n-2 \\ 2 & 1 & 0 & \cdots & n-4 & n-3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ n-2 & n-3 & n-4 & \cdots & 0 & 1 \\ n-1 & n-2 & n-3 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \\ 1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \\ 1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 2 & 0 \end{vmatrix} \\ &= (-1)^{n-1+n} \cdot 2(-1)^{n-2+n-1} \cdot 2 \cdots (-1)^{2+3} \cdot 2 \begin{vmatrix} 0 & n-1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \\ &= (-1)^{n-1}(n-1) \cdot 2^{n-2} \end{aligned}$$

第一个等号成立的原因是给行列式每一行减其上面的一行, 第二个等号成立的原因时给行列式每一行减其上面的一行, 第三个等号成立的原因时依次按最后一行展开 $n-2$ 次.

**评注:**　本题的关键是观察 $|\boldsymbol{D}_n|$ 得到相邻两行差为一并作这个差, 然后对新的行列式再次逐行做差消去其中大多数项, 形成可以行展开计算的形式.

### 1.2.8　抽象行列式的计算

($\star\star\star\star\star$) 关键: 灵活运用行列式的加减法. 这种题一般看似难度大, 实则只要多分析, 多尝试, 很快就能找到突破口.

**例 1.2.12** 已知 $\boldsymbol{\delta}_1,\boldsymbol{\delta}_2,\boldsymbol{\delta}_3,\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}$ 均为 4 维列向量, 且 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\delta}_1,\boldsymbol{\delta}_2,\boldsymbol{\delta}_3,\boldsymbol{\beta})$,$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\delta}_1,\boldsymbol{\delta}_2,\boldsymbol{\delta}_3,\boldsymbol{\gamma})$. 若 $|\boldsymbol{A}|=3$,$|\boldsymbol{B}|=2$, 求 $|\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{B}|$.

**解**　由 $\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{B}=(3\boldsymbol{\delta}_1,3\boldsymbol{\delta}_2,3\boldsymbol{\delta}_3,\boldsymbol{\beta}+2\boldsymbol{\gamma})$ 知

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{B}|&=|3\boldsymbol{\delta}_1,3\boldsymbol{\delta}_2,3\boldsymbol{\delta}_3,\boldsymbol{\beta}+2\boldsymbol{\gamma}|=27|\boldsymbol{\delta}_1,\boldsymbol{\delta}_2,\boldsymbol{\delta}_3,\boldsymbol{\beta}+2\boldsymbol{\gamma}|\\&=27(|\boldsymbol{\delta}_1,\boldsymbol{\delta}_2,\boldsymbol{\delta}_3,\boldsymbol{\beta}|+2|\boldsymbol{\delta}_1,\boldsymbol{\delta}_2,\boldsymbol{\delta}_3,\boldsymbol{\gamma}|)=27(|\boldsymbol{A}|+2|\boldsymbol{B}|)\\&=189\end{aligned}$$

## 1.3　克莱姆法则

**克莱姆 (Cramer) 法则**　对于 $n$ 个未知数,$n$ 个方程的线性方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2\\\cdots\\a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n\end{cases}$$

如果它的系数行列式

$$D=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}\neq 0$$

则方程组有唯一解

$$x_1=\frac{D_1}{D},x_2=\frac{D_2}{D},\ldots,x_n=\frac{D_n}{D}$$

其中 $D_j$ 是将 $D$ 的第 $j$ 列元素依次用方程右端的常数项替换所得的 $n$ 阶行列式.

将克莱姆法则用于齐次线性方程组可得:

**推论**　$n$ 个未知数,$n$ 个方程的齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases}$$

只有零解的充分必要条件它的系数行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$$

**例 1.3.1** 解线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 17 \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 13 \end{cases}$$

**解**　系数行列式

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -5 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 28 \neq 0$$

所以方程有唯一解. 由

$$D_1 = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 17 & 2 & -5 \\ 13 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 56, D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 17 & -5 \\ 1 & 13 & -2 \end{vmatrix} = 84, D_3 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 17 \\ 1 & 3 & 13 \end{vmatrix} = -28$$

得方程组的唯一解为

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = 2, x_2 = \frac{D_2}{D} = 3, x_3 = \frac{D_3}{D} = -1$$

**评注:**　克莱姆解方程要手开行列式, 计算量巨大, 一般具体方程能不使用就不适用 (除非明确要求).

**例 1.3.2** 当 $\lambda$ 取何值时, 齐次线性方程组 $\begin{cases} \lambda x + y + z = 0 \\ x + \lambda y + z = 0 \\ x + y + \lambda z = 0 \end{cases}$ 有非零解?

**解** 所给齐次线性方程组有非零解等价于系数行列式 $D=0$, 而

$$D=\begin{vmatrix}\lambda & 1 & 1\\ 1 & \lambda & 1\\ 1 & 1 & \lambda\end{vmatrix}=(\lambda+2)(\lambda-1)^2=0$$

得 $\lambda=1,-2$. 验证可得 $\lambda=1,-2$ 时原方程分别有非零解.

## 1.4 课本上一些需要关注的习题

**例 1.4.1** 计算 $n$ 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix}0 & \cdots & 0 & 1 & 0\\ 0 & \cdots & 2 & 0 & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots\\ n-1 & \cdots & 0 & 0 & 0\\ 0 & \cdots & 0 & 0 & n\end{vmatrix}$$

**解** 按第 $n$ 行展开, 有

$$D=(-1)^{n+n}n\begin{vmatrix}0 & \cdots & 0 & 1\\ 0 & \cdots & 2 & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ n-1 & \cdots & 0 & 0\end{vmatrix}=n\cdot(-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}(n-1)!=(-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}n!$$

**评注:** 观察可知按最后一行展开可化为熟悉的对角行列式. 也可也通过行 (列) 胡奥换化为对角行列式计算.

**例 1.4.2** 计算 $n$ 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix}x & y & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & x & y & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & y\\ y & 0 & 0 & \cdots & 0 & x\end{vmatrix}$$

**解** 按第 1 列展开, 有

$$D=x\begin{vmatrix}x & y & \cdots & 0 & 0\\ 0 & x & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & x\end{vmatrix}+(-1)^{n+1}y\begin{vmatrix}y & 0 & \cdots & 0 & 0\\ x & y & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & x & y\end{vmatrix}=x^n-(-y)^n$$

**评注:** 该行列式为两线型行列式, 可采取前面介绍的直接展开法或数学归纳法处理.

**例 1.4.3** 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix}1+a_1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & 1+a_2 & 1 & \cdots & 1\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1+a_n\end{vmatrix}, a_1a_2\cdots a_n\neq 0$$

**解** 第 $2,3,\ldots,n$ 行分别减去第 1 行, 就转化为了爪形行列式, 可以直接计算得

$$D=\begin{vmatrix}1+a_1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ -a_1 & a_2 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ -a_1 & 0 & 0 & \cdots & a_n\end{vmatrix}=\left(1+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}\right)\prod_{k=1}^{n}a_k$$

**评注:** 该题含较多的 1, 故考虑将较多 1 化为 0, 成为箭型行列式, 再处理即可. 此题是一种比较常见的结构, 多见于期中考试 (线代高代都出过), 务必眼熟. 此题的另一种做法是加边法: 最上方加一行 (全 0), 最右方加一行 (全 1), 变成

$$\begin{vmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 1 & 1+a_1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & 1 & 1+a_2 & 1 & \cdots & 1\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1+a_n\end{vmatrix}$$

然后行变换消成爪形行列式. 读者可以自行尝试.

**例 1.4.4** 计算行列式

$$D_n=\begin{vmatrix}\lambda-a_1^2 & -a_1a_2 & \cdots & -a_1a_n\\ -a_2a_1 & \lambda-a_2^2 & \cdots & -a_2a_n\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ -a_na_1 & -a_na_2 & \cdots & \lambda-a_n^2\end{vmatrix}$$

**解**　第 $i(2 \le i \le n)$ 行加上第 1 行的 $-\frac{a_i}{a_1}$ 倍, 第 $j(2 \le j \le n)$ 列的 $-\frac{a_j}{a_1}$ 倍加到第 1 行得

$$\begin{aligned} D_n &= \begin{vmatrix} \lambda - a_1^2 & -a_1a_2 & \cdots & -a_1a_n \\ -\frac{a_2}{a_1}\lambda & \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\frac{a_n}{a_1}\lambda & 0 & \cdots & \lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda - \sum\limits_{i=1}^{n} a_i^2 & -a_1a_2 & \cdots & -a_1a_n \\ 0 & \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{vmatrix} \\ &= \lambda^{n-1}\left(\lambda - \sum_{i=1}^{n} a_i^2\right) \end{aligned}$$

**评注:**　该题需要特别注意, 后面章节会遇到. 此题也可用加边法解决, 读者可自行尝试.

# 第二章　矩阵

## 2.1　知识点剖析与总结

1. 一个一阶方阵 $[a]$ 也可以写作 $a$, 与一个数不予区分, 可以视为等同.

2. 若 $\boldsymbol{\alpha}$ 为行向量, 则 $\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^T$ 为一个数, 即行列向量相乘得一个数;$\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{\alpha}$ 为一个秩为零或一的方阵, 秩为零还是一取决于 $\boldsymbol{\alpha}$ 是否为零向量.

3. $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^T$ 主对角线元素 $\langle \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^T\rangle_{ii} = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik}^2$

4. $\boldsymbol{A}^{-1} + \boldsymbol{B}^{-1} \neq (\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{-1}$, 但二者可建立联系:

$$(\boldsymbol{A}^{-1} + \boldsymbol{B}^{-1})^{-1} = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{A}$$

(证明见本章例 10)

5. 逆矩阵的定义即为相乘等于单位阵, 欲证 $\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{B}$, 只需证 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{I}$; 欲证 $\boldsymbol{A}$ 可逆, 找出 $\boldsymbol{B}$ 使得 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{I}$ 即可, 一个矩阵的逆矩阵是唯一的, 且只有方阵才有逆矩阵.

6. $r(\boldsymbol{A}^*) = \begin{cases} n, & r(\boldsymbol{A}) = n \\ 1, & r(\boldsymbol{A}) = n-1 \\ 0 & r(\boldsymbol{A}) < n-1 \end{cases}$(重要结论, 课本 p165 T5)

7. $(\boldsymbol{AB})^T = \boldsymbol{B}^T\boldsymbol{A}^T$

8. 反对称矩阵: 若方阵 $\boldsymbol{B} = (b_{ij})_{n\times n}$ 满足 $\boldsymbol{B}^T = -\boldsymbol{B}$, 或 $b_{ij} = -b_{ji}$ 则称 $\boldsymbol{B}$ 为反对称矩阵

   **注:** 任一 n 阶方阵 A 都可以表示为对称矩阵与反对称矩阵之和.

$$\boldsymbol{A} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A^T}) + \frac{1}{2}(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{A^T})$$

9. 设 $n$ 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆, 则 $(\boldsymbol{A}^*)^* = [\det(\boldsymbol{A})]^{n-2}\boldsymbol{A}$

10. 同型矩阵 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$ 与 $\boldsymbol{B}_{m\times n}$ 等价 $\Longleftrightarrow r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{B})$(课本 p77 T5)
11. 满秩方阵乘矩阵后, 矩阵的秩不改变
12. 转置等于逆的矩阵为正交矩阵, 正交矩阵的行列式一定是 1, 每个元素的代数余子式都是自己, 正交矩阵的逆, 转置及伴随阵为同一个矩阵, 且均为正交矩阵
13. 实对称矩阵的逆也是实对称矩阵

# 2.2　精选例题

## 2.2.1　矩阵乘法与乘幂

**例 2.2.1** 设 $\boldsymbol{\alpha}\in\mathbb{R}^3$, 若 $\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^T=\begin{bmatrix}1&-1&1\\-1&1&-1\\1&-1&1\end{bmatrix}$, 求 $\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{\alpha}$.

**答案**　3.

**解**　法 I. 设 $\boldsymbol{\alpha}=(x,y,z)^T$, 则

$$\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^T=\begin{bmatrix}x^2&xy&xz\\xy&y^2&yz\\xz&yz&z^2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&-1&1\\-1&1&-1\\1&-1&1\end{bmatrix}$$

所以

$$\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{\alpha}=x^2+y^2+z^2=3$$

法 II. 由 $\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^T=\begin{bmatrix}1&-1&1\\-1&1&-1\\1&-1&1\end{bmatrix}$ 知

$$\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^T=\begin{bmatrix}3&-3&3\\-3&3&-3\\3&-3&3\end{bmatrix}=3\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^T$$

又 $\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{\alpha}$ 是一个数, 因而 $\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^T=(bm\alpha^T\boldsymbol{\alpha})\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^T$, 所以 $\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{\alpha}=x^2+y^2+z^2=3$.

法 III. 直接利用结论, 若 $\boldsymbol{\alpha}$ 为行向量, 则 $\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{\alpha}$ 为一个数, 其值为矩阵 $\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^T$ 主对角线元素之和. 故直接将所给矩阵主对角线元素相加的值为 3.

**注:** 行列向量的乘积是矩阵运算中经常涉及到的内容, 法 I 其原理, 法 II 是常见的处理方法, 法 III 是结论, 当在解题过程中碰到有关行列向量乘积的问题时应试着往这方面想.

**例 2.2.2** ($\star\star\star\star\star$) 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m \times n$ 实矩阵, 证明

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^T = \boldsymbol{O} \Longleftrightarrow \boldsymbol{A} = \boldsymbol{O}$$

**解** "$\Leftarrow$" 显然."$\Rightarrow$": 由于对任意 $i = 1, 2, \ldots, n$,

$$\langle \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^T \rangle_{ii} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}^2 = 0$$

所以 $a_{ik} = 0, \forall k = 1, 2, \ldots, n$, 于是任意 $i$ 行均为零行, 于是 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{O}$.

**评注:** 此题相当于找到一行数的平方和为零问题, 从而证明各个元素都是零.

**例 2.2.3** *(课本 P46:T10)*

*(1)* 设 $\boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$, 求 $\boldsymbol{A}^n - 2\boldsymbol{A}^{n-1} (n = 2, 3, \ldots)$;

*(2)* 设 $\boldsymbol{\alpha} = (1, 2, 3)$,$\boldsymbol{\beta} = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3})$,$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{\beta}$ 求 $\boldsymbol{A^n} (n = 2, 3, \ldots)$.

**答案** (1)$\boldsymbol{O}$; (2)$3^{n-1} \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 2 & 1 & \frac{2}{3} \\ 3 & \frac{3}{2} & 1 \end{vmatrix}$

**分析** 见课本 P311, 第二问抓住 $\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\alpha}^T$ 是一个数.

**例 2.2.4** 设 $\boldsymbol{a} = (1, 2, 3), \boldsymbol{b} = (1, -1, 1)$, 求 $(\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{b})^{2017}$.

**解** 显然不能直接硬算, 应利用矩阵运算规则先做简化处理, 利用 $\boldsymbol{b}\boldsymbol{a}^T$ 是一个常数 2 合并中间项可得

$$(\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{b})^{2017} = 2^{2016}\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{b} = 2^{2016} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 3 & -3 & 3 \end{vmatrix}$$

求矩阵幂的方法

1. 归纳猜想, 计算几次后发现规律, 再用归纳法严格证明

2. 若能分解成列行向量相乘的形式, 则利用结合律提出行列向量相乘的部分

3. 若能分解成 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$($\boldsymbol{A}$ 为对角阵), 则中间的 $\boldsymbol{PP}^{-1}$ 部分全部抵消, 转换成对角阵的幂, 再乘以两端的 $\boldsymbol{P}, \boldsymbol{P}^{-1}$, 这种方法是非常常见且有效的一种方法
4. 分块对角阵求幂
5. 若 $\boldsymbol{A}$ 可分解为 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{F}+\boldsymbol{G}, \boldsymbol{F}, \boldsymbol{G}$ 的幂便于计算, 且满足 $\boldsymbol{FG}=\boldsymbol{GF}$, 则可利用二项式定理计算 $\boldsymbol{A}^n$.

### 2.2.2 方阵的行列式

**例 2.2.5** 设 $\boldsymbol{A}$ 为三阶矩阵,$|\boldsymbol{A}|=-2$, 将 $\boldsymbol{A}$ 按列分块为 $\boldsymbol{A}=(a_1,a_2,a_3)$, 其中 $a_j(j=1,2,3)$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的第 $j$ 列, 令 $\boldsymbol{B}=(a_3-2a_1,3a_2,a_1)$, 求 $|B|$.

**答案:** 6

**解** 法 I: 将 |B| 拆成两个行列式之和, 得

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{B}|&=|(a_3-2a_1,3a_2,a_1)|=|(a_3,3a_2,a_1)|-|(2a_1,3a_2,a_1)|\\&=3|(a_3,a_2,a_1)|-0=-3|(a_1,a_2,a_3)|=-3|\boldsymbol{A}|=6\end{aligned}$$

法 II:

$$|\boldsymbol{B}|\xrightarrow{c_1+2c_3}|(a_3,3a_2,a_1)|=-3|(a_1,a_2,a_3)|=-3|\boldsymbol{A}|=6$$

法 III:

$$|\boldsymbol{B}|=\left|(a_1,a_2,a_3)\begin{bmatrix}-2&0&1\\0&3&0\\1&0&0\end{bmatrix}\right|=\begin{vmatrix}-2&0&1\\0&3&0\\1&0&0\end{vmatrix}|\boldsymbol{A}|=-3|\boldsymbol{A}|=6$$

**评注:** 上述方法中方法 I 经常用到, 方法 II 与方法 III 等价, 方法 III 应重点掌握.

**例 2.2.6** 设 4 阶方阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\alpha\\2\gamma_2\\3\gamma_3\\4\gamma_4\end{bmatrix}, \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}\beta\\\gamma_2\\\gamma_3\\\gamma_4\end{bmatrix}$, 其中 $\alpha,\beta,\gamma_2,\gamma_3,\gamma_4\in\mathbb{R}^4$. 已知 $|\boldsymbol{A}|=8, |\boldsymbol{B}|=1$, 求 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$.

**解**

$$|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}|=\begin{vmatrix}\alpha-\beta\\\gamma_2\\2\gamma_3\\3\gamma_4\end{vmatrix}=6\begin{vmatrix}\alpha-\beta\\\gamma_2\\\gamma_3\\\gamma_4\end{vmatrix}=6\begin{vmatrix}\alpha\\\gamma_2\\\gamma_3\\\gamma_4\end{vmatrix}-6\begin{vmatrix}\beta\\\gamma_2\\\gamma_3\\\gamma_4\end{vmatrix}=\frac{1}{4}\begin{vmatrix}\alpha\\2\gamma_2\\3\gamma_3\\4\gamma_4\end{vmatrix}-6\begin{vmatrix}\beta\\\gamma_2\\\gamma_3\\\gamma_4\end{vmatrix}=\frac{1}{4}|\boldsymbol{A}|-6|\boldsymbol{B}|=-4$$

单纯的矩阵运算或是行列式并不麻烦, 题型花样也不多, 但加上逆阵后, 特别是套上正交矩阵的马甲后题目就非常灵活了, 下面一道题是 13 年的一道期中试题 (并不是压轴题), 大家可以感受一下.

**例 2.2.7** 设 $\boldsymbol{A}$ 为三阶方阵,$\det(\boldsymbol{A})=0.5$, 求 $\det((2\boldsymbol{A})^{-1}–5\boldsymbol{A}^{*})$

**答案**　-16

**分析**　此题要把握好伴随阵和逆矩阵的关系以及逆矩阵的行列式与其本身行列式的关系. 先通过 $\boldsymbol{A}^{*}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A-I}$ , 所求变成了

$$\det(0.5\boldsymbol{A}^{-1}–2.5\boldsymbol{A}^{-1})=(-2)^3\det(\boldsymbol{A}^{-1})=-8\times 2=-16$$

**例 2.2.8** 设实矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均为 $n$ 阶正交矩阵 *(即 $\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{A}^{T}$)*, 满足 $|\boldsymbol{A}|+|\boldsymbol{B}|=0$, 求 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|$ 的值.

**答案**　0

**解**　首先要注意的是 $|A|+|B|$ 与 $|A+B|$ 并不一定相等.

题目给了一个很弱的条件:$|A|+|B|=0$, 但同时给了一个很强的条件:$A,B$ 都是正交阵, 我们不妨从这里开始研究:

$A$ 是正交阵, 则 $AA^T=I$ , 所以 $|A|^2=1$, 所以 $|A|=\pm 1$. 同理 $|B|=\pm 1$. 再看题目条件,$|A|+|B|=0$, 则可知 $|A|,|B|$ 异号, 一定是一个 1 一个 $-1$, 即

$$|A||B|=-1$$

已知条件已经发掘完全, 剩下的就是建立已知与所求之间联系.

由 $(A^{-1}+B^{-1})^{-1}=A(A+B)^{-1}B$(课本 P54: T11), 得

$$A+B=A(A^{-1}+B^{-1})B=A(A^T+B^T)B$$

两边同时取行列式得:

$$|A+B|=|A||B||A^T+B^T|=|A||B||A+B|$$

所以 $|A+B|=-|A+B|$, 即 $|A+B|=0$.

## 2.3　伴随与逆矩阵

**例 2.3.1** 设方阵 $A$ 满足 $A^3-A^2+2A-E=O$, 证明 $A$ 及 $E-A$ 均可逆, 并求 $A^{-1}$ 和 $(E-A)^{-1}$.

**解**　对题目所给式子做恒等变形, 因式分解, 即可确定.

由 $A^3-A^2+2A-E=O$, 得:$A(A^2-A+2E)=E$, 故 $A$ 可逆, 且 $A^{-1}=A^2-A+2E$;

由 $A^3-A^2+2A-E=O$, 得 $A^3-A^2+2A-2E=-E$, 整理后得 $(E-A)(A^2+2E)=E$; 所以 $E-A$ 可逆, 且 $(E-A)^{-1}=A^2+2E$.

**例 2.3.2** 设 $A,B,A+B$ 均为可逆方阵, 证明

*1.*$A^{-1}+B^{-1}$ 可逆, 且 $(A^{-1}+B^{-1})^{-1}=A(A+B)^{-1}B$;

*2.*$A(A+B)^{-1}B=B(A+B)^{-1}A$.

**解**　1. 由题意

$$\begin{aligned}&(A^{-1}+B^{-1})^{-1}=A(A+B)^{-1}B\\ \Longleftrightarrow&((A^{-1}+B^{-1})^{-1})^{-1}=(A(A+B)^{-1}B)^{-1}\\ \Longleftrightarrow&(A^{-1}+B^{-1})=B^{-1}(A+B)A^{-1}\end{aligned}$$

因为 $A,B,A+B$ 均可逆, 且上式显然成立, 得证;

2. 由题意

$$(A^{-1}+B^{-1})=A^{-1}(A+B)B^{-1}\ (A^{-1}+B^{-1})^{-1}=B(A+B)^{-1}A$$

由 1 知 $(A^{-1}+B^{-1})^{-1}=A(A+B)^{-1}B$, 根据可逆方阵的逆是唯一的可知:$A(A+B)^{-1}B=B(A+B)^{-1}A$.

**例 2.3.3** 已知 $n$ 阶矩阵 $A$ 满足 $A^3=2I$,$B=A^2-2A+2I$, 证明 $B$ 可逆并求 $B^{-1}$.

**解**　法 I: 利用条件 $A^3=2I$ 可发现,$A^3$ 与 $I$ 齐次, 同理,$A^4$ 与 $A$ 齐次,$A^5$ 与 $A^2$ 齐次, 故 $A$ 的代数多项式一定可用 $I,A,A^2$ 表示. 若 $B$ 可逆, 则一定存在 $a,b,c\in\mathbb{R}$, 使得

$$B^{-1}=aA^2+bA+cI$$

则

$$BB^{-1}=(A^2-2A+2I)(aA^2+bA+cI)$$

则

$$\begin{cases}2a-2b+c=0\\2b-2a-2c=0\\2b+2c-1=0\end{cases}$$

, 解得

$$\begin{cases} a = \frac{1}{10} \\ b = \frac{3}{10} \\ c = \frac{2}{5} \end{cases}$$

所以 $B$ 可逆, 且 $B^{-1} = \frac{1}{10}(A^2 + 3A + 4I)$

法 II:

思路:$B = A^2 - 2A + 2I = A^3 + A^2 - 2A = A(A-I)(A+2I)$, 将 $B$ 分解, 证其因子可逆.

$A^3 = 2I$, 所以 $|A| \neq 0$, 所以 $A$ 可逆,$A^{-1} = \frac{1}{2}A^2$.

$A^3 - I = A^3 - I^3 = (A-I)(A^2+A+I)$ 且 $A^3 - I = I$, 所以 $(A-I)(A^2+A+I) = I$,$A-I$ 可逆. 且 $(A-I)^{-1} = A^2 + A + I$.

$A^3 + 8I = A^3 + (2I)^3 = (A+2I)(A^2-2A+2I) = 10I$, 所以 $A+2I$ 可逆,$(A+2I)^{-1} = \frac{1}{10}(A^2 - 2A + 2I)$.

所以 $B$ 可逆, 且 $B^{-1} = \frac{1}{10}(A^2 - 2A + 2I) \cdot (A^2 + A + I) \cdot \frac{1}{2}A^2 = \frac{1}{10}(A^2 + 3A + 4I)$.

**例 2.3.4** *设 4 阶矩阵 $B$ 满足 $[(\frac{1}{2}A)^*]^{-1}BA^{-1} = 2AB + 12I$, 其中 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$, 求矩阵 $B$.(课本第 2 章习题,p79 T5,18 年期中)*

**解**　矩阵方程只用按照代数方程的解法分离出未知量, 在通过求逆阵求解即可. 化简: 由 $(\frac{1}{2}A)^* = |\frac{1}{2}A|(\frac{1}{2}A)^{-1}$ 得 $(\frac{1}{2}A)^* = \frac{|A|}{8}A^{-1} = \frac{1}{4}A^{-1}$ 故原方程化简为:$4ABA^{-1} = 2AB + 12I$, 进一步化简得:$2B = BA + 6I$ 所以 $B = 6(2I - A)^{-1}$, 又 $2I - A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, 分块对角阵求逆阵得:

$$B = 6(2I - A)^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

**例 2.3.5** *设 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 4 & t & 3 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}$, 矩阵 $B_{4\times 3} \neq O$, 且满足 $BA = O$, 求常数 $t$ 的值.*

**解**　法 I: 用反证法证明 $|A|=0$. 假设 $|A|\neq 0$, 则 $A$ 可逆, 又有 $BA=O$, 两边同时右乘 $A^{-1}$, 得 $B=0$, 与题设矛盾, 故 $|A|=0$.

法 II: 用线性方程组的观点证明 $|A|=0$: 因为 $BA=O$, 所以 $A^TB^T=O$, 又 $B^T\neq O$, 所以线性方程组 $A^Tx=0$ 有非零解, 所以 $|A|=0$.

计算得 $|A|=7t+21$, 所以 $t=-3$.

**例 2.3.6** *(⋆⋆⋆⋆⋆) 设 $A=E-\alpha\alpha^T$, 其中 $E$ 为 $n$ 阶单位矩阵,$\alpha$ 是 $n\times 1$ 非零矩阵, 证明:*

*1. $A^2=A$ 的充分必要条件是 $\alpha^T\alpha=1$;*

*2. $\alpha^T\alpha=1$ 时,$A$ 不可逆*

**解**　1. 因为

$$A^2=AA=(E-\alpha\alpha^T)(E-\alpha\alpha^T)=E-2\alpha\alpha^T+\alpha\alpha^T\alpha\alpha^T$$

注意到 $\alpha^T\alpha$ 是一个数, 则

$$A^2=E-2\alpha\alpha^T+(\alpha^T\alpha)\alpha\alpha^T$$

显然, 当 $\alpha^T\alpha=1$ 时,$A^2=A$; 而当 $A^2=A$ 时, 有 $(\alpha^T\alpha-1)\alpha\alpha^T=O$, 又 $\alpha$ 非零, 则 $\alpha\alpha^T\neq O$(只要设 $\alpha=(x_1,x_2,....,x_n)$, 计算即可知), 故必有 $\alpha^T\alpha=1$, 所以充要条件成立.

2. 由 1 知, 当 $\alpha^T\alpha=1$ 时,$A^2=A$, 如果 $A$ 可逆, 则 $A^{-1}(AA)=A^{-1}A$, 于是 $A=E$, 则 $\alpha\alpha^T=O$, 由 1 中运算可知此时必有 $\alpha=0$, $\alpha^T\alpha=1$ 矛盾, 故 $A$ 不可逆.

### 证明矩阵可逆的一般思路

1. 证明行列式不为 0;
2. 证明满秩;
3. 找到一个矩阵, 使与之乘积为单位阵 $I$;
4. 反证法;
5. 看能否写成初等阵之积等.

### 求逆矩阵的一般方法

1. 初等行变换;
2. 定义法求伴随, 化逆阵;
3. 凑配法;

4. 分块对角公式.

**例 2.3.7** *(课本 P55: T3)* 设实方阵 $A=(a_{ij})_(4\times 4)$ 满足:*(1)*$a_{ij}=A_{ij}$, 其中 $A_{ij}$ 是 $a_{ij}$ 的代数余子式 $(i,j=1,2,3,4)$;*(2)*$a_{44}=-1$.

*1.* 求 $|A|$;

*2.* 证明:$A$ 可逆, 且 $A^{-1}=A^T$

**解** 1. 由 $a_{ij}=A_{ij}$ 得 $A=(A^*)^T$, 所以

$$|A|=|A^*|=|A|^{4-1}=|A|^3$$

所以 $|A|=0,\pm1$. 将 $|A|$ 按第 4 行展开得

$$|A|=a_{41}^2+a_{42}^2+a_{43}^2+1\geq 1$$

所以 $|A|=1$.

2. 由 $A=(A^*)^T$ 得 $A^T=A^*$, 所以

$$AA^T=AA^*=|A|I=I$$

所以 $A$ 可逆, 且 $A^{-1}=A^T$.

**例 2.3.8** *(课本 P79: T1)* 设矩阵 $A=(a_{ij})_{3\times 3}$ 满足 $A^*=A^T$, 且 $a_{11}=a_{12}=a_{13}>0$, 求 $a_{11}$.

**答案** $\frac{\sqrt{3}}{3}$

**分析** $A^*=A^T$ 则 $|A|=|A^T|=|A^*|=|A|^{3-1}=|A|^2$, 所以 $|A|=0,1$. 当 $A^*=A^T$ 时由 $a_{ij}=A_{ij}$, 其中 $A_{ij}$ 是 $a_{ij}$ 的代数余子式, 将 $|A|$ 按第 1 行展开得 $|A|=a_{11}^2+a_{12}^2+a_{13}^2>0$, 所以 $|A|=1$, 所以 $1=|A|=a_{11}^2+a_{12}^2+a_{13}^2=3a_{13}^2$, 所以 $a_{11}=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

## 2.4 矩阵的秩

**例 2.4.1** 设线性方程组 $Ax=b$ 的增广矩阵为

$$\bar{A}=\begin{bmatrix}A & b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1 & \lambda & 4\\ -1 & \lambda & 1 & \lambda^2\\ 1 & -1 & 2 & -4\end{bmatrix},$$

求 $r(A)$ 和 $r(\bar{A})$

**分析**　这是一道讨论思想很明显的题目. 大家都知道对于求秩很基础的一个方法就是求化简为行阶梯型.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \lambda & 4 \\ -1 & \lambda & 1 & \lambda^2 \\ 1 & -1 & 2 & -4 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & \lambda & 4 \\ 0 & 1+\lambda & 1+\lambda & 4+\lambda^2 \\ 0 & -2 & 2-\lambda & -8 \end{bmatrix}$$

下一步应当是用第二行消去第三行, 第二列的 2, 此时要注意到是要判断 $\lambda$ 与 -1 的关系. 我们先假设可以消去继续往下写, 最后 $\lambda$=-1 的情况再单独讨论即可.

**解**　由题意

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \lambda & 4 \\ -1 & \lambda & 1 & \lambda^2 \\ 1 & -1 & 2 & -4 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & \lambda & 4 \\ 0 & 1+\lambda & 1+\lambda & 4+\lambda^2 \\ 0 & -2 & 2-\lambda & -8 \end{bmatrix}$$

当 $\lambda \neq 1$ 时

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \lambda & 4 \\ 0 & 1+\lambda & 1+\lambda & 4+\lambda^2 \\ 0 & -2 & 2-\lambda & -8 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & \lambda & 4 \\ 0 & 1+\lambda & 1+\lambda & 4+\lambda^2 \\ 0 & 0 & 4-\lambda & -8+\frac{8+2\lambda^2}{1+\lambda} \end{bmatrix}$$

故当 $\lambda \neq 4$ 且 $\lambda \neq -1$ 时 $r(A) = r(\bar{A}) = 3$;

当 $\lambda = -1$ 时 $r(A) = 2, r(\bar{A}) = 3$;

当 $\lambda = 4$ 时 $r(A) = r(\bar{A}) = 2$.

此类题是比较常见的一类题型, 考试中出现的概率较大. 考察同学们的矩阵的秩, 增广系数阵等基础知识以及基础的分类讨论思想, 属于难度不大的常考题型.

**例 2.4.2** *(13 年期中压轴题) 设 $A$ 是 $n$ 阶矩阵,$r(A) = r$, 证明: 必存在 $n$ 阶可逆矩阵 $B$ 及秩为 $r$ 的 $n$ 阶矩阵 $C$ 满足 $C^2 = C$, 使 $A = BC$.*

**分析**　$A, C$ 秩为 r, 则 $A, C$ 等价,$A$ 必可表示为 $BC$,$B$ 即为题目所给满秩方阵, 故关键在于找到这样的 $C^2 = C$ , 且说明 $A = BC$ 将 $C$ 满秩分解为 $C = P \begin{bmatrix} I_r & O \\ O & O \end{bmatrix} Q$ 的形式, 若 $C^2 = C$, 显然 $C$ 应有

$$C = P \begin{bmatrix} I_r & O \\ O & O \end{bmatrix} P^{-1}$$

设 $A = P \begin{bmatrix} I_r & O \\ O & O \end{bmatrix} Q$ 则现在的工作是找到这样一个 $B = MI_nN$, 和 $C = X \begin{bmatrix} I_r & O \\ O & O \end{bmatrix} X^{-1}$, 使得

$$P \begin{bmatrix} I_r & O \\ O & O \end{bmatrix} Q = MI_nNX \begin{bmatrix} I_r & O \\ O & O \end{bmatrix} X^{-1}$$

注意到当 $NX=I_n$ 时, 上式刚好化为

$$M\begin{bmatrix}I_r & O\\ O & O\end{bmatrix}X^{-1}=P\begin{bmatrix}I_r & O\\ O & O\end{bmatrix}Q$$

所以取 $X^{-1}=Q, M=P, N=Q$, 构造出来的矩阵 $C$ 满足题意.

**解**　设 $A=P\begin{bmatrix}I_r & O\\ O & O\end{bmatrix}Q$ 令 $B=PI_nQ, C=Q^{-1}\begin{bmatrix}I_r & O\\ O & O\end{bmatrix}Q$, 显然满足 $C^2=C$ 且有 $BC=PI_nQQ^{-1}\begin{bmatrix}I_r & O\\ O & O\end{bmatrix}Q=A$, 找到了这样的 $B$ 与 $C$, 命题得证.

**例 2.4.3** $A$ 为 $m\times n$ 矩阵,$B$ 为 $n\times m$ 矩阵, 求证

$$|I_m-AB|=|I_n-BA|$$

**解**　由分块矩阵乘法得

$$\begin{bmatrix}I_m & O\\ -B & I_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}I_m & A\\ B & I_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}I_m & A\\ O & I_n-BA\end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix}I_m & -A\\ O & I_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}I_m & A\\ B & I_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}I_m-AB & O\\ B & I_n\end{bmatrix}$$

两边取行列式得

$$\begin{vmatrix}I_m & A\\ B & I_n\end{vmatrix}=|I_m-AB|=|I_n-BA|$$

## 2.5　练习题

1. 若方阵 $A$ 的行列式为零, 求证:$A$ 的伴随阵的行列式为零.
2. 设 $n$ 阶方阵 $A, B$ 的行列式分别为 $2, -3$, 求 $\det(-2A^*B^{-1})$.
3. 设三阶矩阵 $A, B$ 满足 $2A^{-1}B=B-4I$, $B=\begin{vmatrix}1 & -2 & 0\\ 1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{vmatrix}$, 求矩阵 $A$.
4. 设矩阵 $B$ 满足方程 $A^*B=A^{-1}+2B$, 其中 $A=\begin{vmatrix}1 & 1 & -1\\ -1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1\end{vmatrix}$, 求 $B$.

5. 设矩阵 $X$ 满足方程 $AXA+BXB=AXB+BXA+I$, 其中 $A=\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{bmatrix}$, 求矩阵 X.

6. 已知矩阵 $A$ 的伴随矩阵为 $A^*=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&-3&0&8\end{bmatrix}$, 矩阵 $B$ 满足方程 $ABA^{-1}=BA^{-1}+3I$, 求 $B$.

## 答案

1. 如果 $A$ 是零矩阵, 则 $A$ 的伴随阵也为零矩阵, 其行列式为零; 如果 $A$ 不是零矩阵, 那么 $AA^*=|A|I=O$. 现在假设 $A$ 的伴随阵的行列式不为零, 那么 $A$ 的伴随阵可逆, 上式两端同时右乘 $A$ 的伴随阵的逆之后得 $A=O$, 矛盾. 所以此种情况下 $A$ 的伴随阵的行列式仍为零, 证毕.

2. $-\frac{2^{2n-1}}{3}$, 注意 $-2$ 提取出来之后应带 $n$ 次方

3. $\begin{bmatrix}0&2&0\\-1&-1&0\\0&0&-2\end{bmatrix}$

4. $\begin{bmatrix}\frac{1}{4}&\frac{1}{4}&0\\0&\frac{1}{4}&\frac{1}{4}\\\frac{1}{4}&0&\frac{1}{4}\end{bmatrix}$

5. $\begin{bmatrix}1&2&5\\0&1&2\\0&0&1\end{bmatrix}$

6. $\begin{bmatrix}6&0&0&0\\0&6&0&0\\6&0&6&0\\0&3&0&-1\end{bmatrix}$, 先根据 $A$ 的伴随阵的行列式为 8 得出 $A$ 的行列式为 2, 据此可以求出 $A$ 的逆, 进而得到 $A$, 最后得到 $B$.

# 第三章　向量及其运算

## 3.1　向量的运算

向量的线性运算包括加法和数乘.(加法:$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$, 数乘:$\lambda\boldsymbol{a}$)

**例 3.1.1** 设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 分别为空间上三点 $A,B,C$ 的向径, 证明: 若点 $C$ 落在线段 $AB$ 上, 则存在数 $\lambda\,[0,1]$, 使得

$$\boldsymbol{c}=\lambda\boldsymbol{a}+(1-\lambda)\boldsymbol{b}$$

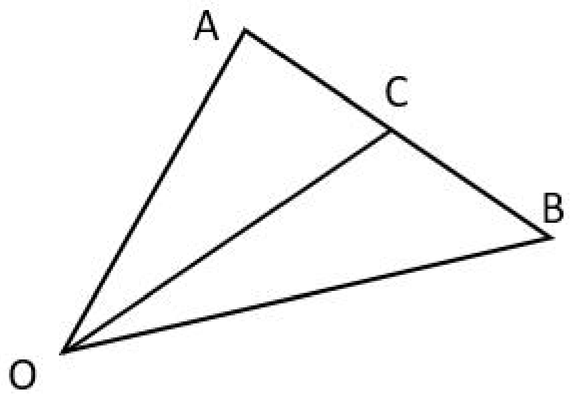



图 3.1: 例 1 图

**解**　当 $C$ 在线段两端时,$\lambda=0,1$.
当 $C$ 在线段 $AB$ 内部时, 设 $\lambda=\frac{CB}{AB}$, 则 $\overrightarrow{CB}=\lambda\overrightarrow{AB}$.
而 $\overrightarrow{CB}=\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b},\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$, 所以

$$\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$$

即

$$\boldsymbol{c}=\lambda\boldsymbol{a}+(1-\lambda)\boldsymbol{b}$$

证毕.

**注**　一般地, 若 $\lambda \in \mathbb{R}$, 则 $C$ 落在直线 $AB$ 上. 这两个情况都是充分必要的, 读者可以思考如何证明必要性.

### 3.1.1　数量积 (点积, 内积)

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \|\boldsymbol{a}\| \cdot \|\boldsymbol{b}\| \cos\theta = \|\boldsymbol{a}\|(\boldsymbol{b})_{\boldsymbol{a}} = \|\boldsymbol{b}\|(\boldsymbol{a})_{\boldsymbol{b}} = x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b$$

### 3.1.2　向量积 (叉积, 外积)

结果的方向满足右手定则, 结果的模在数值上等于由两向量确定的平行四边形的面积, 该运算满足反交换律.

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = -\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ x_a & y_a & z_a \\ x_b & y_b & z_b \end{vmatrix}$$

### 3.1.3　混合积

混合积: 三个向量其中两个先求叉积, 再与另外一个作点积. 互换两个向量的位置, 结果反号.

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} & \boldsymbol{c} \end{bmatrix} = (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c} = \begin{vmatrix} x_a & y_a & z_a \\ x_b & y_b & z_b \\ x_c & y_c & z_c \end{vmatrix}$$

**例 3.1.2** 设 $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c} = 2$, 则 $[(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) \times (\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})] \cdot (\boldsymbol{c}+\boldsymbol{a}) = (\ )$

**解**　由题意得

$$\begin{aligned} [(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) \times (\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})] \cdot (\boldsymbol{c}+\boldsymbol{a}) &= [(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{b} + (\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{c}] \cdot (\boldsymbol{c}+\boldsymbol{a}) \\ &= (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c} + \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) \cdot (\boldsymbol{c}+\boldsymbol{a}) \\ &= \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c} + \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{a} \\ &= 2 \begin{bmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} & \boldsymbol{c} \end{bmatrix} = 4 \end{aligned}$$

## 3.2　向量之间的关系

### 3.2.1　两向量共线的充要条件

$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 共线 $\Longleftrightarrow \boldsymbol{a} = \lambda \boldsymbol{b} (\lambda \in \mathbb{R}, \boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0}) \Longleftrightarrow k_1 \boldsymbol{a} + k_2 \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0} (k_1, k_2$ 不全为 $0)$.

### 3.2.2　三向量共面的充要条件

$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 共面 $\Longleftrightarrow k_1\boldsymbol{a}+k_2\boldsymbol{b}+k_3\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$($k_1,k_2,k_3$ 不全为 0).

特别地, 当 $a,b,c$ 是三维向量时, 上述充要条件等价于存在不全为 0 的 $k_1,k_2,k_3$, 使得

$$\begin{cases} x_ak_1+y_ak_2+z_ak_3=0 \\ x_bk_1+y_bk_2+z_bk_3=0 \\ x_ck_1+y_ck_2+z_ck_3=0 \end{cases}$$

即

$$\begin{vmatrix} x_a & y_a & z_a \\ x_b & y_b & z_b \\ x_c & y_c & z_c \end{vmatrix}=0$$

亦即它们的混合积

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} & \boldsymbol{c} \end{bmatrix}=0$$

### 3.2.3　两向量垂直的充要条件

$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Longleftrightarrow\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}\Longleftrightarrow\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\frac{\pi}{2}$

**例 3.2.1** *若 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$, 证明 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 共面.*

**解**　只需证混合积为 0.

原式左右两边与 $\boldsymbol{c}$ 作内积, 得

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$$

显然 $\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$, 所以 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$, 所以 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 共面. 证毕.

## 3.3　空间平面与直线

### 3.3.1　平面表示形式

#### 点法式

过点 $(x_0,y_0,z_0)$, 法向量为 $\boldsymbol{n}=(A,B,C)$ 的直线为

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$$

**一般式**

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

法向量 $\boldsymbol{n} = (A, B, C)$.

**截距式**

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

在 $x, y, z$ 轴上的截距依次为 $a, b, c$.(截距式不能表示与坐标轴平行的平面)

**参数方程**

$$\begin{cases} x = x_0 + sL_1 + tL_2 \\ y = y_0 + sM_1 + tM_2 \\ z = z_0 + sN_1 + tN_2 \end{cases} \quad , (s, t \in \mathbb{R})$$

表示过点 $(x_0, y_0, z_0)$, 且向量 $(L_1, M_1, N_1), (L_2, M_2, N_2)$ 为该平面内不共线的两个向. (参数方程形式基本不用)

### 3.3.2　空间直线表示形式

对于过点 $(x_0, y_0, z_0)$, 方向向量为 $(l, m, n)$ 的直线

**参数方程**

$$\begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \\ z = z_0 + nt \end{cases} \quad , (t \in \mathbb{R})$$

**对称式**

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}$$

该式表示一种比例形式, 而不是除式. 若分母为 0, 表示分子为 0.

**一般式**

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0 \\ a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0 \end{cases}$$

表示两个平面的交线, 只有两个平面方程表示的平面相交时, 上式表示直线.(可通过求两平面法向量的矢量积来求直线的方向向量)

## 3.4　空间中的位置关系

### 3.4.1　平面之间位置关系

对于两个平面 $\pi_1: a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0, \pi_2: a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0$, 其法向量分别为 $\boldsymbol{n}_1=(a_1,b_1,c_1), \boldsymbol{n}_2=(a_2,b_2,c_2)$

$$\pi_1 \parallel \pi_2 \Longleftrightarrow \boldsymbol{n}_1 \parallel \boldsymbol{n}_2$$
$$\pi_1 \perp \pi_2 \Longleftrightarrow \boldsymbol{n}_1 \perp \boldsymbol{n}_2$$

### 3.4.2　平面与直线的位置关系

一条直线 $l$ 与 $l$ 在平面 $\pi$ 上的投影直线的夹角 $\varphi$ 称为直线 $l$ 与 $\pi$ 的夹角 $(\varphi\ [0,\frac{\pi}{2}])$. 设直线方向向量为 $\boldsymbol{a}$, 平面法向量为 $\boldsymbol{n}$, 则

$$\sin\varphi = |\cos\langle \boldsymbol{a},\boldsymbol{n}\rangle| = \frac{|\boldsymbol{a},\boldsymbol{n}|}{\|\boldsymbol{a}\|\cdot\|\boldsymbol{n}\|}$$

- $\varphi=0 \Longleftrightarrow l \parallel \pi$ 或 $l \in \pi$.
- $\varphi \neq 0 \Longleftrightarrow l$ 与 $\pi$ 相交.
- 特别地,$\varphi=\frac{\pi}{2}$ 则 $l \perp \pi$.

**注**　绝大多数的空间平面与直线之间的关系问题, 都是通过转化为他们的法向量和方向向量的关系来求解的.

**例 3.4.1**　已知两条直线 $l_1: \frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{0}=\frac{z-3}{-1}, l_2: \frac{x+2}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z}{1}$, 求过 $l_2$ 平行于 $l_1$ 的平面方程.

**分析**　平面与直线已知平行或直线在平面内, 则平面的法向量与两直线的方向向量垂直.

**解**　设所求平面的法向量 $\boldsymbol{n} = (a, b, c)$ ,$l_1$ 的方向向量 $\boldsymbol{n}_1 = (1, 0, -1)$,$l_2$ 的方向向量 $\boldsymbol{n}_2 = (2, 1, 1)$. 则 $\boldsymbol{n \perp n_1, n \perp n_2}$, 平面过 $l_2$ 上的点 $(-2, 1, 0)$, 则平面方程为

$$x + 2 - 3(y - 1) + z = 0$$

**例 3.4.2** *求两平面 $2x - y + z = 7$ 和 $x + y + 2z = 11$ 所成二面角的平分面方程.*

**分析**　直接向已知直线引垂线并不方便, 可以考虑使用两平面相交来求.

**解**　设 $P(x, y, z)$ 为平分面上任意一点, 则 $P$ 到两平面距离相等, 因此

$$\frac{|2x - y + z - 7|}{\sqrt{6}} = \frac{|x + y + 2z - 11|}{\sqrt{6}}$$

即

$$2x - y + z - 7 = \pm(x + y + 2z - 11)$$

平分面方程为 $x - 2y - z + 4 = 0$ 或 $x + z - 6 = 0$

**例 3.4.3** *直线 $l$ 过点 $P(2, 1, 3)$, 且与直线 $\frac{x+1}{3} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{-1}$ 垂直相交, 求 $l$ 的方程.*

**解**　过已知直线的平面束为 $(2x + 3y + 5) + \lambda(y + 2z - 1) = 0$, 代入 $P$ 的坐标, 解得 $\lambda = -1$, 所以该平面为 $2x - 4y - 2z + 6 = 0$.

再求过 $P$ 的已知直线法平面方程法向量为 $(3, 2, -1)$, 过点 $P$, 由此得到法平面方程 $3x + 2y - z - 5 = 0$ 解得直线一般式方程

$$\begin{cases} x - 2y - z + 3 = 0 \\ 3x + 2y - z - 5 = 0 \end{cases}$$

**例 3.4.4** *求过 $P_0(-1, 0, 4)$ 与平面 $3x - 4y + z - 10 = 0$ 平行且又与直线 $\frac{x+1}{1} = \frac{y-3}{1} = \frac{z}{2}$ 相交的直线方程.*

**分析**　求出已知直线和平行平面的交点, 就可解得直线方向向量, 从而得出直线方程.

**解**　已知过 $P_0$ 且与已知平行的平面方程:$3(x + 1) - 4y + z - 4 = 0$, 已知直线的参数方程为

$$\begin{cases} x = -1 + t \\ y = 3 + t \qquad (t \in \mathbb{R}\text{为参数}) \\ z = 2t \end{cases}$$

将其代入平面方程得 $3t-12-4t+2t-4=0$, 解得 $t=16$. 所以直线过另一点 $(16,19,32)$, 直线方向向量为 $\boldsymbol{l}=(16,19,28)$. 所以直线方程为

$$\frac{x+1}{16}=\frac{y}{19}=\frac{z-4}{28}$$

**例 3.4.5** 证明: 直线 $L_1: x=y=z-4, L_2: -x=y=z$ 异面; 求两直线间的距离, 并求出与 $L_1$ 和 $L_2$ 都相交的直线方程.

**分析**　任取 $L_1, L_2$ 上两点 $P_1, P_2$, 通过直线方向向量 $\boldsymbol{l}_1, \boldsymbol{l}_2$ 和 $\overrightarrow{P_1P_2}$ 混合积判断是否异面.

**解**　由题意得 $\boldsymbol{l}_1=(1,1,1), \boldsymbol{l}_2=(-1,1,1)$, 取 $P_1(0,0,4), P_2(0,0,0)$, 则 $\overrightarrow{P_1P_2}=(0,0,-4)$. 混合积 $\left[\boldsymbol{l}_1 \quad \boldsymbol{l}_2 \quad \overrightarrow{P_1P_2}\right]=-8\neq 0$, 故 $L_1, L_2$ 异面.

$L_1, L_2$ 间距

$$d=\frac{\left|\left[\boldsymbol{l}_1 \quad \boldsymbol{l}_2 \quad \overrightarrow{P_1P_2}\right]\right|}{\|\boldsymbol{l}_1\times\boldsymbol{l}_2\|}=\frac{8}{2\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$$

公垂线 $L_3$ 与 $\boldsymbol{l}_1\times\boldsymbol{l}_2=(0,2,-2)$ 平行, 设其方向向量为 $\boldsymbol{l}_3=(0,1,-1)$.

由 $L_1, L_3$ 确定平面法向量 $\boldsymbol{n}_1=l_1\times\boldsymbol{l}_3=(-2,1,1)$, 平面为 $-2x+y+z-4=0$. 由 $L_2, L_3$ 确定平面法向量 $\boldsymbol{n}_2=\boldsymbol{l}_2\times\boldsymbol{l}_3=(-2,-1,-1)$, 平面为 $-2x-y-z=0$. 求得直线一般式方程为

$$\begin{cases}2x-y-z+4=0\\2x+y+z=0\end{cases}$$

**例 3.4.6** 求常数 $k$ 的值, 使得下列三个平面过同一直线: $\pi_1: 3x+2y+4z=1, \pi_2: x-8y-2z=3, \pi_3: kx-3y+z=2$

**解**　法 1:

平面 $\pi_1, \pi_2$ 的交线为 $\begin{cases}3x+2y+4z=1\\x-8y-2z=3\end{cases}$, 令 $x=0$ 得 $\begin{cases}2y+4z=1\\-8y-2z=3\end{cases}$, 解得直线上一点为 $(0,-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$. 该直线的方向向量为平面 $\pi_1, \pi_2$ 法向量的外积向量, 即

$$(3,2,4)\times(1,-8,-2)=(28,10,-26)=2(14,5,-13)$$

所以交线 $L$ 的对称式方程为 $\frac{x}{14}=\frac{y+\frac{1}{2}}{5}=\frac{z-\frac{1}{2}}{-13}$, $L$ 的方向向量与 $\pi_3$ 法向量垂直则 $(14,5,-13)\cdot(k,-3,1)=0$, 解得 $k=2$. 经验证,$k=2$ 时 $\pi_3$ 通过 $L$, 满足题意. 所以 $k=2$, 对称式方程为

$$\frac{x}{14}=\frac{y+\frac{1}{2}}{5}=\frac{z-\frac{1}{2}}{-13}$$

法 2: 利用平面束的方法求 $k$ 的值.

设 $\pi_3: 3x+2y+4z-1+\lambda(x-8y-2z-3)=0$, 即 $(3+\lambda)x+(2-8\lambda)y+(4-2\lambda)z=1+3\lambda$, 其系数与 $\pi_3: kx-3y+z=2$ 对应成比例, 则

$$\frac{3+\lambda}{2}=\frac{2-8\lambda}{-3}=\frac{4-2\lambda}{1}=\frac{1+3\lambda}{2}$$

解得 $k=2, \lambda=1$ 可通过解法 1 的方法求得交线的对称式方程可写为

$$\frac{x}{14}=\frac{y+\frac{1}{2}}{5}=\frac{z-\frac{1}{2}}{-13}$$

**总结**　本章的主要内容比较简单, 概念容易理解, 考试形式比较固定, 题目难度较小. 前面有关向量概念和计算是基础, 后面的空间平面直线主要应用向量的知识来处理. 这些向量的概念在之后的章节中内涵会有所延伸, 不能仅仅把它当做有向线段等事物. 此外, 向量积只针对三维向量.

## 3.5　练习题

### 3.5.1　基础题

1. 设向量 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ 不共线, 又 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}_1-2\boldsymbol{a}_2, \overrightarrow{BC}=2\boldsymbol{a}_1+3\boldsymbol{a}_2, \overrightarrow{CD}=-\boldsymbol{a}_1-5\boldsymbol{a}_2$, 证明 $ABD$ 三点共线.

   **分析**　只要证明 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{BD}$ 方向相同即可.

   **证明**　由题意

   $$\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{CD}=\boldsymbol{a}_1-2\boldsymbol{a}_2=\overrightarrow{AB}$$

   则 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{BD}$ 方向相同, 即 $ABD$ 共线.

2. 判断下列各组向量是否共面

   (a) $(4,0,2),(6,-9,8),(6,-3,3)$;

   (b) $(1,-2,3),(3,3,1),(1,7,-5)$.

   **分析**　通过判断混合积是否为 0 可判断三者是否共面

   **解**　由题意

   (a) $\begin{vmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 6 & -9 & 8 \\ 6 & -3 & 3 \end{vmatrix}=60\neq 0$, 三者不共面

(b) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 3 & 3 & 1 \\ 1 & 7 & -5 \end{vmatrix} = 0$, 三者共面

3. 求以 $A(1,-1,1), B(-1,0,2), C(2,-2,1)$ 为顶点的三角形面积, 并求 $AB$ 边上的高.

**分析**　通过向量积来求面积, 进而求高.

**解**　由题意

$$\|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\| = \left\|\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}\right\| = \sqrt{3} = \|\overrightarrow{AB}\| h = 2S$$

$$\therefore S = \frac{\sqrt{3}}{2}, h = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

4. 求以 $A(3,0,0), B(0,3,0), C(0,0,2), D(4,5,6)$ 为顶点的四面体的体积.

**分析**　利用混合积的几何意义.

**解**

$$V_{ABCD} = \frac{1}{6} V_{平行六面体} = \frac{1}{6}\left|\begin{vmatrix} \overrightarrow{AB} & \overrightarrow{AC} & \overrightarrow{AD} \end{vmatrix}\right| = 15$$

5. 已知向量 $\boldsymbol{b}$ 与向量 $\boldsymbol{a} = (1,1,-1)$ 平行, 且 $\boldsymbol{b}$ 与 $z$ 正向的夹角为锐角, 求 $\boldsymbol{b}$ 方向余弦.

**分析**　向量 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 方向相反.

**解**　向量 $\boldsymbol{b}$ 的方向与 $\boldsymbol{n} = (-1,-1,1)$ 一致, 则方向余弦为

$$\boldsymbol{b}^0 = \frac{\boldsymbol{n}}{\|\boldsymbol{n}\|} = \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

6. 求过原点且与直线 $\begin{cases} x = 1 \\ y = -1 + t \\ z = 1 + t \end{cases}$ 及 $x + 1 = \frac{y+2}{2} = z - 1$ 都平行的直线.

**分析**　平面过原点则平面的形式为 $Ax+By+Cz=0$, 其法向量与直线的方向向量垂直.

**解**

$$\boldsymbol{l}_1=(0,1,1),\boldsymbol{l}_2=(1,2,1)$$

则 $\boldsymbol{l}_1\times\boldsymbol{l}_2=(-1,1,-1)$, 平面方程为 $x-y+z=0$.

7. 求平行于平面 $5x-14y+2z+36=0$ 且与之距离为 3 的平面.

**分析**　利用平面间距离公式.

**解**　设平面为 $5x-14y+2z+m=0$, 则

$$\frac{|m-36|}{\sqrt{5^2+(-14)^2+2^2}}=3$$

解得 $m=-9$ 或 81, 故平面方程为 $5x-14y+2z-9=0$ 或 $5x-14y+2z+81=0$.

8. 求过点 $(3,4,-2)$ 且与坐标轴截距相等的平面.

**分析**　利用截距式.

**解**　设截距为 $a$, 则平面方程为 $\frac{x}{a}+\frac{y}{a}+\frac{z}{a}=1$, 代入已知　, 得 $a=5$, 所以平面方程为 $x+y+z=5$.

9. 设平面 $S$ 过 3 点 $(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)$. 直线 $L$ 过原点, 与 $S$ 的夹角为 $\frac{\pi}{4}$, 且位于平面 $x=y$ 上, 求直线 $L$ 的方程.

**解**　平面方程为 $x+y+z=1$, 其法向量 $\boldsymbol{n}_1=(1,1,1)$. 平面 $x=y$ 的法向量 $\boldsymbol{n}_2=(1,-1,0)$. 设直线的方向向量 $\boldsymbol{l}=(a,b,c)$ 则

$$\begin{cases}\boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{n}_2=0\\ \frac{\boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{n}_1}{\|\boldsymbol{l}\|\|\boldsymbol{n}_1\|}=\sin\frac{\pi}{4}\end{cases}$$

取 $l=(1,1,4\pm3\sqrt{2})$, 直线方程为

$$x=y=\frac{z}{4\pm3\sqrt{2}}$$

10. 设直线 $L_1:\begin{cases}x-y=3\\3x-y+z=1\end{cases}$ $,L_2:x+1=\frac{y-1}{-2}=\frac{z}{2},M(1,0,-1)$

(a) 求 $L_1$ 的对称式方程;

(b) 求 $M$ 到 $L_1$ 的距离;

(c) 求 $L_2$ 到 $L_1$ 的距离.

**分析**　主要利用公式求解.

**解**

(a) 可取点 $(0,-3,-2)$, 方向向量为 $(1,1,-2)$ 则

$$\frac{x}{1}=\frac{y+3}{1}=\frac{z+2}{-2}$$

(b) 利用点到直线的距离公式, 取 $P(0,-3,-2)$, 方向向量 $\boldsymbol{l}_1=(1,1,-2)$, 则

$$d=\frac{\|\overrightarrow{PM}\times\boldsymbol{l}_1\|}{\boldsymbol{l_1}}=\frac{\sqrt{93}}{3}$$

(c) 直线 $L_2$ 的方向向量 $\boldsymbol{l}_2=(1,-2,2)$, 点 $N(-1,1,0)$, 则

$$d=\frac{\left\|\begin{bmatrix}\boldsymbol{l_1} & \boldsymbol{l_2} & \overrightarrow{MN}\end{bmatrix}\right\|}{\|\boldsymbol{l}_1\times\boldsymbol{l}_2\|}=\frac{20}{\sqrt{29}}$$

11. 设矩阵 $\begin{bmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\a_2 & b_2 & c_2\\a_3 & b_3 & c_3\end{bmatrix}$ 满秩, 则直线 $L_1:\frac{x-a_3}{a_1-a_2}=\frac{y-b_3}{b_1-b_2}=\frac{z-c_3}{c_1-c_2}$ 与直线 $L_2:\frac{x-a_1}{a_2-a_3}=\frac{y-b_1}{b_2-b_3}=\frac{z-c_1}{c_2-c_3}$ 的位置关系是 ( )

(a) 相交于一点

(b) 重合

(c) 平行但不重合

(d) 异面

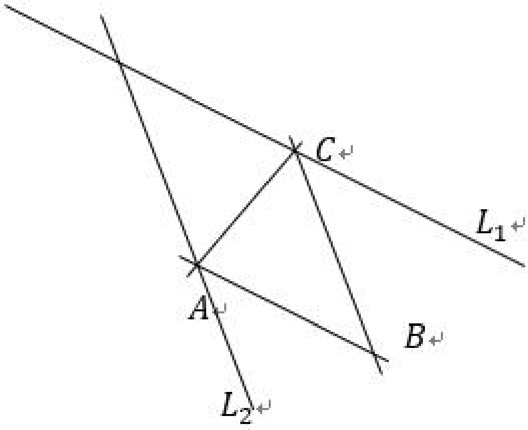



图 3.2: 第 11 题图

**解** 点 $(a_1,b_1,c_1),(a_2,b_2,c_2),(a_3,b_3,c_3)$ 记为 $A,B,C$ 则 $L_1$ 过点 $C$ 且方向向量为 $\overrightarrow{AB}$, $L_2$ 过点 $A$ 且方向向量为 $\overrightarrow{BC}$, 而矩阵 $\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}$ 满秩, 即 $A,B,C$ 不在同一直线上, 所以两直线相交于一点, 选 (a).

12. 求过点 $(1,2,3)$ 且与直线 $L: x-1=y=1-z$ 垂直相交的直线方程.

**分析** 直接引垂线不方便, 考虑用平面相交来求解.

**解** 过已知直线的平面束为 $x-1-y+\lambda(y+z-1)=0$, 代入点 $(1,2,3)$ 得 $\lambda=\frac{1}{2}$, 所以该平面方程为 $2x-y+z=3$, 其法向量为 $(2,-1,1)$. 而所求直线的方向向量与平面法向量垂直且与直线 $L$ 垂直, 则利用向量积得所求直线的方向向量为 $(0,1,1)$, 则直线方程为

$$\frac{x-1}{0}=\frac{y+2}{1}=\frac{z-6}{1} \tag{3.1}$$

13. 设直线 $L_1: \frac{x+3}{2}=\frac{y+2}{3}=\frac{z-6}{-4}$ 和 $L_2: \begin{cases} x-z=9 \\ y+4z=17 \end{cases}$ , 试判断这两条直线的位置关系. 若它们共面, 求他们所确定的平面方程; 若还相交, 求交点.

**分析** 先看方向向量, 判断平行; 之后联立看相交还是异面.

**解** $L_1$ 的方向向量 $\boldsymbol{l}_1=(2,3,-4)$,$L_2$ 的方向向量 $\boldsymbol{l}_2=(1,-4,1)$, 则两直线不平行, 联立可得方程有解 $(3,7,-6)$, 即两者相交且交于点 $(3,7,-6)$.

它们确定的平面的法向量垂直于 $\boldsymbol{l}_1\times\boldsymbol{l}_2$, 取法向量为 $(13,6,11)$, 则平面方程为 $13(x-3)+6(y-7)+11(z+6)=0$.

### 3.5.2 提高题

1. 证明:

   (a) $\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}$;

   (b) $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d})=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{d})-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{d})-\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$;

   (c) $\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})+\boldsymbol{b}\times(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})+\boldsymbol{c}\times(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=\boldsymbol{0}$.

**分析**　(a) 是 Lagrange 公式, (b) 根据前者推导而来, (c) 称作 Jacobi 恒等式.

**证明**

(a) 假设 $\boldsymbol{a}=(a,b,c),\boldsymbol{b}=d,e,f,\boldsymbol{c}=(g,h,i)$, 则

$$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\times\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\d&e&f\\g&h&i\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\a&b&c\\ei-fh&fg-di&dh-eg\end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}&=(bdh+cdi-beg-cfg,aeg+cei-adh-cfh,afg+bfh-adi-bei)\\&=(ag+bh+ci)(d,e,f)-(ad+be+cf)(g,h,i)\\&=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}\end{aligned}$$

(b) 在 (a) 的结论中将 $\boldsymbol{b}$ 换为 $\boldsymbol{d}$, 并两端同时与 $\boldsymbol{b}$ 作内积, 得

$$[\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{d}\times\boldsymbol{c})]\cdot\boldsymbol{b}=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{d})-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{d})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})$$

同时

$$\begin{aligned}[\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{d}\times\boldsymbol{c})]\cdot\boldsymbol{b}&=\begin{bmatrix}\boldsymbol{a}&\boldsymbol{d}\times\boldsymbol{c}&\boldsymbol{b}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{b}&\boldsymbol{a}&\boldsymbol{d}\times\boldsymbol{c}\end{bmatrix}\\&=\begin{bmatrix}\boldsymbol{a}&\boldsymbol{b}&\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d}\end{bmatrix}=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{d})-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{d})-\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}\end{aligned}$$

故原式成立.

(c) 将 (a) 中的轮换式子相加即可.

2. (a) 已知 $\overrightarrow{MP}\perp\overrightarrow{MA}$, 将 $\overrightarrow{MP}$ 绕 $\overrightarrow{MA}$ 右旋角度 $\theta$, 记 $\boldsymbol{e}=\frac{\overrightarrow{OA}}{\|\overrightarrow{OA}\|}$, 试用 $\boldsymbol{e},\overrightarrow{OP},\theta$ 表示 $\overrightarrow{OP_1}$.

   (b) 设 $O,A,P$ 是三个不同的点, 将 $\overrightarrow{OP}$ 绕 $\overrightarrow{OA}$ 右旋角度 $\theta$ 得 $\overrightarrow{OP_1}$, 记 $\boldsymbol{e}=\frac{\overrightarrow{OA}}{\|\overrightarrow{OA}\|}$, 试用 $\boldsymbol{e},\overrightarrow{OP},\theta$ 表示 $\overrightarrow{OP_1}$.

解

(a) 以 $\overrightarrow{MP}$ 方向的单位向量为 $x$ 轴正方向, 记 $\boldsymbol{i}=\frac{\overrightarrow{MP}}{\|\overrightarrow{MP}\|}$, $\boldsymbol{e}$ 为 $z$ 轴正方向, 则 $y$ 轴正方向为

$$\boldsymbol{j}=\boldsymbol{e}\times\frac{\overrightarrow{MP}}{\|\overrightarrow{MP}\|}$$

则 $\overrightarrow{MP}=\|\overrightarrow{MP}\|\boldsymbol{i}$, 于是

$$\overrightarrow{MP_1}=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\|\overrightarrow{MP}\|\\ 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j}\end{bmatrix}=\cos\theta\overrightarrow{MP}+\sin\theta(\boldsymbol{e}\times\overrightarrow{MP})$$

(b) 设 $P$ 到 $OA$ 的垂足为 $M$, 则

$$\overrightarrow{OP_1}=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{MP_1}$$

而 $\overrightarrow{OM}=(\overrightarrow{OP}\cdot\boldsymbol{e})\boldsymbol{e}$. 将 $\overrightarrow{MP}=\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OM}$ 代入 (a) 的结果, 又 $\boldsymbol{e}\times\overrightarrow{OM}=\boldsymbol{0}$, 得

$$\overrightarrow{MP_1}=(\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OM})\cos\theta+(\boldsymbol{e}\times\overrightarrow{OP})\sin\theta$$

联立得

$$\overrightarrow{OP_1}=(1-\cos\theta)(\overrightarrow{OP}\cdot\boldsymbol{e})\boldsymbol{e}+\cos\theta\overrightarrow{OP}+\sin\theta(\boldsymbol{e}\times\overrightarrow{OP})$$