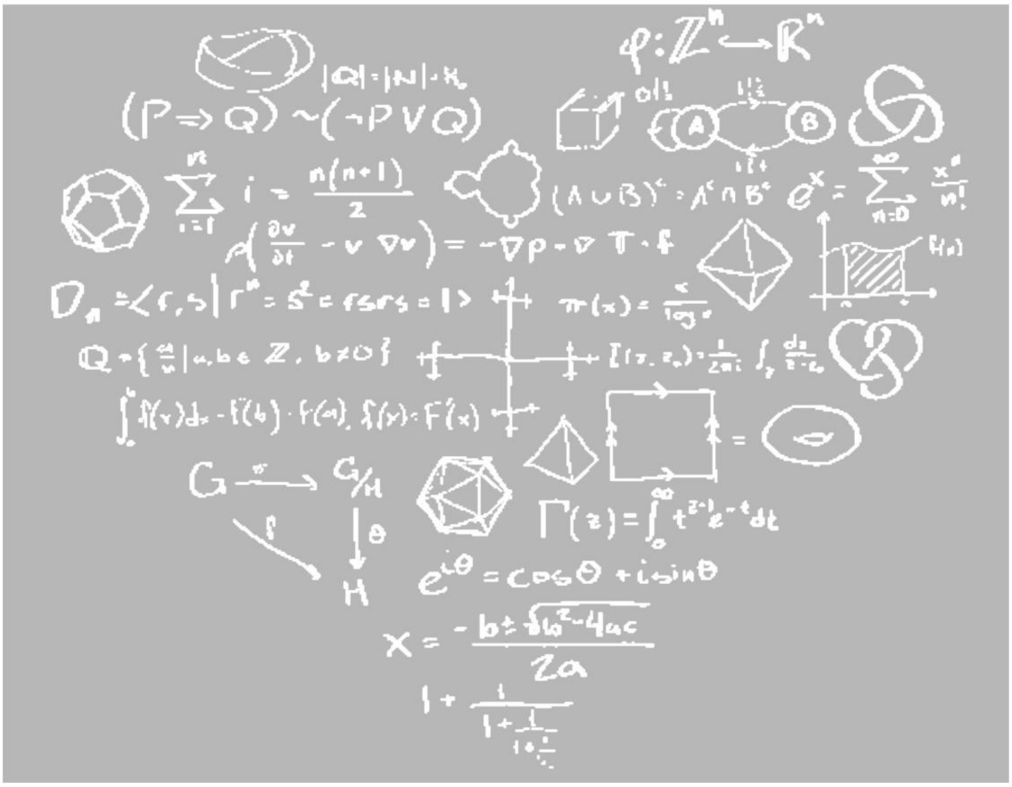
2019年第一学期版

线性代数

期末小助手



仲英学业辅导中心出品

学辅公众号

学粉群 5.1

线性代数小助手

编写人员:(根据编写章节顺序排名) 电气 87 赵寒亭, 电气 88 林秉烽, 自动化 82 齐立鹏, 统计 81 孔令杰, 电气 811 杨洲畅, 自动化 86 张亦斌, 自动化 83 谭维玮, 应数 81 刘克

排版人员: 数试 81 王辰扬

感谢学业辅导中心各位工作人员与志愿者的努力工作, 使本资料可以按时完工. 由于编者们的能力与精力限制, 以及本资料是仲英学业辅导中心首次采用 LaTeX 排版, 难免有错误之处. 如果同学们在本资料中发现错误, 请联系仲英学业辅导中心: **XJTUzyxuefu@163.com**, 我们将在修订时予以更正.

从第 3 周开始, **每晚 19:30-21:30**, 学辅志愿者在东 21 舍 118 学辅办公室值班, 当面为学弟学妹们答疑.

同时, 我们也有线上答疑平台——学粉群.

18 级学粉群：646636875, 928740856;

19 级学粉群：902493560,756433480.

期中考试与期末考试前, 我们还会举办考前讲座. 学辅还有新生专业交流会, 转专业交流会, 英语考试讲座等活动, 消息会在学粉群和公众号上公布, 欢迎同学们参与.

仲英书院学业辅导中心

2019 年 9 月 23 日

目录

第四章 n 维向量与线性方程组 **1**

4.1 知识点总结与例题详解 1

4.2 练习题 5

4.2.1 基础组 5

4.2.2 提高组 7

第五章 线性空间与欧氏空间 **11**

5.1 线性空间 11

5.1.1 线性空间定义 11

5.1.2 线性空间的基本性质 12

5.1.3 几种常见的线性空间 12

5.1.4 线性子空间 12

5.1.5 基, 维数与向量的坐标 13

5.2 基变换与坐标变换 15

5.2.1 过渡矩阵 15

5.2.2 坐标变换公式 16

5.3 线性空间的同构 16

5.3.1 同构映射的定义 17

5.3.2 同构映射的性质 17

5.4 子空间的交与和 17

5.4.1 子空间的交 17

5.4.2 子空间的和 18

5.4.3 维数公式 18

5.5 内积与欧氏空间 18

5.5.1 内积与欧氏空间的定义 18

5.5.2 几种典型的欧氏空间 19

5.5.3 范数, 夹角, 正交和距离 19

5.6 标准正交基 20

5.6.1 正交向量组, 标准正交向量组 20
5.6.2 格拉姆–施密特正交化 21
5.7 正交矩阵 21
5.7.1 正交矩阵的定义与性质 21
5.7.2 正交变换 22
5.8 矩阵的 QR 分解 22
5.9 正交分解 23
5.9.1 正交, 正交补 23
5.9.2 射影 23
5.10 练习题 23

第六章 特征值与特征向量 27
6.1 知识点总结与例题 27
6.1.1 特征值, 特征向量相关概念与求解 27
6.1.2 概念与求解相关例题 28
6.1.3 特征值, 特征向量相关性质与结论 29
6.1.4 性质与结论相关例题 30
6.1.5 相似矩阵与矩阵的对角化 30
6.1.6 相似矩阵与矩阵的对角化相关例题 31
6.1.7 实对称矩阵 33
6.1.8 实对称矩阵相关例题 34
6.2 练习题 35

第七章 二次曲面与二次型 39
7.1 知识点与例题 39
7.1.1 曲面与空间曲线的方程 39
7.1.2 柱面 39
7.1.3 锥面 40
7.1.4 旋转面 41
7.1.5 五种典型的二次曲面 42
7.1.6 曲线在坐标面上的投影 43
7.1.7 二次型 44
7.1.8 二次型的标准型 44
7.1.9 合同矩阵 46
7.1.10 正定二次型与正定矩阵 47
7.1.11 推论 47

7.2 练习题 49
7.2.1 基础篇 49
7.2.2 提高篇 50

第八章 线性变换 53

8.1 线性变换及其运算 53
8.1.1 线性变换 53
8.1.2 线性变换基本性质 54
8.1.3 线性变换的运算 54
8.1.4 线性变换的核与值域 55
8.2 线性变换的矩阵表示 56
8.2.1 线性变换的矩阵 56

第四章　n 维向量与线性方程组

4.1　知识点总结与例题详解

1. $(\star\star\star)$ 可将 n 元线性方程组写成矩阵形式 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$.$\boldsymbol{A}$ 为系数矩阵,$\bar{\boldsymbol{A}}$ 为增广矩阵.$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有唯一解 $\iff r(\boldsymbol{A})=r(\bar{\boldsymbol{A}}<n)$. 当 $\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$ 时存在无解情形:$r(\bar{\boldsymbol{A}})>r(\boldsymbol{A})$.

   例 4.1.1 求解齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$, 其中

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&2&3&-1\\2&5&1&-1\\-3&-8&a-1&1\\3&7&4&b-1\end{bmatrix}$$

   .

   解　将 $\boldsymbol{A}$ 做初等行变换得

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&2&3&-1\\2&5&1&-1\\-3&-8&a-1&1\\3&7&4&b-1\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}1&2&3&-1\\0&1&-5&1\\0&0&a-2&0\\0&0&0&b+1\end{bmatrix}$$

   (a) $a\neq2,b\neq-1$ 时方程有唯一解 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$;

   (b) $a=2,b\neq-1$ 时方程通解为 $\boldsymbol{x}=c(-13,5,1,0)^T$;

   (c) $a\neq2,b=-1$ 时方程通解为 $\boldsymbol{x}=c(3,-1,0,1)^T$;

   (d) $a=2,b=-1$ 时方程通解为 $\boldsymbol{x}=c_1(-13,5,1,0)^T+c_2(3,-1,0,1)^T$.

2. $(\star)$ 封闭的定义: 一般地, 如果数的集合 F 中任何两个数作某一运算的结果都仍是 F 中的数, 则称数集 F 对这个运算是封闭的.

3. ($\star$) 数域的定义: 如果集合 $k \subseteq \mathbb{C}$ 满足以下条件, 则称 K 是一个数域:

   (a) $0, 1 \in K$;

   (b) 若 $a, b \in K$, 则 $a \pm b, ab \in K$;

   (c) 若 $a \in K$ 且 $a \neq 0$, 则 $\frac{1}{a} \in K$.

   常见的数集中, $\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$ 都是数域, $\mathbb{Z}, \mathbb{N}, \mathbb{N}_+$ 都不是数域.

4. ($\star\star$) 线性表示与线性组合: 设 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n$ 是数域 K 上的线性空间 V 中的有限个向量, 对于向量 $\boldsymbol{x} \in V$, 如果存在 $c_1, c_2, \ldots, c_n \in K$, 使得 $\boldsymbol{x} = c_1\boldsymbol{x}_1 + \cdots + c_n\boldsymbol{x}_n$, 则称 $\boldsymbol{x}$ 可以由 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n$ 线性表示, 或者 $\boldsymbol{x}$ 是 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n$ 的一个线性组合.

5. ($\star\star\star$) 向量组之间线性表示与向量组等价: 设有两个向量组 (I):$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$, (II):$\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_r$, 若 (I) 中的每个向量都能被 (II) 线性表示, 则 (I) 可由 (II) 线性表示, 若两个向量组能互相线性表示, 则称两个向量组等价.

6. ($\star$) 等价向量组的基本性质: 自反性, 对称性, 传递性.

7. ($\star\star\star\star$) 线性相关: 设 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ 是一组向量. 如果存在一组不全为 0 的常数 $k_1, \ldots, k_s$, 使得 $k_1\alpha_1 + \ldots + k_s\alpha_s = \mathbf{0}$, 则称向量组 $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ 线性相关.

   例 4.1.2 *设 A 为 $m \times n$ 矩阵,B 为 $n \times p$ 矩阵, 矩阵 $C = AB$, 证明*

   (a) 若 A, B 的列 (行) 向量组均是线性无关的, 则 C 的列 (行) 向量组也是线性无关的.

   (b) 若 B 的列向量组是线性相关的, 则 C 的列向量组也是线性相关的.

   证明

   (a) 由 A 为列满秩则 AB 和 B 的秩相同, 即 $r(A) = n, r(B) = p, r(AB) = r(C) = r(B) = p$. 则 C 为列满秩, C 的列向量线性无关; 同理, 当 B 为行满秩时, AB 和 A 的秩相同, $r(AB) = r(C) = r(A) = m$, C 为行满秩, C 的行向量线性无关.

   (b) 由 B 的列向量线性相关得到 $r(B) < p$ 则 $r(AB)\ r(B) < p$, 故 AB 列向量线性相关.

8. ($\star\star\star\star$) 线性无关: 若仅在 $k_1, k_2, \ldots, k_s$ 全为 0 时才有 $k_1\alpha_1 + \ldots + k_s\alpha_s = \mathbf{0}$, 则称向量组 $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ 线性无关.

   例 4.1.3 *若 n 元齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax} = \mathbf{0}$ 有 n 个线性无关的解向量, 求 A.*

解 由已知, 方程组 $\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$ 有 n 个线性无关的解向量 $\eta_1,\eta_2,\ldots,\eta_n$, 所以矩阵 $\boldsymbol{B}=(\eta_1,\eta_2,\ldots,\eta_n)$ 可逆, 且 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{A}(\eta_1,\eta_2,\ldots,\eta_n)=\boldsymbol{O}$, 所以 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$.

9. ($\star$) 向量组 $\alpha_1,\ldots,\alpha_s$ 线性相关 (线性无关) $\Longleftrightarrow$ 齐次线性方程组 $x_1\alpha_1+\cdots+x_s\alpha_s=0$ 有非零解 (只有零解) $\Longleftrightarrow$ $(\alpha_1,\ldots,\alpha_s)\boldsymbol{x}=0$ 有非零解 (只有零解) $\Longleftrightarrow$ 矩阵 $A=(\alpha_1,\ldots,\alpha_s)$ 的秩小于 s (等于 s).

10. ($\star$)n 个 n 维向量 $\alpha_1,\ldots,\alpha_s$ 线性相关 (线性无关) 等价于 $\det(\alpha_1,\ldots,\alpha_s)=0(\neq 0)$.

11. ($\star$) 若 $s>n$ 则 s 个 n 维向量 $\alpha_1,\ldots,\alpha_s$ 必定线性相关. 特别地,$n+1$ 个 n 维向量一定线性相关.

12. ($\star$) 一个向量 α 线性相关 (线性无关) $\Longleftrightarrow$ $\alpha=0(\neq 0)$.

13. ($\star\star$) 向量组 $\alpha_1,\ldots,\alpha_s(s\geq 2)$ 线性相关的充要条件是该向量组中至少存在一个向量可由其余 $s-1$ 个向量线性表示.

14. ($\star\star$) 若向量组 $\alpha_1,\ldots,\alpha_s$ 线性无关, 而向量组 $\alpha_1,\ldots,\alpha_s,\beta$ 线性相关, 则 β 可由 $\alpha_1,\ldots,\alpha_s$ 唯一线性表示.

15. ($\star$) 如果 $\alpha_1,\ldots,\alpha_s$ 有一个部分组 (非空子集) 线性相关, 则向量组 $\alpha_1,\ldots,\alpha_s$ 线性相关. 因为零向量是线性相关的, 所以含零向量的向量组一定线性相关.

16. ($\star$) 如果向量组 (I),(II) 都线性无关且等价, 则 (I)(II) 所含向量个数相等.

17. ($\star\star$) 极大线性无关组: 如果向量组 U 有一个部分组 U' 满足

    (a) U' 线性无关;

    (b) U 中任意一个向量 α 都可以用 U' 中的元素线性表示.

    则称 U' 是 U 的一个极大线性无关组.

18. ($\star\star$) 同一个向量组的极大线性无关组所含向量个数必定相等.

19. ($\star$) 任意矩阵 A,$r(A)=A$的行秩$=A$的列秩.

20. ($\star$) 若向量组 U 可由向量组 U' 线性表示, 则 $r(U)\leq r(U')$.

推论 若向量组 U 与向量组 U' 等价, 则 $r(U)=r(U')$.

21. ($\star\star$) 对任意矩阵 $A_{m\times n},B_{m\times n}$, 有 $r(A+B)\leq r(A)+r(B)$; 对于矩阵 $A_{m\times n},B_{n\times p}$, 有 $r(AB)\leq\min\{r(A),r(B)\}$.

22. $(\star\star\star)$ 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m \times n$ 矩阵,$r(\boldsymbol{A}) = r < n$, 则 n 元齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 必存在基础解系, 且基础解系含有 $n - r$ 个向量.

例 4.1.4 设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 按列分块为 $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \end{bmatrix}$, 其中 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, $\alpha_4 = -\alpha_1 + 2\alpha_2$, 又向量 $\boldsymbol{b} = \alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 + 4\alpha_4$, 求解方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$.

解 显然 $r(\boldsymbol{A}) = 3$, 因此 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 解空间维数为 1. 由 $\alpha_4 = -\alpha_1 + 2\alpha_2$ 可知

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \boldsymbol{0}$$

所以 $\boldsymbol{x}_0 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ 是 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 的一个解. 由 $\boldsymbol{b} = \alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 + 4\alpha_4$ 可知 $\boldsymbol{x_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ 是 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 的一个解. 所以 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 的通解为

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_1 + c\boldsymbol{x}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

例 4.1.5 设矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 4 \end{bmatrix}$, 向量 $\alpha = \begin{bmatrix} a \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, 已知 $\boldsymbol{A}\alpha$ 与 α 线性相关, 求 a.

解 根据题目, 注意到 $\alpha \neq 0$, 可得存在数 λ 使得 $\boldsymbol{A}\alpha = \lambda\alpha$, 即

$$\begin{bmatrix} a \\ 2a + 3 \\ 3a + 4 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} a \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

所以 $a = -1$.

4.2 练习题

4.2.1 基础组

1. 设矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为满足 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$ 的任意两个非零矩阵, 则必有 ( )

   (a) $\boldsymbol{A}$ 的列向量组线性相关,$\boldsymbol{B}$ 的行向量组线性相关

   (b) $\boldsymbol{A}$ 的列向量组线性相关,$\boldsymbol{B}$ 的列向量组线性相关

   (c) $\boldsymbol{A}$ 的行向量组线性相关,$\boldsymbol{B}$ 的行向量组线性相关

   (d) $\boldsymbol{A}$ 的行向量组线性相关,$\boldsymbol{B}$ 的列向量组线性相关

2. 设 $\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$ 是非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 对应的齐次线性方程组, 下列结论正确的是 ( )

   (a) 若 $\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$ 有非零解, 则 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有无穷多解

   (b) 若 $\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$ 仅有零解, 则 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有唯一解

   (c) 若 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有无穷多解, 则 $\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$ 仅有零解

   (d) 若 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有无穷多解, 则 $\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$ 有非零解

3. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵,$\boldsymbol{B}$ 是 $n\times m$ 矩阵, 则线性方程组 $(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$( )

   (a) 当 $n>m$ 时仅有零解

   (b) 当 $n>m$ 时必有非零解

   (c) 当 $m>n$ 时仅有零解

   (d) 当 $m>n$ 时必有非零解

4. 设 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3$ 是线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$ 的基础解析, 则下列向量组中可以作为 $\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$ 的基础解系的是 ( )

   (a) $\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{a}_1+2\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a}_3$

   (b) $\boldsymbol{a}_1-\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_2-\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{a}_3-\boldsymbol{a}_1$

   (c) $\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a}_3,2\boldsymbol{a}_1+3\boldsymbol{a}_2+4\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{a}_1+2\boldsymbol{a}_2+5\boldsymbol{a}_3$

   (d) $\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a}_3,2\boldsymbol{a}_1-3\boldsymbol{a}_2+2\boldsymbol{a}_3,3\boldsymbol{a}_1+5\boldsymbol{a}_2-5\boldsymbol{a}_3$

5. 设 4 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 按列分块为 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{a}_4)$, 其中 $\boldsymbol{a}_1=(-3,5,2,1)^T,\boldsymbol{a}_2=(4,-3,7,-1)^T$. 若 $\boldsymbol{A}$ 行等价于 $\boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}1&0&2&1\\0&1&1&3\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$, 则向量 $\boldsymbol{a}_3=$____, $\boldsymbol{a}_4=$____.

6. 已知向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 的秩为 2, 则向量组 $\beta_1 = \alpha_1 - \alpha_2$, $\beta_2 = 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + 4\alpha_3$, $\beta_3 = 5\alpha_1 + 6\alpha_2 + 7\alpha_3$ 的秩为 ____.

7. 已知向量 $(1, a, a^2)^T$ 可由向量组 $(a+1, 1, 1)^T, (1, a+1, 1)^T, (1, 1, a+1)^T$ 线性表示且表示方式不唯一, 则 $a =$____.

8. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 级矩阵, 已知非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 有不同解 η_1, η_2, η_3, 且 $\boldsymbol{A}^* \neq 0$, 则方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 的基础解系所含向量个数为 ____.

9. 用消元法求方程

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 4x_3 - 3x_4 = -4 \\ x_1 + x_3 - x_4 = -3 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ 7x_1 + 7x_3 - 3x_4 = 3 \end{cases}$$

10. 已知齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 和 $\boldsymbol{Bx} = \boldsymbol{0}$ 同解, 证明 $r(\boldsymbol{A}) = r(\boldsymbol{B})$.

11. 求解方程组

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ 4x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 2 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 1 \end{cases}$$

12. 求齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 5x_3 - x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 - x_5 = 0 \\ 3x_1 - x_2 + 8x_3 + x_4 + 2x_5 = 0 \\ x_1 + 3x_2 - 9x_3 + 7x_4 - 3x_5 = 0 \end{cases}$$

的基础解系和通解.

13. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵, 齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 有两个线性无关的解,$\boldsymbol{A}^*$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵, 则有

    (a) $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 的解均为 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 的解.

    (b) $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 的解均为 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 的解.

    (c) $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 和 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 没有非零公共解.

    (d) $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 和 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 恰有 1 个非零公共解.

14. 设线性方程组 $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=0 \\ x_1+2x_2+ax_3=0 \\ x_1+4x_2+a^2x_3=0 \end{cases}$ 与方程 $x_1+2x_2+x_3=a-1$ 有公共解, 则 a=____.

4.2.2 提高组

15 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵 $(n \geq 2)$, 对任意的 n 维向量 $\boldsymbol{a}$ 均有 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$, 则 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系中所含向量个数 k 应满足 ____.

16 齐次方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 以 $\eta_1=(1,0,1)^T, \eta_2=(0,1,-1)^T$ 为基础解系, 则系数矩阵 $\boldsymbol{A}=$____.

参考答案

1. (a)
解析: 由题意,$r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{B}) \leq n$ 且 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均为非零矩阵. 则 $r(\boldsymbol{A}) \geq 1, r(\boldsymbol{B}) \geq 1$, 于是 $r(\boldsymbol{A}) \leq n-1$, $\boldsymbol{A}$ 的列向量组线性相关. 同理 $\boldsymbol{B}$ 的列向量组线性相关.

2. (d)
解析:$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 有非零解, 表示 $r(\boldsymbol{A})<n$, $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有无穷多解或者是无解.
$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 仅有零解, 表示 $r(\boldsymbol{A})=n$, $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 可能有唯一解或者是无解.
$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有无穷多解, 则 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有非零解.

3. (d) 解析:$\boldsymbol{AB}$ 为 $m \times m$ 矩阵,$r(\boldsymbol{AB}) \leq r(\boldsymbol{A}) \leq n$, 若 $m>n$, 则 $\boldsymbol{AB}$ 必然不满秩.

4. (c) 解析: 逐一检查各个向量组是否线性相关.

5. $(2,7,11,3)^T, (9,-4,23,4)^T$
解析: 由 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 行等价可得 $\boldsymbol{a}_3=2\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_4=\boldsymbol{a}_1+3\boldsymbol{a}_2$.

6. 2 解析: 过渡矩阵满秩, 所以两个向量组等价, 秩相等.

7. 0
解析: 向量向量 $(1,a,a^2)^T$ 可由向量组 $(a+1,1,1)^T, (1,a+1,1)^T, (1,1,a+1)^T$ 不唯一表示即方程组

$$\begin{cases} (a+1)x_1+x_2+x_3=1 \\ x_1+(a+1)x_2+x_3+a \\ x_1+x_2+(a+1)x_3=a^2 \end{cases}$$

有不唯一解, 即系数矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a+1 & 1 & 1 \\ 1 & a+1 & 1 \\ 1 & 1 & a+1 \end{bmatrix}$ 行列式为 0, 即 $\det A = a^2(a+3) = 0$, 所以 $a = 0, -3$. 而 $a = -3$ 时,$r([\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}]) \neq r(\boldsymbol{A})$, 所以方程组无解, 故 $a = 0$.

8. 1

   解析: 方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 有不同解说明 $\boldsymbol{A}$ 不满秩, 又 $\boldsymbol{A}^* \neq \boldsymbol{O}$ 说明 $r(\boldsymbol{A}) = n-1$, 所以 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 基础解系所含向量个数为 1.

9. 对 $\boldsymbol{A}$ 做行变换可得

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 & -3 & -4 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & -3 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 7 & 0 & 7 & -3 & 3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

   所以方程组的解为 $x_1 = 3 - x_3, x_2 = 2x_3 - 8, x_4 = 6$

10. 由两个方程组同解得 $n - r(\boldsymbol{A}) = n - r(\boldsymbol{B})$, 故 $r(\boldsymbol{A}) = r(\boldsymbol{B})$.

11. 对 $\boldsymbol{A}$ 做行变换可得

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & -2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

   所以方程的通解为 $x = (\frac{1}{2}, 0, 0, 0)^T + c_1(-\frac{1}{2}, 1, 0, 0)^T + c_2(\frac{1}{2}, 0, 1, 0)^T$.

12. 基础解系 $\eta_1 = (-\frac{3}{2}, \frac{7}{2}, 1, 0, 0)^T, \eta_2 = (-1, -2, 0, 1, 0)^T$, 通解 $\boldsymbol{x} = c_1(-\frac{3}{2}, \frac{7}{2}, 1, 0, 0)^T$ $+c_2(-1, -2, 0, 1, 0)^T$.

13. (b)

    解析: 注意到 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 有两个线性无关的解, 故 $r(\boldsymbol{A}) \leq n-2$, 因此 $\boldsymbol{A}^* = \boldsymbol{O}$.

14. 1 或 2.

15. $k \geq 2$.

    解析: 由对任意 a 都有 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$ 可得 $\boldsymbol{A}^* = \boldsymbol{O}$, 因此 $r(bmA) \leq n-2$, 转化为解空间维数即可.

16. $\begin{bmatrix} -k & k & k \\ -l & l & l \\ -m & m & m \end{bmatrix}$, 其中 k, l, m 不全为 0.

解析: 将基础解系 (解空间维数) 转化为系数矩阵的秩可知 $r(\boldsymbol{A}) = 1$, 然后设出 $\boldsymbol{A}$ 行向量组, 列线性方程组求基础解系即可.

第五章　线性空间与欧氏空间

5.1　线性空间

线性空间的定义, 基本性质等内容虽然篇幅较长, 但都容易理解, 很多规律在学习线性空间之前就早已被习惯, 在考试中直接出现的可能性较小. 线性子空间是考试中可能会出现的知识点. 线性空间的基与维数是本章中最热门的考点, 几乎每一次考试都会有所涉及.

5.1.1　线性空间定义

($\star\star$) 设 V 是一个非空集合,K 是一个数域, 如果 V 上规定了加法运算和数乘运算 (对加法运算和数乘运算封闭) 且满足以下 **8 条运算规律** (加法四条, 乘法四条), 那么称 V 是数域 K 上的线性空间.

1. 加法交换律: $\alpha+\beta=\beta+\alpha, \forall\alpha,\beta\in V$;
2. 加法结合律: $\alpha+(\beta+\gamma)=(\alpha+\beta)+\gamma, \forall\alpha,\beta,\gamma\in V$;
3. 零元素: $\exists 0\in V, s.t. \forall\alpha\in V, \alpha+0=\alpha$. 这样的元素 0 称为零元素.
4. 负元素: $\forall\alpha\in V, \exists\beta\in V, s.t. \alpha+\beta=0$, 这样的元素 β 称为 α 的负元素.
5. 1 数乘: $1\alpha=\alpha, \forall\alpha\in V$;
6. 数乘结合律: $(kl)\alpha=k(l\alpha), \forall\alpha\in V, k,l\in K$.
7. 数乘分配律 1: $(k+l)\alpha=k\alpha+l\alpha, \forall\alpha\in V, k,l\in K$.
8. 数乘分配律 2: $k(\alpha+\beta)=k\alpha+k\beta, \forall\alpha,\beta\in V, k\in K$.

注意　在线性空间中, 加法, 数乘, 零元素, 负元素这些概念都是人为定义的. 假如 V 中的元素都是向量, 一般情况下与这些定义与我们平常见到的向量的加法, 数乘等等一致. 以下例子介绍了一种例外的情况:

例 5.1.1 定义 $\mathbb{R}^+$ 上的 *"加法"*:$a \oplus b = ab$, 与 $\mathbb{R}$ 中元素的 *"数乘"*:$k \otimes a = a^k$(两个等式右端均为常义运算). 在这样的 "加法" 和 "数乘" 定义下, 可以验证 $\mathbb{R}^+$ 是 $\mathbb{R}$ 上的线性空间, 零元素为 1, 任意元素 a 的负元素为 $\frac{1}{a}$.

5.1.2 线性空间的基本性质

$(\star\star)$

1. 零元素唯一;

2. 任意元素的负元素唯一;

3. 如果 $k\alpha = 0$, 那么 $k = 0$ 或 $\alpha = 0$.

5.1.3 几种常见的线性空间

$(\star\star\star)$

1. $K^n, \mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n$ 分别是 $K, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ 上的线性空间, 其中 K 是任意数域, 下同.

2. 全体 $m \times n$ 矩阵是 K 上的线性空间.

3. 线性方程组 $\boldsymbol{Ax} = \mathbf{0}$ 的解构成一个线性空间, 称为这个线性方程组的解空间.

4. 对于数域 K 线性空间 V 中任意向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$, 集合

$$\{k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2, \ldots, k_s\alpha_s | k_1, k_2, \ldots, k_s \in K\}$$

   对于 V 上的加法和数乘也成为数域 K 上的一个线性空间 (并且是 V 的子空间), 称为向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ 生成 (或张成) 的空间, 记作 $\mathrm{span}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s)$.

5.1.4 线性子空间

$(\star\star\star)$

定义 V 是线性空间,W 是 V 的非空子集. 如果 W 按 V 中定义的线性运算也构成线性空间, 那么 W 是 V 的线性子空间.

性质 子空间对大空间中的线性运算 (加法和数乘) 封闭.

例 5.1.2 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & -2 & 1 & 1 & 2\\ -1 & 3 & 0 & 2 & -2\\ 0 & 1 & 1 & 3 & 4\\ 1 & 2 & 5 & 13 & 5\end{bmatrix}$ 的第 j 列为 $\boldsymbol{a}_j, j=1,\dots,5$.

1. 证明 $W=\{\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}|\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^5\}$ 是 $\mathbb{R}^4$ 的子空间.

2. 求 W 的一个基和维数.

3. 求 $\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{a}_4$ 在该基下的坐标.

解

1. $W=\operatorname{span}(\boldsymbol{a}_1,\dots,\boldsymbol{a}_5)$, 逐条验证 8 条性质即可.(略)

2. 对 $\boldsymbol{A}$ 作初等行变换可得
$$\boldsymbol{A}\to\begin{bmatrix}1 & 0 & 3 & 7 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$
所以 W 的一个基为 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_5,\dim W=3$.

3. $\boldsymbol{a}_3=3\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_4=7\boldsymbol{a}_1+3\boldsymbol{a}_2$, 所以 $\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{a}_4$ 在该基下坐标分别是 $(3,1,0)^T,(7,3,0)^T$.

注 第一问的证明用到了子空间的充要条件. 第三问中, 已经知道了 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_5$ 是 W 的一个基, 求另外两个向量在这个基下的坐标, 也就是用这个基分别线性表示这两个向量.

5.1.5 基, 维数与向量的坐标

$(\star\star\star\star\star)$

定义 如果线性空间 V 中存在一组向量 $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n$ 线性无关, 而且任意的 $\alpha\in V$ 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n$ 线性表示为 $\alpha=x_1a_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_n\alpha_n$, 则称 $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n$ 为 V 的一个基, 基中所含向量个数 n 为 V 的维数, 记为 dim $V=n$, 称 V 为 n 维线性空间,n 个有序数 $x_1,x_2,x_3\dots x_n$ 为向量 α 在基 $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n$ 下的坐标.

性质

1. 线性空间的基不唯一, 但维数唯一确定.

2. 对于 n 维线性空间 V, V 中任意 n 个线性无关的向量都是 V 的基.

3. 对于生成子空间 $\operatorname{span}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ 的极大无关组与秩分别是 W 的基与维数.

4. n 元齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax} = \mathbf{0}$ 的基础解系就是它的解空间的基, 基础解系所含向量个数 $n - r(\boldsymbol{A})$ 就是解空间的维数.

注 第二条性质告诉我们, 要证明 n 个向量构成 n 维线性空间 V 的基, 只需要证明他们线性无关.

例 5.1.3 设 $T \in L(\mathbb{R}^3)$, $T(x_1, x_2, x_3)^T = (x_1 + 2x_2 - x_3, x_2 + x_3, x_1 + x_2 - 2x_3)^T$, 求 T 的值域的一组基, 并指出 T 的秩.

解 由题意得

$$\begin{aligned} R(T) &= \left\{(x_1 + 2x_2 - x_3, x_2 + x_3, x_1 + x_2 - 2x_3)^T \mid x_1, x_2, x_3 \in R\right\} \\ &= \operatorname{span}\left\{(1,0,1)^T, (2,1,1)^T, (-1,1,-2)^T\right\} \end{aligned}$$

而

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

所以 $R(T)$ 的一组基为 $(1,0,1)^T, (2,1,1)^T$, 维数为 2.

例 5.1.4 齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$$

的解空间的维数为 ____.

解 该方程可以写作

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 & 0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = 0$$

即 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$, 其中 $r(\boldsymbol{A}) = 2$, 则维数为 $n - r(\boldsymbol{A}) = 3$.

例 5.1.5 $1+x, x+x^2, x^2-1$ 是否可作为 $\operatorname{span}(1+x, x+x^2, x^2-1)$ 的一个基? 求 $\operatorname{span}(1+x, x+x^2, x^2-1)$ 的基与维数.

解

$$(1+x, x+x^2, x^2-1) = (1, x, x^2) \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

而

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

所以 $1+x, x+x^2, x^2-1$ 不能作为 $\operatorname{span}(1+x, x+x^2, x^2-1)$ 的一个基, 维数是 2, 其中任意两个线性无关的向量都可以作为它的基.

例 5.1.6 $\mathbb{R}^{2\times 2}$ 的子空间 $\left\{ \begin{bmatrix} a+b & a \\ 0 & b \end{bmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$ 的维数为

解 $\begin{bmatrix} a+b & a \\ 0 & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & a \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, a, b \in \mathbb{R}$, 所以维数为 2.

注 要求出维数, 就是要把向量写成几个线性无关的向量的线性表示.

5.2 基变换与坐标变换

$(\star\star\star)$ 本节在考试中常常涉及过渡矩阵, 需要使用坐标变换公式.

5.2.1 过渡矩阵

n 维线性空间 V 中, 基 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ 到基 $\beta_1, \beta_2, ...\beta_n$ 的过渡矩阵为 $A = (a_{ij})_{n\times n}$, 则基变换公式为 $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n) = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)A$, 且基 $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ 到基 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, a_n$

的过渡矩阵 B 满足 $AB = I$.

5.2.2 坐标变换公式

设 n 维线性空间 V 的基 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ 到基 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$ 的过渡矩阵为 A, 基 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ 下的坐标为 $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T$, 基 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$ 下的坐标为 $y = (y_1, y_2, \cdots, y_n)^T$, 则有 $x = Ay$.

例 5.2.1 已知线性空间 $\mathbb{R}^3$ 的基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 到基 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 的过渡矩阵为 P, 且

$$\alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \alpha_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \alpha_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

1. 求 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$;

2. 设向量 $\delta \in \mathbb{R}^3$ 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 与基 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 下由相同的坐标, 求 δ.

解

1. 由坐标变换公式

$$(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

所以

$$\beta_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \beta_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \beta_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

2. 设所求向量坐标为 x, 则 $Ax = APx$, 即 $A(P-I)x = \mathbf{0}$, 由于 A 可逆, 故 $(P-I)x = 0$. 由于

$$P - I = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

所以 $x = k(1, -2, 1)^T$, 所以 $\delta = k(\alpha_1 - 2\alpha_2 + \alpha_3) = k(1, -1, 0)^T$.

5.3 线性空间的同构

($\star\star$) 本节内容重在理解, 考试中很少直接就同构本身出题.

5.3.1 同构映射的定义

映射 $f: V_1 \to V_2$ 满足

1. f 是双射,
2. $f(\alpha+\beta) = f(\alpha) + f(\beta), \forall \alpha, \beta \in V_1$,
3. $f(k\alpha) = kf(\alpha), \forall \alpha \in V, k \in K$.

那么就说 V_1, V_2 同构.

在 n 维线性空间 V 中, 向量与它的坐标的对应就是同构映射.

5.3.2 同构映射的性质

f 是线性空间 V_1 到 V_2 的同构映射, 则

1. $f(0_1) = 0_2, 0_1, 0_2$ 分别是 V_1, V_2 中的零元素.
2. $f(-\alpha) = -f(\alpha), \forall \alpha \in V$.
3. $f\left(\sum\limits_{i=1}^{m} k_i\alpha_i\right) = \sum\limits_{i=1}^{m} f(k_i\alpha_i), \forall \alpha_i \in V, k_i \in K$.
4. 线性相关向量组的像线性相关, 线性无关向量组的像线性无关.
5. 自反性: 线性空间与自身同构.
6. 对称性: 若 V_1 与 V_2 同构, 则 V_2 与 V_1 同构.
7. 传递性: 若 V_1 与 V_2 同构,V_2 与 V_3 同构, 则 V_1 与 V_3 同构.
8. 两个有限维线性空间同构 $\Longleftrightarrow$ 它们的维数相同.
9. 扩充定理: 设 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ 是 n 维线性空间 V 中的一个线性无关向量组,$r < n$, 则一定可以由 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ 扩充得到 V 的一个基.

5.4 子空间的交与和

($\star\star$) 本节内容在考试中出现较少.

5.4.1 子空间的交

若 V_1, V_2 都是 V 的子空间, 则 $V_1 \cap V_2$ 也是 V 的子空间, 称为 V_1, V_2 的交空间.

5.4.2 子空间的和

子空间和的定义

设 V_1 与 V_2 都是 V 的子空间,V_1 与 V_2 的和空间定义为 $\{\alpha+\beta \mid \alpha \in V_1, \beta \in V_2\}$, 记为 V_1+V_2, 则 V_1+V_2 也是 V 的子空间.

子空间直和的定义

如果 V_1+V_2 中的每个向量 α 表示成 V_1 中的向量 α_1 与 V_2 中向量 α_2 的和 $\alpha=\alpha_1+\alpha_2$ 的表示方法唯一, 则称 V_1+V_2 为 V_1 与 V_2 的直和, 记为 $V_1 \oplus V_2$.

重要性质 V_1+V_2 为直和 $\Longleftrightarrow V_1 \cap V_2 = 0$

5.4.3 维数公式

对线性空间 V 的任意有限维子空间 V_1, V_2,

$$\dim V_1 + \dim V_2 = \dim(V_1+V_2) + \dim(V_1 \cap V_2)$$

特别地, 若它们的和为直和, 则

$$\dim V_1 + \dim V_2 = \dim(V_1 \oplus V_2)$$

5.5 内积与欧氏空间

在学习内积时, 可以类比向量的内积, 从而易于理解和记忆. 几种典型的欧氏空间在考试中经常出现.

5.5.1 内积与欧氏空间的定义

$(\star\star)$

V 是一个实线性空间, 如果映射 $\langle\cdot,\cdot\rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ 满足

1. 对称性: $\langle\alpha,\beta\rangle = \langle\beta,\alpha\rangle$,
2. 可加性: $\langle\alpha+\beta,\gamma\rangle = \langle\alpha,\gamma\rangle + \langle\beta,\gamma\rangle$,
3. 齐次性: $\langle k\alpha,\beta\rangle = k\langle\alpha,\beta\rangle$,
4. 非负性: $\langle\alpha,\alpha\rangle \geq 0$ 且等号成立当且仅当 $\alpha = 0$.

则称映射 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 是 V 上的内积, 带有内积 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 的实线性空间 V 称为欧氏空间.

注 一定要注意, 内积是人为定义的, 同一个线性空间定义不同的内积可以形成完全不同的欧氏空间, 结构也完全不相同.

5.5.2 几种典型的欧氏空间

($\star\star$)

下面介绍几种常见的欧氏空间和其对应的内积:

1. n 维空间 $\mathbb{R}^n$ 上定义内积 $\langle\alpha,\beta\rangle=\alpha^T\beta$ (即 $\langle(a_1,\ldots,a_n)^T,(b_1,\ldots,b_n)=\sum\limits_{k=1}^{n}a_kb_k$), 成为一个欧氏空间.
2. n 阶实矩阵空间可以定义内积 $\langle A,B\rangle=\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}a_ib_j=\mathrm{tr}(AB)$, 成为一个欧氏空间.
3. 区间 $[a,b]$ 上的黎曼可积函数关于常义加法与和实数的常义乘法成为一个线性空间. 这个线性空间中可以定义内积 $\langle f,g\rangle=\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x$, 成为一个欧氏空间. 这个空间将会在高数下册的傅里叶 (Fourier) 变换中再次出现.

上面的三个内积都不是对应线性空间上唯一的内积, 但是它们是最常用的内积, 称为**标准内积**.

5.5.3 范数, 夹角, 正交和距离

($\star\star\star$)

欧氏空间中, 向量 α 的范数定义为 $\|\alpha\|=\sqrt{\langle\alpha,\alpha\rangle}$.

范数的性质

1. $\|\alpha\|\geq 0$ 且取等当且仅当 $\alpha=0$.
2. $\|k\alpha\|=|k|\|\alpha\|$.
3. 三角不等式: $\|\alpha+\beta\|\leq\|\alpha\|+\|\beta\|$.
4. **柯西-施瓦茨不等式** ($\star\star\star$): $|\langle\alpha,\beta\rangle|\leq\|\alpha\|\|\beta\|$

向量的夹角与距离

两个非零向量 α,β 的**夹角**定义为

$$\varphi=\arccos\frac{\langle\alpha,\beta\rangle}{\|\alpha\|\|\beta\|}$$

如果 $\langle\alpha,\beta\rangle=0$, 则称向量 α,β **正交** (垂直), 记作 $\alpha\perp\beta$.

两个向量 α,β 的距离定义为 $d(\alpha,\beta)=\|\alpha-\beta\|$.

勾股定理 两两正交的 m 个向量 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m$ 满足 $\left\|\sum\limits_{k=1}^{n}\alpha_k\right\|^2=\sum\limits_{k=1}^{n}\|\alpha_k\|^2$.

5.6 标准正交基

格拉姆-施密特正交化方法是一定要掌握的将一般向量组化为正交向量组的方法, 而正交向量组在之后的内容中也有重要的作用.

5.6.1 正交向量组, 标准正交向量组

($\star\star\star\star$)

欧式空间 V 中的一个向量组不含零向量且其中的向量两两正交, 则称它是一个**正交向量组**. 如果每一个向量都是单位向量, 称为**标准正交向量组**.

定理: 正交向量组必是线性无关向量组.

如果 V 是 n 维欧氏空间, 且正交向量组中向量的个数也为 n, 上述定义中的正交向量组称为正交基, 标准正交向量组称为**标准正交基**.

定理: 设 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ 是 n 维欧式空间 V 的一个标准正交基,α,β 是 V 中任意向量, 设 $\alpha=\sum\limits_{k=1}^{n}x_k\alpha_k,\beta=\sum\limits_{k=1}^{n}x_k\beta_k$, 则

1. $x_i=\langle\alpha,\alpha_i\rangle$,
2. $\langle\alpha,\beta\rangle=\sum\limits_{k=1}^{n}x_ky_k$,
3. $\|\alpha\|=\sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n}x_k^2}$,
4. $d(\alpha,\beta)=\sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n}(x_k-y_k)^2}$

这个定理说明了 n 维欧氏空间 V 与 $\mathbb{R}^n$ 的同构关系.

例 5.6.1 设 $\alpha_1=\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)^T,\alpha_2=\left(\frac{2}{3},-\frac{1}{3},-\frac{2}{3}\right)^T,\alpha_3=\left(\frac{1}{3},-\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)^T$, 证明 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 构成 $\mathbb{R}^3$ 的一组标准正交基, 并求 $\alpha=(1,2,0)^T$ 在这组基下的坐标.

解 令 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$, 则计算得 $AA^T=I$, 所以 A 是正交矩阵, 所以 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 构成 $\mathbb{R}^3$ 的一组标准正交基. 向量 α 在这组基下的坐标为 $\boldsymbol{x}=A^{-1}\alpha=A^T\alpha=(2,0,-1)^T$.

5.6.2 格拉姆–施密特正交化

($\star\star\star\star\star$)

设 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ 是 n 维欧几里地空间 V 的一个基, 令

$$\beta_1=\alpha_1$$
$$\beta_2=\alpha_2-\frac{\langle\alpha_2,\beta_1\rangle}{\langle\beta_1,\beta_1\rangle}\beta_1$$
$$\cdots$$
$$\beta_n=\alpha_n-\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\langle\alpha_n,\beta_k\rangle}{\langle\beta_k,\beta_k\rangle}\beta_k=\alpha_n-\frac{\langle\alpha_n,\beta_1\rangle}{\langle\beta_1,\beta_1\rangle}\beta_1-\frac{\langle\alpha_n,\beta_2\rangle}{\langle\beta_2,\beta_2\rangle}\beta_2-\cdots-\frac{\langle\alpha_n,\beta_{n-1}\rangle}{\langle\beta_{n-1},\beta_{n-1}\rangle}\beta_{n-1}$$

这样得到的向量组 $\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_n$ 是与 $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ 等价的正交向量组, 即 V 的一组正交基. 再单位化即可得到 V 的一组单位正交基. 这个转化过程称为格拉姆–施密特正交化.

例 5.6.2 *在次数不超过 2 的一元实多项式空间 $\mathbb{R}[x]_2$(加法与数乘为通常的多项式加法与数乘) 上定义内积 $\langle f,g\rangle=\int_0^1 f(x)g(x)\mathrm{d}x$ 成为欧氏空间, 求 $\mathbb{R}[x]_2$ 的一组标准正交基.*

解 取一个基 $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(1,x,x^2)$, 将其正交化:

$$\beta_1=\alpha_1=1$$
$$\beta_2=\alpha_2-\frac{\langle\alpha_2,\beta_1\rangle}{\langle\beta_1,\beta_1\rangle}\beta_1=x-\frac{1}{2}$$
$$\beta_3=\alpha_3-\frac{\langle\alpha_3,\beta_1\rangle}{\langle\beta_1,\beta_1\rangle}\beta_1-\frac{\langle\alpha_3,\beta_2\rangle}{\langle\beta_2,\beta_2\rangle}\beta_2=x^2-x+\frac{1}{6}$$

所以一组正交基为 β_1,β_2,β_3, 单位化得一组标准正交基

$$\eta_1=1,\eta_2=12x-6,\eta_3=\frac{60}{7}x^2-\frac{60}{7}x+\frac{10}{7}$$

注 注意在计算内积时按照题目的定义计算.

5.7 正交矩阵

正交矩阵的知识在考试中会与后面的内容综合考察.

5.7.1 正交矩阵的定义与性质

定义 满足 $A^TA=AA^T=I$ 的实方阵 A 称为正交矩阵.

基本性质 设 A, B 为同阶正交矩阵, 则

1. $\det A = \pm 1$,
2. $A^T = A^{-1}$,
3. A^T, A^* 均为正交矩阵,
4. AB 为正交矩阵,
5. A 为正交矩阵 $\Longleftrightarrow$ A 的行 (列) 向量组为标准正交向量组.

例 5.7.1 设矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$, 则为正交矩阵的是 $A, \frac{1}{3}A, \frac{1}{\sqrt{3}}$ 中的哪一个?

解 可以验证 A 的行, 列向量组均为正交向量组, 将 A 单位化可得答案是 $\frac{1}{3}A$.

注 本题的解决利用了上面的性质 5.

5.7.2 正交变换

定义 P 为 n 阶正交矩阵, 称 $\mathbb{R}^n$ 上的线性变换 $T\colon x \to Px$ 为一个正交变换.

一般欧几里得空间上的定义: 欧几里得空间 V 到自身的满射 A 如果保持内积不变, 即

$$\langle A(x), A(y) \rangle = \langle x, y \rangle$$

那么称 A 是一个欧几里地空间 V 上的一个正交变换. V 中的任意正交变换 A 在任意标准正交基 $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ 下的矩阵为正交矩阵.

在 $\mathbb{R}^n$ 上, 上述两个定义是等价的.

性质

1. 保持向量内积: $\langle T(x), T(y) \rangle = \langle x, y \rangle$, 用矩阵写就是 $\langle P(x), Py \rangle = \langle x, y \rangle$,
2. 保持向量内积: $\| T(x) \| = \|x\|$ 即 $\|Px\| = \|x\|$.

5.8 矩阵的 QR 分解

(不太考) 若 $m \times n$ 矩阵 A 的列向量组线性无关, 则 A 能被分成两个矩阵的乘积:$A = QR$, 其中 $m \times n$ 矩阵 Q 的列向量组是标准正交向量组,R 是可逆的 n 阶上三角矩阵. 如果 A 是 n 阶可逆方阵, 则 Q 成为 n 阶正交矩阵.

5.9 正交分解

5.9.1 正交, 正交补

$(\star\star)$

设 W_1, W_2 都是欧式空间 V 的子空间,$\alpha \in V$. 如果 α 与 W_1 中任何向量都正交, 则 $\alpha \perp W_1$. 如果 W_1 中任何向量都与 W_2 正交, 则 $W_1 \perp W_2$.

若 $W_1 \perp W_2$, 则 $W_1 \perp W_2 = \{0\}$.

正交补子空间:$W^{\perp} = \{\alpha \in V \mid \alpha \perp W\}$ 也是 V 的子空间, 称为 W 的正交补.

如果 W 是 V 的有限维子空间 (不要求 V 为有限维子空间), 则 $V = W \oplus W^{\perp}$.

5.9.2 射影

W 是 V 的有限维子空间, 设 $e_1, e_2, \cdots, e_m$ 是 W 的标准正交基.V 中任一向量 α 在子空间 W 上的正交射影为

$$\mathrm{Proj}_W \alpha = \sum_{k=1}^{m} \langle \alpha, e_i \rangle e_i$$

例 5.9.1 设向量 $\boldsymbol{a} = (1,1,1)^T, \boldsymbol{b} = (1,3,-3)^T$, 则向量 $\boldsymbol{b}$ 在向量 $\boldsymbol{a}$ 上的正交射影向量 $\mathrm{Proj}_{\boldsymbol{a}} \boldsymbol{b} =$____.

解 将 $\boldsymbol{a}$ 单位化得 $\boldsymbol{e} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, 则 $\mathrm{Proj}_{\boldsymbol{a}} \boldsymbol{b} = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$.

5.10 练习题

1. 已知 $\mathbb{R}^{2\times 2}$ 的子集 $W_1 = \left\{ \begin{bmatrix} a & 1 \\ 1 & b \end{bmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}, W_2 = \left\{ \begin{bmatrix} a & a+b \\ a+b & b \end{bmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$, 检验 W_1, W_2 分别是否为 $\mathbb{R}^{2\times 2}$ 的子空间, 如果是, 求子空间的维数和基.

2. 判断 $\mathbb{R}^3$ 的子集 $W_1 = \{(x, 2x, 3y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ 是否构成 $\mathbb{R}^3$ 的子空间.

3. 证明 $\mathbb{R}[x]_3$ 上的向量组 $x^3, x^3+x, x^2+1, x+1$ 是 $\mathbb{R}[x]_3$ 的一个基, 并求 $f = x^2+2x+3$ 在该基下的坐标.

4. 在欧氏空间 $C[-\pi, \pi]$(定义在 $[-\pi, \pi]$ 上的连续函数空间, 标准内积) 中, 求子空间 $W = \mathrm{span}(1, \cos x, \sin x)$ 的一个标准正交基.

5. 已知三维向量空间 $\mathbb{R}^3$ 中的两个向量 $\alpha_1 = (1,0,1)^T, \alpha_2 = (0,1,-1)^T$, 若 β_1, β_2 构成一个标准正交向量组, 且使得 $\mathrm{span}(\alpha_1, \alpha_2) = \mathrm{span}(\beta_1, \beta_2)$, 则 $\beta_1 =$____, $\beta_2 =$____. (写出一组可能值)

6. 在 $\mathbb{R}^3$ 上,W 是由 $\beta_1=(0,1,0)^T,\beta_2=(-4,0,3)^T$ 生成的子空间. 求向量 $\alpha=(1,1,1)^T$ 在 W 上的射影.

7. 与 $\alpha_1=(1,1,-1,1)^T,\alpha_2=(1,-1,-1,1)^T,\alpha_3=(2,1,1,3)^T$ 都正交的一个单位向量为 ____.

8. 矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&-1&2&3\\1&3&0&1\\0&1&-1&-1\\1&-4&-3&-2\end{bmatrix}$, 线性空间 $V=\{\boldsymbol{b}\mid\boldsymbol{b}\in F^4,\boldsymbol{Ax=b}\text{有解}\}$, 求 V 的基和维数.

9. 数域 $\mathbb{R}$ 上的三维线性空间 V 中,$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 是一组基, 若 $\alpha_1=\varepsilon_1-\varepsilon_2+2\varepsilon_3,\alpha_2=3\varepsilon_1-2\varepsilon_2+5\varepsilon_3,\alpha_3=2\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3$, 求 $\operatorname{span}(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ 的基和维数.

10. 在 $\mathbb{R}^{2\times2}$ 中所有二阶实对称矩阵组成的集合构成 $\mathbb{R}^{2\times2}$ 的一个子空间 W, 证明向量组 $A_1=\begin{bmatrix}1&-2\\-2&1\end{bmatrix},A_2=\begin{bmatrix}2&1\\1&3\end{bmatrix},A_3=\begin{bmatrix}4&-1\\-1&-5\end{bmatrix}$ 是 W 的一个基.

11. 设 4 维向量空间 $\mathbb{R}^4$ 的子空间 V 由向量组 $\alpha_1=(1,1,1,3)^T$, $\alpha_2=(-1,-3,5,1)^T$, $\alpha_3=(3,2,-1,4)^T$, $\alpha_4=(-2,6,10,2)^T$ 生成, 求 V 的基与维数.

参考答案

1. W_1 不是子空间,W_2 是子空间. 一组基为 $\begin{bmatrix}1&1\\1&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&1\\1&1\end{bmatrix}$, 维数为 2.

2. W_1 中任意向量可写成

$$(x,2x,3y)^T=(x,2x,0)^T+(0,0,3y)^T=x(1,2,0)^T+y(0,0,3)^T$$

所以 W_1 是由 $(1,2,0)^T,(0,0,3)^T$ 生成的子空间.

3. 证明: $(x^3,x^3+x,x^2+1,x+1)=(1,x,x^2,x^3)A=(1,x,x^2,x^3)\begin{bmatrix}0&0&1&1\\0&1&0&1\\0&0&1&0\\1&1&0&0\end{bmatrix}$. 因为 $|A|\neq0$, 所以 A 为满秩矩阵, 故 $x^3,x^3+x,x^2+1,x+1$ 是 $\mathbb{R}[x]_3$ 的一个基.

$$\begin{aligned}f=x^2+2x+3&=(1,x,x^2,x^3)b=(1,x,x^2,x^3)(3,2,1,0)^T\\&=(x^3,x^3+x,x^2+1,x+1)A^{-1}b\end{aligned}$$

所以坐标为 $A^{-1}b=(0,0,1,2)^T$.

4. $\sqrt{2\pi}, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos x, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin x$.

5. $\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1)^T, \frac{1}{\sqrt{6}}(1,-2,1)^T$.

6. 先找到一组标准正交基 $\boldsymbol{e}_1=(0,1,0)^T, \boldsymbol{e}_2=\left(-\frac{4}{5},0,\frac{3}{5}\right)$(给的 β_1,β_2 是正交的, 只需要单位化即可), 于是套用公式可得 $\mathrm{Proj}_W\alpha=\langle\alpha,\boldsymbol{e}_1\rangle\boldsymbol{e}_1+\langle\alpha,\boldsymbol{e}_2\rangle\boldsymbol{e}_2=\boldsymbol{e}_1-\frac{1}{5}\boldsymbol{e}_2=\left(\frac{4}{25},1,-\frac{3}{25}\right)$

7. 设这个向量是 $x=(x_1,x_2,x_3,x_4)^T$, 与三个向量正交得到 $Ax=0$, 其中 $A=\begin{bmatrix}1&1&-1&1\\1&-1&-1&1\\2&1&1&3\end{bmatrix}$. 解这个方程组, 得 $x=\frac{1}{\sqrt{26}}(4,0,1,-3)^T$.

8. W 的基与维数为 A 的列向量组的极大无关组与秩, 记 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$, 可算出 A 的极大无关组为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$, 故 V 的基为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$, 维数是 3.

9. $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)\begin{bmatrix}1&3&2\\-1&-2&1\\2&5&1\end{bmatrix}$, 而) $\begin{bmatrix}1&3&2\\-1&-2&1\\2&5&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&3&2\\0&1&3\\0&0&0\end{bmatrix}$, 故 α_1,α_2 是 $\mathrm{span}(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ 的一组基,$\dim\mathrm{span}(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=2$.

10. W 为三维空间, 故任意三个线性无关的向量都可以作为它的基. 令 $k_1A_1+k_2A_2+k_3A_3=0$, 得 $\begin{bmatrix}1&2&4\\-2&1&-1\\1&3&-5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}k_1\\k_2\\k_3\end{bmatrix}=\mathbf{0}$, 而 $\begin{bmatrix}1&2&4\\-2&1&-1\\1&3&-5\end{bmatrix}$ 满秩, 所以 $k_1=k_2=k_3=0$, 所以这三个向量线性无关, 可以作为一组基.

11. 因为矩阵 $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)\to\begin{bmatrix}1&-1&3&-2\\0&-2&-1&8\\0&0&-7&24\\0&0&0&12\end{bmatrix}$, 所以 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性无关, 是一组基. $\dim V=4$.

第六章　特征值与特征向量

全章重点, 经常出相关大题, 多多留意.

6.1　知识点总结与例题

6.1.1　特征值, 特征向量相关概念与求解

特征值与特征向量　设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$ 是一个 n 阶矩阵, 如果有一个复数 λ 及一个 n 维非零列向量 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\ldots,x_n)^T\in\mathbb{C}^n$, 使得

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x} \tag{6.1}$$

或

$$(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0} \tag{6.2}$$

则称 λ 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的一个**特征值**, 称非零列向量 $\boldsymbol{x}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的对应于 (或属于) 特征值 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量.

特征值与特征向量的求解

求解原理　由定义可知, 特征向量 x 是齐次线性方程组 (6.2) 的非零解, 由 $n\times n$ 齐次线性方程组有非零解的充要条件, 得

$$\det(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=0 \tag{6.3}$$

λ 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值, 当且仅当 λ 为方程 (6.3) 的根. 对于方程 (6.3) 的每一个根 λ_i, 齐次线性方程组 (6.2) 式必有非零解 $\boldsymbol{x}$, 为对应于特征值 λ_i 的特征向量.

求 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值和特征向量的一般步骤　首先, 求出 $\det\ (\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=0$ 的全部根 $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n$, 则 $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n$ 就是 $\boldsymbol{A}$ 的全部特征值. 然后, 对于 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 λ_i, 求

出式 (6.4):

$$\det(\lambda_i \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}) = 0 \tag{6.4}$$

的基础解系

$$\boldsymbol{\xi}_{i1}, \boldsymbol{\xi}_{i2}, \ldots, \boldsymbol{\xi}_{ik}$$

则 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 λ_i 的全部特征向量为

$$\boldsymbol{x} = c_1\boldsymbol{\xi}_{i1} + c_2\boldsymbol{\xi}_{i2} + \cdots + c_{k_i}\boldsymbol{\xi}_{ik_i} \tag{6.5}$$

其中 $c_1, c_2, \ldots, c_{k_i}$ 为不全为 0 的任意常数.

其它相关概念

1. 特征方程: 关于 λ 的一元 n 次代数方程 (6.3) 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征方程.
2. 特征多项式: 一元 n 次多项式 $f(\lambda) = det\ (\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})$ 为矩阵 A 的特征多项式.
3. 特征子空间: 若 λ 为 $\boldsymbol{A}$ 的特征值, 则称齐次线性方程组 (6.2) 的解空间为 λ 的特征子空间, 并记为 V_λ.
4. 单特征值, 重特征值与代数重数: n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 有 n 个特征值. 如果为特征方程的重根, 称 λ_i 为 $\boldsymbol{A}$ 的 k 重特征值; 当 $k=1$ 时, 称 λ_i 为 A 的单特征值.
5. 几何重数:V_{λ_i} 的维数, 即齐次线性方程组 (6.4) 的基础解系所含向量个数为特征值 λ_i 的几何重数.

6.1.2 概念与求解相关例题

例 6.1.1 求矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{bmatrix}$ 的特征值和特征向量 *(课本 210 页例 6.1.1)*

解 由特征方程

$$\det(\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}) = \begin{vmatrix} \lambda-1 & 3 & -3 \\ -3 & \lambda+5 & -3 \\ -6 & 6 & \lambda-4 \end{vmatrix} = (\lambda+2)\begin{vmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 1 & \lambda+5 & -3 \\ 0 & 6 & \lambda-4 \end{vmatrix} == (\lambda+2)^2(\lambda-4) = 0$$

解得 $\boldsymbol{A}$ 有 2 重特征值 $\lambda_1 = \lambda_2 = -2$, 有单特征值 $\lambda_3 = 4$.

对于特征值 $\lambda_1=\lambda_2=-2$, 解方程组 $(-2\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$, 由初等行变换

$$-2\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-3&3&-3\\-3&3&-3\\-6&6&-6\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1&-1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

得基础解系 $\boldsymbol{\xi}_1=(1,1,0)^T,\boldsymbol{\xi}_2=(-1,0,1)^T,\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2$ 为对应于特征值 -2 的线性无关特征向量, 对应于特征值 -2 的全部特征向量为 $\boldsymbol{x}=k_1\boldsymbol{\xi}_1+k_2\boldsymbol{\xi}_2(k_1,k_2$ 为不全为 0 的任意常数).

对于特征值 $\lambda_3=4$, 解方程组 $(4\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$, 即

$$4\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}3&3&-3\\-3&9&-3\\-6&6&0\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1&1&-1\\0&12&-6\\0&12&-6\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1&0&-\frac{1}{2}\\0&1&-\frac{1}{2}\\0&0&0\end{bmatrix}$$

得基础解系 $\boldsymbol{\xi}_3=(1,1,2)^T,\boldsymbol{\xi}_3$ 为对应于特征值 4 的线性无关特征向量, 对应于特征值 4 的全部特征向量为 $x=k\boldsymbol{\xi}_3(k$ 为任意非零常数).

注 求特征值与特征向量是第六章最为重要, 考察最为频繁的知识点, 且其方法基本不变. 对于此知识点需熟练掌握.

6.1.3 特征值, 特征向量相关性质与结论

1. 若 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2$ 都是属于 λ_i 特征向量, 则当 $\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2\neq\mathbf{0}$ 时,$\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2$ 也是属于 λ_i 的特征向量; 当 $k\boldsymbol{x}_1\neq\mathbf{0}$ 时, $k\boldsymbol{x}_1$ 也是属于 λ_i 的特征向量. 一般地, 如果 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\ldots,\boldsymbol{x}_m$ 都是属于 λ_i 的特征向量,$c_1,c_2,\cdots,c_m$ 为任意常数, 则当 $c_1\boldsymbol{x}_1+c_2\boldsymbol{x}_2+\cdots+c_m\boldsymbol{x}_m\neq\mathbf{0}$ 时,$c_1\boldsymbol{x}_1+c_2\boldsymbol{x}_2+\cdots+c_m\boldsymbol{x}_m$ 仍是属于 λ_i 的特征向量. 即属于同一特征值的特征向量不唯一.

2. 设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}=\left(a_{ij}\right)_n$ 的全部特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n$, 则有

   (a) $\prod\limits_{k=1}^{n}\lambda_k=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n=\det\boldsymbol{A}$ (积为行列式)

   (b) $\sum\limits_{k=1}^{n}\lambda_k=\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n=\mathrm{tr}\boldsymbol{A}=\sum\limits_{k=1}^{n}a_{kk}=a_{11}+a_{22}+\ldots+a_{nn}$ (和为矩阵迹)

   推论 方阵可逆 $\Leftrightarrow$ 特征值都不为 0; 方阵不可逆 $\Leftrightarrow$ 特征值至少有一个为 0.

3. 设 λ 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值, 则

(a) 对任何正整数 m, λ^m 为矩阵 $\boldsymbol{A}^m$ 的一个特征值;

(b) 对任何多项式 $f(x)=a_m x^m+a_{m-1} x^{m-1}+\cdots+a_1 x+a_0, f(\lambda)$ 为矩阵 $f(\boldsymbol{A})= a_m \boldsymbol{A}^m+a_{m-1} \boldsymbol{A}^{m-1}+\cdots+a_1 \boldsymbol{A}+a_0 \boldsymbol{I}$ 的一个特征值, 且矩阵 $\boldsymbol{A}$ 对应于 λ 的特征向量与矩阵 $f(\boldsymbol{A})$ 对应于 $f(\lambda)$ 的特征向量相同.

4. 设 λ 为 n 阶可逆矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值, 则 $\lambda \neq 0$, 且 $\frac{1}{\lambda}$ 为 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 的一个特征值,$\frac{1}{\lambda} \det \boldsymbol{A}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^*$ 的一个特征值.

5. 属于互不相同特征值的特征向量线性无关.

6. 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的任何特征值的集合重数不大于其代数重数.

6.1.4 性质与结论相关例题

例 6.1.2 设 $\boldsymbol{A}$ 为三阶方阵, 且 $|\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I}|=|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I}|=|2\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I}|=0$, 则 $|\boldsymbol{A}^*|=$____.

解 由题意可知 $\boldsymbol{A}$ 的特征值分别为 $2,-1,\frac{1}{2}$, 则 $|\boldsymbol{A}^*|=|\boldsymbol{A}|^2=\left(2\times(-1)\times\frac{1}{2}\right)^2=1$.

例 6.1.3 (2018 年期末) 矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & 4 & x\\ -3 & -3 & 5\end{bmatrix}$ 有特征值 $\lambda_1=6, \lambda_2=\lambda_3=2$, 且有三个线性无关的特征向量, 则 x 的值为 ____.

解 由矩阵 $\boldsymbol{A}$ 有 2 重特征值 2, 且有三个线性无关的特征向量, 可知方程组 $(2\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 的基础解系所含向量个数为 2, 即矩阵 $2\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}$ 秩为 1, 有

$$2\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 1 & -1\\ -2 & -2 & -x\\ 3 & 3 & -3\end{bmatrix}$$

故有 $-x=2, x=-2$.

注 特征值与特征向量相关性质与结论考察形式较为灵活, 常与其它知识点结合考察, 需要大家在熟记各种性质与结论的基础上灵活应用以解决问题.

6.1.5 相似矩阵与矩阵的对角化

相似矩阵 设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 都是 n 阶矩阵, 如果存在一个 n 阶可逆矩阵 P, 使得

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B} \tag{6.6}$$

则称 $\boldsymbol{A}$ 相似于 $\boldsymbol{B}$, 记作 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$, 并称由 A 到 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ 的变换为一个相似变换.

相似矩阵具有如下性质:

1. 相似矩阵具有自反性, 对称性与传递性.

2. 设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似, 则有

   (a) $\det\boldsymbol{A}=\det\boldsymbol{B}$;

   (b) $r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{B})$, 特别地, 当 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 都可逆时,$\boldsymbol{A}^{-1}\sim\boldsymbol{B}^{-1}$;

   (c) $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 有相同的特征多项式, 从而有相同的特征值.

矩阵的对角化 如果 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与一个对角矩阵相似, 则称 $\boldsymbol{A}$ 可相似对角化, 简称为 $\boldsymbol{A}$ 可对角化.

矩阵可对角化的条件:

1. 矩阵可对角化的充分条件: 若 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个特征值互不相同 (即的特征值都是单特征值) 则必与对角矩阵相似.

2. 矩阵可对角化的充要条件是 $\boldsymbol{A}$ 有 n 个线性无关的特征向量或 $\boldsymbol{A}$ 的每个特征值的几何重数都等于它的代数重数.

矩阵对角化的求解 在 $\boldsymbol{A}$ 可对角化时, 求出对应于每个特征值的线性无关特征向量, 从而可得到 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个线性无关的特征向量 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\ldots,\boldsymbol{\xi}_n$, 其中 $\boldsymbol{\xi}_i$ 是对应于特征值 λ_i 的特征向量 $(i=1,2,\ldots,n)$. 以 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\ldots,\boldsymbol{\xi}_n$ 为列向量构成矩阵

$$\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\ldots,\boldsymbol{\xi}_n)\tag{6.7}$$

则 $\boldsymbol{P}$ 可逆, 且有

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\mathrm{diag}\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n\tag{6.8}$$

6.1.6 相似矩阵与矩阵的对角化相关例题

例 6.1.4 *矩阵* $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&-3&3\\3&-5&3\\6&-6&4\end{bmatrix}$ *能否对角化? 若能, 求可逆矩阵* $\boldsymbol{P}$*, 使得* $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ *为对角矩阵.*

解 此矩阵即为例 6.1.1 中矩阵, 此矩阵有 3 个线性无关的特征向量:

$$\boldsymbol{\xi}_1=\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix},\boldsymbol{\xi}_2=\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix},\boldsymbol{\xi}_3=\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix}$$

由 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3$ 线性无关知矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可对角化. 令

$$\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3)=\begin{bmatrix}1&-1&1\\1&0&1\\0&1&2\end{bmatrix}$$

则有

$$\boldsymbol{P^{-1}AP}=\begin{bmatrix}-2&0&0\\0&-2&0\\0&0&4\end{bmatrix}$$

注 求矩阵可对角化时的对角矩阵 D 和可逆矩阵 P, 本质上仍然是特征值与特征向量的求解. 在求对角矩阵 D 和可逆矩阵 P 时, 要注意特征值与特征向量之间的对应.

例 6.1.5 设三阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $1,2,-3$, 矩阵 $\boldsymbol{B=A^3-7A+5I}$, 求矩阵 $\boldsymbol{B}$.

解 由题意,$\boldsymbol{A}$ 可相似对角化, 且存在一个 3 阶可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$, 使得

$$\boldsymbol{P^{-1}AP=D}=\mathrm{diag}(1,2,-3)$$

故有

$$\boldsymbol{A=PDP^{-1}}$$

$$\boldsymbol{A^3=PDP^{-1}PDP^{-1}PDP^{-1}=PD^3P^{-1}}$$

所以

$$\boldsymbol{B=A^3-7A+5I=PD^3P^{-1}-7PDP^{-1}+5PIP^{-1}=P(D^3-7D+5I)P^{-1}}$$

又有

$$\boldsymbol{D^3-7D+5I}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&8&0\\0&0&-27\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}7&0&0\\0&14&0\\0&0&-21\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}5&0&0\\0&5&0\\0&0&5\end{bmatrix}=\boldsymbol{-I}$$

所以

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}(-\boldsymbol{I})\boldsymbol{P}^{-1}=-\boldsymbol{I}$$

注 对角化在计算矩阵的高次幂和多项式时非常实用. 请读者充分理解这种方法, 并能够熟练运用.

6.1.7 实对称矩阵

实对称矩阵是必定可以对角化的一类矩阵, 有着非常重要的应用.

实对称矩阵 如果有 n 阶实矩阵 $\boldsymbol{A}$, 且矩阵的转置等于本身, 则称其为实对称矩阵.

实对称矩阵具有下列性质:

1. 实对称矩阵的特征值均为实数.
2. 设实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 有相异特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2$ 分别是与 λ_1,λ_2 对应的特征向量, 则 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2$ 正交.
3. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶实对称矩阵, 则必存在 n 阶正交矩阵 $\boldsymbol{P}$, 使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}^{T}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\operatorname{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n)$ 为对角矩阵
4. 实对称矩阵的每个特征值的几何重数都正好等于其代数重数.

实对称矩阵相似过程中正交矩阵的求解

n 阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的正交相似对角化过程如下:

1. 求出 $\boldsymbol{A}$ 的全部特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$;
2. 对每个特征值 λ_i, 求出方程组

$$(\lambda_i\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$$

   的一个基础解系 (即特征子空间 V_{λ_i} 的一个基);
3. 对每个特征值 λ_i, 利用格拉姆-施密特正交化方法将 V_{λ_i} 的基中的向量单位正交化, 得到其标准正交基, 再将所有特征子空间的标准正交基合在一起得到 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个标准正交的特征向量 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\ldots,\boldsymbol{e}_n$
4. 令矩阵 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\ldots,\boldsymbol{e}_n)$, 则 $\boldsymbol{P}$ 可逆, 且

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}^{T}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\operatorname{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n) \tag{6.9}$$

6.1.8 实对称矩阵相关例题

例 6.1.6 试求一个正交的相似变换矩阵, 将下列实对称矩阵化为对角矩阵:

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2 & 2 & -2\\ 2 & 5 & -4\\ -2 & -4 & 5\end{bmatrix}$$

解 由 $|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I}|=\begin{bmatrix}2-\lambda & 2 & -2\\ 2 & 5-\lambda & -4\\ -2 & -4 & 5-\lambda\end{bmatrix}=(10-\lambda)(\lambda-1)^2$ 可得特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=1,\lambda_3=10$ 当 $\lambda_1=\lambda_2=1$ 时, 解方程 $(\lambda_i\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$, 可取一组正交的基础解系为

$$\boldsymbol{\xi}_1=(0,1,1)^T,\boldsymbol{\xi}_2=(4,-1,1)^T$$

单位化得

$$\boldsymbol{e}_1=\left(0,\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^T,\boldsymbol{e}_2=\left(\frac{4}{3\sqrt{2}},-\frac{1}{3\sqrt{2}},\frac{1}{3\sqrt{2}}\right)^T$$

同理, 当 $\lambda_3=10$ 时, 解方程解方程 $(\lambda_3\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 得

$$\boldsymbol{e}_3=\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3},-\frac{2}{3}\right)^T$$

于是得到 $\boldsymbol{A}$ 的标准正交特征向量 e_1,e_2,e_3, 故所求正交矩阵可取

$$\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{e_1},\boldsymbol{e_2},\boldsymbol{e_3})=\begin{bmatrix}0 & \frac{4}{3\sqrt{2}} & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{3\sqrt{2}} & \frac{2}{3}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{3\sqrt{2}} & -\frac{2}{3}\end{bmatrix}$$

且有

$$\boldsymbol{P^{-1}AP}=\boldsymbol{P^{T}AP}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 10\end{bmatrix}$$

注 在实对称矩阵的考察中, 常常要求求出能够使实对称矩阵化为对角矩阵的正交相似变换矩阵. 其与一般相似变换矩阵求法的不同之处在于需要将各特征子空间的基中的向量进行单位正交化. 此部分习题方法固定, 难度不大, 但运算量要求较高, 同学们应注意多加练习.

6.2 练习题

基础组

1. 设 $\lambda=2$ 是可逆矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值, 则矩阵 $\left(\frac{1}{3}\boldsymbol{A}^2\right)^{-1}$ 的一个特征值为 ____.

2. 当 ( ) 时,n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似.

   (a) $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 有相同的特征值且均可相似对角化

   (b) $|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{B}|$

   (c) $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 有相同的特征多项式

   (d) $r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{B})$

3. 矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&-1&1\\x&4&y\\-3&-3&5\end{bmatrix}$ 有二重特征值 2, 且有三个线性无关的特征向量, 则 x,y 的值分别为 ____.

4. 矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&-2&0\\0&a&0\\0&3&1\end{bmatrix}$ 相似于矩阵 $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}0&2&-3\\-1&3&-3\\1&-2&b\end{bmatrix}$, 则 a,b 的值分别为 ____.

5. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&1&2\\1&2&2\\2&2&1\end{bmatrix}$, 求 $\varphi(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{A^{10}-6A^9+5A^8}$.

6. 已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{bmatrix}$, 且向量 $\boldsymbol{\alpha}=\begin{bmatrix}1\\k\\1\end{bmatrix}$ 是逆矩阵 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 的特征向量, 试求常数 k.

7. 设 n 维向量 $\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^T\neq 0,\beta=(b_1,b_2,\cdots,b_n)\neq 0$, 且 $\alpha^T\beta=0$, 令矩阵 $\boldsymbol{A}=\alpha\beta^T$, 求 (a)$\boldsymbol{A}^2$; (b)$\boldsymbol{A}$ 的特征值与特征向量.

8. 设方阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似, 即存在可逆方阵 $\boldsymbol{P}$, 使 $\boldsymbol{P^{-1}AP=B}$, 已知 $\boldsymbol{\xi}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 对应于特征值 λ 的特征向量, 求 B 对应于特征值 λ 的特征向量.

9. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 2 阶矩阵,$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 为线性无关的 2 维向量,$\boldsymbol{A\alpha_1=0,A\alpha_2=2\alpha_1+\alpha_2}$, 求 $\boldsymbol{A}$ 的非零特征值.

10. (课本 228 页习题) 设 3 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似, 且 $\boldsymbol{A}$ 的特征值分别为 $\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4}$, 则 $|\boldsymbol{B^{-1}-I}|=$____.

提高组

11 证明 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{A}^T$ 有相同的特征值.

12 (08 期末) 设 $\alpha = (a_1, a_2, a_3)^T, \beta = (b_1, b_2, b_3)^T$, 且 $\alpha^T\beta = 2, \boldsymbol{A} = \alpha\beta^T$

(a) 求 $\boldsymbol{A}$ 的特征值.

(b) 求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 及对角阵 $\boldsymbol{B}$, 使得 $\boldsymbol{P^{-1}AP = B}$.

13 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶可逆矩阵 $(n \geq 2)$, α 是 n 维非零实向量. 令矩阵 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}\alpha\alpha^T$

(a) 求 $\boldsymbol{B}$ 的特征值与行列式 det $(\boldsymbol{B + 2I})$.

(b) $\boldsymbol{B}$ 是否可对角化? 为什么?

14 (14 期末) 设 α, β 是 3 维实单位列向量, 且 α 与 β 正交. 令 $\boldsymbol{A} = \alpha\beta^T + \beta\alpha^T$, 问其是否可以相似对角化? 若可相似对角化, 求出与 $\boldsymbol{A}$ 相似的对角阵 $\boldsymbol{D}$.

参考答案

1. $\frac{3}{4}$

2. (a)

3. $x = 3, y = -1$

4. $a = 5, b = 4$ (相似矩阵迹相同, 行列式相等)

5. $\begin{bmatrix} 2 & 2 & -4 \\ 2 & 2 & -4 \\ -4 & -4 & 8 \end{bmatrix}$(模仿例 6.1.5 方法)

6. -2 或 1(两边左乘 A^{-1} 可知,α 也是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量。由特征值定义可求解)

7. (a) $\boldsymbol{O(A^2 = \alpha\beta^T\alpha\beta^T = \alpha(\beta^T\alpha)\beta^T = \alpha(\alpha^T\beta)^T\beta^T = O)}$.

   (b) 特征值仅有 $\lambda = 0$, 特征向量 $\boldsymbol{x} = c_1(b_2, -b_1, 0, \ldots, 0)^T + c_2(b_3, 0, -b_1, \ldots, 0)^T + \ldots + c_n(b_n, 0, 0, \ldots, -b_1)^T$, $(c_1, c_2, c_3, \ldots, c_n$ 为不全为零的常数)

8. $\boldsymbol{P^{-1}\xi}$ ($\boldsymbol{A\xi} = \lambda\boldsymbol{\xi}$, 等式两边左乘 P^{-1}, 由相似得 $P^{-1}A = BP^{-1}$, 得到 $BP^{-1}\xi = \lambda P^{-1}\xi$, 所以特征向量为 $\boldsymbol{P^{-1}\xi}$)

9. 1 (已知得 $A(\alpha_1,\alpha_2)=(0,2\alpha_1+\alpha_2)=(\alpha_1,\alpha_2)\begin{bmatrix}0&2\\0&1\end{bmatrix}$, 由 α_1,α_2 线性无关,(α_1,α_2) 满秩, 得 $A=(\alpha_1,\alpha_2)\begin{bmatrix}0&2\\0&1\end{bmatrix}(\alpha_1,\alpha_2)^{-1}$, 则 A 与 $\begin{bmatrix}0&2\\0&1\end{bmatrix}$ 相似, 易得非零特征值为 1)

10. 6 (由题意, $P^{-1}BP=\mathrm{diag}(1/2,1/3,1/4), B=P\mathrm{diag}(1/2,1/3,1/4)P^{-1}, B^{-1}=P\mathrm{diag}(2,3,4)P^{-1}, B^{-1}-I=P\mathrm{diag}(1,2,3)P^{-1}$, 进而可求)

11. 由于 $|\lambda I-A^T|=|\lambda I^T-A^T|=|(\lambda I-A)^T|=|\lambda I-A|$, 特征多项式相同则特征值相同.

12. (a) 由 $A=\alpha\beta^T$ 可知,$r(A)\leq 1$, 又由 $\alpha^T\beta=2=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$ 可知 $r(A)=1$, 故 $\lambda_1=\lambda_2=0$ 是两个特征值, 又 $\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=2$, 得特征值分别为 $\lambda_1=\lambda_2=0,\lambda_3=2$

    (b) 对应于 $\lambda_1=\lambda_2=0$ 的特征向量是方程 $x_1b_1+x_2b_2+x_3b_3=0$ 的基础解系, 解得 $\xi_1=(b_2,-b_1,0)^T,\xi_2=(b_3,0,-b_1)^T$, 又因为 $A\alpha=\alpha\beta^T\alpha=2\alpha,\xi_3=\alpha$, 故得到 P= $(\xi_1,\xi_2,\xi_3)=\begin{bmatrix}b_2&b_3&a_1\\-b_1&0&a_2\\0&-b_1&a_3\end{bmatrix}$, 对角矩阵 $B=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&2\end{bmatrix}$

13. (a) 由 A 是 n 阶可逆矩阵, 可知 $r(B)=r(\alpha\alpha^T)=1$, 又 $BA\alpha=A\alpha\alpha^TA\alpha=(\alpha^TA\alpha)A\alpha$, 故 B 有 $n-1$ 重特征值 0 和单特征值 $\alpha^TA\alpha, B+2I$ 有 $n-1$ 重特征值 2 和单特征值 $2+\alpha^TA\alpha$, 故 det $(B+2I)=2^{n-1}(2+\alpha^TA\alpha)$

    (b) $\alpha^TA\alpha\neq 0$ 时, 每个特征值的几何重数等于代数重数, 可对角化,$\alpha^TA\alpha=0$ 时不可对角化.

14. (a) 由 $A=A^T$, 且均为实对称矩阵, 可知其可对角化.

    (b) $A\alpha=\alpha(\beta^T\alpha)+\beta(\alpha^T\alpha)=\beta, A\beta=\alpha(\beta^T\beta)+\beta(\alpha^T\beta)=\alpha, A(\alpha+\beta)=\alpha+\beta, A(\alpha-\beta)=\beta-\alpha$, 由 α,β 正交得 α,β 线性无关, 即 $\alpha-\beta\ 0,\alpha-\beta\neq 0$, 故 A 有特征值 1, -1; 又因为 $r(A)\leq r(\alpha\beta^T)+r(\beta\alpha^T)=2$, 故 A 有特征值 0, 故 A 可对角化, 且其相似对角阵为 $D=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&0\end{bmatrix}$

第七章　二次曲面与二次型

7.1　知识点与例题

7.1.1　曲面与空间曲线的方程

$(\star\star)$

1. 曲面的直角坐标方程:$F(x,y,z)=0$, 曲面的参数方程: $\begin{cases} x=x(u,v) \\ y=y(u,v) \\ z=z(u,v) \end{cases}$.

2. 空间曲线的直角坐标方程 $\begin{cases} F_1(x,y,z)=0 \\ F_2(x,y,z)=0 \end{cases}$, 空间曲线的参数方程: $\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \\ z=z(t) \end{cases}$.

7.1.2　柱面

$(\star\star\star\star)$

柱面的定义　动直线 L 始终平行于直线 C 并沿着曲线 Γ 移动而形成的曲面, 其中,Γ 为准线,L 为母线.

柱面的参数方程　若母线 L 与 $(l,m,n)^T$ 平行, 准线 Γ 由参数方程

$$\begin{cases} x=f1(u) \\ y=f2(u) \\ z=f3(u) \end{cases},\alpha\leq u\leq\beta$$

给定, 则柱面的参数方程为

$$\begin{cases} x = f1(u) + lv \\ y = f2(u) + mv \\ z = f3(u) + nv \end{cases}, \alpha \leq u \leq \beta, v \in \mathbb{R}$$

例 7.1.1 求母线平行于直线 $C: x = y = z$, 准线 $\Gamma: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$ 的柱面的方程.

解　设 $M(x, y, z)$ 是所求柱面上的任意一点, 由母线的方向向量为 $\boldsymbol{a} = (1, 1, 1)$ 得过 M 的母线的参数方程为 $\begin{cases} x = x + t \\ y = y + t \\ z = z + t \end{cases}$. 且此母线必与 Γ 相交, 设交点为 (X, Y, Z), 则有

$$\begin{cases} (x+t)^2 + (y+t)^2 + (z+t)^2 = a^2 \\ (x+t) + (y+t) + (z+t) = 0 \end{cases}$$

消去 t 的 $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2xy - 2yz - 2zx = 3a^2$ 即为所求柱面的方程.

评注　柱面方程的建立过程:

1. 设准线上一点.

2. 写出过该点的母线参数方程.

3. 结合准线方程消去参数.

7.1.3　锥面

$(\star\star\star\star)$

锥面的定义　动直线 L 沿定曲线 Γ 移动,L 始终过定点 M_0, 所形成的曲面. 其中 L 为母线,M_0 为顶点,Γ 为准线.

锥面的参数方程 若已知 $M_0(x_0,y_0,z_0)$, 准线的参数方程为

$$\begin{cases} x=f_1(u) \\ y=f_2(u) \\ z=f_3(u) \end{cases}, u\in[\alpha,\beta]$$

则锥面的参数方程为

$$\begin{cases} x=x_0+(f_1(u)-x_0)v \\ y=y_0+(f_2(u)-y_0)v \\ z=z_0+(f_3(u)-z_0)v \end{cases}, u\in[\alpha,\beta], v\in\mathbb{R}$$

7.1.4 旋转面

($\star\star\star\star$)

定义 一条曲线 Γ 绕一条定直线 L 旋转一周所形成的曲面称为旋转面. 定直线 L 称为轴, 曲线 Γ 称为母线.

特殊情况下的方程 $\begin{cases} f(x,y)=0 \\ x=0 \end{cases}$ 绕 z 轴旋转一周形成的曲面方程为

$$f(\pm\sqrt{x^2+y^2},z)=0$$

例 7.1.2 *求直线 $L: x-1=y=z$ 绕 z 轴旋转所形成的旋转面方程.*

解 设 $P(x,y,z)$ 是旋转面上任一点, 它必是由 L 上某点 $M(X,Y,Z)$ 旋转而得, 由于 $L: x-1=y=z$, 故 M 的坐标可写成 $(1+z,z,z)$, 利用 P 到 z 轴的距离等于 M 到 z 轴的距离, 得 $x^2+y^2=(1+z)^2+z^2$, 化简得:$x^2+y^2-2\left(z+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2}$.

例 7.1.3 *求直线 $L: x-1=y=1-z$ 在平面 $\pi: x-y+2z=1$ 上的投影直线 l_0 的方程, 并求出 l_0 绕 y 轴旋转一周所形成曲面的方程.*

解 投影柱面的母线的方向向量 $(1,-1,2)$, 求得投影柱面的方程为:$-x+3y+2z-1=0$. 再与平面 π 联立得投影直线的方程为

$$\begin{cases} x=2y \\ z=-\frac{1}{2}(y-1) \end{cases}$$

旋转面方程为 $x^2+z^2=(2y)^2+(-\frac{1}{2}(y-1))^2$, 化简得 $4x^2-17y^2+4z^2+2y-1=0$.

评注 要理解曲线 Γ 在平面 π 上投影的本质 — 即母线方向垂直于 π, 准线为 Γ 的柱面在 π 上的投影曲线. 因此此题可以利用求柱面的参数方程的方法求 l_0 方程.

7.1.5 五种典型的二次曲面

($\star\star\star$)

常见的五种典型的二次曲面如下表所示.

例 7.1.4 *指出下列方程组所表示的曲面 (线) 名称.*

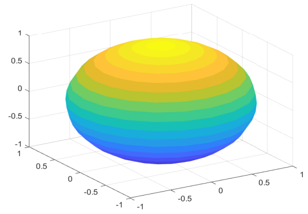
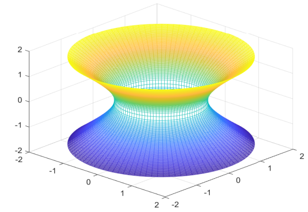
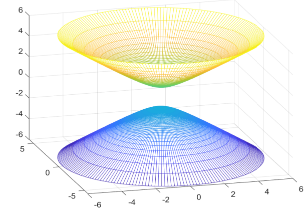
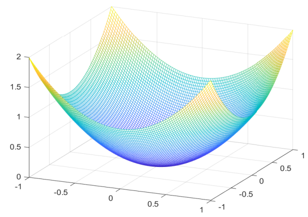
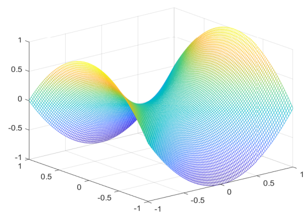
1. $2(x-1)^2+(y+1)^2=z^2$
2. $4x^2-y^2+z=0$
3. $x^2-\frac{y^2}{4}+z^2=1$
4. $x^2+4y^2-4z^2=1$
5. 参数方程 $\begin{cases} x=1 \\ y=\cos\theta \\ z=\sin\theta \end{cases}$

解

1. 椭圆锥面;
2. 双曲抛物面, 即 $y^2-4x^2=z$;
3. 单叶双曲面, 对照标准方程即可. 也可化为 $x^2+z^2-\frac{y^2}{4}-1=0$, 看作由曲线 $\begin{cases} x^2\frac{y^2}{4}-1=0 \\ z=0 \end{cases}$ 绕 y 轴旋转而来;
4. 单叶双曲面;
5. 圆.

注 (等距) 螺旋线的参数方程:$\begin{cases} x=a\cos\omega t \\ y=a\sin\omega t \\ z=vt \end{cases}$ $,0\le t<+\infty$.

表 7.1: 二次曲线方程与形状说明表

曲面形状	方程	其它条件	图像
椭球面	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$	$a,b,c>0$	
单叶双曲面	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$	$a,b,c>0$	
双叶双曲面	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$	$a,b,c>0$	
椭圆抛物面	$\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2z$	$p,q>0$	
双曲抛物面	$\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=2z$	$p,q>0$	

7.1.6 曲线在坐标面上的投影

$(\star\star\star\star)$

曲线 Γ 是每一个点在平面 π 上的垂足形成的曲线称为 Γ 在 π 上的投影. 如求 Γ 在 Oxy 平面上的投影的方程, 先求 Γ 到 Oxy 的投影柱面方程: 从 Γ 的方程中消去 z, 得到

$\phi(x,y)=0$. 因此 $\begin{cases}\phi(x,y)=0\\ z=0\end{cases}$ 即为 Γ 在 Oxy 平面的投影曲线方程.

例 7.1.5 求 $\begin{cases}x^2+y^2=2y\\ z=\sqrt{4-x^2-y^2}\end{cases}$ 在各个坐标面上投影的参数方程.

解 如在 $0xy$ 平面的投影的方程, 需先在方程中消去 z, 得到投影柱面方程 $x^2+y^2=2y$, 再加上 $z=0$, 得到投影曲线方程:$\begin{cases}x^2+y^2=2y\\ z=0\end{cases}$.

同理消去 x, 在 $0yz$ 面上的投影曲线方程为 $\begin{cases}z=\sqrt{4-2y}\\ x=0\end{cases}$ $,0\le y\le 2$.

消去 y, 得到 $0xz$ 面上的投影曲线方程为 $\begin{cases}x^2+\frac{1}{4}z^4-z^2=0\\ y=0\end{cases}$ $,-1\le x\le 1,0\le z\le 2$.

7.1.7 二次型

($\star\star$)

定义 称关于 n 个变量 $x_1,\ldots,x_n$ 的二次齐次多项式函数

$$f(x_1,\ldots,x_n)=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}x_i^2+2\sum_{1\le i<j\le n}a_{ij}x_ix_j$$

为一个 n 元二次型. 可以将其写作 $f(x_1,\ldots,x_n)=f(\boldsymbol{x})bmx^TAx$, 其中 $\boldsymbol{x}=(x_1,\ldots,x_n)^T$, $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_n$ 为实对称矩阵. 称 $\boldsymbol{x^TAx}$ 为二次型的矩阵表达式,A 为二次型 f 的矩阵,$r(A)$ 为二次型 f 的秩.

例 7.1.6 设实矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_n$ 不是实对称矩阵,$\boldsymbol{x}=(x_1,\ldots,x_n)^T\in R^n$, 问 $f=\boldsymbol{x^TAx}$ 是不是关于 $x_1,\ldots,x_n$ 的二次型? 如果是,$f=\boldsymbol{x^TAx}$ 是不是其矩阵表示?

解 f 是二次型, 但由于 $\boldsymbol{A}$ 不是实对称矩阵, 因而 $f=\boldsymbol{x^TAx}$ 不是其矩阵表示. 二次型 f 的矩阵表示为 $\boldsymbol{x}^T\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^T\right)\boldsymbol{x}$.

7.1.8 二次型的标准型

($\star\star\star\star$)

通过可逆线性变换 $x = Cy$, 将二次型 $f = x^T Ax$ 化成只含变量的平方项的形式 $f = d_1y_1^2 + d_2y_2^2 + \cdots + d_ny_n^2$, 上式右端称为二次型 f 的标准型. 标准型的矩阵是对角矩阵 $D = \mathrm{diag}(d_1, d_2, \ldots, d_n)$, 标准型的矩阵形式为 $f = y^T Dy$. 易得 $C^T AC = D$, 其中 C 是可逆矩阵.

定理 对于二次型 $f = \boldsymbol{x^T A x}$ ($\boldsymbol{A}$ 为是对称矩阵), 总存在正交变换 $bmx = Py$, 使得它可以将 f 话称标准型 $f = \lambda_1 x_1^2 + \cdots + \lambda_n x_n^2$, 其中 $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的全部特征值.

例 7.1.7 用正交变换将二次型 $f = x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$ 化为标准型, 并求出所用的正交变换矩阵.

解 二次型 f 的矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, 特征方程

$$\det(\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}) = 0 \Leftarrow \begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 & 1 \\ 2 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{bmatrix} = (\lambda - 4)(\lambda - 1)(-\lambda - 1) = 0$$

解得 $\lambda = 4, 1, -1$. 代入得正交矩阵

$$\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & 0 \end{bmatrix}$$

使得 $P^{-1}AP = P^T AP = diag(4, 1, -1)$. 因此, 通过正交变换 $x = Py$, 将 f 化为标准型 $f = 4y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$.

注 此题运用了化二次型为标准型的第一种方法: 正交变换. 求一个正交变换 $x = Py$, 本质是求一个正交矩阵 P, 使 $P^{-1}AP = P^T AP$ 成为对角矩阵. 该方法的步骤为:

1. 写出二次型的矩阵 A;
2. 求矩阵 A 的所有特征值;
3. 求各特征值对应的特征向量;
4. 将每个特征值对应的特征向量先正交化再单位化, 得正交矩阵 P;
5. 通过正交变换 $x = Py$ 将二次型 f 化为标准形.

例 7.1.8 用配方法化 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1x_2-x_2x_3$ 为标准形, 并写出相应的可逆变换的矩阵.

解 先做可逆线性变换 $\begin{cases} x_1=y_1+y_2, \\ x_2=y_1-y_2, \\ x_3=y_3 \end{cases}$ ，将 f 化为 $f=y_1^2-y_2^2-y_1y_3+y_2y_3$. 配方得 $f=\left(y_1-\frac{1}{2}y_3\right)^2-\left(y_2-\frac{1}{2}y_3\right)^2$, 再做可逆线性变换 $\begin{cases} z_1=y_1-1/2y_3, \\ z_2=y_2-1/2y_3, \\ z_3=y_3 \end{cases}$ 就将 f 化成了标准形 $f=z_1^2-z_2^2$.

注 此题运用了化二次型为标准形的第二种方法: 配方法. 一般, 若 f 中含有平方项和交叉乘积项, 可直接配方, 从 x_1 开始, 直到 x_n(见教材 P261 例 7.2.3). 若不含平方项, 则先进行可逆线性变换, 再配方. 配方法计算繁琐, 没有明确要求则不推荐使用.

7.1.9 合同矩阵

($\star\star\star$)

设 A,B 为 n 阶矩阵, 如果存在 n 阶可逆矩阵 C 使得 $C^TAC=B$, 则称 A 与 B 合同, 记为 $A\cong B$, 且称由 A 到 $B=C^TAC$ 的变换为合同变换. 合同具有自反性, 对称性和传递性. 若 A 与 B 合同, 则 A 与 B 等价, 即 A 与 B 有相同的秩.

判断两个矩阵是否合同

1. 两矩阵合同 $\Longleftrightarrow$ 两矩阵具有相同的正惯性指数 $\Longleftrightarrow$ 正负特征值个数相同;

2. 两个实对称阵若相似则必合同 (两个可对角化的同阶方阵相似 $\Longleftrightarrow$ 它们有相同的特征值).

例 7.1.9 设 $A=\begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & B_2 \end{bmatrix}$, 证明: 如果 A_1 与 B_1 合同,A_2 与 B_2 合同, 则 A 与 B 合同.

解 由于 A_1 与 B_1 合同,A_2 与 B_2 合同, 故存在可逆矩阵 C_1 和 C_2, 使得

$$B_1=C_1^TA_1C_1, B_2=C_2^TA_2C_2$$

令 $C=\begin{bmatrix} C_1 & 0 \\ 0 & C_2 \end{bmatrix}$ 则有 $B=C^TAC$, 即 A 与 B 合同.

7.1.10 正定二次型与正定矩阵

($\star\star\star\star\star$)

定义 设 $f(x)=x^TAx$ 是一个 n 元二次型, 如果对任意非零向量 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$, 都有 $x^TAx>0$, 则称 f 为正定二次型,A 为正定矩阵.

常用性质定理

1. n 阶实对称矩阵 A 为正定矩阵 $\Longleftrightarrow$ A 的所有特征值大于 0.
2. n 阶实对称矩阵 A 为正定矩阵 $\Longleftrightarrow$ 存在可逆矩阵 M 使得 $A=M^TM$, 即 $A\cong I_n$.

7.1.11 推论

1. n 元二次型 f 为正定二次型 $\Longleftrightarrow$ f 的正惯性指数为 n.
2. 正定矩阵的行列式大于 0.

例 7.1.10 设 A 与 B 合同. 证明:A 为正定矩阵当且仅当 B 为正定矩阵.

解 由 A 与 B 合同得, 存在可逆矩阵 C, 使 $B=C^TAC$. 若 A 正定, 则存在可逆矩阵 M, 使得 $A=M^TM$, 故 $B=C^TM^TMC=(MC)^T(MC)$ 是正定的. 同理可证当 B 正定时,A 正定.

例 7.1.11 设 A 为正定矩阵, 证明 A^2,A^*,A^{-1} 都是正定矩阵.

解 因 $A^2+AA=A^TA$(A 可逆), 故 A^2 是正定的；因 $A=M^TM$(M 可逆), 故 $A^{-1}=M^{-1}M$ 是正定的；因 $\det(A)>0$, 故 $A^*=\det(A)A^{-1}$ 是正定的.

例 7.1.12 A,B 均为 n 阶正定矩阵, 证明: 关于 λ 的方程 $|\lambda A-B|=0$ 的根全大于 0.

解 A 正定, 故存在可逆矩阵 P 使得 $A=P^TP$. $|\lambda A-B|=|\lambda P^TP-B|=|P^T|\cdot|\lambda I-(P^T)^{-1}BP^{-1}|\cdot|P|=|P|^2\cdot|\lambda I-(P^{-1})^TBP^{-1}|=0$, $|\lambda I-(P^{-1})^TBP^{-1}|=0$, 根为 $(P^{-1})^TBP^{-1}$ 的特征值.B 正定, 故 $(P^{-1})^TBP^{-1}$ 正定, 故原方程根全正.

例 7.1.13 设实对称矩阵 A,B, 均是正定矩阵, 且满足 $BA=AB$, 证明 AB 也是正定矩阵.

解 充分性:A, B, AB 是正定矩阵, 从而 A, B, AB 是实对称矩阵. 所以 $(AB^T = AB$ 即 $AB = BA$.

必要性: $A^T = A, B^T = B$, 存在可逆矩阵 P, Q, 使 $A = P^TP, B = Q^TQ$. 因为 $(AB)^T = B^TA^T = BA = AB$, 所以 AB 为实对称矩阵. 因为 $AB = P^TPQ^TQ = Q^(-1)QP^TPQ^TQ = Q^(-1)(PQ^T)^T(PQ^T)Q$, 所以 PQ^T 为可逆矩阵, 所以 $(PQ^T)^T(PQ^T)$ 为正定矩阵. 因为 $AB = Q^(- 1)(PQ^T)^T(PQ^T)Q$ 与 $(PQ^T)^T(PQ^T)$ 相似, 所以 AB 为正定矩阵.

例 7.1.14 设二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = 2(a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3)^2 + (b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3)^2$, 记 $\alpha = (a_1, a_2, a_3)^T, \beta = (b_1, b_2, b_3)^T$.

1. 证明二次型 f 对应的矩阵为 $2\alpha\alpha^T + \beta\beta^T$;

2. 若 α, β 正交且为单位向量, 证明 f 在正交变换下的标准形为 $2y_1^2 + y_2^2$.

解

1. 因为

$$
\begin{aligned}
f(x_1, x_2, x_3) &= 2(a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3)^2 + (b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3)^2 \\
&=2(x_1, x_2, x_3) \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} (a_1, a_2, a_3) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + (x_1, x_2, x_3) \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} (b_1, b_2, b_3) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \\
&=(x_1, x_2, x_3)(2\alpha\alpha^T + \beta\beta^T) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x^TAxA = 2\alpha\alpha^T + \beta\beta^T
\end{aligned}
$$

即二次型 f 对应的矩阵.

2. 因为 α, β 正交, 所以 $\alpha^T\beta = \beta^T\alpha = 0$, 因为 α, β 为单位向量,$\|\alpha\| = 1, \alpha^T\alpha = 1, \beta^T\beta = 1$.

   因为 $A\alpha = (2\alpha\alpha^T + \beta\beta^T)\alpha = 2\alpha\alpha^T\alpha + \beta\beta^T\alpha = 2\alpha$, 由于 α 非 0, 所以 A 有特征值 2.

   由 $A\beta = (2\alpha\alpha^T + \beta\beta^T)\beta = 2\alpha\alpha^T\beta + \beta\beta^T\beta = \beta$, 由于 β 非 0, 所以 A 有特征值 1.

$$r(A) = r(2\alpha\alpha^T + \beta\beta^T)\ r(2\alpha\alpha^T) + r(\beta\beta^T) = r(\alpha\alpha^T) + r(\beta\beta^T) = 2$$

   因为 $r(A) < 3$, 所以 $|A| = 0$, 所以 A 有特征值 0. 故 f 在正交变换下的标准形为 $2y_1^2 + y_2^2$.

7.2 练习题

7.2.1 基础篇

1. 下列说法正确的是 ( )

   (a) 对于方阵 A, B, 如果存在矩阵 C, 使得 $B = C^T AC$, 则 A 与 B 合同.

   (b) 若存在矩阵 C, 使得 $A = C^T C$, 则 A 是正定的.

   (c) 二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2$ 是正定的.

   (d) 若实对称矩阵 A 的各阶顺序主子式都为正数, 则 A 是正定的.

2. 设二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x^T Ax$ 的负惯性指数为 $q = 1$, 且矩阵 A 满足 $A^2 - A = 6I$, 则二次曲面方程 $f(x_1, x_2, x_3) = x^T Ax = 6$ 经正交变换可化为标准型 ( )

   (a) $\frac{y_1^2}{3} + \frac{y_2^2}{3} - \frac{y_3^2}{2} = 1$

   (b) $\frac{y_1^2}{2} + \frac{y_2^2}{2} - \frac{y_3^2}{3} = 1$

   (c) $\frac{y_1^2}{3} + \frac{y_2^2}{2} - \frac{y_3^2}{3} = 1$

   (d) $\frac{y_1^2}{2} + \frac{y_2^2}{3} - \frac{y_3^2}{2} = 1$

3. 曲线 $L: \begin{cases} \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1 \\ z = 0 \end{cases}$ 绕 Oy 旋转一周所得旋转面方程为 ____.

4. 已知 $B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$, 则二次型 $f = x^T Bx$ 的矩阵为 ____.

5. 二次曲面 $x^2 + 2y^2 - 2xy = 1$ 在 R^3 中表示的图形是 ____ 柱面.

6. 设矩阵 $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ 的特征值 λ_1, λ_2 满足 $\lambda_1\lambda_2 < 0$, 则曲线 $ax^2 + 2bxy + cy^2 = 1$ 的名称为 ____.

7. 用正交变换把二次型 $f = x_1^2 + 4x_2^2 + 4x_3^3 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 8x_2x_3$ 化成标准型, 并写出标准型及所用正交变换的矩阵 P.

8. 用配方法化二次型 $2x_1^2 + x_2^2 - 4x_3^2 - 4x_1x_2 - 2x_2x_3$ 化为标准型, 并写出所用的可逆性线性变换.

9. 已知二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2 + 2ax_2x_3$ 正定, 求 a 的范围.

10. 设 A 为 $m\times n$ 矩阵, 证明矩阵 A^TA 为正定矩阵 $\Longleftrightarrow r(A)=n$

11. 设 $f(x,y)=a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2$ 是正定二次型, 试求椭圆域 $a_{11}x_2+2a_{12}xy+a_{22}y^2\le 1$ 的面积.

参考答案

1.(d), 2.(b), 3. $\frac{x^2+z^2}{4}-\frac{y^2}{9}=1$, 4. $\begin{bmatrix}1&3&5\\3&5&7\\5&7&9\end{bmatrix}$ 5. 椭圆, 6. 双曲线

7. $9y_3^2$, $\begin{bmatrix}0&\frac{4}{3\sqrt2}&\frac13\\ \frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{3\sqrt2}&-\frac23\\ \frac{1}{\sqrt2}&-\frac{1}{3\sqrt2}&\frac23\end{bmatrix}$

8. $2y_1^2-y_2^2-3y_3^2$, $\begin{bmatrix}1&1&-1\\0&1&-1\\0&0&1\end{bmatrix}$

9. $0<a<3$

10. 必要性: 设 A^TA 正定,A^TA 的特征值全部大于 0, 所以

$$n=r(A^TA)\le r(A)\le n$$

所以 $r(A)=n$

充分性: 因为 $(A^TA)^T=A^TA$, 所以 A^TA 是实对称矩阵, 设 $r(A)=n$, 则对任意 $x\in\mathbb{R}^n,x\neq0$ 都有 $Ax\neq0$, 于是 $x^TA^TAx=(Ax)^T(Ax)>0$, 于是 $x^T(A^TA)x$ 是正定二次型,A^TA 是正定矩阵.

7.2.2 提高篇

1. 写出以 $(0,0,0)$ 为顶点,$\begin{cases}x^2+y^2+(2z)^2=1,\\ x+y=z+1\end{cases}$ 为准线的锥面方程在平面 $z=2$ 上的投影曲线名称.

2. 证明: 平面 $2x+12y-z+16=0$ 与曲面 $x^2-4y^2=2z$ 的交线是直线, 并求交线方程.

3. 3. 设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 为正定矩阵,c_i 为非零实常数 $(i=1,\dots,n)$, 令 $b_{ij}=a_{ij}c_ic_j$. 证明: 矩阵 $B=(b_{ij})_{n\times n}$ 是正定矩阵.

4. 实数 a_1, a_2, a_3 满足何条件时, 二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + a_1x_2)^2 + (x_2 + a_2x_3)2 + (x_3 + a_3x_1)^2$ 为正定二次型?

5. 设实对称矩阵 $A < B$ 均是正定矩阵, 且满足 $BA = AB$, 证明 AB 也是正定矩阵.

6. 设 α, β 均为 3 维实单位列向量, 且 α 与 β 正交. 令 $A = \alpha\beta^T + \beta\alpha^T$, 问矩阵 A 是否可以相似对角化? 为什么? 如果可对角化, 求出与 A 相似的对角阵 D.

参考答案

1. $\frac{1}{a^2}\left(\frac{cx}{z}\right)^2 + \frac{1}{b^2}\left(\frac{cy}{z}\right)^2 = 1$

2. 交线为 $\begin{cases} 2x + 2y - z + 16 = 0 \\ x + 2y + 4 = 0 \end{cases}$ 和 $\begin{cases} 2x + 2y - z + 16 = 0 \\ x - 2y - 8 = 0 \end{cases}$, 两条相交直线.

3. 令 $C = diag(c_1 n \ldots, c_n)$, 证明 $B = C^T AC$, 利用合同正定性.

4. $a_1a_2a_3 \neq -1$

5. 先证明实对称, 之后可以从特征值入手, 也可构造合同.

6. 可对角化,$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

第八章　线性变换

8.1　线性变换及其运算

8.1.1　线性变换

定义　设 $T: V \to W$ 是从线性空间 V 到线性空间 W 的映射, 且对任意 $\alpha, \beta \in V, k \in F$, 有

(1) $T(\alpha+\beta)=T(\alpha)+T(\beta)$;

(2) $T(k\alpha)=k\,T(\alpha)$.

则称 T 是 V 到 W 的一个线性变换.

说明

1. 线性变换如果是一个一个一一映射, 我们就称之为同构, 否则可以称为同态, 如果是满射可以称为满同态, 如果是单射可以称为单同态.

2. 线性变换满足 V 上的线性组合对应到 W 上的线性组合, 即

$$T\left(\sum_{i=1}^{n} k_i\alpha_i\right)=\sum_{i=1}^{n} k_i\,T(\alpha_i)$$

3. V 到 W 的所有线性变换的全体记为 $L(V,W)$, V 到自身的线性变换 (也成为线性算子) 的全体为 $L(V)$, 也称线性算子.

4. 同构一定是线性变换.

5. 不引发歧义且不造成阅读障碍的情况下, 映射的括号可以省略. 比如 $T(\alpha)$ 可以简写为 $T\alpha$.

下面举几个线性变换的例子.

例 8.1.1 *1.* 任意线性空间 V 上的恒等变换 $I:\alpha\mapsto\alpha$ 显然是线性变换.

2. 任意线性空间 V 到 W 的零变换 $O:\alpha\mapsto 0$ 显然是线性变换.

3. 可导函数组成的线性空间中, 求导数 $D=\frac{d}{dx}$ 为一个线性变换.

证明 由导数性质可知对任意可导函数 f,g, 有 $D(f+g)=Df+Dg$, 对任意可导函数 f 和 $k\in\mathbb{R}$, 有 $D(kf)=kDf$, 所以 D 是线性映射. 同理可证明积分在区间上的可积函数组成的线性空间中也是一个线性变换.

4. 取线性空间 V 的一个基 $e_1,e_2,\ldots,e_n$, 对于 $\alpha\in V$, 设 $\alpha=\sum\limits_{i=1}^{n}k_ie_i$, 定义 $T:V\to F^n$ 为 $T\alpha=(k_1,k_2,\ldots,k_n)^T$, 容易证明 $T\in L(V,F^n)$.

5. 数乘变换 $P:\alpha\mapsto k\alpha$ 显然为线性变换.

6. 设 $\boldsymbol{A}\in\mathbb{R}^{m\times n}$, 定义 $T_A:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ 为 $T_A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$, 则 $T_A\in L(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)$.

7. $T(x_1,x_2,x_3)=(x_1^2,x_2+x_3,0)$ 不是线性变换.

8.1.2 线性变换基本性质

设 T 是线性空间 V 到 W 的一个线性变换, 则

(1) $T(0)=0$,

(2) $T(-\alpha)=T(\alpha),\forall\alpha\in V$

(3) T 把 V 中线性相关组映射为 W 中的线性相关组.

注意:

1. 线性无关组进行线性变换后未必是线性无关组,
2. 线性变换由其在基上的作用决定,
3. 若两个线性变换的原像集相同且作用在每个元素上的结果相同则这两个线性变换是相等的.

8.1.3 线性变换的运算

加法 定义线性空间 V 到 W 的线性变换 T_1 和 T_2 的加法:$(T_1+T_2)\alpha=T_1\alpha+T_2\alpha$. 容易验证 T_1+T_2 也是线性变换.

乘法 定义线性空间 V 到 W 的线性变换 T_1 和线性空间 W 到 U 的线性变换 T_2 的乘法 (复合):$(T_2T_1)\alpha = T_2(T_1\alpha)$. 容易验证 T_1T_2 也是线性变换.

线性变换的逆 对 $T : V \leftarrow W$ 若有 $S : W \leftarrow V$ 使得 TS 及 ST 为恒等变换, 则称 S 为 T 的逆映射,T 为可逆映射. 如果 T 为线性变换, 则称之为可逆线性变换. 容易验证可逆线性变换的逆映射为可逆线性变换.

线性变换可逆的充要条件 T 为 V 到 W 的线性变换, 则 T 为可逆线性变换充要于其零空间为 $\{0\}$ 且其像集为 W.

8.1.4 线性变换的核与值域

定义 设 V, W 都是数域 F 上的线性空间, 其中的零向量分别为 0 和 $0'$, T 是 V 到 W 的线性变换, 把 V 的下述子集

$$\{\alpha \in V \mid T\alpha = 0'\}$$

称为 T 的核 (也称为零空间), 记作 $\ker T$. 把 W 的下述子集

$$\{\alpha \in W \mid \exists \beta \in V, s.t. T\beta = \alpha\}$$

称为 T 的值域 (也成为像集), 记作 $R(T)$.

线性映射核的简单性质: 设 T 为 V 到 W 的线性变换, 则下列条件等价:

1. T 为单射,

2. $\ker T = 0$,

3. T 将 V 中的线性无关向量组映射为 W 中的线性无关向量组.

4. 如果 $\dim V = n$, 则 $\mathrm{rank}\ T$ 也与上述条件等价.

线性变换的秩和零度 对于线性空间 V 到 W 的线性变换线性变换 T, 称 $\dim R(T)$ 为 T 的秩, 记作 $\mathrm{rank}\ T$. 称 $\dim\ker T$ 为 T 的零度.

秩加零度定理 对于线性空间 V 到 W 的线性变换线性变换 T, 一定有 $\dim\ker T + \mathrm{rank}\ T = \dim V$.

8.2 线性变换的矩阵表示

例 8.2.1 设 n 阶矩阵 $A=(a_{ij})_n$ 按列分块为 $A=(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$, 定义 $\mathbb{R}$ 中的变换 $T(x)=Ax$, 则 T 为线性变换. 设 $e_1,\ldots,e_n$ 为 $\mathbb{R}^n$ 的标准基, 则

$$Ae_1=\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix}=\alpha_1$$

同理 $\alpha_i=Te_i,\forall i=1,2,\ldots,n$. 于是 $Tx=Ax$.

8.2.1 线性变换的矩阵

定义 设 V 和 W 分别为数域 F 上的 n,m 维线性空间, 它们的一个基分别为 $B=\{\alpha_1,\ldots,\alpha_n\}$ 和 $B'=\{\beta_1,\ldots,\beta_m\}$. 对于 V 到 W 的线性变换 T, 任意的 $T\alpha_i$ 用 W 的基唯一表示为

$$T\alpha_i=\sum_{j=1}^{m}a_{ij}\beta_j$$

也可以写作

$$T(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)=(\beta_1,\ldots,\beta_m)\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}=(\beta_1,\ldots,\beta_m)A$$

称矩阵 $A=\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$ 为线性变换 T 在基 $B=\{\alpha_1,\ldots,\alpha_n\}$ 和 $B'=\{\beta_1,\ldots,\beta_m\}$ 下的矩阵. 不引起歧义和阅读障碍的情况下也可也省略基, 称 A 是 T 的矩阵.

评注 这种定义说明, 矩阵可以完全代表线性变换.

简单的性质

1. 线性变换的和对应矩阵的和,
2. 线性变换的数量乘积对应于矩阵的数量乘积,
3. 线性变换的乘积对应于矩阵的乘积.

4. $L(V, W)$ 与 $F^{m \times n}$ 同构.

5. 线性变换可逆的充分必要条件是它的矩阵可逆.

6. 同一个线性变换在不同基下的矩阵是相似的.