西安交通大學

线性代数与解析几何期中考前讲座

智电钱（能动）001班

马钶淳

2021.10.24

CONTENT

目录

INTRODUCTION OF XJTU SLIDE TEMPLATE

- 1.重点回顾
- 2.例题解析
- 3.试卷解读

西安交通大学 XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY

01

重点回顾

西安交通大學
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY

近三年线代期中考题分布				
		2020	2019	2018
行列式	填空	3	3	3+3
	选择	3	3	3
	大题	/	10+6	10+6
	总分	**6**	**22**	**25**
矩阵	填空	3	3+3	3
	选择	3+3+3	3+3+3	3+3+3
	大题	12+12+12+12+10	12+12+12+6	12+12+12+6
	总分	**70**	**57**	**54**
解析几何	填空	3+3+3	3+3	3+3
	选择	3	3	3
	大题	12	12	12
	总分	**24**	**21**	**21**

重要概念

行列式：系数行列式、余子式、代数余子式、主对角线、上（下）三角行列式、转置、（非）齐次线性方程组、（非）零解/平凡解

矩阵：零矩阵、单位矩阵、行/列矩阵、上（下）三角矩阵、方阵、对角矩阵、纯量矩阵、同型矩阵、线性运算、线性变换、系数矩阵、解向量、（反）对称矩阵、逆矩阵、伴随矩阵、（非）奇异矩阵、子矩阵、分块矩阵、初等变换、初等矩阵、阶梯型矩阵、行最简形、秩、满秩方阵、降秩方阵、秩标准形、满秩分解

解析几何：位置向量、方向余弦、正交射影向量、正交射影、数量积（内积）、向量积（外积）、混合积

行列式

- 对角线法则：三阶行列式的便捷计算，“撇负捺正”、“副负主正”
- “八项规定”：

(1) 转置值不变：$D = D^T$

(2) 互换值相反

(3) $D = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij}$

(4) 提取公因子

(5) 拆某行元素

(6) 有两行/列相等，$D = 0$

(7) 把行列式某行的k倍加到另一行上去，值不变

(8) $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{kj} = 0 (i \neq k)$

行列式

XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY

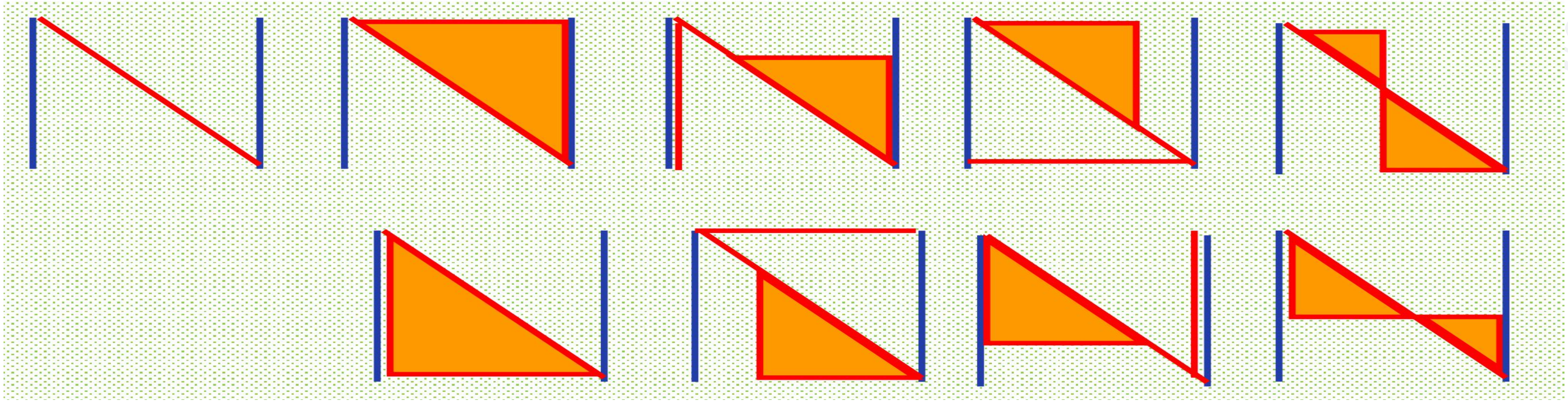
- 上三角行列式：

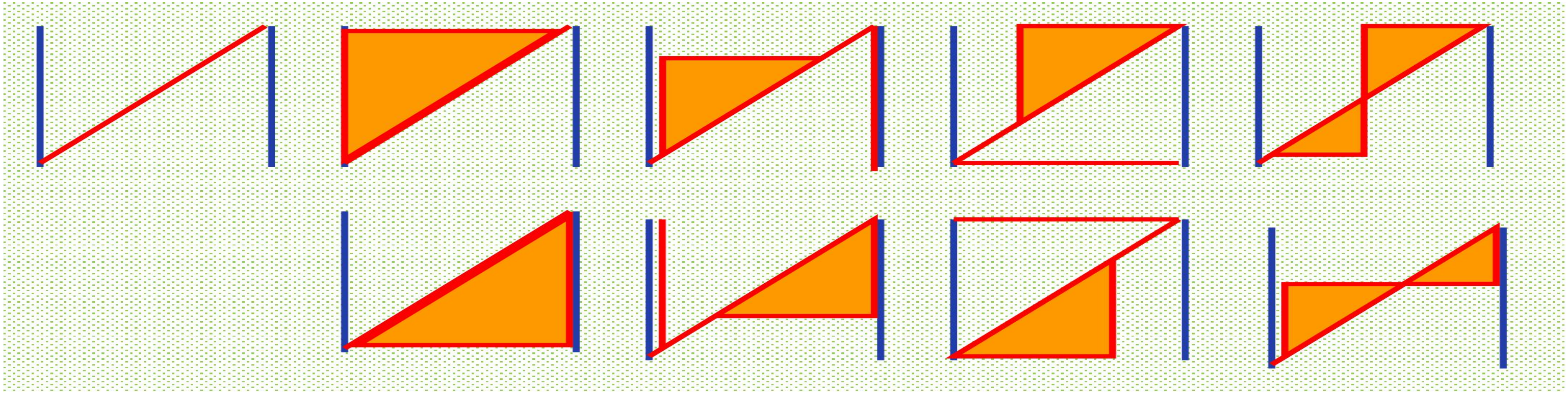
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn} = \prod a_{ii}$$

上三角行列式

$$\begin{vmatrix} & & & a_{1n} \\ & & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ & ⋰ & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n-1,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{i=1}^{n} a_{i,n-i+1}$$

行列式





行列式

- Vandermonde行列式：

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \le j < i \le n} (x_i - x_j).$$

行列式

•Cramer法则：

n个方程、n个未知量的线性方程组，如果：$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$

则方程组有唯一解：

$$x_1=\frac{D_1}{D}, x_2=\frac{D_2}{D}, x_3=\frac{D_2}{D}, \cdots, x_n=\frac{D_n}{D}.$$

其中，

$$D_j=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

行列式

- 非齐次/齐次比较：

非齐次：D≠0（满秩、可逆、非奇异）→唯一解；

D=0（降秩、不可逆、奇异）→无解/多解；

齐次： D≠0（满秩、可逆、非奇异）→只有零解；

D=0（降秩、不可逆、奇异）→有非零解。

$$\begin{cases}(1-\lambda)x_1-2x_2+4x_3=0,\\ 2x_1+(3-\lambda)x_2+x_3=0,\\ x_1+x_2+(1-\lambda)x_3=0,\end{cases}$$

有非零解，求λ

$\lambda=0,2,3$

矩阵

- 基本运算：同型矩阵才有加减、相等之说，对应元素加减即可

  左列数=右行数才能相乘，实质法则“左行乘右列”

  矩阵没有除法！！

  不满足乘法交换律！！

  eg.$(AB)^m=A^mB^m$　　$(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$

  $(A+B)(A-B)=A^2-B^2$

  ×××

矩阵

西安交通大学
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY

$$\lambda\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \lambda a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \lambda a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & \lambda a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & \lambda a_{33} \end{vmatrix}$$

$$|kA| = k^n|A|$$

$$\lambda\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \lambda a_{13} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \lambda a_{23} \\ \lambda a_{31} & \lambda a_{32} & \lambda a_{33} \end{pmatrix}$$

矩阵

你曾认为理所当然的一些谬论(p49)：

- $A^2=O$,则$A=O$
- $A^2=A$,则$A=O$或$A=E$ ×××
- $AB=O$,则$A=O$或$B=O$
- $AB=AC$且$A\neq O$,则$B=C$

矩阵

- 逆矩阵：满足AB=E的方阵，A与B互为逆矩阵
- 伴随矩阵：对应元素的代数余子式构成的转置矩阵

$$A^* = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

- 重要公式：

$A^{-1}=\dfrac{A^*}{|A|}$　　$|A^*|=|A|^{(n-1)}$　　$AA^*=|A|E$

- 基本性质：

(1) A^{-1}可逆，且 $(A^{-1})^{-1}=A$

(2) A^T可逆，且 $(A^T)^{-1}=(A^{-1})^T$

(3) kA可逆，且 $(kA)^{-1}=\dfrac{1}{k}A^{-1}$

(4) AB可逆，且 $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$

(5) $|A^{-1}|=\dfrac{1}{|A|}$

矩阵

转置	逆	伴随
$\lvert A^T\rvert = \lvert A\rvert$	$\lvert A^{-1}\rvert = \lvert A\rvert^{-1}$	$\lvert A^*\rvert = \lvert A\rvert^{n-1}$
$(kA)^T = kA^T$	$(kA)^{-1} = k^{-1}A^{-1}$	$(kA)^* = k^{n-1}\lvert A\rvert A^{-1}$
$(A+B)^T = A^T + B^T$	$\cancel{(A+B)^{-1} =}$	$\cancel{(A+B)^* =}$
$(AB)^T = B^T A^T$	$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$	$(AB)^* = B^* A^*$
$(A^T)^T = A$	$(A^{-1})^{-1} = A$	$(A^*)^* = \lvert A\rvert^{n-2} A$

$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T \quad (A^*)^{-1} = (A^{-1})^* \quad (A^T)^* = (A^*)^T$

矩阵

•分块矩阵的乘法：

$$A=\begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{s1} & \cdots & A_{sr} \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} B_{11} & \cdots & B_{1t} \\ \vdots & & \vdots \\ B_{r1} & \cdots & B_{rt} \end{pmatrix}.$$

$$AB=\begin{pmatrix} C_{11} & \cdots & C_{1t} \\ \vdots & & \vdots \\ C_{s1} & \cdots & C_{st} \end{pmatrix}$$

其中 $C_{ij}=\sum_{k=1}^{r} A_{ik}B_{kj}$

$(i=1,\cdots,s;j=1,\cdots,t).$

矩阵

• 分块矩阵的转置（自转+公转）：

$$A=\begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{s1} & \cdots & A_{sr} \end{pmatrix},\quad \text{则 } A^T=\begin{pmatrix} A_{11}^T & \cdots & A_{s1}^T \\ \vdots & & \vdots \\ A_{1r}^T & \cdots & A_{sr}^T \end{pmatrix}.$$

• 分块对角矩阵的性质：

1） $|A|=|A_1||A_2|\cdots|A_s|$;

2） 若 $A=\begin{pmatrix} A_1 & & \\ & \ddots & \\ & & A_s \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} B_1 & & \\ & \ddots & \\ & & B_s \end{pmatrix}$,

则有 $AB=\begin{pmatrix} A_1B_1 & & \\ & \ddots & \\ & & A_sB_s \end{pmatrix}$;

3） 若 $A=\begin{pmatrix} A_1 & & \\ & \ddots & \\ & & A_s \end{pmatrix}$, 则 $A^n=\begin{pmatrix} A_1^n & & \\ & \ddots & \\ & & A_s^n \end{pmatrix}$;

矩阵

- 初等变换：**交换、数乘、倍加**
- 初等矩阵：对单位矩阵**只作一次**初等变换的矩阵，分别即为

  P_{ij}、$P_i(k)$、$P_{ij}(k)$

  初等矩阵均可逆,其逆矩阵也是初等矩阵.
- 初等变换与初等矩阵的关系（行变换）：

(1)若$A_{m\times n}\xrightarrow{r_i\leftrightarrow r_j}B_{m\times n}$,则 $B=P(i,j)A$

(2)若$A_{m\times n}\xrightarrow{kr_i}B_{m\times n}$,则 $B=P(i(k))A$

(3)若$A_{m\times n}\xrightarrow{kr_i+r_j}B_{m\times n}$,则 $B=P(i(k),j)A$

矩阵

•阶梯型矩阵： 称满足下列两个条件的矩阵为阶梯形矩阵：

1）若有零行（元素全为零的行），必位于底部；

2）各非零行的首非零元位于前一行首非零元之右.

•简化阶梯型矩阵（行最简形）：

1）是阶梯形矩阵;

2）各非零行的首非零元均为1;

3）首非零元所在列其它元素均为 0 .

对于任一非零矩阵都可以通过有限次行变换把它化成阶梯形矩阵。

矩阵

•可逆矩阵的两种求法：公式法/**初等行变换法**（还可用来解方程）

由$AA^{-1}=E$,$[A|E]\rightarrow\rightarrow[E|A^{-1}]$求解$A^{-1}$

由$Ax=b$,$[A|b]\rightarrow\rightarrow[E|A^{-1}b]$求解$x=A^{-1}b$

等价命题：①A可逆②A表示若干初等矩阵乘积③A可通过有限次行变换化为E

矩阵

- 矩阵的秩： 非零子式的最高阶数（化为阶梯型矩阵后非零行的个数）

$A=\begin{bmatrix}1 & a & a\\ a & 1 & a\\ a & a & 1\end{bmatrix}$,秩为2，求a   a=1或-1/2?

- **初等变换不改变矩阵的秩**
- **满秩方阵乘矩阵后，矩阵的秩不变**

矩阵

•什么时候只能行变换，什么时候行列变换都可以?

（1）初等变换不改变矩阵的秩（即求矩阵的秩可以用初等行变换和初等列变换）

（2）初等变换法求矩阵的逆只能进行初等行变换

（3）求线性方程组的解只能进行初等行变换

几何向量

•两个向量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$共线的充要条件：

①存在不全为0的常数k_1与k_2，使得$k_1\boldsymbol{a}+k_2\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$

②它们的坐标构成的二阶行列式等于0（对应成比例）

•任一平面向量$\boldsymbol{a}$都可以被该平面内不共线的两向量$\boldsymbol{e}_1$、$\boldsymbol{e}_2$唯一表示为：

$\boldsymbol{a}=x\boldsymbol{e}_1+y\boldsymbol{e}_2$

•三个向量$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$与$\boldsymbol{c}$共面的充要条件：

①存在不全为0的常数k_1、k_2与k_3，使得$k_1\boldsymbol{a}+k_2\boldsymbol{b}+k_3\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$

②它们的坐标构成的三阶行列式等于0(混合积为0)

•任一空间向量$\boldsymbol{a}$都可以被该空间内不共线的三向量$\boldsymbol{e}_1$、$\boldsymbol{e}_2$和$\boldsymbol{e}_3$唯一表示为：$\boldsymbol{a}=x\boldsymbol{e}_1+y\boldsymbol{e}_2+z\boldsymbol{e}_3$

（x,y,z均为常数）

几何向量

- 正交射影向量：$\text{Proj}_a \boldsymbol{b}=||\boldsymbol{b}||\cos\theta\, \boldsymbol{a}^{\circ}$
- 正交射影：$(\boldsymbol{b})_{\boldsymbol{a}}=||\boldsymbol{b}||\cos\theta$
- 射影性质：$(k\boldsymbol{b})_{\boldsymbol{a}}=k(\boldsymbol{b})_{\boldsymbol{a}}$　$(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})_{\boldsymbol{a}}=(\boldsymbol{b})_{\boldsymbol{a}}+(\boldsymbol{c})_{\boldsymbol{a}}$

数量积（内积）：　（略，高中知识）

几何向量

•向量积（外积）：

大小：$||a\times b||=||a||\cdot||b||\sin\theta$

方向：右手定则

坐标形式：$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix}$

几何意义：平行四边形的面积

应用：判定向量共线（外积为***0***）、求与两个不共线的向量都垂直的向量

几何向量

•混合积：

大小：$[\boldsymbol{a}\ \ \boldsymbol{b}\ \ \boldsymbol{c}] = (\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$

坐标形式： $\vec{a}\times\vec{b}\cdot\vec{c} = [\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}] = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$

几何意义：平行六面体的体积

应用：判定三向量是否共面

几何向量

•平面方程：

①点法式： $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$

②一般式： $Ax+By+Cz+D=0$

③截距式： $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$

④参数式：
$$\begin{cases} x = x_0 + sa_x + tb_x \\ y = y_0 + sa_y + tb_y \\ z = z_0 + sa_z + tb_z \end{cases}$$

平面位置关系：通过n_1与n_2关系来判断

几何向量

- 直线方程：

①对称式：$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$

②一般式：$a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0$

$a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0$

③参数式：$\begin{cases} x=x_0+lt, \\ y=y_0+mt, \quad -\infty<t<+\infty. \\ z=z_0+nt. \end{cases}$

- 直线位置关系：

①异面：$[P_1P_2 \ \alpha_1 \ \alpha_2]\neq 0$

②相交：$[P_1P_2 \ \alpha_1 \ \alpha_2]=0$ 且 $\alpha_1 \nparallel \alpha_2$

③平行：$\alpha_1 // \alpha_2 \nparallel P_1P_2$

④重合：$\alpha_1 // \alpha_2 // P_1P_2$

几何向量

•距离公式：

①点到直线： $d=|P_0P_1 \cdot n^{\circ}|$

②点到平面： $d=||P_0P_1 \times \alpha^{\circ}||$

③异面直线： $d=|P_1P_2 \cdot \dfrac{\alpha_1 \times \alpha_2}{||\alpha_1 \times \alpha_2||}|$

02

例题解析

西安交通大學
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY

例1：

计算 n 阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} \alpha+\beta & \alpha\beta & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & \alpha+\beta & \alpha\beta & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha+\beta & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha+\beta & \alpha\beta \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \alpha+\beta \end{vmatrix}.$$

思路：拆项+递推

例1：解：

$$D_n=\begin{vmatrix}\alpha & \alpha\beta & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & \alpha+\beta & \alpha\beta & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 1 & \alpha+\beta & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha+\beta & \alpha\beta\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \alpha+\beta\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\beta & \alpha\beta & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 1 & \alpha+\beta & \alpha\beta & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 1 & \alpha+\beta & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha+\beta & \alpha\beta\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \alpha+\beta\end{vmatrix}$$

$$=\alpha D_{n-1}+\beta^n,$$

$$D_n=\begin{vmatrix}\beta & \alpha\beta & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & \alpha+\beta & \alpha\beta & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 1 & \alpha+\beta & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha+\beta & \alpha\beta\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \alpha+\beta\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\alpha & \alpha\beta & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 1 & \alpha+\beta & \alpha\beta & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 1 & \alpha+\beta & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha+\beta & \alpha\beta\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \alpha+\beta\end{vmatrix}$$

$$=\beta D_{n-1}+\alpha^n,$$

两式联立解得 $$D_n=\frac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{\alpha-\beta}\quad(\alpha\neq\beta),$$

$\alpha=\beta$ 时，容易解得 $D_n=(n+1)\alpha^n$.

例2：计算行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 \end{vmatrix}$$

思路：加行法+范德蒙行列式推导过程

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ a & b & c & d & 0 \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 & 0 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 & -1 \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{r_{23}(-a) \\ r_{12}(-a)}]{\substack{r_{45}(-a) \\ r_{34}(-a)}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & b-a & c-a & d-a & 0 \\ 0 & b(b-a) & c(c-a) & d(d-a) & 0 \\ 0 & b^2(b-a) & c^2(c-a) & d^2(d-a) & -1 \\ 0 & b^3(b-a) & c^3(c-a) & d^3(d-a) & a \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{展开}]{\text{按第一列}} (b-a)(c-a)(d-a) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ b & c & d & 0 \\ b^2 & c^2 & d^2 & -1 \\ b^3 & c^3 & d^3 & a \end{vmatrix}$$

(计算同上)

结果：$(b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)(d-c)(a+b+c+d)$.

例3：下列有关行列式的说法，正确的是（）

A.行列式中每个元素都扩大k倍，行列式的值也扩大k倍

B.偶数阶行列式将右边一半元素整体挪到左边一半元素的左边，行列式的值变为原来的相反数

C.二阶行列式D=0，且四个非零元素同号，则D中两列、两行的元素都一定分别对应成比例

D.行列式D中，任一行元素与任一行对应元素的代数余子式相乘，乘积之和都为0

解答：C

例4：设A为m×n阶实矩阵，且$A^TA=O$，求A中所有元素之和

解：推出A=O，答案为0

例5：设方阵A满足$A^2-2A+2E=O$,k为实数，求$(A-kE)^{-1}$

解：$(A-kE)(A-(2-k)E)=[k(2-k)-2]E$

当k为实数时，$k(2-k)-2$恒负，永不为0，

故$(A-kE)\{(A-(2-k)E)/[k(2-k)-2]\}=E$

$(A-kE)^{-1}=\{(A-(2-k)E)/[k(2-k)-2]\}$

例6：设矩阵X满足

AXA+BXB=AXB+BXA+E，其中

$$A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\1 & 1 & 0\\1 & 1 & 1\end{bmatrix}\quad B=\begin{bmatrix}0 & 1 & 1\\1 & 0 & 1\\1 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

求X

思路：移项，提取公因式

解：(A-B)X(A-B)=E

$$X=\begin{bmatrix}1 & 2 & 5\\0 & 1 & 2\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

例7：设A,B均为3阶矩阵，$|A|=3$，$|B|=4$，$|A^{-1}+B|=6$,则$|2(A+B^{-1})|=?$

思路：配凑

解： $|2(A+B^{-1})|=8|(A+B^{-1})|=8|A||A^{-1}+B||B^{-1}|=8*3*6*(1/4)=36$

例8：A为m×n阶矩阵，B为n×m阶矩阵，证明$|E_m-AB|=|E_n-BA|$

思路：分块矩阵的构造

证　由分块矩阵乘法得

$$\begin{bmatrix} I_m & O \\ -B & I_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_m & A \\ B & I_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} I_m & A \\ O & I_n-BA \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} I_m & -A \\ O & I_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_m & A \\ B & I_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} I_m-AB & O \\ B & I_n \end{bmatrix},$$

以上两式两端分别取行列式得

$$\begin{vmatrix} I_m & A \\ B & I_n \end{vmatrix}=|I_n-BA|,\quad \begin{vmatrix} I_m & A \\ B & I_n \end{vmatrix}=|I_m-AB|.$$

故结论得证.

例9： 5.设矩阵 A= $(a_{ij})_{3*3}$,满足 $A^* = A^T$,若 a_{11}, a_{12}, a_{13}是三个相等的整数,求 a_{11}

思路：（题目中整数改为实数）由$A^*=A^T$解出$|A|$，再由AA^T求解a_{11}

5.答案: 0 或$\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$

解析: $A^* = A^T \Rightarrow |A^*| = |A^T| \Rightarrow |A|^2 = |A| \Rightarrow |A| = 1,-1,0$，$AA^T = AA^* = |A|I$，$AA^T$ 的第一个元素是 $a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{13}^2$,即$|A|I$ 的一个元素是$a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{13}^2$,所以$|A|$大于等于 0, $|A|$=0 或 1。当$|A|$=0 时，a_{11}=0;当$|A|$=1 时，$a_{11} = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$。

例10：设AB都是对称矩阵，A和(E+AB)都可逆，求证：$(E+AB)^{-1}A$是对称矩阵

2. 证明　因为 A、B 都是对称矩阵，所以有 $A^T=A, B^T=B, (A^{-1})^T=(A^T)^{-1}=A^{-1}$

$$(E+AB)^{-1}A=(AA^{-1}+AB)^{-1}A=[A(A^{-1}+B)]^{-1}A=(A^{-1}+B)^{-1}$$

$$[(E+AB)^{-1}A]^T=[(A^{-1}+B)^{-1}]^T=[(A^{-1}+B)^T]^{-1}=[(A^{-1})^T+B^T]^{-1}$$

$$=(A^{-1}+B)^{-1}$$

故 $(E+AB)^{-1}A$ 是对称矩阵.

思路：可逆、转置矩阵的灵活代换

例11： 设 A 为 n $(n>1)$ 阶方阵，$\det(A)=5$，A^* 为 A 的伴随矩阵，则

$\det\left[(A^*)^{-1}-A\right]=$______.

$$\left|\boldsymbol{A}^*(A^*)^{-1}-A^*A\right| = |E-|A|E| = |-4E| = (-4)^n$$

$$|A^*|\left|(A^*)^{-1}-A\right| \text{其中} |A^*| = |A|^{n-1} = 5^{n-1}$$

答案：$(-4)^n/5^{(n+1)}$

例12：

设矩阵$A=\begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$的伴随矩阵$A^*$的秩为1，则

$(A)\,a=b$且$a+2b=0$　　$(B)\,a\neq b$且$a+2b\neq 0$

$(C)\,a=b$且$a+2b\neq 0$　　$(D)\,a\neq b$且$a+2b=0$

若$a=b$，则$A=\begin{pmatrix} b & b & b \\ b & b & b \\ b & b & b \end{pmatrix}$ $\Rightarrow A^*=O$与题设矛盾，故$a\neq b$.

又A^*的秩为1$\Rightarrow A^*$不可逆，从而A不可逆，即$|A|=0$.

$$|A|=\begin{vmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{vmatrix}=(a+2b)\begin{vmatrix} 1 & b & b \\ 0 & a-b & 0 \\ 0 & 0 & a-b \end{vmatrix}=(a+2b)(a-b)^2$$

因$a-b\neq 0$,故$a+2b=0$.

*补充知识：

答案：D

$$r(A^*)=\begin{cases} n, r(A)=n \\ 1, r(A)=n-1 \\ 0, r(A)<n-1 \end{cases}$$

例13：

设3阶方阵$A=\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\end{pmatrix}$,其中$\alpha_i$为3维行向量$(i=1,2,3)$,

矩阵$B=\begin{pmatrix}\alpha_2\\ \alpha_1\\ \alpha_3-2\alpha_1\end{pmatrix}$, $P_1=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$, $P_2=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-2&0&1\end{pmatrix}$,则必有

$(a)AP_1P_2=B$　$(b)AP_2P_1=B$　$(c)P_1P_2A=B$　$(d)P_2P_1A=B$

考点：初等变换与初等矩阵的关系

答案：C

例14：设a,b,c,d是四个列向量，矩阵$A_{4\times4}$=(a b c d),
$B_{4\times4}$=(2b+3c+4d a+3c+4d a+2b+4d a+2b+3c),
若|2A|=x，求|B|?

:$B=A\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 0 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 0 \end{pmatrix}$,

即|B|=|A|*(-72)=(x/16)*(-72)=-9x/2

例15：

设$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -2\\4 & a & 3\\3 & -1 & 1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}$为3阶非零矩阵，且$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$，则$a=$________.

解答：若A为满秩方阵，则r(AB)=r(B)=0，此时B为零矩阵，矛盾，故A为降秩方阵，|A|=0

答案：-3

例16：设α为n维非零列向量，$A=E-\alpha\alpha^T$，E为n阶单位矩阵，证明：$A^2=A$是$\alpha^T\alpha=1$的充要条件

解：$A^2=A$可知$A(A-E)=O$,

即$\alpha\alpha^T(E-\alpha\alpha^T)=O$,

展开可得$\alpha\alpha^T-\alpha(\alpha^T\alpha)\alpha^T=O$,故$\alpha^T\alpha=1$

例17：已知x_1,x_2,x_3为方程$x^3+ex+\pi=0$的三个复数根，则$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_3 & x_2 & x_1 \\ x_2 & x_3 & x_1 & x_2 & x_1 & x_3 \\ x_3 & x_1 & x_2 & x_1 & x_3 & x_2 \\ x_1 & x_3 & x_2 & x_2 & x_1 & x_3 \\ x_3 & x_2 & x_1 & x_3 & x_2 & x_1 \\ x_2 & x_1 & x_3 & x_1 & x_3 & x_2 \end{vmatrix}$的值为多少?

解答：每行都加到第一列上，提出来个$2(x_1+x_2+x_3)$,由一元三次方程的韦达定理知道三根和为0，故答案是0

x1+x2+x3=-b/a

x1x2+x2x3+x1x3=c/a

x1x2x3=-d/a

例18：

设$A=(a_{ij})_{3\times3}$为非零实矩阵，A_{ij}为a_{ij}的代数余子式，且$a_{ij}+A_{ij}=0,(i,j=1,2,3)$

(1)求$|A|$；　(2)证明A为正交矩阵(正交矩阵定义参见第12题).

16.（**1**）由题意知 $A^*=-A^T\Rightarrow|A^*|=(-1)^3|A|\Rightarrow|A|^2=-|A|\Rightarrow|A|=0$或$|A|=-1$，　……4 分

而A为非零实矩阵，不妨设$a_{11}\neq0$，则$|A|=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}=-a^2{}_{11}-a^2{}_{12}-a^2{}_{13}<0$，

故$|A|=-1$.　……8 分

(2)由(1)知$A^{-1}=\dfrac{1}{|A|}A^*=-A^*=A^T$，故$A$为正交矩阵.　……12 分

正交矩阵：$AA^T=E$

例19：

7.已知 L1: $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z+1}{2}$, L2: $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z}{-1}$,

(1)证明两直线异面

(2)求两条直线的距离

(3)求两条直线的公垂线方程(即与它们垂直相交)

(1)分别在 L1，L2 上取一点，$M_1=(0,1,-1)$，$M_2=(1,-2,0)$，两条直线的法向量分别为

$n_1=(2,1,2)$，$n_2=(1,2,-1)$，$M_1M_2=(1,-3,1)$，$\overrightarrow{M_1M_2}\cdot(n_1\times n_2)=\begin{vmatrix}0 & -3 & 1\\ 0 & 1 & 2\\ 2 & 2 & -1\end{vmatrix}=-14\neq 0$，所以两

直线异面

(2) $d=\dfrac{|\overrightarrow{M_1M_2}\cdot(n_1\times n_2)|}{\|n_1\times n_2\|}=\dfrac{14}{5\sqrt{2}}$

例19：

7.已知 L1: $\frac{x}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z+1}{2}$, L2: $\frac{x-1}{1}=\frac{y+2}{2}=\frac{z}{-1}$,

(1)证明两直线异面

(2)求两条直线的距离

(3)求两条直线的公垂线方程(即与它们垂直相交)

(3)为求公垂线，易知其方向向量 $n_3=n_1\times n_2$ =(-5,4,3)，但很难找到公垂线上的一点，因此我们转而考虑建立公垂线的一般方程，即找到包含公垂线的两个平面，公垂线与 L1 所决定的平面 π_1 及公垂线与 L2 所决定的平面 π_2 的交线就是公垂线。

π_1 过点 M_1(0,1,-1)，法向量= $n_3\times n_1$ =(5,16,-13),平面方程为 5x+16y-13z-29=0

π_2 过点 M_2(1,-2,0)，法向量= $n_3\times n_2$ =(10,2,14)//(5,1,7),平面方程为 5x+y+7z-3=0

所求的公垂线方程为 $\begin{cases}5x+16y-13z-29=0\\5x+y+7z-3=0\end{cases}$

例20：证明：三角形的高交于一点

证 设已知 $AH\perp BC, BH\perp AC$（见图3.2）. 利用数量积定义，

问题转化为：已知 $\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{AC}=0$，求证 $\overrightarrow{CH}\cdot\overrightarrow{AB}=0$.

由
$$\begin{aligned}\overrightarrow{CH}\cdot\overrightarrow{AB}&=(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AH})\cdot\overrightarrow{AB}\\&=\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AH}\cdot(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB})\\&=\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{AC}\\&=\overrightarrow{AC}\cdot(\overrightarrow{AH}-\overrightarrow{AB})=\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BH}=0,\end{aligned}$$

故

$$\overrightarrow{CH}\perp\overrightarrow{AB}.$$

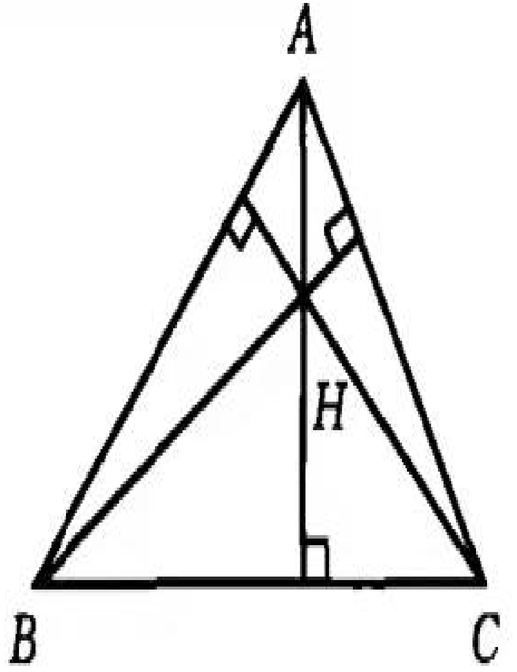


图 3.2

例21：求两平面2x-y+z=7和x+y+2z=11所成二面角的平分面的方程

解　由于所求平面上任一点(x,y,z)到二平面的距离相等,故所求平面上的点(x,y,z)满足方程

$$\frac{|2x-y+z-7|}{\sqrt{6}}=\frac{|x+y+2z-11|}{\sqrt{6}},$$

即

$$2x-y+z-7=\pm(x+y+2z-11)$$

故所求平面方程为$x-2y-z+4=0$或$x+z-6=0$.

显然,从几何性质很容易知道所求得的两平面是相互垂直的,即$(1,-2,-1)\perp(1,1,-1)$.

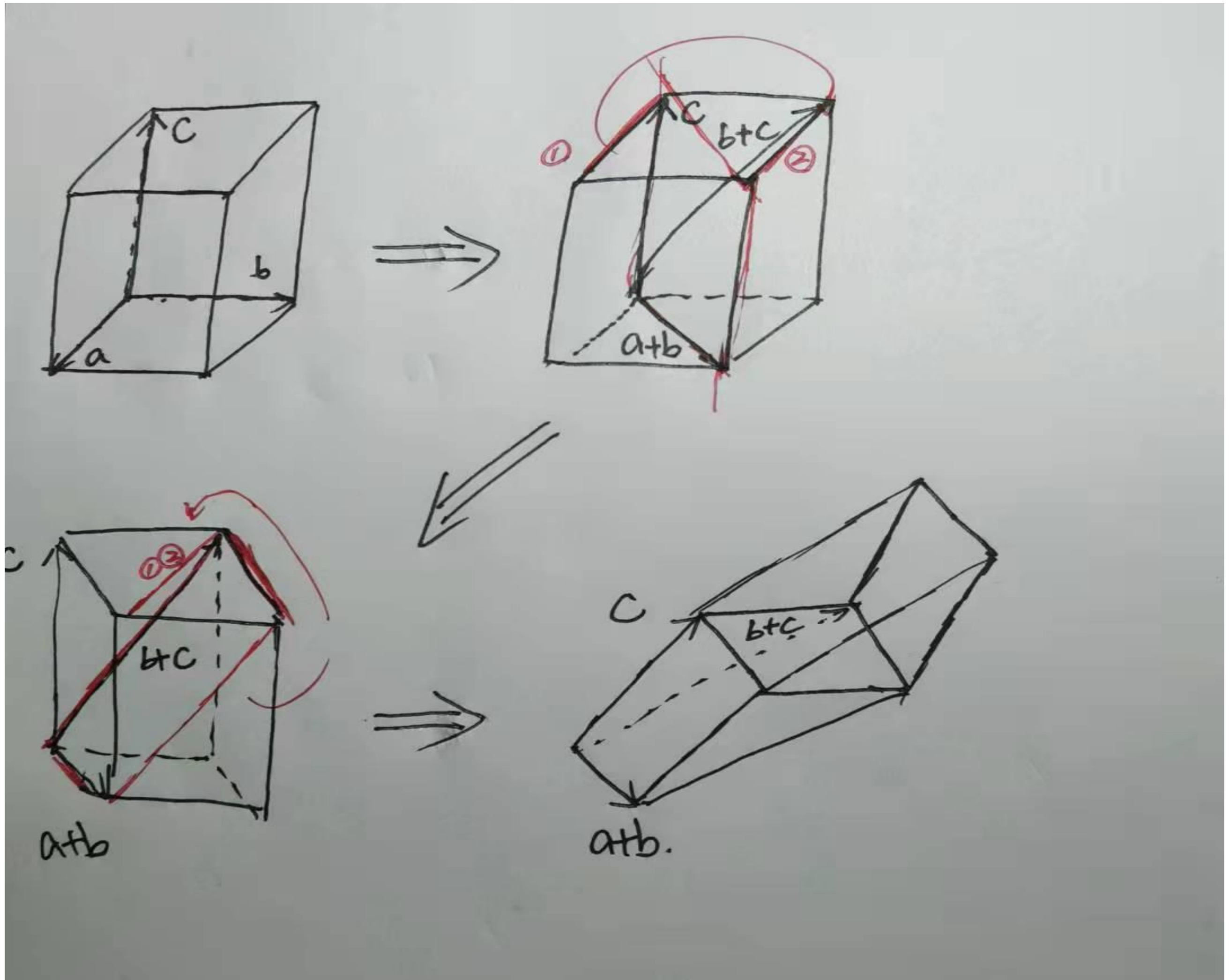
例21：求两平面2x-y+z=7和x+y+2z=11所成二面角的平分面的方程

（课本p120平面束法）

设2x-y+z-7+t(x+y+2z-11)=0，**涵盖过交线除了x+y+2z=11的所有平面，再结合角度关系，用法向量夹角衡量并列方程**

例22：设$(a\times b)\cdot c=2$,求$[(a+b)\times(b+c)]\cdot c=?$

解：由混合积几何意义，发现平行六面体不变，故答案为2



例23：证明：若$a\times b+b\times c+c\times a=0$,则三向量共面

解：两边同时与a做点积即可

例24： 在平面$x-y-2z=0$上找一点，使他与点（2,1,5），$(4,-3,1)$，$(-2,-1,3)$的距离相等。

法1：

设点$P(x,y,z)$

$(x-2)^2+(y-1)^2+(z-5)^2$

$=(x-4)^2+(y+3)^2+(z-1)^2$

$=(x+2)^2+(y+1)^2+(z-3)^2$

解得：$-4x-y-5z+15$

$=-4x+3y-z+13$

$=2x+y-3z+7$

又$x-y-2z=0$

解三元一次方程得$x=-1$，$y=1$，

$z=-1$

所以$P(-1,1,-1)$。

法2：求外心→
求平面方程→
求过外心且垂直于
平面的直线→
与已知平面联立

03

试卷解读

西安交通大學
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY

一、单项选择题(请将正确选项填写在后面的括号中，每小题 3 分，共 15 分)

CADDB

1. 设 A 是 2 阶方阵，B 是 3 阶方阵，且 $|A|=2$，$|B|=-2$，则 $|-|A|B|=$(　)

(A) 4；　(B) -4；　(C) 16；　(D) -16.

2. 设 A，B 都是 n 阶方阵，如果 A 和 B 的秩分别为 r 和 n，则 $r(AB)-r(A)=$(　)

(A) 0；　(B) r；　(C) n；　(D) $n-r$.

3. 设 A，B 均为 2 阶方阵，A^*，B^* 分别为 A，B 的伴随矩阵，若 $|A|=1$，$|B|=2$，则分块矩阵 $\begin{bmatrix} O & A \\ B & O \end{bmatrix}$ 的伴随矩阵为(　)

(A) $\begin{bmatrix} O & A^* \\ 2B^* & O \end{bmatrix}$；　(B) $\begin{bmatrix} O & 2A^* \\ B^* & O \end{bmatrix}$；

(C) $\begin{bmatrix} O & 2B^* \\ A^* & O \end{bmatrix}$；　(D) $\begin{bmatrix} O & B^* \\ 2A^* & O \end{bmatrix}$.

4. 已知 $P=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$，$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$，若 $P^m A P^n = A$，则下列选项中正确的是(　)

(A) $m=5$，$n=4$；　(B) $m=5$，$n=5$；

(C) $m=4$，$n=5$；　(D) $m=4$，$n=4$.

5. 设有直线 l：$\begin{cases} x+3y+2z+1=0 \\ 2x-y-10z+3=0 \end{cases}$ 及平面 $\pi: 4x-2y+z-2=0$，则直线 l(　)

(A) 平行于 π；　(B) 垂直于 π；

(C) 在 π 上；　(D) 与 π 斜交.

6. 若$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ x & 3 & 1 \\ 4 & x & 5 \end{vmatrix}$中（1, 2）元的代数余子式$A_{12}=-1$, 则$A_{21}=$_____.

7. 设矩阵A满足$A^2+A=4I$, 其中I为单位矩阵, 则$(A-I)^{-1}=$______.

8. 设$\alpha=(1,0,-1)^T$, 矩阵$A=\alpha\alpha^T$, n为正整数, 则$A^n=$__________.

9. 已知$\|a\|=1$, $\|b\|=2$, $(a,b)=\dfrac{\pi}{3}$, 则$\|2a-b\|=$_____.

10. 若4点$A(1,0,-2)$, $B(7,x,0)$, $C(-8,6,1)$, $D(-2,6,1)$共面, 则$x=$____.

6. 2 7. $\dfrac{1}{2}(A+2I)$ 8. $2^{n-1}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 9. 2 10. 4

11. 计算行列式$D=\begin{vmatrix}0&2&3&4&5\\1&0&3&4&5\\1&2&0&4&5\\1&2&3&0&5\\1&2&3&4&0\end{vmatrix}$

11. 解法 1：第 1 行乘以−1 分别加到第 2, 3, 4, 5 行, 再把第 $k(k=2,3,4,5)$ 列的 $\frac{1}{k}$ 倍加到第 1 列, 得

$$D=\begin{vmatrix}0&2&3&4&5\\1&-2&0&0&0\\1&0&-3&0&0\\1&0&0&-4&0\\1&0&0&0&-5\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}4&2&3&4&5\\0&-2&0&0&0\\0&0&-3&0&0\\0&0&0&-4&0\\0&0&0&0&-5\end{vmatrix}=480$$

解法二： $D=5!\begin{vmatrix}0&1&1&1&1\\1&0&1&1&1\\1&1&0&1&1\\1&1&1&0&1\\1&1&1&1&0\end{vmatrix}=5!4\begin{vmatrix}1&1&1&1&1\\0&-1&0&0&0\\0&0&-1&0&0\\0&0&0&-1&0\\0&0&0&0&-1\end{vmatrix}=480$

12. 已知矩阵 A 的伴随矩阵 $A^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 8 \end{bmatrix}$，矩阵 B 满足方程

$ABA^{-1} = BA^{-1} + 3I$，求 B.

12. 解：等式 $ABA^{-1} = BA^{-1} + 3I$ 两端左乘 A^*，右乘 A，得 $|A|B = A^*B + 3|A|I$，由

$|A^*| = 8$，知 $|A| = 2$．代入上式，得 $(2I - A^*)B = 6I$，故

$$B = 6(2I - A^*)^{-1} = 6\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -6 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

13. 设矩阵 $A=\begin{bmatrix} a & -1 & -1 \\ -1 & a & -1 \\ -1 & -1 & a \end{bmatrix}$ 与矩阵 $B=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 等价, 求常数 a.

13. 解：因为两个同型矩阵等价的充要条件为秩相等, 故 $r(A)=r(B)$. 易知 $r(B)=2$,

故 $r(A)=2$. 从而 $\det(A)=\det\begin{bmatrix} a & -1 & -1 \\ -1 & a & -1 \\ -1 & -1 & a \end{bmatrix}=(a-2)(a+1)^2=0$.

当 $a=-1$ 时， $r(A)=1$; 当 $a=2$ 时， $r(A)=2$.

所以, 当 $a=2$ 时, 两个矩阵等价. (不讨论者, 扣 2 分)

14. 讨论 n 阶方阵 $A=\begin{bmatrix} a & b & \cdots & b \\ b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & \cdots & a \end{bmatrix}$ $(n \geq 2)$ 的秩.

14. 解： $A \to \begin{bmatrix} a+(n-1)b & b & \cdots & b \\ a+(n-1)b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a+(n-1)b & b & \cdots & a \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} a+(n-1)b & b & \cdots & b \\ 0 & a-b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a-b \end{bmatrix}$

当 $a \neq b$ 且 $a \neq (1-n)b$ 时， $r(A)=n$；

当 $a=b=0$ 时， $r(A)=0$；

当 $a=b \neq 0$ 时， $r(A)=1$；

当 $a \neq b$ 且 $a=(1-n)b$ 时， $r(A)=n-1$.

15. 直线 L 过点 $P_0(1,0,-2)$，与平面 $\pi: 3x-y+2z+1=0$ 平行，与直线 $L_1: \dfrac{x-1}{4}=\dfrac{y-3}{-2}=z$ 相交，求 L 的对称式方程.

15. 解法 1：设直线 L 的方向向量为 $a=(l,m,n)$. 因为直线 L 与平面 π：3x−y+2z+1=0 平行，故直线 L 的方向向量 a 与平面 π 的法向量 $n=(3,-1,2)$ 垂直，即有

$$a \bullet n = 3l - m + 2n = 0 \qquad (1)$$

又直线 L 过点 P_0，并且与直线 L_1 相交，所以三向量 $\overrightarrow{P_0P_1}, a_1, a$ 共面，其中 $a_1=(4,-2,1)$ 是 L_1 的方向向量， $P_1(1,3,0)$ 为 L_1 上的点， $\overrightarrow{P_0P_1}=(0,3,2)$. 故有

$$\left[\overrightarrow{P_0P_1} \quad a_1 \quad a\right]=\begin{vmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 4 & -2 & 1 \\ l & m & n \end{vmatrix}=0 \qquad (2)$$

由 (1)、(2) 解得 $m=-\dfrac{25}{2}l$， $n=-\dfrac{31}{4}l$，取 $l=4$，得直线 L 的方向向量 $a=(4,-50,-31)$. 故所求直线的对称式方程为 $\dfrac{x-1}{4}=\dfrac{y}{-50}=\dfrac{z+2}{-31}$.

解法 2：令 $\dfrac{x-1}{4}=\dfrac{y-3}{-2}=z=t$，则 $x=1+4t, y=3-2t, z=t$

可知直线 L_1 与直线 L 的交点可取做 $P_1(1+4t,3-2t,t)$，故直线 L 的方向向量可取做 $\overrightarrow{P_0P_1}=(4t,3-2t,t+2)$ ， $\overrightarrow{P_0P_1}$ 与平面 $3x-y+2z+1=0$ 的方向向量垂直，即 $(4t,3-2t,t+2)\cdot(3,-1,2)=0$，解得 $t=-\dfrac{1}{16}$，故点 P_1 的坐标为 $\left(\dfrac{3}{4},\dfrac{25}{8},-\dfrac{1}{16}\right)$.

故直线 L 的方向向量为 $\overrightarrow{P_0P_1}=\left(-\dfrac{1}{4},\dfrac{25}{8},-\dfrac{31}{16}\right)$， L 的对称式方程为

解法 3：容易验证 P_0 在平面 π 上，设直线 L_1 与平面 π 的交点为 P_1，则连接 P_0P_1 的直线为所求直线 L. 将 $x=1+4t, y=3-2t, z=t$ 代入平面方程，解得 $t=-\dfrac{1}{16}$，故点 P_1 的坐标为 $\left(\dfrac{3}{4},\dfrac{25}{8},-\dfrac{1}{16}\right)$. 故直线 L 的方向向量为 $\overrightarrow{P_0P_1}=\left(-\dfrac{1}{4},\dfrac{25}{8},-\dfrac{31}{16}\right)$，同解法 2，得直线 L 的方程为

$$\frac{x-1}{-4}=\frac{y-0}{50}=\frac{z+2}{31}$$

16. 设平面 π 与 $\pi_1: x-2y+z-1=0$ 垂直，且与 π_1 的交线落在 yoz 平面上，求 π 的方程.

16. 解：交线为：$\begin{cases} x-2y+z-1=0 \\ x=0 \end{cases}$ 过此交线的平面束方程为 $x-2y+z-1+\lambda x=0$，

其法向量为 $\vec{n}=(\lambda+1,-2,1)$. 由 $\vec{n}\cdot(1,-2,1)=\lambda+1+4+1=0$ 得 $\lambda=-6$.

故所求平面 π 的方程为 $x-2y+z-1-6x=0$

谢 谢

西安交通大學

QQ:1187603010