论行列式的计算方法

摘要：归纳行列式的各种计算方法，并举例说明了它们的应用，同时对若干特殊例子进行推广。
关键词：行列式；范德蒙行列式；矩阵；特征植；拉普拉斯定理；析因法；辅助行列式法

行列式的计算灵活多变，需要有较强的技巧。当然，任何一个 n 阶行列式都可以由它的定义去计算其值。但由定义可知，n 阶行列式的展开式有 n!项，计算量很大，一般情况下不用此法，但如果行列式中有许多零元素，可考虑此法。值的注意的是：在应用定义法求非零元素乘积项时，不一定从第 1 行开始，哪行非零元素最少就从哪行开始。接下来要介绍计算行列式的两种最基本方法——化三角形法和按行（列）展开法。

方法 1　　化三角形法

化三角形法是将原行列式化为上（下）三角形行列式或对角形行列式计算的一种方法。这是计算行列式的基本方法重要方法之一。因为利用行列式的定义容易求得上（下）三角形行列式或对角形行列式的性质将行列式化为三角形行列式计算。

原则上，每个行列式都可利用行列式的性质化为三角形行列式。但对于阶数高的行列式，在一般情况下，计算往往较繁。因此，在许多情况下，总是先利用行列式的性质将其作为某种保值变形，再将其化为三角形行列式。

例 1：浙江大学 2004 年攻读硕士研究生入学考试试题第一大题第 2 小题(重庆大学 2004 年攻读硕士研究生入学考试试题第三大题第 1 小题）的解答中需要计算如下行列式的值：

$$D_n=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & & n & 1 \\ 3 & 4 & 5 & & 1 & 2 \\ & & & & & \\ n & 1 & 2 & & n-2 & n-1 \end{vmatrix}$$

[分析]显然若直接化为三角形行列式，计算很繁，所以我们要充分利用行列式的性质。注意到从第 1 列开始；每一列与它一列中有 n-1 个数是差 1 的，根据行列式的性质，先从第 n-1 列开始乘以－1 加到第 n 列，第 n-2 列乘以－1 加到第 n-1 列，一直到第一列乘以－1 加到第 2 列。然后把第 1 行乘以－1 加到各行去，再将其化为三角形行列式，计算就简单多了。

解：

$$D_n=\begin{vmatrix}1&1&1&&1&1\\2&1&1&&1&1-n\\3&1&1&&1-n&1\\&&&&&\\n&1-n&1&&1&1\end{vmatrix}\underline{\underline{\overset{(i=2,\quad ,n)}{r_i=r_1}}}\begin{vmatrix}1&1&1&&1&1\\1&0&0&&0&-n\\2&0&0&&-n&0\\&&&&&\\n-1&-n&0&&0&0\end{vmatrix}$$

$$\underline{\underline{\overset{(i=2,\quad ,n)}{r_1+\frac{1}{n}r_i}}}\ \frac{1}{n}\begin{vmatrix}1+\quad +n&0&&0&0\\1&0&&0&-n\\2&0&&-n&0\\&&&&\\n-2&0&&0&0\\n-1&-n&&0&0\end{vmatrix}=\frac{1}{n}\cdot\frac{n(n+1)}{2}\begin{vmatrix}0&0&&0&-n\\0&0&&-n&0\\&&&&\\0&-n&&0&0\\-n&0&&0&0\end{vmatrix}$$

$$=\frac{1}{n}\cdot\frac{n(n+1)}{2}\cdot(-n)^{n-1}\cdot(-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}$$

$$=\frac{(n+1)}{2}\cdot n^{n-1}\cdot(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$$

[问题推广]

例 1 中，显然是 1, 2，…，n-1, n 这 n 个数在循环，那么如果是 $a_0, a_1, \cdots, a_{n-2}, a_{n-1}$ 这 n 个无规律的数在循环，行列式该怎么计算呢？把这种行列式称为“循环行列式”。[2]

从而推广到一般，求下列行列式：

$$D_n=\begin{bmatrix}a_0&a_1&a_2&&a_{n-1}\\a_{n-1}&a_0&a_1&&a_{n-2}\\&&&&\\a_2&a_3&a_4&&a_1\\a_1&a_2&a_3&&a_0\end{bmatrix}\quad(a_i\in c, i=0,1,\quad ,n-1)$$

解：令 $A=\begin{bmatrix}a_0&a_1&a_2&&a_{n-1}\\a_{n-1}&a_0&a_1&&a_{n-2}\\&&&&\\a_2&a_3&a_4&&a_1\\a_1&a_2&a_3&&a_0\end{bmatrix}$

首先注意，若 u 为 n 次单位根（即 $u^n=1$），则有：

$$A\cdot\begin{bmatrix}1\\u\\u^2\\ \vdots\\u^{n-1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_0+a_1u+\cdots+a_{n-1}u^{n-1}\\a_{n-1}+a_0u+\cdots+a_{n-2}u^{n-1}\\ \vdots\\a_2+a_3u+\cdots+a_1u^{n-1}\\a_1+a_2u+\cdots+a_0u^{n-1}\end{bmatrix}(\text{这里}\quad u^n=1,\therefore \text{用到}u=u^{n+1}\text{等})$$

$$=\begin{bmatrix}a_0+a_1u+\cdots+a_{n-1}u^{n-1}\\a_0u+a_1u^2+\cdots+a_{n-1}u^n\\ \vdots\\a_0u^{n-2}+a_1u^{n-1}+\cdots+a_{n-1}u^{2n-3}\\a_0u^{n-1}+a_1u^n+\cdots+a_{n-1}u^{2n-2}\end{bmatrix}=(a_0+a_1u+\cdots+a_{n-1}u^{n-1})\cdot\begin{bmatrix}1\\u\\u^2\\ \vdots\\u^{n-1}\end{bmatrix}$$

$$=f(u)\cdot\begin{bmatrix}1\\u\\u^2\\ \vdots\\u^{n-1}\end{bmatrix}\qquad\text{其中}f(u)=a_0+a_1u+\cdots+a_{n-1}u^{n-1}$$

设$w=\cos\frac{2\pi k}{n}+\mathrm{i}\sin\frac{2\pi k}{n}$为n次本原单位根

$\therefore$有$:w^n=1,w^k\neq 1(0<k<n)$

于是$:1,w,w^2,\cdots,w^{n-1}$互异且为单位根

记：$w_j=\begin{bmatrix}1\\w^j\\w^{2j}\\ \vdots\\w^{(n-1)j}\end{bmatrix}$，$(j=0,1,\cdots,n-1)$ 方阵$w=(w_0,w_1,\cdots,w_{n-1})$

则由上述知：$A\cdot w_j=f\left(w^i\right)\cdot w_j$

故 $Aw=(Aw_0,Aw_1,\cdots,Aw_{n-1})$

$$=(f(w^0)w_0,f(w)w_1,\cdots,f(w^{n-1})w_{n-1})$$

$$=(w_0,w_1,\cdots,w_{n-1})\cdot\begin{bmatrix}f(w^0)&&\\&\ddots&\\&&f(w^{n-1})\end{bmatrix}$$

显然$w=(w_0,w_1,\cdots,w_{n-1})=\begin{bmatrix}1&1&\cdots&1\\1&w&\cdots&w^{n-1}\\1&w^2&\cdots&w^{2(n-1)}\\ \vdots&\vdots&&\vdots\\1&w^{n-1}&\cdots&w^{(n-1)(n-1)}\end{bmatrix}$为范德蒙行列式

$\therefore |w| \neq 0$

从而有：$|\mathrm{A}w| = |w| \cdot f(1) \cdot f(w) \cdot \quad \cdot f(w^{n-1}) = |A| \cdot |w|$

$\therefore |A| = D_n = f(1) \cdot f(w) \cdot \quad \cdot f(w^{n-1})$

又例 1 中，循环的方向与该推广在方向上相反

所以例 1 与

$$D_n^{'} = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & & a_{n-1} \\ a_1 & a_2 & & a_0 \\ & & & \\ a_{n-1} & a_0 & & a_{n-2} \end{vmatrix}$$

相对应

而D_n与$D_n^{'}$只相差（—1）$^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}$个符号

即得：$D_n^{'} = (-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} \cdot f(1) \cdot f(w) \cdot \quad \cdot f(w^{n-1})$

从而当（$a_0, a_{1,} \quad , a_{n-1}) = (1, 2, \quad , n)$时

对单位根$u = w^k \neq 1$，总有：

$f(u) = 1 + 2u + 3u^2 + \quad + nu^{n-1}$

$f(1) = 1 + 2 + \quad + n = \frac{n(n+1)}{2}$

$\therefore f(u) - uf(u) = 1 + u + u^2 + \quad + u^{n-1} - n = -n$

$\therefore f(u) = \dfrac{-n}{1-u}$

而又$\dfrac{x^n - 1}{x - 1} = \prod_{k=1}^{n-1}(x - w^k) = 1 + x + x^2 + \quad + x^{n-1}$,

令$x = 1$

则有：$\prod_{k=1}^{n-1}(1 - w^k) = 1 + 1 + \quad + 1 = n$

从而有：$D_n^{'}=(-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}\cdot f(1)\cdot f(w)\cdot \quad \cdot f(w^{n-1})$

$$=(-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}\cdot\frac{n(n+1)}{2}\cdot(-n)^{n-1}\cdot(\frac{1}{1-w}\cdot\frac{1}{1-w^2}\cdot \quad \cdot\frac{1}{1-w^{n-1}})$$

$$=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\cdot\frac{n(n+1)}{2}\cdot n^{n-1}\Big/\prod_{k=1}^{n-1}(1-w^k)$$

$$=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\cdot\frac{n+1}{2}\cdot n^{n}\Big/n$$

$$=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\cdot\frac{n+1}{2}\cdot n^{n-1}$$

与例 1 的答案一致。

方法 2　　按行（列）展开法（降阶法）

设 $D_n=\left|a_{ij}\right|$ 为 n 阶行列式，根据行列式的按行（列）展开定理有

$$D_n=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\quad +a_{in}A_{in}\left(i=1,2,\quad ,n\right)$$

或　$D_n=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\quad +a_{nj}A_{nj}\left(j=1,2,\quad ,n\right)$

其中 A_{ij} 为 D_n 中的元素 a_{ij} 的代数余子式

按行（列）展开法可以将一个 n 阶行列式化为 n 个 n-1 阶行列式计算。若继续使用按行（列）展开法，可以将 n 阶行列式降阶直至化为许多个 2 阶行列式计算，这是计算行列式的又一基本方法。但一般情况下，按行（列）展开并不能减少计算量，仅当行列式中某一行（列）含有较多零元素时，它才能发挥真正的作用。因此，应用按行（列）展开法时，应利用行列式的性质将某一行（列）化为有较多的零元素，再按该行（列）展开。

例 2，计算 20 阶行列式[9]

$$D_{20}=\begin{vmatrix}1&2&3&&18&19&20\\2&1&2&&17&18&19\\3&2&1&&16&17&18\\&&&&&&\\20&19&18&&3&2&1\end{vmatrix}$$

[分析]这个行列式中没有一个零元素，若直接应用按行（列）展开法逐次降阶直至化许许多多个 2 阶行列式计算，需进行 20！*20－1 次加减法和乘法运算，这人根本是无法完成的，更何况是 n 阶。但若利用行列式的性质将其化为有很多零元素，则很快就可算出结果。

注意到此行列式的相邻两列（行）的对应元素仅差 1，因此，可按下述方法计

算：

解：

$$D_{20}=\begin{vmatrix}1&2&3& &18&19&20\\2&1&2& &17&18&19\\3&2&1& &16&17&18\\ & & & & & & \\20&19&18& &3&2&1\end{vmatrix}\xlongequal[(i=1,\quad 19)]{c_{i+1}-c_i}\begin{vmatrix}1&1&1& &1&1&1\\2&-1&1& &1&1&1\\3&-1&-1& &1&1&1\\ & & & & & & \\19&-1&-1& &-1&-1&1\\20&-1&-1& &-1&-1&-1\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[r_i+r_1]{(i=2,\quad ,20)}\begin{vmatrix}1&1&1& &1&1&1\\3&0&2& &2&2&2\\4&0&0& &2&2&2\\ & & & & & & \\20&0&0& &0&0&2\\21&0&0& &0&0&0\end{vmatrix}=21\times(-1)^{20+1}\times 2^{18}=-21\times 2^{18}$$

以上就是计算行列式最基本的两种方法，接下来介绍的一些方法，不管是哪种，都要与行列式的性质和基本方法结合起来。

下面是一常用的方法：

方法 3　递推法

应用行列式的性质，把一个 n 阶行列式表示为具有相同结构的较低阶行列式（比如，n-1 阶或 n-1 阶与 n-2 阶等）的线性关系式，这种关系式称为递推关系式。根据递推关系式及某个低阶初始行列式（比如二阶或一阶行列式）的值，便可递推求得所给 n 阶行列式的值，这种计算行列式的方法称为递推法。

［注意］用此方法一定要看行列式是否具有较低阶的相同结构如果没有的话，即很难找出递推关系式，从而不能使用此方法。

例 3，2003 年福州大学研究生入学考试试题第二大题第 10 小题要证如下行列式等式：

$$D_n=\begin{vmatrix}\alpha+\beta&\alpha\beta&0& &0&0\\1&\alpha+\beta&\alpha\beta& &0&0\\0&1&\alpha+\beta& &0&0\\ & & & & & \\0&0&0& &1&\alpha+\beta\end{vmatrix}$$

证明　：$D_n=\dfrac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{\alpha-\beta}$，其中$\alpha\neq\beta$

（虽然这是一道证明题，但我们可以直接求出其值，从而证之。）

［分析］此行列式的特点是：除主对角线及其上下两条对角线的元素外，其余的元素都为零，这种行列式称“三对角”行列式[1]。从行列式的左上方往右下方看，即知 D_{n-1} 与 D_n 具有相同的结构。因此可考虑利用递推关系式计算。

证明：D_n 按第 1 列展开，再将展开后的第二项中 n-1 阶行列式按第一行展开有：

$$D_n =（\alpha + \beta）D_{n-1} - \alpha\beta D_{n-2}$$

这是由 D_{n-1} 和 D_{n-2} 表示 D_n 的递推关系式。若由上面的递推关系式从 n 阶逐阶往低阶递推，计算较繁，注意到上面的递推关系式是由 n-1 阶和 n-2 阶行列式表示 n 阶行列式，因此，可考虑将其变形为：

$$D_n - \alpha D_{n-1} = \beta D_{n-1} - \alpha\beta D_{n-2} = \beta(D_{n-1} - \alpha D_{n-2})$$

或 $$D_n - \beta D_{n-1} = \alpha D_{n-1} - \alpha\beta D_{n-2} = \alpha(D_{n-1} - \beta D_{n-2})$$

现可反复用低阶代替高阶，有：

$$\begin{aligned} D_n - \alpha D_{n-1} &= \beta(D_{n-1} - \alpha D_{n-2}) = \beta^2(D_{n-2} - \alpha D_{n-3}) = \beta^3(D_{n-3} - \alpha D_{n-4}) \\ &= \quad = \beta^{n-2}(D_2 - \alpha D_1) = \beta^{n-2}[(\alpha+\beta)^2 - \alpha\beta - \alpha(\alpha+\beta)] = \beta^n \qquad (1) \end{aligned}$$

同样有：

$$\begin{aligned} D_n - \beta D_{n-1} &= \alpha(D_{n-1} - \beta D_{n-2}) = \alpha^2(D_{n-2} - \beta D_{n-3}) = \alpha^3(D_{n-3} - \beta D_{n-4}) \\ &= \quad = \alpha^{n-2}(D_2 - \beta D_1) = \alpha^{n-2}[(\alpha+\beta)^2 - \alpha\beta - \beta(\alpha+\beta)] = \alpha^n \qquad (2) \end{aligned}$$

因此当 $\alpha \neq \beta$ 时

由（1）（2）式可解得：$D_n = \dfrac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta}$

证毕。

［点评］虽然我们从一个行列式中可以看出有低阶的相同的结构，然后得到一递推关系式，但我们不要盲目乱代，一定要看清这个递推关系式是否可以简化我们的计算，如果不行的话，就要适当地换递 推关系式，如本题。

方法 4　加边法（升阶法）

有时为了计算行列式，特意把原行列式加上一行一列再进行计算，这种计算行列式的方法称为加边法或升阶法。当然，加边后必须是保值的，而且要使所得的高一阶行列式较易计算。要根据需要和原行列式的特点选取所加的行和列。加法适用于某一行（列）有一个相同的字母外，也可用于其列（行）的元素分别为 n-1 个元素的倍数的情况。

加边法的一般做法是：

$$D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & & a_{1n} \\ a_{21} & & a_{2n} \\ & & \\ a_{n1} & & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & & a_n \\ 0 & a_{11} & & a_{1n} \\ 0 & a_{21} & & a_{2n} \\ & & & \\ 0 & a_{n1} & & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & & 0 \\ b_1 & a_{11} & & a_{1n} \\ b_2 & a_{21} & & a_{2n} \\ & & & \\ b_n & a_{n1} & & a_{nn} \end{vmatrix}$$

特殊情况取 $a_1 = a_2 = \quad = a_n = 1$ 或 $b_1 = b_2 = \quad = b_n = 1$

当然加法不是随便加一行一列就可以了。那么加法在何时才能应用呢？关键是观察每行或每列是否有相同的因子。如下题：

例 4、计算 n 阶行列式：[8]

$$D_n=\begin{vmatrix} {x_1}^2+1 & x_1x_2 & & x_1x_2 \\ x_1x_2 & {x_2}^2+1 & & x_1x_2 \\ & & & \\ x_1x_2 & x_1x_2 & & {x_n}^2+1 \end{vmatrix}$$

[分析] 我们先把主对角线的数都减 1，这样我们就可明显地看出第一行为 x_1 与 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 相乘，第二行为 x_2 与 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 相乘，……，第 n 行为 x_n 与 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 相乘。这样就知道了该行列式每行有相同的因子 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，从而就可考虑此法。

解：

$$D_n=\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_2 & & x_n \\ 0 & x_1^2+1 & x_1x_2 & & x_1x_2 \\ 0 & x_2x_1 & x_2^2+1 & & x_2x_n \\ & & & & \\ 0 & x_nx_1 & x_nx_2 & & x_n^2+1 \end{vmatrix} \xlongequal[r_{i+1}-x_ir_1]{(i=1,\quad,n)} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_2 & & x_n \\ -x_1 & 1 & 0 & & 0 \\ -x_2 & 0 & 1 & & 0 \\ & & & & \\ -x_n & 0 & 0 & & 1 \end{vmatrix}_{n+1}$$

$$\xlongequal[(i=1,\quad,n)]{c_1+x_ic_{i+1}} \begin{vmatrix} 1+\sum_{i=1}^{n}{x_i}^2 & x_1 & x_2 & & x_n \\ 0 & 1 & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 \\ & & & & \\ 0 & 0 & 0 & & 1 \end{vmatrix}_{n+1} =1+\sum_{i=1}^{n}{x_i}^2$$

[注意] 在家一定要记住，加边法最在的特点就是要找出每行或每列相同的因子，那么升阶之后，就可利用行列式的性质把绝大部分元素化为零，然后再化为三角形行列式，这样就达到了简化计算的效果。

方法 5　　拆行（列）法

由行列式拆项性质知，将已知行列式拆成若干个行列式之积，计算其值，再得原行列式值，此法称为拆行（列）法。

由行列式的性质知道，若行列式的某行（列）的元素都是两个数之和，则该行列式可拆成两个行列式的和，这两个行列式的某行（列）分别以这两数之一为该行（列）的元素，而其他各行（列）的元素与原行列式的对应行（列）相同，利用行列式的这一性质，有时较容易求得行列式的值。

例 5、 南开大学 2004 年研究生入学考试题第 1 大题，要求下列行列式的值：

设 n 阶行列式：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} \end{vmatrix}=1$$

且满足 $a_{ij}=-a_{ji},i,j=1,2,\quad,n,$ 对任意数 b，求 n 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11}+b & a_{12}+b & & a_{1n}+b \\ a_{21}+b & a_{22}+b & & a_{2n}+b \\ & & & \\ a_{n1}+b & a_{n2}+b & & a_{nn}+b \end{vmatrix} = ?$$

[分析]该行列式的每个元素都是由两个数的和组成，且其中有一个数是 b，显然用拆行（列）法。

解：

$$D_n = \begin{vmatrix} a_{11}+b & a_{12}+b & & a_{1n}+b \\ a_{21}+b & a_{22}+b & & a_{2n}+b \\ & & & \\ a_{n1}+b & a_{n2}+b & & a_{nn}+b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}+b & & a_{1n}+b \\ a_{21} & a_{22}+b & & a_{2n}+b \\ & & & \\ a_{n1} & a_{n2}+b & & a_{nn}+b \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & a_{12}+b & & a_{1n}+b \\ b & a_{22}+b & & a_{2n}+b \\ & & & \\ b & a_{n2}+b & & a_{nn}+b \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & & a_{1n}+b \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n}+b \\ & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn}+b \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & b & & a_{1n}+b \\ a_{21} & b & & a_{2n}+b \\ & & & \\ a_{n1} & b & & a_{nn}+b \end{vmatrix} + b\begin{vmatrix} 1 & a_{12} & & a_{1n} \\ 1 & a_{22} & & a_{2n} \\ & & & \\ 1 & a_{n2} & & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} \end{vmatrix} + b\begin{vmatrix} a_{11} & 1 & & a_{1n} \\ a_{21} & 1 & & a_{2n} \\ & & & \\ a_{n1} & 1 & & a_{nn} \end{vmatrix} + \quad + b\begin{vmatrix} 1 & a_{12} & & a_{1n} \\ 1 & a_{22} & & a_{2n} \\ & & & \\ 1 & a_{n2} & & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= 1 + b\sum_{i=1}^{n} A_{2i} + \quad + b\sum_{i=1}^{n} A_{1i} = 1 + b\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}$$

又令A＝$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} \end{vmatrix}$ 且$a_{ij} = -a_{ji}$，$i, j = 1, 2, \quad , n$

$\therefore$ 有：$|A| = 1$，且$A^{'} = -A$

由$A^{-1}＝\dfrac{A^*}{|A|}$ 得：$|A| \cdot A^{-1} = A^*$ 即$A^* \cdot A$＝E

$\therefore A^*＝A^{-1}$

又（A^*）$^{'} = (A^{-1})^{'} = (A^{'})^{-1} = -(A)^{-1} = -A^*$

$\therefore A^*$ 也为反对称矩阵

又 $A_{ij}(i, j = 1, 2, \quad , n)$ 为 A^* 的元素

$\therefore$ 有 $\sum_{i=1,j=1}^{n} A_{ij} = 0$

从而知：$D_n = 1 + b\sum_{i=1,j=1}^{n} A_{ij} = 1$

方法 6　数学归纳法

一般是利用不完全归纳法寻找出行列式的猜想值，再用数学归纳法给出猜想的证明。因此，数学归纳法一般是用来证明行列式等式。因为给定一个行列式，要猜想其值是比较难的，所以是先给定其值，然后再去证明。（数学归纳法的步骤大家都比较熟悉，这里就不再说了）

例 6* .证明：

$$D_n = \begin{vmatrix} 2\cos\theta & 1 & 0 & & 0 & 0 \\ 1 & 2\cos\theta & 1 & & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2\cos\theta & & 0 & 0 \\ & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & & 2\cos\theta & 1 \\ 0 & 0 & 0 & & 1 & 2\cos\theta \end{vmatrix} = \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta} \quad (\sin\theta \neq 0)$$

证：当 $n = 1,2$ 时，有：

$$D_1 = 2\cos\theta = \frac{\sin(1+1)\theta}{\sin\theta}$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 2\cos\theta & 1 \\ 1 & 2\cos\theta \end{vmatrix} = 4\cos^2\theta - 1 = \frac{\sin(2+1)\theta}{\sin\theta}$$

结论显然成立。

现假定结论对小于等于 $n-1$ 时成立。

即有：

$$D_{n-2} = \frac{\sin(n-2+1)\theta}{\sin\theta}, \qquad D_{n-1} = \frac{\sin(n-1+1)\theta}{\sin\theta}$$

将 D_n 按第 1 列展开，得：

$$D_n = \begin{vmatrix} 2\cos\theta & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2\cos\theta & 0 & 0 \\ & & & \\ 0 & 0 & 2\cos\theta & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2\cos\theta \end{vmatrix}_{(n-1)} - \begin{vmatrix} 2\cos\theta & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2\cos\theta & 0 & 0 \\ & & & \\ 0 & 0 & 2\cos\theta & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2\cos\theta \end{vmatrix}_{(n-1)}$$

$$= 2\cos\theta \cdot D_{n-1} - D_{n-2}$$

$$= 2\cos\theta \cdot \frac{\sin(n-1+1)\theta}{\sin\theta} - \frac{\sin(n-2+1)\theta}{\sin\theta}$$

$$= \frac{2\cos\theta \cdot \sin n\theta - \sin(n-1)\theta}{\sin\theta}$$

$$= \frac{2\cos\theta \cdot \sin n\theta - \sin n\theta \cdot \cos\theta + \cos n\theta \cdot \sin\theta}{\sin\theta}$$

$$= \frac{\sin n\theta \cdot \cos\theta + \cos n\theta \cdot \sin\theta}{\sin\theta}$$

$$= \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}$$

故当对 n 时，等式也成立。

得证。

接下来介绍一些特殊的行列式计算方法，但却很实用。

方法 7　析因法

如果行列式 D 中有一些元素是变数 x（或某个参变数）的多项式，那么可以将行列式 D 当作一个多项式 f(x)，然后对行列式施行某些变换，求出 f(x)的互素的一次因式，使得 f(x)与这些因式的乘积 g(x)只相差一个常数因子 C，根据多项式相等的定义，比较 f(x)与 g(x)的某一项的系数，求出 C 值，便可求得 D=Cg(x) 。

那在什么情况下才能用呢？要看行列式中的两行（其中含变数 x），若 x 等于某一数 a_1 时，使得两行相同，根据行列式的性质，可使得 D=0。那么 x $-a_1$ 便是一个一次因式，再找其他的互异数使得 D=0，即得到与 D 阶数相同的互素一次因式，那么便可用此法。

例 7* .兰州大学 2004 招收攻读硕士研究生考试工试题第四大题第（1）小题。需求如下行列式的值。

$$D_{n+1} = \begin{vmatrix} x & a_1 & a_2 & a_n \\ a_1 & x & a_2 & a_n \\ & & & \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_n \\ a_1 & a_2 & a_3 & x \end{vmatrix}$$

[分析]　根据该行列式的特点，当 $x = a_i.\ \ i = 1, 2, \quad , n$ 时，有 $D_{n+1} = 0$ 。但大家认真看一下，该行列式 D_{n+1} 是一个 n+1 次多项式，而这时我们只找出了 n 个一次因式 $x - a_i.\ \ i = 1, 2, \quad , n$,那么能否用析因法呢？我们再仔细看一下，每行的元素的和数都是一

样的，为：$\sum_{i=1}^{n} a_i + x$，那么我们从第 2 列开始到第 n+1 列都加到第 1 列，现提出公因式 $\sum_{i=1}^{n} a_i + x$，这样行列式的次数就降了一次。从而再考虑析因法。

解：

$$D_{n+1} = \begin{vmatrix} \sum_{i=1}^{n} a_i + x & a_1 & a_2 & & a_n \\ \sum_{i=1}^{n} a_i + x & x & a_2 & & a_n \\ & & & & \\ \sum_{i=1}^{n} a_i + x & a_2 & a_3 & & a_n \\ \sum_{i=1}^{n} a_i + x & a_2 & a_3 & & x \end{vmatrix} = (\sum_{i=1}^{n} a_i + x) \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & & a_n \\ 1 & x & a_2 & & a_n \\ & & & & \\ 1 & a_2 & a_3 & & a_n \\ 1 & a_2 & a_3 & & x \end{vmatrix}$$

令：

$$D_{n+1}{}' = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & & a_n \\ 1 & x & a_2 & & a_n \\ & & & & \\ 1 & a_2 & a_3 & & a_n \\ 1 & a_2 & a_3 & & x \end{vmatrix}$$

显然当：$x = a_i$. $i = 1, 2, \quad , n$ 时，$D_{n+1}{}' = 0*$ 。

又 $D_{n+1}{}'$ 为 n 次多项式。

$\therefore$ 设 $D_{n+1}{}' = C(x-a_1)(x-a_2) \quad (x-a_n)$

又 $D_{n+1}{}'$ 中 x 的最高次项为 x^n，系数为 1，$\therefore$ C=1

$\therefore D_{n+1}{}' = (x-a_1)(x-a_2) \quad (x-a_n)$

因此得：

$$\begin{aligned} D_{n+1} &= (\sum_{i=1}^{n} a_i + x) D_{n+1}{}' \\ &= (\sum_{i=1}^{n} a_i + x)(x-a_1)(x-a_2) \quad (x-a_n) \end{aligned}$$

[点评] 该题显然用析因法是最简便，但大家不要一味地只找使它等于 0 的数，而该最多只能有 n 个数使它等于 0，而行列式又是 n+1 阶是一个 n+1 次多项式，从而我们想到的就

是得用行列式的性质把行列式的次数降低一次，使得原 n+1 次多项式变为一个一次多项式和一个 n 次多项式的乘积。进而便可求得其值。

凡事要懂得变通，一道题不可能用一种方法就可以马上解得。在析因法中，对于一个 n 次多项式，当你最多只能找出 r 个使其行列式为零时，就要把它化为一个 n − r 次多项式与一个 r 次多项式的乘积。但一般找出的使其行列式为零的个数与行列式的次数差太多时，不用本法。

方法 8* .辅助行列式法

辅助行列式法应用条件：行列式各行（列）和相等，且除对角线外其余元素都相同。

解题程序：

1）在行列式 D 的各元素中加上一个相同的元素 x，使新行列式 D_* 除主对角线外，其余元素均为 0；

2）计算 D_* 的主对角线各元素的代数余子式 $A_{ii}(i=1,2,\quad n)$；

3) $D=D_*-x\sum_{i,j=1}^{n}A_{ij}$ [1]

例 8* .大连理工大学 2004 年硕士生入学考试《高等代数》试题，第一大题填空题第 2 小题需求下列 n 阶行列式的值。

$$D_n=\begin{vmatrix} 1 & 1 & & 1 & 2-n \\ 1 & 1 & & 2-n & 1 \\ & & & & \\ 2-n & 1 & & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

解：在 D_n 的各元素上加上 (-1) 后，则有：

$$(D_n)_*=\begin{vmatrix} 0 & 0 & & 0 & 2-n \\ 0 & 0 & & 2-n & 0 \\ & & & & \\ 2-n & 0 & & 0 & 0 \end{vmatrix}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\cdot(1-n)^n$$

又 $A_{1n}=A_{2,n-1}=\quad=A_{n1}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\cdot(1-n)^{n-1}$，其余的为零。

$$\therefore D_n=(D_n)_*+\sum_{i,j=1}^{n}A_{ij}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\cdot(1-n)^n+\sum_{i=1}^{n}A_{i,n-i+1}$$

$$=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\cdot(1-n)^n+(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\cdot n\cdot(1-n)^{n-1}$$

$$=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\cdot(1-n)^{n-1}$$

[点评]若知道辅助行列式法的解题程序，用此法就可轻松地解出此题。但根据该行列式的特点，我们也可以用加边法，把大部分元素化为零，再化为三角形行列式也可轻易解出该行列式。

以下几种方法是利用到公式，所以有的方法在这只简单地给出其应用，只要记住公式，会应用就行。

方法 9　利用拉普拉斯定理

拉普拉斯定理的四种特殊情形：[1][5]

1）$\begin{vmatrix} A_{nn} & 0 \\ C_{mn} & B_{mm} \end{vmatrix} = |A_{nn}| \cdot |B_{mm}|$　　2）$\begin{vmatrix} A_{nn} & C_{nm} \\ 0 & B_{mm} \end{vmatrix} = |A_{nn}| \cdot |B_{mm}|$

3）$\begin{vmatrix} 0 & A_{nn} \\ B_{mm} & C_{mn} \end{vmatrix} = (-1)^{mn} |A_{nn}| \cdot |B_{mm}|$　　4）$\begin{vmatrix} C_{nm} & A_{nn} \\ B_{mm} & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{mn} |A_{nn}| \cdot |B_{mm}|$

例 9 计算 n 阶行列式：[1]

$$D_n = \begin{vmatrix} \lambda & a & a & a & & a \\ b & \alpha & \beta & \beta & & \beta \\ b & \beta & \alpha & \beta & & \beta \\ & & & & & \\ b & \beta & \beta & \beta & & \alpha \end{vmatrix}$$

解：

$$D_n \xlongequal[\lambda_{i+1}-\lambda_2]{(i=2,,n-1)} \begin{vmatrix} \lambda & a & a & a & & a \\ b & \alpha & \alpha-\beta & \beta & & \beta \\ 0 & \beta-\alpha & \alpha & 0 & & 0 \\ & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & \alpha-\beta \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[(i=3,\quad n)]{C_2+C_i} \begin{vmatrix} \lambda & (n-1)a & a & a & & a \\ b & \alpha+(n-2)\beta & \beta & \beta & & \beta \\ 0 & 0 & \alpha-\beta & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha-\beta & & 0 \\ & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & \alpha-\beta \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{利用拉普拉斯定理}} \begin{vmatrix} \lambda & (n-1)a \\ b & \alpha+(n-2)\beta \end{vmatrix}_{2\times2} \cdot \begin{vmatrix} \alpha-\beta & 0 & & 0 \\ 0 & \alpha-\beta & & 0 \\ & & & \\ 0 & 0 & & \alpha-\beta \end{vmatrix}_{(n-2)\times(n-2)}$$

$$= [\lambda\alpha + \lambda(n-2)\beta - ab(n-1)] \cdot (\alpha-\beta)^{n-2}$$

方法 10 * .利用范德蒙行列式

范德蒙行列式：

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & & x_n \\ x_1^{\ 2} & x_2^{\ 2} & x_3^{\ 2} & & x_n^2 \\ & & & & \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \le j < i \le n} (x_i - x_j)$$

例 10 计算 n 阶行列式[9]

$$D_n = \begin{vmatrix} (a-n+1)^{n-1} & (a-n+2)^{n-1} & & (a-1)^{n-1} & a^{n-1} \\ (a-n+1)^{n-2} & (a-n+2)^{n-2} & & (a-1)^{n-2} & a^{n-2} \\ & & & & \\ a-n+1 & a-n+2 & & a-1 & a \\ 1 & 1 & & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$D_n = \begin{vmatrix} (a-n+1)^{n-1} & (a-n+2)^{n-1} & & (a-1)^{n-1} & a^{n-1} \\ (a-n+1)^{n-2} & (a-n+2)^{n-2} & & (a-1)^{n-2} & a^{n-2} \\ & & & & \\ a-n+1 & a-n+2 & & a-1 & a \\ 1 & 1 & & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

解：显然该题与范德蒙行列式很相似，但还是有所不同，所以先利用行列式的性质把它化为范德蒙行列式的类型。

先将的第 n 行依次与第 n-1 行，n-2 行，…, 2 行，1 行对换，再将得到到的新的行列式的第 n 行与第 n-1 行，n-2 行，…, 2 行对换，继续仿此作法，直到最后将第 n 行与第 n-1 行对换，这样，共经过（n-1）+（n-2）+…+2+1=n（n−1）/2 次行对换后，得到

$$D_n = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & & 1 & 1 \\ a-n+1 & a-n+2 & & a-1 & a \\ & & & & \\ (a-n+1)^{n-2} & (a-n+2)^{n-2} & & (a-1)^{n-2} & a^{n-2} \\ (a-n+1)^{n-1} & (a-n+2)^{n-1} & & (a-1)^{n-1} & a^{n-1} \end{vmatrix}$$

上式右端的行列式已是范德蒙行列式，故利用范德蒙行列式的结果得：

$$\left|\lambda E_n - AB\right| = \lambda^{n-m} \left|\lambda E_m - BA\right|$$

$$D_n = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{1 \le j < i \le n} [(a-n+i)-(a-n+j)] = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{1 \le j < i \le n} (i-j)$$

方法 11　　利用矩阵行列式公式

引理：设 A 为 $n \times m$ 型矩阵，B 为 $m \times n$ 型矩阵，E_n，E_m 分别表示 n 阶，m 阶单位矩阵，

则有 $\det(E_n \quad BA) = \det(E_m \quad BA)$ [5]

先引入一个证明题：[1]

设 A，B 分别是 $n\times m$ 和 $m\times n$ 矩阵，$\lambda\neq 0$，证明：$\left|\lambda E_n - AB\right| = \lambda^{n-m}\left|\lambda E_m - BA\right|$

证明：$\begin{pmatrix}\lambda E_n & A\\ B & E_m\end{pmatrix}\begin{pmatrix}E_n & 0\\ -B & E_m\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda E_n - AB & A\\ 0 & E_m\end{pmatrix}$ 两边取行列式得：

$$\begin{vmatrix}\lambda E_n & A\\ B & E_m\end{vmatrix}\begin{vmatrix}E_n & 0\\ -B & E_m\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda E_n & A\\ B & E_m\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda E_n - AB & A\\ 0 & E_m\end{vmatrix}=\left|\lambda E_n - AB\right|\left|E_m\right|=\left|\lambda E_n - AB\right|$$

又 $\begin{pmatrix}\lambda E_n & A\\ B & E_m\end{pmatrix}\begin{pmatrix}E_n & -\frac{1}{\lambda}A\\ 0 & E_m\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda E_n & 0\\ B & -\frac{1}{\lambda}BA+E_m\end{pmatrix}$ 同样两边取行列式有：

$$\begin{vmatrix}\lambda E_n & A\\ B & E_m\end{vmatrix}\begin{vmatrix}E_n & -\frac{1}{\lambda}A\\ 0 & E_m\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda E_n & A\\ B & E_m\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda E_n & 0\\ B & -\frac{1}{\lambda}BA+E_m\end{vmatrix}$$

$=\left|\lambda E_n\right|\left|-\frac{1}{\lambda}BA+E_m\right|=\lambda^n\left|\frac{1}{\lambda}\left(\lambda E_m - BA\right)\right|=\lambda^{n-m}\left|\lambda E_m - BA\right|$ 得证。

那么对于 A,B 分别是 $n\times m$ 和 $m\times n$ 矩阵，$\lambda\neq 0$ 能否得到：

$$\left|\lambda E_n + AB\right| = \lambda^{n-m}\left|\lambda E_m + BA\right|$$

答案是肯定的。

证：$\begin{pmatrix}\lambda E_n & -A\\ B & E_m\end{pmatrix}\begin{pmatrix}E_n & 0\\ -B & E_m\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda E_n + AB & -A\\ 0 & E_m\end{pmatrix}$

$\therefore$ 有：$\begin{vmatrix}\lambda E_n & -A\\ B & E_m\end{vmatrix}=\left|\lambda E_n + AB\right|$

又 $\begin{pmatrix}\lambda E_n & -A\\ B & E_m\end{pmatrix}\begin{pmatrix}E_n & \frac{1}{\lambda}A\\ 0 & E_m\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda E_n & 0\\ B & \frac{1}{\lambda}BA+E_m\end{pmatrix}$

$\therefore\begin{vmatrix}\lambda E_n & -A\\ B & E_m\end{vmatrix}=\left|\lambda E_n\right|\left|\frac{1}{\lambda}BA+E_m\right|=\lambda^{n-m}\left|\lambda E_m + BA\right|$

$\therefore\left|\lambda E_n + AB\right| = \lambda^{n-m}\left|\lambda E_m + BA\right|$

即得：对 A,B 分别为 $n\times m$ 和 $m\times n$ 矩阵，$\lambda\neq 0$ 时，有：

$$\left|\lambda E_n \quad AB\right| = \lambda^{n-m}\left|\lambda E_m \quad BA\right|$$

则当 $\lambda=1$ 时，有：$\left|E_n \quad AB\right| = \left|E_m \quad BA\right|$

$\therefore$ 引理得证。

例 11．2003 年全国硕士研究生入学考试数学试卷三第九题的解答中需要计算如下行列式的值。

$$D_n=\begin{vmatrix} a_1+b & a_2 & a_3 & & a_n \\ a_1 & a_2+b & a_3 & & a_n \\ a_1 & a_2 & a_3+b & & a_n \\ & & a_3 & & \\ a_1 & a_2 & a_3 & & a_n+b \end{vmatrix}$$

解：令矩阵 $A=\begin{vmatrix} a_1+b & a_2 & a_3 & & a_n \\ a_1 & a_2+b & a_3 & & a_n \\ a_1 & a_2 & a_3+b & & a_n \\ & & a_3 & & \\ a_1 & a_2 & a_3 & & a_n+b \end{vmatrix}$

则可得：

$$A=bE_n+\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & & a_n \\ a_1 & a_2 & a_3 & & a_n \\ a_1 & a_2 & a_3 & & a_n \\ & & a_3 & & \\ a_1 & a_2 & a_3 & & a_n \end{vmatrix}=bE_n+\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \\ 1 \end{pmatrix}(a_1\text{，}\ a_2\text{，}\qquad ,a_n\ )$$

$$=bE_n+B_{n\times1}C_{1\times n}$$

其中 $B_{n\times1}=\begin{pmatrix}1 & 1 & & 1\end{pmatrix}^T$，$C_{1\times n}=(a_1\text{，}\ a_2\text{，}\qquad ,a_n\ )$

那么根据上面所提到的引理可得：

$$D_n=\left|bE_n+BC\right|=b^{n-1}\left|b+C_{1\times n}B_{n\times1}\right|$$

又 $C_{1\times n}B_{n\times1}=(a_1\text{，}\ a_2\text{，}\qquad ,a_n\ )\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \\ 1 \end{pmatrix}=\sum_{i=1}^{n}a_i$

$\therefore$ 可得：$D_n=b^{n-1}(\sum_{i=1}^{n}a_i+b)$

方法 12　　利用方阵特征值与行列式的关系。[5]

也以例 11 为例

解：$M_n=\begin{vmatrix} a_1+b & a_2 & a_3 & & a_n \\ a_1 & a_2+b & a_3 & & a_n \\ a_1 & a_2 & a_3+b & & a_n \\ & & a_3 & & \\ a_1 & a_2 & a_3 & & a_n+b \end{vmatrix}$

$$=bE_n+\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & & a_n \\ a_1 & a_2 & a_3 & & a_n \\ a_1 & a_2 & a_3 & & a_n \\ & & a_3 & & \\ a_1 & a_2 & a_3 & & a_n \end{vmatrix}=bE_n+A_n$$

显然 bE_n 的 n 个特征值为 $b,b,\quad ,b$。

A_n 的 n 个特征值为 $\sum_{i=1}^{n} a_i, 0, 0, \cdots, 0$ 。

故 M_n 的特征值为 $b+\sum_{i=1}^{n} a_i, \underbrace{b, b, \cdots, b}_{n-1}$ 　由矩阵特征值与对应行列式的关系知：

$$D_n = \left|M_n\right| = b^{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i + b\right)$$

[注] M_n 的特征值也可由特征值的定义得到。

[点评]本题行列式比较特殊，可以用到此方法，对于其他的行列式，本方法一般不适用，在这仅给出做此方法参考。

问题的推广

例 11 中，主对角线上的元素为 $a_i + b\ (i=1,2,\cdots,n)$ ，那么我们使得主对角线上的元素为 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots \lambda_n$ ，n 个任意数，可得下列一般的行列式：[1] [3] [7]

$$D_n = \begin{vmatrix} \lambda_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & \lambda_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & \lambda_3 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & \lambda_n \end{vmatrix}$$

［分析］上面我们已经介绍了多种方法，根据这题行列式的特点，每行都有相同的因子 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ ，所以本题适用加边法。(本题有多种解法，据上分析，仅以加边法推出。)

解：

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ 0 & \lambda_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ 0 & a_1 & \lambda_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ 0 & a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & \lambda_n \end{vmatrix}_{(n+1)}$$

$$\xlongequal[r_i - r_1]{(i=2,\cdots,n)} \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ -1 & \lambda_1 - a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & \lambda_2 - a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_n - a_n \end{vmatrix}_{(n+1)}$$

$$\xlongequal[\substack{C_1 + \frac{1}{\lambda_i - a_i} C_{i-1} \\ (i=2,\cdots,n)}]{} \begin{vmatrix} 1+\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{\lambda_i - a_i} & a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ 0 & \lambda_1 - a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 - a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_n - a_n \end{vmatrix}_{(n+1)}$$

$$= \left(1+\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{\lambda_i - a_i}\right).\prod_{i=1}^{n}(\lambda_i - a_i) = \prod_{i=1}^{n}(\lambda_i - a_i) + [a_i.\prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n}(\lambda_j - a_j)]$$

特别地，当 $\lambda_i = a_i + b$ 时 $(i = 1, 2, \quad, n)$

$$D_n = \sum_{i=1}^{n} a_i b^{n-1} + b^n = b^{n-1}(b + \sum_{i=1}^{n} a_i)$$ 与例 11 的答案一致。

以上总共给出了计算行列式的 12 种方法，其中一些是常见的些是最基本的方法，还有一些是特殊但很实用的方法。在课外书中还有其他的一些方法，如：极限法、换元法、导数法、差分法、积分法等，但这些方法用处不多，所以不加以介绍。

本人认为只要理解和掌握以上 12 种方法，不管哪种行列式计算，都可以迎刃而解。而且一个题目有时候要由多种解法并用，或一个题可由多种方法独自解出，这就需看大家的灵活应用程度，能否找出一个最简便的方法解出其值。

参考文献：

1、 李师正等 《高等代数复习解题方法与技巧》 高等教育出版社 2005
2、 张贤科 许甫华 《高等代数学》 清华大学出版社 2000
3、 刘学鹏等 《高等代数复习与研究》 南海出版公司 1995
4、 张禾瑞 郝鈵新 《高等代数》 高等教育出版社 1993
5、 许甫华 张贤科 《高等代数解题方法》 清华大学出版社 2001
6、 北大数学系 《高等代数》 高等教育出版社 1988
7、 李永乐 《研究生入学考试线性代数》 北京大学出版社 2000
8、 张敬和等 《数学二考研题典丛书》 东北大学出版社 2004.3
9、 张永曙 《考研・数学应试强化辅导与解题指南》 西北工业大学出版社 1999.5
10、 各高校历年研究生入学考试试卷

第二讲 行列式综合训练

第一部分

例 2. 1　计算行列式，其中对角线上元素都是 a，未写出的元素都是零.

$$D_n=\begin{vmatrix} a & & 1 \\ & & \\ 1 & & a \end{vmatrix}$$

解　这道题可以用多种方法进行求解，充分应用了行列式的各种性质.

方法 1 利用性质，将行列式化为上三角行列式.

$$D_n \overset{c_1-\frac{1}{a}c_n}{=} \begin{vmatrix} a-\frac{1}{a} & 0 & & 1 \\ & a & & \\ & & & \\ & & & a \end{vmatrix} = (a-\frac{1}{a})a^{n-1}=a^n-a^{n-2}$$

方法 2 仍然是利用性质，将行列式化为上三角行列式.

$$D_n \overset{r_n-r_1}{=} \begin{vmatrix} a & & 1 \\ & & \\ 1-a & & a-1 \end{vmatrix} \overset{c_1+c_n}{=} \begin{vmatrix} a+1 & & & 1 \\ & a & & \\ & & & \\ & & & a-1 \end{vmatrix} = a^n-a^{n-2}$$

方法 3 利用展开定理，将行列式化成对角行列式.

$$D_n \overset{c_1\text{展开}}{=} a\begin{vmatrix} a & & \\ & & \\ & & a \end{vmatrix}_{n-1} +(-1)^{n+1}\begin{vmatrix} 0 & 0 & & 1 \\ a & 0 & & \\ & & & \\ & & a & 0 \end{vmatrix}_{n-1}$$

而

$$(-1)^{n+1}\begin{vmatrix} 0 & 0 & & 1 \\ a & 0 & & \\ & & & \\ & & a & 0 \end{vmatrix}_{n-1} \overset{\text{最后列展开}}{=} (-1)^{2n+1}\begin{vmatrix} a & & \\ & & \\ & & a \end{vmatrix}_{n-2} =-a^{n-2}$$

$$D_n=a\cdot a^{n-1}-a^{n-2}=a^n-a^{n-2}$$

方法 4　利用公式$\begin{vmatrix} A & O \\ O & B \end{vmatrix}=|A||B|$.

将最后一行逐行换到第 2 行，共换了 $n-2$ 次；将最后一列逐列换到第 2 列，也共换了 $n-2$ 次.

$$D_n=(-1)^{2(n-2)}\begin{vmatrix} a & 1 & & \\ 1 & a & & \\ & & & \\ & & & a \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a & & \\ & & \\ & & a \end{vmatrix}_{n-2}=a^n-a^{n-2}$$

方法 5　利用公式 $\begin{vmatrix} A & O \\ O & B \end{vmatrix}=|A||B|$.

例 2.2　计算 n 阶行列式：

$$D_n=\begin{vmatrix} a_1+b_1 & a_2 & & a_n \\ a_1 & a_2+b_2 & & a_n \\ & & & \\ a_1 & a_2 & & a_n+b_n \end{vmatrix}\qquad (b_1b_2\quad b_n\neq 0)$$

解　采用升阶（或加边）法．该行列式的各行含有共同的元素 $a_1,a_2,\quad,a_n$，可在保持原行列式值不变的情况下，增加一行一列，适当选择所增行（或列）的元素，使得下一步化简后出现大量的零元素．

$$D_n\overset{\text{升阶}}{=}\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & & a_n \\ 0 & a_1+b_1 & a_2 & & a_n \\ 0 & a_1 & a_2+b_2 & & a_n \\ & & & & \\ 0 & a_1 & a_2 & & a_n+b_n \end{vmatrix}\overset{\substack{r_2-r_1\\ r_3-r_1\\ \\ r_{n+1}-r_1}}{=}\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & & a_n \\ -1 & b_1 & 0 & & 0 \\ -1 & 0 & b_2 & & 0 \\ & & & & \\ -1 & 0 & 0 & & b_n \end{vmatrix}$$

$$\overset{\substack{c_1+\frac{1}{b_{j-1}}c_j\\ j=2,\quad,n+1}}{=}\begin{vmatrix} 1+\frac{a_1}{b_1}+\quad+\frac{a_1}{b_1} & a_1 & a_2 & & a_n \\ 0 & b_1 & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & b_2 & & 0 \\ & & & & \\ 0 & 0 & 0 & & b_n \end{vmatrix}=b_1b_2\quad b_n(1+\frac{a_1}{b_1}+\quad+\frac{a_n}{b_n})$$

这个题的特殊情形是

$$D_n=\begin{vmatrix} a_1+x & a_2 & & a_n \\ a_1 & a_2+x & & a_n \\ & & & \\ a_1 & a_2 & & a_n+x \end{vmatrix}=x^{n-1}(x+\sum_{i=1}^{n}a_i)$$

可作为公式记下来．

例 2.3 计算 n 阶行列式：

$$D_n=\begin{vmatrix}1+a_1 & 1 & 1\\ 1 & 1+a_2 & 1\\ & & \\ 1 & 1 & 1+a_n\end{vmatrix}$$

其中 $a_1a_2 \quad a_n \neq 0$.

解 这道题有多种解法.

方法 1 化为上三角行列式

$$D_n \overset{r_i-r_1}{\underset{i=2,\quad ,n}{=}} \begin{vmatrix}1+a_1 & 1 & 1\\ -a_1 & a_2 & \\ & & \\ -a_1 & & a_n\end{vmatrix} \overset{c_1+\frac{a_1}{a_j}c_j}{\underset{j=2,\quad ,n}{=}} \begin{vmatrix}b & 1 & 1\\ 0 & a_2 & \\ & & \\ 0 & & a_n\end{vmatrix}$$

其中 $b=1+a_1+a_1\sum_{i=2}^{n}\frac{1}{a_i}=a_1\left(1+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\right)$ ，于是 $D_n=a_1a_2 \quad a_n\left(1+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\right)$.

方法 2 升阶（或加边）法

$$D_n \overset{\text{升阶}}{=} \begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 1+a_1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1+a_2 & 1\\ & & & \\ 0 & 1 & 1 & 1+a_n\end{vmatrix} \overset{r_i-r_1}{\underset{i=2,3,\quad ,n+1}{=}} \begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ -1 & a_1 & 0 & 0\\ -1 & 0 & a_2 & 0\\ & & & \\ -1 & 0 & 0 & a_n\end{vmatrix}$$

$$\overset{c_1+\frac{1}{a_j}c_{j+1}}{\underset{j=1,2,\quad ,n-1}{=}} \begin{vmatrix}1+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_j} & 1 & 1 & 1\\ & a_1 & & \\ & & a_2 & \\ & & & \\ & & & a_n\end{vmatrix}=a_1a_2 \quad a_n\left(1+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\right)$$

方法 3 递推法．将 D_n 改写为

$$D_n=\begin{vmatrix}1+a_1 & 1 & 1+0\\ 1 & 1+a_2 & 1+0\\ & & \\ 1 & 1 & 1+a_n\end{vmatrix}$$

$$\overset{\text{按}c_n\text{拆开}}{=} \begin{vmatrix}1+a_1 & 1 & 1\\ 1 & 1+a_2 & 1\\ & & \\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1+a_1 & 1 & 0\\ 1 & 1+a_2 & 0\\ & & \\ 1 & 1 & a_n\end{vmatrix}$$

由于
$$\begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix} \overset{r_i - r_n}{\underset{i=1,\cdots,n-1}{=}} \begin{vmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = a_1 a_2 \cdots a_{n-1}$$

$$\begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & \cdots & 0 \\ 1 & 1+a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & a_n \end{vmatrix} \overset{\text{按} c_n \text{展开}}{=} a_n D_{n-1}$$

因此 $D_n = a_n D_{n-1} + a_1 a_2 \cdots a_{n-1}$ 为递推公式，而 $D_1 = 1 + a_1$，于是

$$D_n = a_n D_{n-1} + a_1 a_2 \cdots a_{n-1} = a_1 a_2 \cdots a_n \left(\frac{D_{n-1}}{a_1 a_2 \cdots a_{n-1}} + \frac{1}{a_n} \right)$$

$$= a_1 a_2 \cdots a_n \left(\frac{D_{n-2}}{a_1 a_2 \cdots a_{n-2}} + \frac{1}{a_{n-1}} + \frac{1}{a_n} \right) = \cdots$$

$$= a_1 a_2 \cdots a_n \left(\frac{D_1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n} \right) = a_1 a_2 \cdots a_n \left(1 + \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n} \right)$$

例 2.4　设 $f(x) = \begin{vmatrix} 1 & x-1 & 2x-1 \\ 1 & x-2 & 3x-2 \\ 1 & x-3 & 4x-3 \end{vmatrix}$，证明存在 $\zeta \in (0,1)$, 使 $f'(\zeta) = 0$.

证　因为 $f(x)$ 是关于 x 的二次多项式多项式, 在 $[0,1]$ 上连续, (0, 1) 内可导, 且

$$f(0) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & -2 \\ 1 & -3 & -3 \end{vmatrix} = 0, \quad f(1) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

由罗尔定理知, 存在 $\zeta \in (0,1)$, 使 $f'(\zeta) = 0$.

例 2.5　计算 $D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 \end{vmatrix}$.

解 这不是范得蒙行列式，但可借助求解范得蒙行列式进行求解.

方法 1　借助于求解范得蒙行列式的技巧进行求解：从下向上，逐行操作.

$$D \overset{\substack{r_4-a^2r_3\\ r_3-ar_2\\ r_2-ar_1}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-a & c-a & d-a \\ 0 & b(b-a) & c(c-a) & d(d-a) \\ 0 & b^2(b^2-a^2) & c^2(c^2-a^2) & d^2(d^2-a^2) \end{vmatrix}$$

$$\overset{c_1\text{展开}}{=} (b-a)(c-a)(d-a) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b & c & d \\ b^2(b+a) & c^2(c+a) & d^2(d+a) \end{vmatrix}$$

$$\overset{r_3\text{拆开}}{=} (b-a)(c-a)(d-a) \text{（} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b & c & d \\ b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix} + a \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b & c & d \\ b^2 & c^2 & d^2 \end{vmatrix} \text{）}$$

其中 $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b & c & d \\ b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix} \overset{\substack{r_3-b^2r_2\\ r_2-br_1}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & c-b & d-b \\ 0 & c(c^2-b^2) & d(d^2-b^2) \end{vmatrix}$$

$$=(c-b)(d-b) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ c(c+b) & d(d+b) \end{vmatrix}$$

$$=(c-b)(d-b)\ [d(d+b)-c(c+b)]$$

由于 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b & c & d \\ b^2 & c^2 & d^2 \end{vmatrix}$ 是范德蒙行列式，故 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b & c & d \\ b^2 & c^2 & d^2 \end{vmatrix} =(c-b)(d-b)(d-c)$

$$D=(a+b+c+d)\ (b-a)(c-a)(d-a)\ (c-b)(d-b)(d-c)$$

方法 2 $$D \overset{\substack{c_2-c_1\\ c_3-c_1\\ c_4-c_1}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & b-a & c-a & d-a \\ a^2 & b^2-a^2 & c^2-a^2 & d^2-a^2 \\ a^4 & b^4-a^4 & c^4-a^4 & d^4-a^4 \end{vmatrix}$$

$$\overset{r_1\text{展开}}{=} (b-a)(c-a)(d-a) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b+a & c+a & d+a \\ (b^2+a^2)(b+a) & (c^2+a^2)(c+a) & (d^2+a^2)(d+a) \end{vmatrix}$$

$$\overset{\substack{c_2-c_1\\ c_3-c_1}}{=} (b-a)(c-a)(d-a) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b+a & c-b & d-b \\ (b^2+a^2)(b+a) & x & y \end{vmatrix}$$

$$\overset{c_1\text{展开}}{=} (b-a)(c-a)(d-a) \begin{vmatrix} c-b & d-b \\ x & y \end{vmatrix}$$

其中 $x=(c-b)(a^2+b^2+c^2+ac+bc+ab)$， $y=(d-b)(a^2+b^2+c^2+ad+bd+ab)$

$$D=(a+b+c+d)\ (b-a)(c-a)(d-a)\ (c-b)(d-b)(d-c)$$

$$=(a+b+c+d)\ (a-b)(a-c)(a-d)\ (b-c)(b-d)(c-d)$$

方法 3　用升阶法．由于行列式中各列元素缺乏 3 次幂的元素，在 D 中添加 3 次幂的一行元素，再添加一列构成 5 阶范得蒙行列式：

$$D_5=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d & x \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 & x^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 & x^3 \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 & x^4 \end{vmatrix}$$

D_5 按第 5 列展开得到的是 x 的 4 次多项式，且 x^3 的系数为

$$A_{45}=(-1)^{4+5}D=-D$$

又利用计算范得蒙行列式的公式得

$$D_5=(b-a)(c-a)(d-a)(x-a)\ (c-b)(d-b)(x-b)\ (d-c)(x-c)(x-d)$$

$$=(b-a)(c-a)(d-a)\ (c-b)(d-b)\ (d-c)\ [(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)]$$

$$=(b-a)(c-a)(d-a)\ (c-b)(d-b)\ (d-c)\ [x^4-(a+b+c+d)x^3+\quad]$$

其中 x^3 的系数为 $-(b-a)(c-a)(d-a)\ (c-b)(d-b)\ (d-c)\ (a+b+c+d)$

由 x^3 的系数相等得：

$$D=(a+b+c+d)\ (b-a)(c-a)(d-a)\ (c-b)(d-b)(d-c)$$

例 2.6　设 $|A|=\begin{vmatrix} 1 & -5 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$，计算 $A_{41}+A_{42}+A_{43}+A_{44}=$？其中 $A_{4j}(j=1,2,3,4)$是$|A|$中元素 a_{4j} 的代数余子式.

解　直接求代数余子式的和工作量大．可将 $A_{41}+A_{42}+A_{43}+A_{44}$ 改写为 $1\cdot A_{41}+1\cdot A_{42}+1\cdot A_{43}+1\cdot A_{44}$，故

$$A_{41}+A_{42}+A_{43}+A_{44}=\begin{vmatrix}1&-5&1&3\\1&1&3&4\\1&1&2&3\\1&1&1&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&-6&0&2\\1&0&2&3\\1&0&1&2\\1&0&0&0\end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{4+1}\begin{vmatrix}-6&0&2\\0&2&3\\0&1&2\end{vmatrix}=-1\begin{vmatrix}-6&0&2\\0&2&3\\0&0&\frac{1}{2}\end{vmatrix}=6$$

例 2.7　求解方程:

$$f(x)=\begin{vmatrix}1&1&1&&1\\1&1-x&1&&1\\1&1&2-x&&1\\&&&&\\1&1&1&&(n-1)-x\end{vmatrix}=0$$

解　方法 1

$$f(x)\overset{r_i-r_1}{\underset{i=2,\ \ ,n}{=}}\begin{vmatrix}1&1&1&&1\\0&-x&0&&0\\0&0&1-x&&0\\&&&&\\0&0&0&&(n-2)-x\end{vmatrix}=(-1)^{n-1}x(x-1)\quad(x-n+2)$$

由题设知

$$f(x)=(-1)^{n-1}x(x-1)\quad(x-n+2)=0$$

所以 $x_1=0,x_2=1,\quad ,x_{n-1}=n-2$ 是原方程的解.

方法 2　由题设知, 当 $x=0,1,2,\quad ,n-2$ 时, 由于行列式中有两列对应元素相同, 行列式值为零, 因此 $f(x)$ 可写成

$$f(x)=Ax(x-1)\quad(x-n+2)$$

于是原方程 $f(x)=Ax(x-1)\quad(x-n+2)=0$ 的解为:

$$x_1=0,x_2=1,\quad ,x_{n-1}=n-2$$

例 2.8 计算元素为 $a_{ij}=|i-j|$的 n 阶行列式.

解　方法 1　由题设知，a_{11}=0，$a_{12}=1$，　$,a_{1n}=n-1$,　，故

$$D_n=\begin{vmatrix}0&1&&n-1\\1&0&&n-2\\&&&\\n-1&n-2&&0\end{vmatrix}\overset{r_i-r_{i-1}}{\underset{i=n,n-1,\ \ ,2}{=}}\begin{vmatrix}0&1&&n-1\\1&-1&&-1\\&&&\\1&1&&-1\end{vmatrix}$$

$$\overset{c_j+c_n}{\underset{j=1,\ \ ,n-1}{=}}\begin{vmatrix}n-1&n&&&n-1\\0&-2&&&-1\\&&&&\\&&0&-2&\\0&0&&0&-1\end{vmatrix}=(-1)^{n-1}2^{n-2}(n-1)$$

其中第一步用的是从最后一行起，逐行减前一行．第二步用的每列加第 n 列．

方法 2　$$D_n=\begin{vmatrix}0&1&&n-1\\1&0&&n-2\\&&&\\n-1&n-2&&0\end{vmatrix}\overset{r_i-r_{i+1}}{\underset{i=1,2,\ \ ,n-1}{=}}\begin{vmatrix}-1&1&&1\\-1&-1&&1\\&&&\\n-1&n-2&&0\end{vmatrix}$$

$$\overset{c_j+c_1}{\underset{j=2,\ \ ,n}{=}}\begin{vmatrix}-1&0&&0\\-1&-2&&0\\&&&\\n-1&2n-3&&n-1\end{vmatrix}=(-1)^{n-1}2^{n-2}(n-1)$$

例 2.9 计算行列式 $D=\begin{vmatrix}a_2&0&0&c_2\\0&a_1&c_1&0\\0&d_1&b_1&0\\d_2&0&0&b_2\end{vmatrix}$.

解　方法 1 按第一列展开：

$$D=a_2\begin{vmatrix}a_1&c_1&0\\d_1&b_1&0\\0&0&b_2\end{vmatrix}-d_2\begin{vmatrix}0&0&c_2\\a_1&c_1&0\\d_1&b_1&0\end{vmatrix}=a_2b_2\begin{vmatrix}a_1&c_1\\d_1&b_1\end{vmatrix}-d_2c_2\begin{vmatrix}a_1&c_1\\d_1&b_1\end{vmatrix}$$

$$=(a_2b_2-d_2c_2)\begin{vmatrix}a_1&c_1\\d_1&b_1\end{vmatrix}=(a_2b_2-d_2c_2)(a_1b_1-d_1c_1)$$

方法 2 本题也可利用拉普拉斯展开定理进行计算，选定第 2、3 行，有：

$$D=(-1)^{2+3+2+3}\begin{vmatrix}a_1&c_1\\d_1&b_1\end{vmatrix}\begin{vmatrix}a_2&c_2\\d_2&b_2\end{vmatrix}=(a_1b_1-d_1c_1)(a_2b_2-d_2c_2)$$

例 2.10　计算 $D_{2n}=\begin{vmatrix} a_n & & & & & b_n \\ & & & & & \\ & & a_1 & b_1 & & \\ & & c_1 & d_1 & & \\ & & & & & \\ c_n & & & & & d_n \end{vmatrix}$，其中未写出的元素都是 0.

解　方法 1　利用公式 $\begin{vmatrix} A & O \\ O & B \end{vmatrix}=|A||B|$.

采用逐行操作，将最后一行逐行和上行进行对换，直到换到第 2 行（作 $2n-2$ 次相邻对换）；最后一列逐列和上列换，换到第 2 列（作 $2n-2$ 次相邻对换），得到

$$D_{2n}=(-1)^{2(2n-2)}\begin{vmatrix} a_n & b_n & 0 & & & 0 \\ c_n & d_n & 0 & & & 0 \\ 0 & 0 & a_{n-1} & & & b_{n-1} \\ & & & & & \\ & & & a_1 & b_1 & \\ & & & c_1 & d_1 & \\ & & & & & \\ 0 & 0 & c_{n-1} & & & d_{n-1} \end{vmatrix}$$

$$=D_2\ D_{2(n-1)}=(a_nd_n-b_nc_n)\ D_{2(n-1)}=(a_nd_n-b_nc_n)\ (a_{n-1}d_{n-1}-b_{n-1}c_{n-1})\ D_{2(n-2)}$$

$$=\quad=(a_nd_n-b_nc_n)\ (a_{n-1}d_{n-1}-b_{n-1}c_{n-1})\quad (a_1d_1-b_1c_1)=\prod_{i=1}^{n}(a_id_i-b_ic_i)$$

方法 2　利用行列式展开定理进行求解.

$$D_{2n}\overset{r_1\text{展开}}{=}a_n\begin{vmatrix} a_{n-1} & & & & b_{n-1} & 0 \\ & & & & & \\ & & a_1 & b_1 & & \\ & & c_1 & d_1 & & \\ & & & & & \\ c_{n-1} & & & & d_{n-1} & \\ 0 & & & & & d_n \end{vmatrix}$$

$$+b_n(-1)^{1+2n}\begin{vmatrix} 0 & a_{n-1} & & & & b_{n-1} \\ & & & & & \\ & & a_1 & b_1 & & \\ & & c_1 & d_1 & & \\ & & & & & \\ & c_{n-1} & & & & d_{n-1} \\ c_n & & & & & 0 \end{vmatrix}$$

上面第 1 个行列式是$\begin{vmatrix} A & O \\ O & B \end{vmatrix}$的形式，而第 2 个行列式按第 1 列展开，所以

$$D_{2n}=a_nd_nD_{2n-2}-b_nc_n(-1)^{2n-1+1}D_{2n-2}$$

$$=(a_nd_n-b_nc_n)\ D_{2(n-1)}\quad = \quad =\prod_{i=1}^{n}(a_id_i-b_ic_i)$$

例 2.11 计算 $D_5=\begin{vmatrix} 1-a & a & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1-a & a & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1-a & a & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1-a & a \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1-a \end{vmatrix}$.

解 方法 1 采用递推的方法进行求解.

$$D_5 \overset{c_1+c_2+\ \ c_5}{=} \begin{vmatrix} 1 & a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-a & a & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1-a & a & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1-a & a \\ -a & 0 & 0 & -1 & 1-a \end{vmatrix}$$

$$\overset{c_1\text{展开}}{=} \begin{vmatrix} 1-a & a & 0 & 0 \\ -1 & 1-a & a & 0 \\ 0 & -1 & 1-a & a \\ 0 & 0 & -1 & 1-a \end{vmatrix} + (-a)(-1)^{5+1}\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 1-a & a & 0 & 0 \\ -1 & 1-a & a & 0 \\ 0 & -1 & 1-a & a \end{vmatrix}$$

即 $D_5=D_4+(-a)(-1)^{5+1}a^4$， $D_4=D_3+(-a)(-1)^{4+1}a^3$，

$D_3=D_2+(-a)(-1)^{3+1}a^2$， $D_2=1-a+a^2$

故 $D_5=1-a+a^2-a^3+a^4-a^5$

方法 2 采用降阶的方法进行求解.

$$D_5 \overset{r_1+(1-a)r_2}{=} \begin{vmatrix} 0 & 1-a+a^2 & a-a^2 & 0 & 0 \\ -1 & 1-a & a & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1-a & a & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1-a & a \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1-a \end{vmatrix}$$

$$\overset{r_1+(1-a+a^2)r_3}{=} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1-a+a^2-a^3 & a-a^2+a^3 & 0 \\ -1 & 1-a & a & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1-a & a & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1-a & a \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1-a \end{vmatrix}$$

$$\overset{r_1+(1-a+a^2-a^3)r_4}{=} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1-a+a^2-a^3+a^4 & a-a^2+a^3-a^4 \\ -1 & 1-a & a & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1-a & a & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1-a & a \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1-a \end{vmatrix}$$

$$\overset{r_1+(1-a+a^2-a^3+a^4)r_5}{=} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1-a+a^2-a^3+a^4-a^5 \\ -1 & 1-a & a & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1-a & a & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1-a & a \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1-a \end{vmatrix}$$

$$\overset{r_1\text{展开}}{=} (1-a+a^2-a^3+a^4-a^5)\cdot(-1)^{5+1}(-1)^4 = 1-a+a^2-a^3+a^4-a^5$$

例 2.12 证明

$$D_n = \begin{vmatrix} x & -1 & 0 & & 0 \\ 0 & x & -1 & & 0 \\ & & & & \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & & x+a_1 \end{vmatrix} = x^n + a_1x^{n-1} + \quad + a_{n-1}x + a_n$$

证　方法 1　递推法　按第 1 列展开，有

$$D_n = x D_{n-1} + (-1)^{n+1} a_n \begin{vmatrix} -1 & & & & \\ x & -1 & & & \\ & x & -1 & & \\ & & & & \\ & & & x & -1 \end{vmatrix}_{n-1} = x D_{n-1} + a_n$$

由于 $D_1 = x + a_1$，$D_2 = \begin{vmatrix} x & -1 \\ a_2 & x+a_1 \end{vmatrix}$，于是

$$D_n = x D_{n-1} + a_n = x(x D_{n-2} + a_{n-1}) + a_n = x^2 D_{n-2} + a_{n-1}x + a_n$$

$$= \quad = x^{n-1}D_1 + a_2 x^{n-2} + \quad + a_{n-1}x + a_n = x^n + a_1 x^{n-1} + \quad + a_{n-1}x + a_n$$

方法 2　第 2 列的 x 倍，第 3 列的 x^2 倍，　，第 n 列的 x^{n-1} 倍分别加到第 1 列上

$$D_n \overset{c_1+xc_2}{=} \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & & 0 \\ x^2 & x & -1 & & 0 \\ 0 & 0 & x & & 0 \\ & & & & \\ a_n + xa_{n-1} & a_{n-1} & a_{n-2} & & x+a_1 \end{vmatrix}$$

$$\overset{c_1+x^2c_3}{=} \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & & 0 \\ 0 & x & -1 & 0 & & 0 \\ x^3 & 0 & x & -1 & & 0 \\ & & & & & \\ a_n + xa_{n-1} + x^2a_{n-2} & a_{n-1} & a_{n-2} & a_{n-3} & & x+a_1 \end{vmatrix}$$

$$= \quad = \begin{vmatrix} 0 & -1 & & \\ & x & -1 & \\ & & & -1 \\ f & & & x \end{vmatrix} \overset{按r_n展开}{=} (-1)^{n+1} f \begin{vmatrix} -1 & & & \\ x & -1 & & \\ & x & & \\ & & & \\ & & x & -1 \end{vmatrix}_{n-1} =\mathrm{f}$$

其中 $f = a_n + a_{n-1}x + \quad + a_1 x^{n-1} + x^n$

$$或 \quad D_n \overset{c_1+xc_2+x^2c_3+\quad+x^{n-1}c_n}{=} \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & & 0 & 0 \\ & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & & x & -1 \\ f & a_{n-1} & a_{n-2} & & a_2 & x+a_1 \end{vmatrix}$$

$$\overset{按c_1展开}{=} (-1)^{n+1} f \begin{vmatrix} -1 & & & \\ x & -1 & & \\ & x & & \\ & & & \\ & & x & -1 \end{vmatrix}_{n-1} = (-1)^{n+1} f (-1)^{n-1} = \mathrm{f}$$

其中 $f = a_n + a_{n-1}x + \quad + a_1 x^{n-1} + x^n$

方法 3　利用性质，将行列式化为上三角行列式.

$$D_n \overset{\substack{c_2+\frac{1}{x}c_1\\ c_3+\frac{1}{x}c_2\\ \cdots\\ c_n+\frac{1}{x}c_{n-1}}}{=} \begin{vmatrix} x & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & x & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n & a_{n-1}+\frac{a_n}{x} & a_{n-2}+\frac{a_{n-1}}{x}+\frac{a_n}{x^2} & \cdots & k_n \end{vmatrix}$$

$$\overset{\text{按}c_n\text{展开}}{=} x^{n-1}k_n = x^{n-1}\left(\frac{a_n}{x^{n-1}}+\frac{a_{n-1}}{x^{n-2}}+\cdots+\frac{a_2}{x}+a_1+x\right)$$

$$=a_n+a_{n-1}x+\cdots+a_1x^{n-1}+x^n$$

方法 4 $D_n \overset{\text{按}r_n\text{展开}}{=} (-1)^{n+1}a_n \begin{vmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x & -1 \end{vmatrix} +$

$$(-1)^{n+2}a_{n-1} \begin{vmatrix} x & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x & -1 \end{vmatrix} + \cdots + (-1)^{2n-1}a_2 \begin{vmatrix} x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

$$+(-1)^{2n}(a_1+x) \begin{vmatrix} x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{n+1}(-1)^{n-1}a_n+(-1)^{n+2}(-1)^{n-2}a_{n-1}x$$

$$+\cdots+(-1)^{2n-1}(-1)a_2x^{n-2}+(-1)^{2n}(a_1+x)x^{n-1}$$

$$=a_n+a_{n-1}x+\cdots+a_1x^{n-1}+x^n$$

例 2.13 计算 n 阶“三对角”行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} \alpha+\beta & \alpha\beta & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & \alpha+\beta & \alpha\beta & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha+\beta & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \alpha+\beta \end{vmatrix}$$

解 方法 1 递推法.

$$D_n \overset{按c_1展开}{=} (\alpha+\beta)D_{n-1} - \begin{vmatrix} \alpha\beta & 0 & 0 & & 0 & 0 \\ 1 & \alpha+\beta & \alpha\beta & & 0 & 0 \\ & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & & 1 & \alpha+\beta \end{vmatrix}_{(n-1)}$$

$$\overset{按r_1展开}{=} (\alpha+\beta)D_{n-1} - \alpha\beta D_{n-2}$$

即有递推关系式 $D_n = (\alpha+\beta)D_{n-1} - \alpha\beta D_{n-2} \quad (n \geq 3)$

故 $D_n - \alpha D_{n-1} = \beta(D_{n-1} - \alpha D_{n-2})$

递推得到 $D_n - \alpha D_{n-1} = \beta(D_{n-1} - \alpha D_{n-2}) = \beta^2(D_{n-2} - \alpha D_{n-3})$

$$= \quad = \beta^{n-2}(D_2 - \alpha D_1)$$

而 $D_1 = (\alpha+\beta)$，$D_2 = \begin{vmatrix} \alpha+\beta & \alpha\beta \\ 1 & \alpha+\beta \end{vmatrix} = \alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2$，代入上式得

$$D_n - \alpha D_{n-1} = \beta^n$$

$$D_n = \alpha D_{n-1} + \beta^n \qquad (2.1)$$

由递推公式得

$$D_n = \alpha D_{n-1} + \beta^n = \alpha(\alpha D_{n-2} + \beta^{n-1}) + \beta^n$$

$$= \alpha^2 D_{n-2} + \alpha\beta^{n-1} + \beta^n =$$

$$= \alpha^n + \alpha^{n-1}\beta + \quad + \alpha\beta^{n-1} + \beta^n = \begin{cases} \dfrac{\beta^{n+1} - \alpha^{n+1}}{\beta - \alpha}, & 当\alpha \neq \beta时 \\ (n+1)\alpha^{n+1}, & 当\alpha = \beta时 \end{cases}$$

方法 2 把 D_n 按第 1 列拆成 2 个 n 阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} \alpha & \alpha\beta & 0 & & 0 & 0 \\ 1 & \alpha+\beta & \alpha\beta & & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha+\beta & & 0 & 0 \\ & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & & 1 & \alpha+\beta \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \beta & \alpha\beta & 0 & & 0 & 0 \\ 1 & \alpha+\beta & \alpha\beta & & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha+\beta & & 0 & 0 \\ & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & & \alpha+\beta & \alpha\beta \\ 0 & 0 & 0 & & 1 & \alpha\beta \end{vmatrix}$$

上式右端第一个行列式等于 αD_{n-1}，而第二个行列式

$$\begin{vmatrix} \beta & \alpha\beta & 0 & & 0 & 0 \\ 1 & \alpha+\beta & \alpha\beta & & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha+\beta & & 0 & 0 \\ & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & & \alpha+\beta & \alpha\beta \\ 0 & 0 & 0 & & 1 & \alpha\beta \end{vmatrix} \overset{c_i-ac_{i-1}}{\underset{i=2,\ \ ,n}{=}} \begin{vmatrix} \beta & 0 & 0 & & 0 & 0 \\ 1 & \beta & 0 & & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \beta & & 0 & 0 \\ & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & & 1 & \beta \end{vmatrix} = \beta^{n}$$

于是得递推公式 $D_n = \alpha D_{n-1} + \beta^n$，已与（2.1）式相同.

方法 3　在方法 1 中得递推公式

$$D_n = (\alpha+\beta) D_{n-1} - \alpha\beta D_{n-2}$$

又因为当 $\alpha+\beta$ 时　　$D_1 = \alpha+\beta = \dfrac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha-\beta}$

$$D_2 = \begin{vmatrix} \alpha+\beta & \alpha\beta \\ 1 & \alpha+\beta \end{vmatrix} = (\alpha+\beta)^2 - \alpha\beta = \alpha^2+\alpha\beta+\beta^2 = \frac{\alpha^3-\beta^3}{\alpha-\beta}$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} \alpha+\beta & \alpha\beta & 0 \\ 1 & \alpha+\beta & \alpha\beta \\ 0 & 1 & \alpha+\beta \end{vmatrix} = (\alpha+\beta)^3 - 2\alpha\beta\ (\alpha+\beta)$$

$$= (\alpha+\beta)(\alpha^2+\beta^2) = \frac{\alpha^4-\beta^4}{\alpha-\beta}$$

于是猜想 $D_n = \dfrac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{\alpha-\beta}$，下面用数学归纳法证明.

当 n=1 时，等式成立，假设当 $n \le k$ 时成立.

当 n=k+1 是，由递推公式得

$$D_{k+1} = (\alpha+\beta) D_k - \alpha\beta D_{k-1}$$

$$= (\alpha+\beta)\frac{\alpha^{k+1}-\beta^{k+1}}{\alpha-\beta} - \alpha\beta\frac{\alpha^k-\beta^k}{\alpha-\beta} = \frac{\alpha^{k+2}-\beta^{k+2}}{\alpha-\beta}$$

所以对于 $n \in N^+$，等式都成立.

第二部分

这一部分的题是与矩阵、向量、特征值等后续内容有关的题，感觉困难的同学可以放到相关内容学习后再看. 但应注意考研题中关于行列式内容的出题, 往往与后续内容联系较多.

例 2.14　设 A 为 3×3 矩阵, $|A|=-2$, 把 A 按行分块为 $A=\begin{pmatrix}A_1\\A_2\\A_3\end{pmatrix}$, 其中 $A_i(i=1,2,3)$ 是 A 的第 i 行, 则行列式 $\begin{vmatrix}A_3-2A_1\\2A_2\\A_1\end{vmatrix}=$______.

解 $\begin{vmatrix}A_3-2A_1\\2A_2\\A_1\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}A_3-2A_1\\A_2\\A_1\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}A_3\\A_2\\A_1\end{vmatrix}=-2\begin{vmatrix}A_1\\A_2\\A_3\end{vmatrix}=-2|A|=4$

例 2.15　判断题

(1) 若 A，B 是可乘矩阵，则 $|AB|=|A||B|$.　　(　　)

(2) 若 A，B 均为 n 阶方阵，则 $|A-B|=|A|-|B|$.　　(　　)

解 (1) 错误，因为 A，B 不一定是方阵，即不一定有对应的行列式.

(2) 错误，例如取 $A=\begin{pmatrix}3&0\\0&3\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix}$，$|A-B|=1\neq|A|-|B|=5$.

例 2.16　证明:奇数阶反对称矩阵的行列式为零.

证　$A^T=-A$, $|A|=|A^T|=|-A|=(-1)^n|A|=-|A|$($n$ 为奇数). 所以$|A|=0$.

例 2.17 （数四，01，3 分）设矩阵 $A=\begin{pmatrix}k&1&1&1\\1&k&1&1\\1&1&k&1\\1&1&1&k\end{pmatrix}$，且秩 $R(A)=3$，则 $k=$____

解 由于 $|A|=\begin{vmatrix}k&1&1&1\\1&k&1&1\\1&1&k&1\\1&1&1&k\end{vmatrix}\overset{r_1+r_2+\ r_4}{=}\begin{vmatrix}k+3&k+3&k+3&k+3\\1&k&1&1\\1&1&k&1\\1&1&1&k\end{vmatrix}$

$$=(k+3)\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&k&1&1\\1&1&k&1\\1&1&1&k\end{vmatrix}=(k+3)\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&k-1&0&0\\0&0&k-1&0\\0&0&0&k-1\end{vmatrix}$$

$$=(k+3)(k-1)^3$$

由 $R(A)=3$，知 $|A|$=0，而 $k=1$时，$R(A)=1$，故必有 $k=-3$.

例 2.18　若 A，B，C 均为 3 阶可逆方阵，$|A|=-1$，$|B|=2$，计算 $|2C^{-1}(A^TB^{-1})^2C|$.

解 $\left|2C^{-1}(A^TB^{-1})^2C\right|=2^3\left|C^{-1}\right|\left|A^TB^{-1}\right|^2\left|C\right|$

$$=2^3\frac{1}{|C|}|C|\left|A^T\right|^2\left|B^{-1}\right|^2=2^3|A|^2\left|\frac{1}{B}\right|^2=2$$

例 2.19 设 3 阶方阵 A,B 满足方程 $A^2B-A-B=E$，试求矩阵 B 以及行列式 $|B|$，其中 $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\-2&0&1\end{pmatrix}$.

解 由 $A^2B-A-B=E$，得 $(A^2-E)B=A+E$，即

$$(A+E)(A-E)B=A+E$$

由于 $A+E=\begin{pmatrix}2&0&1\\0&3&0\\-2&0&2\end{pmatrix}$，$|A+E|=18\neq 0$

$$A-E=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\-2&0&0\end{pmatrix}，\ |A-E|=2\neq 0$$

$$B=(A-E)^{-1}(A+E)^{-1}(A+E)=(A-E)^{-1}$$

$$=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\-2&0&0\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}0&0&-1/2\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$$

所以 $|B|=1/2$.

例 2.20 设 A 为 3 阶方阵，$|A|=2$，求 $\left|(\frac{1}{2}A)^{-1}-3A^*\right|$ 的值.

解 方法 1 化为关于 A^* 的形式进行计算.

利用公式 $(\lambda A)^{-1}=\frac{1}{\lambda}A^{-1}$，$A^{-1}=\frac{A^*}{|A|}$，$\left|A^*\right|=|A|^{n-1}$ 有

$$\left|(\frac{1}{2}A)^{-1}-3A^*\right|=\left|2A^{-1}-3A^*\right|=\left|2\frac{A^*}{|A|}-3A^*\right|=\left|A^*-3A^*\right|$$

$$=\left|-2A^*\right|=(-2)^3\left|A^*\right|=(-2)^3|A|^2=-32$$

方法 2　化为关于 A^{-1} 的形式计算.

利用公式 $(\lambda A)^{-1}=\frac{1}{\lambda}A^{-1}$， $A^{*}=|A|A^{-1}$， $\left|A^{-1}\right|=\frac{1}{|A|}$，有

$$\left|(\frac{1}{2}A)^{-1}-3A^{*}\right|=\left|2A^{-1}-3|A|A^{-1}\right|=\left|-4A^{-1}\right|=(-4)^{3}\frac{1}{|A|}=-32$$

例 2.21 （数四，98，3 分）设 A，B 均为 n 阶方阵，$|A|$=2，$|B|$=-3，求 $\left|2A^{*}B^{-1}\right|$ 的值.

解　$\left|2A^{*}B^{-1}\right|=2^{n}\left|A^{*}\right|\left|B^{-1}\right|=2^{n}\ |A|^{n-1}\cdot\frac{1}{|B|}=2^{n}\ 2^{n-1}\ \frac{1}{-3}=-\frac{2^{2n-1}}{3}$

例 2.22 若 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1,\beta_2$ 都是 4 维列向量，且 4 阶行列式 $|\alpha_1,\alpha_2,\beta_2,\alpha_3|=n$，$|\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1|=m$，计算 4 阶行列式 $|\alpha_3,\alpha_2,\alpha_1,\beta_1+\beta_2|$ 的值.

解 如果行列式的列向量组为 $\alpha_1,\alpha_2,\quad,\alpha_n$，则此行列式可表示为 $|\alpha_1,\alpha_2,\quad,\alpha_n|$，利用行列式的性质，有

$$|\alpha_3,\alpha_2,\alpha_1,\beta_1+\beta_2|=|\alpha_3,\alpha_2,\alpha_1,\beta_1|+|\alpha_3,\alpha_2,\alpha_1,\beta_2|=-|\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1|-|\alpha_3,\alpha_2,\beta_2,\alpha_1|$$

$$=-|\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1|+|\alpha_1,\alpha_2,\beta_2,\alpha_3|=n-m$$

例 2.23 计算行列式 $|A|,|B|,\begin{vmatrix} O & A \\ B & O \end{vmatrix}$，其中

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & & n-1 & n+x \\ 1 & 2 & & (n-1)+x & n \\ & & & & \\ 1 & 2+x & & n-1 & n \\ 1+x & 2 & & n-1 & n \end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & & 0 & 0 \\ 0 & 2 & & 0 & 0 \\ & & & & \\ 0 & 0 & & n-1 & 0 \\ 0 & 0 & & 0 & n \end{pmatrix}$$

解　$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 2 & & n-1 & n+x \\ 1 & 2 & & (n-1)+x & n \\ & & & & \\ 1 & 2+x & & n-1 & n \\ 1+x & 2 & & n-1 & n \end{vmatrix}$$

$$\underset{i=2,\cdots,n}{\overset{r_i-r_1}{=}}\begin{vmatrix}1&2&\cdots&n-1&n+x\\0&0&\cdots&x&-x\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&x&\cdots&0&-x\\x&0&\cdots&0&-x\end{vmatrix}\underset{j=1,\cdots,n-1}{\overset{c_n+c_j}{=}}\begin{vmatrix}1&2&\cdots&n-1&\frac{n(n+1)}{2}+x\\0&0&\cdots&x&0\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&x&\cdots&0&0\\x&0&\cdots&0&0\end{vmatrix}$$

这是逆对角的上三角行列式，所以

$$|A|=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}(\frac{n(n+1)}{2}+x)x^{n-1}$$

又$|B|=n!$，故$\begin{vmatrix}O&A\\B&O\end{vmatrix}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}+n^2}(\frac{n(n+1)}{2}+x)n!x^{n-1}$.

注　这里用了公式：若A为m阶方阵，B为n阶方阵，则$\begin{vmatrix}O&A\\B&O\end{vmatrix}=(-1)^{mn}|A||B|$.

例 2.24 若A为n阶方阵，E为单位矩阵，满足$AA^T=E$，$|A|<0$，求$|A+E|$.

解　方法 1　由$AA^T=E$有

$$|A+E|=|A+AA^T|=|A(E+A^T)|=|A(E+A)^T|$$

$$=|A|\,|(E+A)^T|=|A|\,|E+A|=|A|\,|A+E|$$

即$(1-|A|)\,|A+E|$=0，而$(1-|A|)>0$，所以$|A+E|$=0.

方法 2　因为　$|(A+E)A^T|=|AA^T+A^T|=|E+A^T|=|A+E|$

即　$|A+E|\,|A|=|A+E|$

有$(1-|A|)\,|A+E|$=0，而$(1-|A|)>0$，所以$|A+E|$=0.

方法 3　由$AA^T=E$知矩阵A为正交矩阵，即$|AA^T|$=1，$|A|^2$=1，又因为$|A|<0$，所以有$|A|=-1$，故

$$|A+E|=|A|\,|E+A^{-1}|=-|E+A^T|=-|E+A|$$

即 2$|A+E|$=0，$|A+E|$=0.

例 2.25　若A为n阶正定矩阵，E为n阶单位矩阵，证明$A+E$的行列式大于 1.

证　方法 1　因为A为正定矩阵，因此所有的特征值大于零．设A的n个特征值为

$\lambda_i = 1, i = 1,2,\cdots,n$，且 $\lambda_i > 0$，由特征值的性质知，$A+E$ 的 n 个特征值为 $\lambda_i + 1, i = 1,2,\cdots,n$，于是 $(\lambda_1+1)\cdots(\lambda_n+1) > 1$.

方法 2　因为正定矩阵是对称矩阵，因此 A 可对角阵，且所有的特征值大于零，故存在可逆阵 P 有

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} \qquad (\lambda_i > 0, i = 1,2,\cdots,n)$$

即
$$A = P\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}P^{-1}$$

$$A+E = P\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}P^{-1} + PP^{-1} = P\begin{pmatrix} \lambda_1+1 & & \\ & & \\ & & \lambda_n+1 \end{pmatrix}P^{-1}$$

$$|A+E| = |P|\begin{vmatrix} \lambda_1+1 & & \\ & & \\ & & \lambda_n+1 \end{vmatrix}|P^{-1}| = (\lambda_1+1)\cdots(\lambda_n+1) > 1$$

例 2.26 设 $A = \begin{pmatrix} 1+a & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 2 & 2+a & 2 & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ n & n & n & \cdots & n+a \end{pmatrix}$，求 $|A|$

解 利用特征值法进行求解，即利用公式 $|A| = \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$.

$$A = \begin{pmatrix} 1+a & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 2 & 2+a & 2 & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ n & n & n & \cdots & n+a \end{pmatrix}$$

$$= a\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 2 & 2+a & 2 & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ n & n & n & \cdots & n+a \end{pmatrix}$$

$$= \quad = aE + \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ n & n & n & \cdots & n \end{pmatrix}$$

矩阵$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & & 1 \\ 2 & 2 & 2 & & 2 \\ & & & & \\ n & n & n & & n \end{pmatrix}$的秩为 1，由第十三讲的注意（7）知它特征值为

$$\lambda_1 = a_{11} + a_{22} + \quad a_{nn} = \frac{n(n+1)}{2}, \qquad \lambda_2 = \lambda_3 = \quad = \lambda_n = 0$$

所以 A 特征值为 $a + \frac{n(n+1)}{2}, a, \quad , a$ ，故 $|A| = [a + \frac{n(n+1)}{2}]a^{n-1}$.

计算 n 阶行列式的若干方法举例

n 阶行列式的计算方法很多，除非零元素较多时可利用定义计算（①按照某一列或某一行展开②完全展开式）外，更多的是利用行列式的性质计算，特别要注意观察所求题目的特点，灵活选用方法，值得注意的是，同一个行列式，有时会有不同的求解方法。下面介绍几种常用的方法，并举例说明。

1．利用行列式定义直接计算

例 1　计算行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} 0 & & 0 & 1 & 0 \\ 0 & & 2 & 0 & 0 \\ & & & & \\ n-1 & & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & 0 & 0 & n \end{vmatrix}$$

解　　D_n 中不为零的项用一般形式表示为

$$a_{1n-1}a_{2n-2} \quad a_{n-11}a_{nn} = n!.$$

该项列标排列的逆序数 t（$n-1\ n-2\cdots 1n$）等于 $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$，故

$$D_n = (-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} n!.$$

2．利用行列式的性质计算

例 2　一个 n 阶行列式 $D_n=\left|a_{ij}\right|$ 的元素满足

$$a_{ij}=-a_{ji},i,j=1,2,\quad,n,$$

则称 D_n 为反对称行列式，证明：奇数阶反对称行列式为零.

证明：由 $a_{ij}=-a_{ji}$ 知 $a_{ii}=-a_{ii}$，即

$$a_{ii}=0,i=1,2,\quad,n$$

故行列式 D_n 可表示为

$$D_n=\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & & a_{1n} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} & & a_{2n} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 & & a_{3n} \\ & & & & \\ -a_{1n} & -a_{2n} & -a_{3n} & & 0 \end{vmatrix}$$

由行列式的性质 $|A|=|A'|$

$$D_n=\begin{vmatrix} 0 & -a_{12} & -a_{13} & & -a_{1n} \\ a_{12} & 0 & -a_{23} & & -a_{2n} \\ a_{13} & a_{23} & 0 & & -a_{3n} \\ & & & & \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & & 0 \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^n\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & & a_{1n} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} & & a_{2n} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 & & a_{3n} \\ & & & & \\ -a_{1n} & -a_{2n} & -a_{3n} & & 0 \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^n D_n$$

当 n 为奇数时，得 $D_n=-D_n$，因而得 $D_n=0$.

3．化为三角形行列式

若能把一个行列式经过适当变换化为三角形，其结果为行列式主对角线上元素的乘积。因此化三角形是行列式计算中的一个重要方法。

例 3　计算 n 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a & b & b & & b \\ b & a & b & & b \\ b & b & a & & b \\ & & & & \\ b & b & b & & a \end{vmatrix}$$

解：这个行列式的特点是每行（列）元素的和均相等，根据行列式的性质，把第 **2**，**3**，…，n 列都加到第 **1** 列上，行列式不变，得

$$D=\begin{vmatrix} a+(n-1)b & b & b & & b \\ a+(n-1)b & a & b & & b \\ a+(n-1)b & b & a & & b \\ & & & & \\ a+(n-1)b & b & b & & a \end{vmatrix}$$

$$=[a+(n-1)b]\begin{vmatrix} 1 & b & b & & b \\ 1 & a & b & & b \\ 1 & b & a & & b \\ & & & & \\ 1 & b & b & & a \end{vmatrix}$$

$$=[a+(n-1)b]\begin{vmatrix} 1 & b & b & & b \\ 0 & a-b & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & a-b & & 0 \\ & & & & \\ 0 & 0 & 0 & & a-b \end{vmatrix}$$

$$=[a+(n-1)b](a-b)^{n-1}$$

4．降阶法

降阶法是按某一行（或一列）展开行列式，这样可以降低一阶，更一般地是用拉普拉斯定理，这样可以降低多阶，为了使运算更加简便，往往是先利用列式的性质化简，使行列式中有较多的零出现，然后再展开。

例 4　计算 *n* 阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & & 0 & 1 \\ 0 & a & 0 & & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & & 0 & 0 \\ & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & & a & 0 \\ 1 & 0 & 0 & & 0 & a \end{vmatrix}$$

解　将 D_n 按第 1 行展开

$$D_n=a\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & & 0 \\ 0 & a & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & a & & 0 \\ & & & & \\ 0 & 0 & 0 & & a \end{vmatrix}+(-1)^{n+1}\begin{vmatrix} 0 & a & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & a & & 0 \\ & & & & \\ 0 & 0 & 0 & & a \\ 1 & 0 & 0 & & 0 \end{vmatrix}$$

$$=a^n+(-1)^{n+1}(-1)^n a^{n-2}$$

$$=a^n-a^{n-2}.$$

5．递推公式法

递推公式法：对 n 阶行列式 D_n 找出 D_n 与 D_{n-1} 或 D_n 与 D_{n-1}, D_{n-2} 之间的一种关系——称为递推公式（其中 D_n, D_{n-1}, D_{n-2} 等结构相同），再由递推公式求出 D_n 的方法称为递推公式法。

例 5　证明

$$D_n = \begin{vmatrix} x & -1 & 0 & & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & & 0 & 0 \\ & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & & x & -1 \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & & a_2 & a_1 + x \end{vmatrix}$$

$$= x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \quad + a_{n-1} x + a_n, (n \geq 2$$

证明：将 D_n 按第 1 列展开得

$$D_n = x \begin{vmatrix} x & -1 & 0 & & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & & 0 & 0 \\ & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & & x & -1 \\ a_{n-1} & a_{n-2} & a_{n-3} & & a_2 & a_1 + x \end{vmatrix}$$

$$+(-1)^{n+1} a_n \begin{vmatrix} -1 & 0 & & 0 & 0 \\ x & -1 & & 0 & 0 \\ & & & & \\ 0 & 0 & & x & -1 \end{vmatrix}$$

$$= a_n + x D_{n-1}$$

由此得递推公式：$D_n = a_n + xD_{n-1}$，利用此递推公式可得

$$D_n = a_n + xD_{n-1} = a_n + x(a_{n-1} + xD_{n-2})$$

$$= a_n + a_{n-1}x + x^2 D_{n-2}$$

$$= \quad = a_n + a_{n-1}x + \quad + a_1 x^{n-1} + x^n$$

6．利用范德蒙行列式

例 6　计算行列式

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & & 1 \\ x_1+1 & x_2+1 & & x_n+1 \\ x_1^2+x_1 & x_2^2+x_2 & & x_n^2+x_n \\ & & & \\ x_1^{n-1}+x_1^{n-2} & x_2^{n-1}+x_2^{n-2} & & x_n^{n-1}+x_n^{n-2} \end{vmatrix}$$

解　把第 1 行的－1 倍加到第 2 行，把新的第 2 行的－1 倍加到第 3 行，以此类推直到把新的第 *n*－1 行的－1 倍加到第 *n* 行，便得范德蒙行列式

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & & 1 \\ x_1 & x_2 & & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & & x_n^2 \\ & & & \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{n \geq i > j \geq 1} (x_i - x_j)$$

例 2　计算$n+1$阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_1^n & a_1^{n-1}b_1 & a_1^{n-2}b_1^2 & & a_1b_1^{n-1} & b_1^n \\ a_2^n & a_2^{n-1}b_2 & a_2^{n-2}b_2^2 & & a_2b_2^{n-1} & b_2^n \\ & & & & & \\ a_{n+1}^n & a_{n+1}^{n-1}b_{n+1} & a_{n+1}^{n-2}b_{n+1}^2 & & a_{n+1}b_{n+1}^{n-1} & b_{n+1}^n \end{vmatrix}$$

.

其中$a_1a_2 \quad a_{n+1}\neq 0$.

解　这个行列式的每一行元素的形状都是$a_i^{n-k}b_i^k$，$k=$**0，1，2，…，*n***．即a_i按降幂排列，b_i按升幂排列，且次数之和都是***n***，又因$a_i\neq 0$，若在第 ***i*** 行（$i=$**1，2，…，*n***）提出公因子a_i^n，则 ***D*** 可化为一个转置的范德蒙行列式，即

$$D=a_1^na_2^n \quad a_{n+1}^n\begin{vmatrix} 1 & \frac{b_1}{a_1} & \left(\frac{b_1}{a_1}\right)^2 & & \left(\frac{b_1}{a_1}\right)^n \\ 1 & \frac{b_2}{a_2} & \left(\frac{b_2}{a_2}\right)^2 & & \left(\frac{b_2}{a_2}\right)^n \\ & & & & \\ 1 & \frac{b_{n+1}}{a_{n+1}} & \left(\frac{b_{n+1}}{a_{n+1}}\right)^2 & & \left(\frac{b_{n+1}}{a_{n+1}}\right)^n \end{vmatrix}$$

$$=\prod_{i=1}^{n+1}a_i^n\prod_{1\leqslant j<i\leqslant n+1}\left(\frac{b_i}{a_i}-\frac{b_j}{a_j}\right)$$

$$=\prod_{1\leqslant j<i\leqslant n+1}\left(b_ia_j-a_ib_j\right).$$

7．加边法（升阶法）

加边法（又称升阶法）是在原行列式中增加一行一列，且保持原行列式不变的方法。

例 7　计算 *n* 阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} x+a_1 & a_2 & & a_n \\ a_1 & x+a_2 & & a_n \\ a_1 & a_2 & & a_n \\ & & & \\ a_1 & a_2 & & x+a_n \end{vmatrix}$$

解：

$$D_n=\begin{vmatrix} 1 & a_1 & & a_n \\ 0 & & & \\ & & D_n & \\ 0 & & & \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[i=2,\quad,n+1]{\text{第}i\text{行减第1行}}\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & & a_n \\ -1 & x & 0 & & 0 \\ -1 & 0 & x & & 0 \\ & & & & \\ -1 & 0 & 0 & & x \end{vmatrix}$$ （箭形行列式）

$$=\begin{vmatrix} 1+\sum_{j=1}^{n}\frac{a_j}{x} & a_1 & a_2 & & a_n \\ 0 & x & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & x & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & x \end{vmatrix}$$

$$=x^n\left(1+\sum_{j=1}^{n}\frac{a_j}{x}\right)$$

例 3 计算 n（n≥2）阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & 1 & & 1 \\ 1 & 1+a_2 & 1 & & 1 \\ 1 & 1 & 1+a_3 & & 1 \\ & & & & \\ 1 & 1 & 1 & & 1+a_n \end{vmatrix},$$

其中 $a_1a_2 \quad a_n \neq 0$.

解 先将 D_n 添上一行一列，变成下面的 $n+1$ 阶行列式：

$$D_{n+1}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & & 1 \\ 0 & 1+a_1 & 1 & & 1 \\ 0 & 1 & 1+a_2 & & 1 \\ & & & & \\ 0 & 1 & 1 & & 1+a_n \end{vmatrix}.$$

显然，$D_{n+1}=D_n$．将 D_{n+1} 的第一行乘以 -1 后加到其余各行，得

$$D_{n+1}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & & 1 \\ -1 & a_1 & 0 & & 0 \\ 0 & 1 & 1+a_2 & & 0 \\ & & & & \\ -1 & 0 & 0 & & a_n \end{vmatrix}.$$

因 $a_i \neq 0$，将上面这个行列式第一列加第 i（$i=2$，…，$n+1$）列的 $\frac{1}{a_{i-1}}$ 倍，得：

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & & 1 \\ -1 & a_1 & 0 & & 0 \\ -1 & 0 & a_2 & & 0 \\ & & & & \\ -1 & 0 & 0 & & a_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1+\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i} & 1 & 1 & & 1 \\ 0 & a_1 & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & & 0 \\ & & & & \\ 0 & 0 & 0 & & a_n \end{vmatrix}$$

$$= \left(1+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\right)\begin{vmatrix} a_1 & 0 & & 0 \\ 0 & a_2 & & 0 \\ & & & \\ 0 & 0 & & a_n \end{vmatrix}$$

$$= a_1a_2 \quad a_n\left(1+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\right),$$

故 $D_n = a_1a_2 \quad a_n\left(1+\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\right)$

8．数学归纳法

例 8　计算 *n* 阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} x & -1 & 0 & & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & & 0 & 0 \\ & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & & x & -1 \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & & a_2 & a_1+x \end{vmatrix}$$

解：用数学归纳法．当 $n=2$ 时

$$D_2 = \begin{vmatrix} x & -1 \\ a_2 & x+a_1 \end{vmatrix} = x(x+a_1)+a_2$$

$$= x^2 + a_1x + a_2$$

假设 $n=k$ 时，有

$$D_k = x^k + a_1x^{k-1} + a_2x^{k-2} + \quad + a_{k-1}x + a_k$$

则当 $n = k+1$ 时，把 D_{k+1} 按第一列展开，得

$$D_{k+1} = xD_k + a_{k+1}$$

$$= x(x^k + a_1x^{k-1} + \cdots + a_{k-1}x + a_k) + a_{k+1}$$

$$= x^{k+1} + a_1x^k + \cdots + a_{k-1}x^2 + a_kx + a_{k+1}$$

由此，对任意的正整数 n，有

$$D_n = x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-2}x^2 + a_{n-1}x + a_n$$

9．拆开法

把某一行（或列）的元素写成两数和的形式，再利用行列式的性质将原行列式写成两行列式之和，使问题简化以利计算。

例 9　计算行列式 $D_n = \begin{vmatrix} a_1+\lambda_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2+\lambda_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n+\lambda_n \end{vmatrix}$

解： $D_n = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2+\lambda_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n+\lambda_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \lambda_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 0 & a_2+\lambda_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n+\lambda_n \end{vmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{vmatrix} + \lambda_1 D_{n-1}$$

$$= a_1\lambda_2 \cdots \lambda_n + \lambda_1 D_{n-1}$$

……

$$= \lambda_1\lambda_2 \cdots \lambda_n \left(1 + \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{\lambda_i}\right)$$

例 4 计算 n（$n\geqslant 2$）阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix}1+x_1y_1 & 2+x_1y_2 & \cdots & n+x_1y_n\\ 1+x_2y_1 & 2+x_2y_2 & \cdots & n+x_2y_n\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1+x_ny_1 & 2+x_ny_2 & \cdots & n+x_ny_n\end{vmatrix}.$$

解　将 D_n 按第一列拆成两个行列式的和，即

$$D_n=\begin{vmatrix}1 & 2+x_1y_2 & \cdots & n+x_1y_n\\ 1 & 2+x_2y_2 & \cdots & n+x_2y_n\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & 2+x_ny_2 & \cdots & n+x_ny_n\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}x_1y_1 & 2+x_1y_2 & \cdots & n+x_1y_n\\ x_2y_1 & 2+x_2y_2 & \cdots & n+x_2y_n\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ x_ny_1 & 2+x_ny_2 & \cdots & n+x_ny_n\end{vmatrix}.$$

再将上式等号右端的第一个行列式第 i 列（$i=2$，3，…，n）减去第一列的 i 倍；第二个行列式提出第一列的公因子 y_1，则可得到

$$D_n=\begin{vmatrix}1 & x_1y_2 & \cdots & x_1y_n\\ 1 & x_2y_2 & \cdots & x_2y_n\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & x_ny_2 & \cdots & x_ny_n\end{vmatrix}+y_1\begin{vmatrix}x_1 & 2+x_1y_2 & \cdots & n+x_1y_n\\ x_2 & 2+x_2y_2 & \cdots & n+x_2y_n\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ x_n & 2+x_ny_2 & \cdots & n+x_ny_n\end{vmatrix}$$

$$=y_2\cdots y_n\begin{vmatrix}1 & x_1 & \cdots & x_1\\ 1 & x_2 & \cdots & x_2\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & x_n & \cdots & x_n\end{vmatrix}+y_1\begin{vmatrix}x_1 & 2 & \cdots & n\\ x_2 & 2 & \cdots & n\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ x_n & 2 & \cdots & n\end{vmatrix}.$$

当 $n\geqslant 3$ 时，$D_n=0$.

当 $n=2$ 时，$D_2=(x_2-x_1)(y_2-2y_1)$.

上面介绍了计算 n 阶行列式的常见方法，计算行列式时，我们应当针对具体问题，把握行列式的特点，灵活选用方法。学习中多练习，多总结，才能更好地掌握行列式的计算。

第 1 讲　计算行列式的若干基本方法

计算行列式并无固定的方法．其实，同一个行列式可以有多种不同的方法进行计算．因此，除了掌握好行列式的基本性质外，针对行列式的结构特点，选取恰当的方法，才能较快地酸楚行列式．这一讲，我们将介绍一些常用的方法．

1． 化为已经熟悉的行列式来计算

我们已经知道上（下）三角行列式、范德蒙行列式以及形如

$$\begin{vmatrix} A & 0 \\ * & B \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} A & * \\ 0 & B \end{vmatrix}$$

的行列式的结果．如果利用行列式的性质可把给定的行列式化为以上这些形式，则不难求出所给行列式的值．

为了叙述简便，仍用记号$(i)\leftrightarrow(j)\left([i]\leftrightarrow[j]\right)$表示互换行列式的第 i 行（列）与第 j 行（列）；用$(i)+k(j)\left([i]+k[j]\right)$表示将行列式第 j 行（列）的 k 倍加到第 i 行（列）；用$c(i)\left(c[i]\right)$表示将第 i 行（列）乘以非零的数 c．

例 1　计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & -3 & 1 \\ -3 & 3 & -7 & 9 & -5 \\ 2 & 0 & 4 & -2 & 1 \\ 3 & -5 & 7 & -14 & 6 \\ 4 & -4 & 10 & -10 & 2 \end{vmatrix}.$$

解　这是一个阶数不高的数值行列式，通常将它化为上（下）三角行列式来计算．

解 这个行列式每一列的元素，除了主对角线上的外，都是相同的，且各列的结构相似，因此 n 列之和全同．将第 2，3，…，n 列都加到第一列上，就可以提出公因子且使第一列的元素全是 1．

$$D \xlongequal[\substack{(4)-3(1)\\(5)-4(1)}]{\substack{(2)+3(1)\\(3)-2(1)}} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & -2 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{(2)\leftrightarrow(3)} -\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 1 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & -2 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{(4)+(2)} -\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & -2 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[(5)+2(3)]{(4)+(3)} -\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -6 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{(5)+2(4)} -\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -6 \end{vmatrix}$$

$$= -1\cdot 2(-1)(-1)(-6) = 12 \ .$$

例 5 计算 n 阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} 1+a_1 & a_2 & a_3 & & a_n \\ a_1 & 1+a_2 & a_3 & & a_n \\ a_1 & a_2 & 1+a_3 & & a_n \\ & & & & \\ a_1 & a_2 & a_3 & & 1+a_n \end{vmatrix}.$$

解 这个行列式每一列的元素，除了主对角线上的外，都是相同的，且各列的结构相似，因此 n 列之和全同．将第 2，3，…，n 列都加到第一列上，就可以提出公因子且使第一列的元素全是 1．

$$D \xlongequal[i=2,\quad ,n]{[1]+[i]} \begin{vmatrix} 1+(a_1+a_2+\quad +a_n) & a_2 & a_3 & & a_n \\ 1+(a_1+a_2+\quad +a_n) & 1+a_2 & a_3 & & a_n \\ 1+(a_1+a_2+\quad +a_n) & a_2 & 1+a_3 & & a_n \\ & & & & \\ 1+(a_1+a_2+\quad +a_n) & a_2 & a_3 & & 1+a_n \end{vmatrix}$$

$$=\left(1+\sum_{i=1}^{n} a_i\right) \begin{vmatrix} 1 & a_2 & a_3 & & a_n \\ 1 & 1+a_2 & a_3 & & a_n \\ 1 & a_2 & 1+a_3 & & a_n \\ & & & & \\ 1 & a_2 & a_3 & & 1+a_n \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[i=2,\quad ,n]{(i)-(1)} \left(1+\sum_{i=1}^{n} a_i\right) \begin{vmatrix} 1 & a_2 & a_3 & & a_n \\ 0 & 1 & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 \\ & & & & \\ 0 & 0 & 0 & & 1 \end{vmatrix}$$

$$=\left(1+\sum_{i=1}^{n} a_i\right) 1 = 1+\sum_{i=1}^{n} a_i \ .$$

例 6　计算 $n+1$ 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_1^n & a_1^{n-1}b_1 & a_1^{n-2}b_1^2 & & a_1 b_1^{n-1} & b_1^n \\ a_2^n & a_2^{n-1}b_2 & a_2^{n-2}b_2^2 & & a_2 b_2^{n-1} & b_2^n \\ & & & & & \\ a_{n+1}^n & a_{n+1}^{n-1}b_{n+1} & a_{n+1}^{n-2}b_{n+1}^2 & & a_{n+1} b_{n+1}^{n-1} & b_{n+1}^n \end{vmatrix}.$$

其中 $a_1 a_2 \quad a_{n+1} \neq 0$.

解　这个行列式的每一行元素的形状都是 $a_i^{n-k} b_i^k$，$k=0$，1，2，⋯，n．即 a_i 按降幂排列，b_i 按升幂排列，且次数之和都是 n，又因 $a_i \neq 0$，若在第 i 行（$i=1$，2，⋯，n）提出公因子 a_i^n，则 D 可化为一个转置的范德蒙行列式，即

$$D=a_1^n a_2^n \quad a_{n+1}^n\begin{vmatrix}1 & \dfrac{b_1}{a_1} & \left(\dfrac{b_1}{a_1}\right)^2 & & \left(\dfrac{b_1}{a_1}\right)^n \\ 1 & \dfrac{b_2}{a_2} & \left(\dfrac{b_2}{a_2}\right)^2 & & \left(\dfrac{b_2}{a_2}\right)^n \\ & & & & \\ 1 & \dfrac{b_{n+1}}{a_{n+1}} & \left(\dfrac{b_{n+1}}{a_{n+1}}\right)^2 & & \left(\dfrac{b_{n+1}}{a_{n+1}}\right)^n\end{vmatrix}$$

$$=\prod_{i=1}^{n+1}a_i^n\prod_{1\leqslant j<i\leqslant n+1}\left(\frac{b_i}{a_i}-\frac{b_j}{a_j}\right)$$

$$=\prod_{1\leqslant j<i\leqslant n+1}\left(b_ia_j-a_ib_j\right).$$

2．降阶法

当一个行列式的某一行（列）的元素有比较多 0 时，利用行列式的依行（列）展开定理将它化为较低阶的行列式来计算.

例 7　计算 n（$n\geqslant 2$）阶行列式

$$D=\begin{vmatrix}a & 0 & 0 & & 0 & 1 \\ 0 & a & 0 & & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & & 0 & 0 \\ & & & & & \\ 1 & 0 & 0 & & 0 & a\end{vmatrix}.$$

解　按第一行展开，得

$$D=a\begin{vmatrix}a & 0 & & 0 & 0 \\ 0 & a & & 0 & 0 \\ & & & & \\ 0 & 0 & & 0 & a\end{vmatrix}+\left(-1\right)^{1+n}\begin{vmatrix}0 & a & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & a & & 0 \\ & & & & \\ 0 & 0 & 0 & & a \\ 1 & 0 & 0 & & 0\end{vmatrix}.$$

再将上式等号右边的第二个行列式按第一列展开，则可得到

$$D=a^n+\left(-1\right)^{1+n}\left(-1\right)^{(n-1)+1}a^{n-2}=a^n-a^{n-2}=a^{n-2}\left(a^2-1\right).$$

3．拆项法

拆项法是将给定的行列式的某一行（列）的元素都写成同样多的和，然后利用性质 6 将它表成一些比较容易计算的行列式的和.

例 8　计算 n（$n\geqslant 2$）阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix}1+x_1y_1 & 2+x_1y_2 & & n+x_1y_n \\ 1+x_2y_1 & 2+x_2y_2 & & n+x_2y_n \\ & & & \\ 1+x_ny_1 & 2+x_ny_2 & & n+x_ny_n\end{vmatrix}.$$

解　将 D_n 按第一列拆成两个行列式的和，即

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 2+x_1y_2 & & n+x_1y_n \\ 1 & 2+x_2y_2 & & n+x_2y_n \\ & & & \\ 1 & 2+x_ny_2 & & n+x_ny_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1y_1 & 2+x_1y_2 & & n+x_1y_n \\ x_2y_1 & 2+x_2y_2 & & n+x_2y_n \\ & & & \\ x_ny_1 & 2+x_ny_2 & & n+x_ny_n \end{vmatrix}.$$

再将上式等号右端的第一个行列式第 i 列（$i=2$，3，⋯，n）减去第一列的 i 倍；第二个行列式提出第一列的公因子 y_1，则可得到

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & x_1y_2 & & x_1y_n \\ 1 & x_2y_2 & & x_2y_n \\ & & & \\ 1 & x_ny_2 & & x_ny_n \end{vmatrix} + y_1 \begin{vmatrix} x_1 & 2+x_1y_2 & & n+x_1y_n \\ x_2 & 2+x_2y_2 & & n+x_2y_n \\ & & & \\ x_n & 2+x_ny_2 & & n+x_ny_n \end{vmatrix}$$

$$= y_2 \quad y_n \begin{vmatrix} 1 & x_1 & & x_1 \\ 1 & x_2 & & x_2 \\ & & & \\ 1 & x_n & & x_n \end{vmatrix} + y_1 \begin{vmatrix} x_1 & 2 & & n \\ x_2 & 2 & & n \\ & & & \\ x_n & 2 & & n \end{vmatrix}.$$

当 $n \geqslant 3$ 时，$D_n = 0$.

当 $n=2$ 时，$D_2 = (x_2 - x_1)(y_2 - 2y_1)$.

例 9 计算 n 阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} x & a & a & & a \\ -a & x & a & & a \\ -a & -a & x & & a \\ & & & & \\ -a & -a & -a & & x \end{vmatrix}，（a \neq 0）.$$

解 将第一行的元素都表成两项的和，使 D_n 变成两个行列式的和，即

$$D_n = \begin{vmatrix} (x-a)+a & 0+a & 0+a & & 0+a \\ -a & x & a & & a \\ -a & -a & x & & a \\ & & & & \\ -a & -a & -a & & x \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} x-a & 0 & 0 & & 0 \\ -a & x & a & & a \\ -a & -a & x & & a \\ & & & & \\ -a & -a & -a & & x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & a & a & & a \\ -a & x & a & & a \\ -a & -a & x & & a \\ & & & & \\ -a & -a & -a & & x \end{vmatrix}.$$

将等号右端的第一个行列式按第一行展开，得：

$$\begin{vmatrix} x-a & 0 & 0 & & 0 \\ -a & x & a & & a \\ -a & -a & x & & a \\ & & & & \\ -a & -a & -a & & x \end{vmatrix} = (x-a)D_{n-1} \ .$$

这里 D_{n-1} 是一个与 D_n 有相同结构的 $n-1$ 阶行列式；将第二个行列式的第一行加到其余各行，得：

$$\begin{vmatrix} a & a & a & & a \\ -a & x & a & & a \\ -a & -a & x & & a \\ & & & & \\ -a & -a & -a & & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & a & a & & a \\ 0 & x+a & 2a & & 2a \\ 0 & 0 & x+a & & 2a \\ & & & & \\ 0 & 0 & 0 & & x+a \end{vmatrix}$$

$$= a(x+a)^{n-1} \ .$$

于是有

$$D_n = (x-a)D_{n-1} + a(x+a)^{n-1}$$

（1）

另一方面，如果将 D_n 的第一行元素用另一方式表成两项之和：

$$(x+a)-a \quad 0+a \quad 0+a \qquad 0+a$$

仿上可得：

$$D_n = (x+a)D_{n-1} - a(x-a)^{n-1}$$

（2）

将（1）式两边乘以 $(x+a)$，（2）式两边乘以 $(x-a)$，然后相减以消去 D_{n-1}，得：

$$D_n = \frac{(x+a)^n + (x-a)^n}{2} .$$

4．加边法

在给定的行列式中添上一行和一列，得加边行列式，建立新的行列式与原行列式的联系，以求得结果．

例 10 计算 n（$n\geqslant 2$）阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & 1 & & 1 \\ 1 & 1+a_2 & 1 & & 1 \\ 1 & 1 & 1+a_3 & & 1 \\ & & & & \\ 1 & 1 & 1 & & 1+a_n \end{vmatrix},$$

其中 $a_1 a_2 \cdots a_n \neq 0$．

解 先将 D_n 添上一行一列，变成下面的 $n+1$ 阶行列式：

$$D_{n+1}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & 1+a_2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix}.$$

显然，$D_{n+1}=D_n$．将 D_{n+1} 的第一行乘以 -1 后加到其余各行，得

$$D_{n+1}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 1+a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}.$$

因 $a_i \neq 0$，将上面这个行列式第一列加第 i（$i=2$，…，$n+1$）列的 $\dfrac{1}{a_{i-1}}$ 倍，得：

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1+\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{a_i} & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}$$

$$= \left(1+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\right)\begin{vmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}$$

$$= a_1 a_2 \cdots a_n\left(1+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\right),$$

故

$$D_n = a_1 a_2 \cdots a_n\left(1+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\right).$$

5．递推法

递推法是根据行列式的构造特点，利用行列式的性质，将给定的行列式表成若干个具有相同形状以及一些容易计算的，但阶数较低的行列式之和，然后利用这种关系式计算原行列式的值，最后再用数学归纳法证明所得到的结果正确．这是一种颇常使用的方法，在计算范

德蒙行列式时已建立过递推关系式，本讲的例 6 也利用了递推关系式.

使用递推法计算行列式，一般分三个步骤，首先找出递推关系式，然后算出结果，最后用数学归纳法证明结果正确.

例 11 计算 n 阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} x & -1 & 0 & & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & & 0 & 0 \\ & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & & x & -1 \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & & a_2 & a_1+x \end{vmatrix}.$$

解 首先建立递推关系式. 按第一列展开，得：

$$D_n=x\begin{vmatrix} x & -1 & 0 & & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & & 0 & 0 \\ & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & & x & -1 \\ a_{n-1} & a_{n-2} & a_{n-3} & & a_2 & a_1+x \end{vmatrix}+\left(-1\right)^{n+1}a_n\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & & 0 & 0 \\ x & -1 & 0 & & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & & 0 & 0 \\ & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & & x & -1 \end{vmatrix}$$

$$=xD_{n-1}+\left(-1\right)^{n+1}\cdot a_n\cdot\left(-1\right)^{n-1}=xD_{n-1}+a_n\ ,$$

这里 D_{n-1} 与 D_n 有相同的结构，但阶数是 $n-1$ 的行列式.

现在，利用递推关系式计算结果. 对此，只需反复进行代换，得：

$$\begin{aligned} D_n &= x\left(xD_{n-2}+a_{n-1}\right)+a_n=x^2D_{n-2}+a_{n-1}x+a_n \\ &= x^2\left(xD_{n-3}+a_{n-2}\right)+a_{n-1}x+a_n \\ & \\ &= x^{n-1}D_1+a_2x^{n-2}+\quad+a_{n-2}x^2+a_{n-1}x+a_n\ , \end{aligned}$$

因 $D_1=\left|x+a_1\right|=x+a_1$，故

$$D_n=x^n+a_1x^{n-1}+\quad+a_{n-1}x+a_n\ .$$

最后，用数学归纳法证明这样得到的结果是正确的.

当 $n=1$ 时，显然成立. 设对 $n-1$ 阶的情形结果正确，往证对 n 阶的情形也正确. 由

$$\begin{aligned} D_n &= xD_{n-1}+a_n=x\left(x^{n-1}+a_1x^{n-2}+\quad+a_{n-2}x+a_{n-1}\right)+a_n \\ &= x^n+a_1x^{n-1}+\quad+a_{n-1}x+a_n\ , \end{aligned}$$

可知，对 n 阶的行列式结果也成立.

根据归纳法原理，对任意的正整数 n，结论成立.

例 12 证明 n 阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}=n+1 .$$

证明　按第一列展开，得

$$D_n=2\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

其中，等号右边的第一个行列式是与 D_n 有相同结构但阶数为 $n-1$ 的行列式，记作 D_{n-1}；第二个行列式，若将它按第一列展开就得到一个也与 D_n 有相同结构但阶数为 $n-2$ 的行列式，记作 D_{n-2}．这样，就有递推关系式：

$$D_n=2D_{n-1}-D_{n-2}\ .$$

因为已将原行列式的结果给出，我们可根据得到的递推关系式来证明这个结果是正确的．

当 $n=1$ 时，$D_1=2$，结论正确．

当 $n=2$ 时，$D_2=\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=3$，结论正确．

设对 $k\leqslant n-1$ 的情形结论正确，往证 $k=n$ 时结论也正确．

由

$$D_n=2D_{n-1}-D_{n-2}=2n-(n-1)=n+1$$

可知，对 n 阶行列式结果也成立．

根据归纳法原理，对任意的正整数 n，结论成立．

二、行列式计算方法

1. 定义法
2. 化为三角形行列式的方法
3. 化为范得蒙行列式的方法

4. 拆行(列)法

5. 降级法

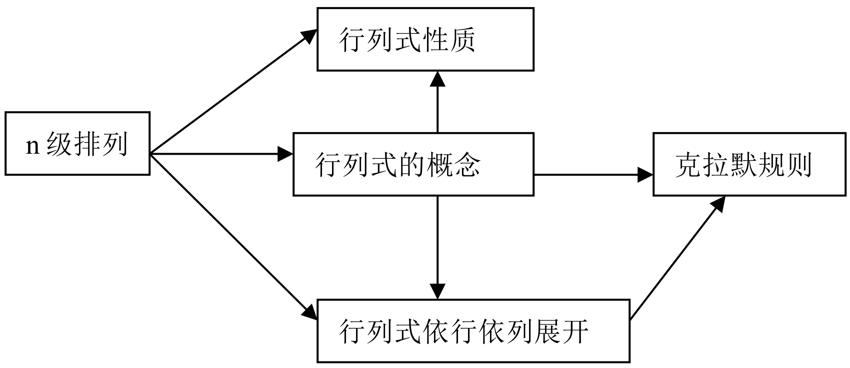
6. 加边法

7. 数学归纳法

8. 递推法

9. 因式分解法

本章主要内容的内在联系:



重点 行列式的计算

难点 行列式概念,行列式的展开定理及用定义证明行列式性质

3. 化为范得蒙行列式的方法

例 1 计算行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & x_n^2 \\ & & \\ x_1^{n-2} & x_2^{n-2} & x_n^{n-2} \\ x_1^n & x_2^n & x_n^n \end{vmatrix}$$

解 作如下行列式,使之配成范德蒙行列式

$$P(y)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_n & y \\ x_1^2 & x_2^2 & x_n^2 & y^2 \\ & & & \\ x_1^{n-2} & x_2^{n-2} & x_n^{n-2} & y^{n-2} \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_n^{n-1} & y^{n-1} \\ x_1^n & x_2^n & x_n^n & y^n \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^{n}(y-x_i)\prod_{1\le j<i\le n}(x_i-x_j)$$

易知 D_n 等于 $P(y)$ 中 y^{n-1} 的系数的相反数，而 $P(y)$ 中 y^{n-1} 的系数为

$-\sum_{k=1}^{n} x_k \prod_{1\le j<i\le n}(x_i-x_j)$，因此,

$$D_n=\sum_{k==1}^{n} x_k \prod_{1\le j<i\le n}(x_i-x_j) \quad .$$

4. 拆行(列)法

例 2 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \\ yz & xz & xy \end{vmatrix}.$$

解：

$$D\overset{(3)+(y+z)(1)}{=}\begin{vmatrix} x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \\ xy+xz+yz & y^2+yz+xz & yz+z^2+xy \end{vmatrix}$$

$$\overset{(3)+x(1)}{=}\begin{vmatrix} x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \\ x^2+xy+yz+xz & y^2+xy+yz+xz & z^2+xy+yz+xz \end{vmatrix}.$$

$$=(xy+yz+xz)(y-x)(z-x)(z-y)$$

5. 降级法

例 3 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix}\alpha & \beta & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & \alpha & \beta & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha & \beta\\ \beta & 0 & 0 & \cdots & 0 & \alpha\end{vmatrix}.$$

解：易得 $D=\alpha^{n}+(-1)^{n+1}\beta^{n+1}$.

6. 加边法

例 4 计算行列式

$$D_n=\begin{vmatrix}1+a_1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & 1+a_2 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & 1 & 1+a_3 & \cdots & 1\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1+a_n\end{vmatrix}.$$

解：

$$D_n=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 0 & 1+a_1 & 1 & \cdots & 1\\ 0 & 1 & 1+a_2 & \cdots & 1\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1+a_n\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ -1 & a_1 & 0 & \cdots & 0\\ -1 & 0 & a_2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ -1 & 0 & 0 & \cdots & a_n\end{vmatrix}$$

$$\overset{a_i\neq 0}{\underset{i=1,2,\cdots,n}{=}}\begin{vmatrix}1+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i} & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 0 & a_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & a_2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n\end{vmatrix}=(1+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i})a_1a_2\cdots a_n.$$

而当 $a_1a_2\cdots a_n=0$ 时可分只有一个因子为零或至少有两个因子为零可得同样的结果.

9. 因式分解法

如果行列式 D 是某个变数 x 的多项式 $f(x)$，可对行列式施行某些变换，求出 $f(x)$ 的互不相同的一次因式，设这些一次因式的乘积为 $g(x)$，则 $D=f(x)=cg(x)$，再比较 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的某一项的系数，求出 c 值.

三、行列式的计算方法

方法 1　　化三角形法

化三角形法是将原行列式化为上（下）三角形行列式或对角形行列式计算的一种方法。这是计算行列式的基本方法重要方法之一。因为利用行列式的定义容易求得上（下）三角形行列式或对角形行列式的性质将行列式化为三角形行列式计算。

原则上，每个行列式都可利用行列式的性质化为三角形行列式。但对于阶数高的行列式，在一般情况下，计算往往较繁。因此，在许多情况下，总是先利用行列式的性质将其作为某种保值变形，再将其化为三角形行列式。

例 3：浙江大学 2004 年攻读硕士研究生入学考试试题第一大题第 2 小题（重庆大学 2004 年攻读硕士研究生入学考试试题第三大题第 1 小题）的解答中需要计算如下行列式的值：

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & & n & 1 \\ 3 & 4 & 5 & & 1 & 2 \\ & & & & & \\ n & 1 & 2 & & n-2 & n-1 \end{vmatrix}$$

[**分析**]显然若直接化为三角形行列式，计算很繁，所以我们要充分利用行列式的性质。注意到从第 1 列开始；每一列与它一列中有 n-1 个数是差 1 的，根据行列式的性质，先从第 n-1 列开始乘以－1 加到第 n 列，第 n-2 列乘以－1 加到第 n-1 列，一直到第一列乘以－1 加到第 2 列。然后把第 1 行乘以－1 加到各行去，再将其化为三角形行列式，计算就简单多了。

解：

$$D_n=\begin{vmatrix}1&1&1&\cdots&1&1\\2&1&1&\cdots&1&1-n\\3&1&1&\cdots&1-n&1\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\n&1-n&1&\cdots&1&1\end{vmatrix}\xlongequal[r_i = r_1]{(i=2,\cdots,n)}\begin{vmatrix}1&1&1&\cdots&1&1\\1&0&0&\cdots&0&-n\\2&0&0&\cdots&-n&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\n-1&-n&0&\cdots&0&0\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[r_1+\frac{1}{n}r_i]{(i=2,\cdots,n)}\frac{1}{n}\begin{vmatrix}1+\cdots+n&0&\cdots&0&0\\1&0&\cdots&0&-n\\2&0&\cdots&-n&0\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\n-2&0&\cdots&0&0\\n-1&-n&\cdots&0&0\end{vmatrix}=\frac{1}{n}\cdot\frac{n(n+1)}{2}\begin{vmatrix}0&0&\cdots&0&-n\\0&0&\cdots&-n&0\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&-n&\cdots&0&0\\-n&0&\cdots&0&0\end{vmatrix}$$

$$=\frac{1}{n}\cdot\frac{n(n+1)}{2}\cdot(-n)^{n-1}\cdot(-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}$$

$$=\frac{(n+1)}{2}\cdot n^{n-1}\cdot(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$$

方法 2　　按行（列）展开法（降阶法）

设 $D_n=\left|a_{ij}\right|$ 为 n 阶行列式，根据行列式的按行（列）展开定理有

$$D_n=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}\ (i=1,2,\cdots,n)$$

或 $$D_n=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj}\ (j=1,2,\cdots,n)$$

其中 A_{ij} 为 D_n 中的元素 a_{ij} 的代数余子式

按行（列）展开法可以将一个 n 阶行列式化为 n 个 n-1 阶行列式计算。若继续使用按行（列）展开法，可以将 n 阶行列式降阶直至化为许多个 2 阶行列式计算，这是计算行列式的又一基本方法。但一般情况下，按行（列）展开并不能减少计算量，仅当行列式中某一行（列）含有较多零元素时，它才能发挥真正的作用。因此，应用按行（列）展开法时，应利用行列式的性质将某一行（列）化为有较多的零元素，再按该行（列）展开。

例 4、计算 20 阶行列式

$$D_{20}=\begin{vmatrix}1&2&3&&18&19&20\\2&1&2&&17&18&19\\3&2&1&&16&17&18\\&&&&&&\\20&19&18&&3&2&1\end{vmatrix}$$

[**分析**]这个行列式中没有一个零元素，若直接应用按行（列）展开法逐次降阶直至化许许多多个 2 阶行列式计算，需进行 20！*20－1 次加减法和乘法运算，这人根本是无法完成的，更何况是 n 阶。但若利用行列式的性质将其化为有很多零元素，则很快就可算出结果。

注意到此行列式的相邻两列（行）的对应元素仅差 1，因此，可按下述方法计算：

解：

$$D_{20}=\begin{vmatrix}1&2&3&&18&19&20\\2&1&2&&17&18&19\\3&2&1&&16&17&18\\&&&&&&\\20&19&18&&3&2&1\end{vmatrix}\xlongequal[(i=1,\ \ 19)]{c_{i+1}-c_i}\begin{vmatrix}1&1&1&&1&1&1\\2&-1&1&&1&1&1\\3&-1&-1&&1&1&1\\&&&&&&\\19&-1&-1&&-1&-1&1\\20&-1&-1&&-1&-1&-1\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[r_i+r_1]{(i=2,\ \ ,20)}\begin{vmatrix}1&1&1&&1&1&1\\3&0&2&&2&2&2\\4&0&0&&2&2&2\\&&&&&&\\20&0&0&&0&0&2\\21&0&0&&0&0&0\end{vmatrix}=21\times(-1)^{20+1}\times2^{18}=-21\times2^{18}$$

方法 3　递推法

应用行列式的性质，把一个 n 阶行列式表示为具有相同结构的较低阶行列式（比如，n-1 阶或 n-1 阶与 n-2 阶等）的线性关系式，这种关系式称为递推关系式。根据递推关系式及某个低阶初始行列式（比如二阶或一阶行列式）的值，便可递推求得所给 n 阶行列式的值，这种计算行列式的方法称为递推法。

［**注意**］用此方法一定要看行列式是否具有较低阶的相同结构如

果没有的话，即很难找出递推关系式，从而不能使用此方法。

例 5、2003 年福州大学研究生入学考试试题第二大题第 10 小题要证如下行列式等式：

$$D_n=\begin{vmatrix} \alpha+\beta & \alpha\beta & 0 & & 0 & 0 \\ 1 & \alpha+\beta & \alpha\beta & & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha+\beta & & 0 & 0 \\ & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & & 1 & \alpha+\beta \end{vmatrix}$$

证明 ：$D_n=\dfrac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{\alpha-\beta}$，其中$\alpha\neq\beta$

（虽然这是一道证明题，但我们可以直接求出其值，从而证之。）

［分析］此行列式的特点是：除主对角线及其上下两条对角线的元素外，其余的元素都为零，这种行列式称“三对角”行列式[1]。从行列式的左上方往右下方看，即知 D_{n-1} 与 D_n 具有相同的结构。因此可考虑利用递推关系式计算。

证明：D_n 按第 1 列展开，再将展开后的第二项中 n-1 阶行列式按第一行展开有：

$$D_n=(\alpha+\beta)D_{n-1}-\alpha\beta D_{n-2}$$

这是由 D_{n-1} 和 D_{n-2} 表示 D_n 的递推关系式。若由上面的递推关系式从 n 阶逐阶往低阶递推，计算较繁，注意到上面的递推关系式是由 n-1 阶和 n-2 阶行列式表示 n 阶行列式，因此，可考虑将其变形为：

$$D_n-\alpha D_{n-1}=\beta D_{n-1}-\alpha\beta D_{n-2}=\beta(D_{n-1}-\alpha D_{n-2})$$

或 $$D_n-\beta D_{n-1}=\alpha D_{n-1}-\alpha\beta D_{n-2}=\alpha(D_{n-1}-\beta D_{n-2})$$

现可反复用低阶代替高阶，有：

$$\begin{aligned} D_n-\alpha D_{n-1}&=\beta(D_{n-1}-\alpha D_{n-2})=\beta^2(D_{n-2}-\alpha D_{n-3})=\beta^3(D_{n-3}-\alpha D_{n-4}) \\ &= \quad =\beta^{n-2}(D_2-\alpha D_1)=\beta^{n-2}[(\alpha+\beta)^2-\alpha\beta-\alpha(\alpha+\beta)]=\beta^n \qquad (1) \end{aligned}$$

同样有：

$$D_n-\beta D_{n-1}=\alpha(D_{n-1}-\beta D_{n-2})=\alpha^2(D_{n-2}-\beta D_{n-3})=\alpha^3(D_{n-3}-\beta D_{n-4})$$
$$= \quad =\alpha^{n-2}(D_2-\beta D_1)=\alpha^{n-2}[(\alpha+\beta)^2-\alpha\beta-\beta(\alpha+\beta)]=\alpha^n \qquad (2)$$

因此当$\alpha\neq\beta$时

由（1）（2）式可解得：$D_n=\dfrac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{\alpha-\beta}$，证毕。

方法 4　数学归纳法

一般是利用不完全归纳法寻找出行列式的猜想值，再用数学归纳法给出猜想的证明。因此，数学归纳法一般是用来证明行列式等式。因为给定一个行列式，要猜想其值是比较难的，所以是先给定其值，然后再去证明。（数学归纳法的步骤大家都比较熟悉，这里就不再说了）

例 6、证明：

$$D_n=\begin{vmatrix}2\cos\theta & 1 & 0 & & 0 & 0\\ 1 & 2\cos\theta & 1 & & 0 & 0\\ 0 & 1 & 2\cos\theta & & 0 & 0\\ & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & & 2\cos\theta & 1\\ 0 & 0 & 0 & & 1 & 2\cos\theta\end{vmatrix}=\frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}\quad(\sin\theta\neq 0)$$

方法 5 .利用范德蒙行列式

范德蒙行列式：

$$\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & & 1\\ x_1 & x_2 & x_3 & & x_n\\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & & x_n^2\\ & & & & \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & & x_n^{n-1}\end{vmatrix}=\prod_{1\le j<i\le n}(x_i-x_j)$$

例 7、　计算 n 阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix}(a-n+1)^{n-1} & (a-n+2)^{n-1} & & (a-1)^{n-1} & a^{n-1}\\ (a-n+1)^{n-2} & (a-n+2)^{n-2} & & (a-1)^{n-2} & a^{n-2}\\ & & & & \\ a-n+1 & a-n+2 & & a-1 & a\\ 1 & 1 & & 1 & 1\end{vmatrix}$$

$$D_n=\begin{vmatrix} (a-n+1)^{n-1} & (a-n+2)^{n-1} & & (a-1)^{n-1} & a^{n-1} \\ (a-n+1)^{n-2} & (a-n+2)^{n-2} & & (a-1)^{n-2} & a^{n-2} \\ & & & & \\ a-n+1 & a-n+2 & & a-1 & a \\ 1 & 1 & & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

解：显然该题与范德蒙行列式很相似，但还是有所不同，所以先利用行列式的性质把它化为范德蒙行列式的类型。

先将的第 n 行依次与第 n-1 行，n-2 行，…, 2 行，1 行对换，再将得到到的新的行列式的第 n 行与第 n-1 行，n-2 行，…, 2 行对换，继续仿此作法，直到最后将第 n 行与第 n-1 行对换，这样，共经过（n-1）+（n-2）+…+2+1=n（n−1）/2 次行对换后，得到

$$D_n=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\begin{vmatrix} 1 & 1 & & 1 & 1 \\ a-n+1 & a-n+2 & & a-1 & a \\ & & & & \\ (a-n+1)^{n-2} & (a-n+2)^{n-2} & & (a-1)^{n-2} & a^{n-2} \\ (a-n+1)^{n-1} & (a-n+2)^{n-1} & & (a-1)^{n-1} & a^{n-1} \end{vmatrix}$$

上式右端的行列式已是范德蒙行列式，故利用范德蒙行列式的结果得：

$$|\lambda E_n-AB|=\lambda^{n-m}|\lambda E_m-BA|$$

$$D_n=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\prod_{1\le j<i\le n}[(a-n+i)-(a-n+j)]=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\prod_{1\le j<i\le n}(i-j)$$

5.消去法求三对角线型行列式的值

例 6 求 n 阶三对角线型行列式的值：

$$D_n=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} \qquad (1)$$

D_n 的构造是：主对角线元全为 2，主对角线上方第一条次对角线与下方第一条次对角线的元全为 1，其余的元全为 0。

解 用消去法，把 D_n 中主对角线下方第一条次对角线的元 1 全部消成 0：首先从第二行减去第一行的 $\frac{1}{2}$ 倍，于是第二行变为

$0,\ 2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2},\ 1,\cdots,0$

其次从第三行减去第二行（指新的第二行，以下同）的 $\frac{2}{3}$ 倍，则第三行变为

$0,\ ,0,\ 2-\frac{2}{3}=\frac{4}{3},\ 1,\ 0,\cdots,0$

再从第四行减去第三行的 $\frac{3}{4}$ 倍，则第四行变为

$0,\ 0,\ 0,\ 2-\frac{3}{4}=\frac{5}{4},\ 1,\ 0,\cdots,0$

类似地做下去，直到第 n 行减去第 $n-1$ 行的 $\frac{n-1}{n}$ 倍，则第 n 行变为

$0,\ 0,\cdots,0,\ 2-\frac{n-1}{n}=\frac{n+1}{n}$

最后所得的行列式为

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{n+1}{n} \end{vmatrix} \qquad (2)$$

上面的行列式是三角型行列式，它的主对角线元顺次为

$2,\ \frac{3}{2},\ \frac{4}{3},\cdots,\frac{n+1}{n}$ 93）

又主对角线下方的元全为 0。故 D_n 的值等于（3）中各数的连乘积，即 $D_n=n+1$。

注 3 一般的三对角线型行列式

$$\begin{vmatrix} a_1 & c_1 & 0 & \cdots & 0 \\ b_1 & a_2 & c_2 & \cdots & 0 \\ 0 & b_2 & a_3 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & c_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix} \qquad (4)$$

也可以按上述消去法把次对角线元 $b_2,b_3,\cdots,b_n$ 全部消去，得到一个三角型行列式，它的值等于该三角型行列式的主对角线元的连乘积。

4．数学归结法

例 5 计算行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} x+y & xy & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & x+y & xy & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x+y & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x+y & xy \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & x+y \end{vmatrix}$$

解：

$D_1=x+y$

$D_2=x^2+xy+y^2$

$D_3=x^3+x^2y+xy^2+y^3$

猜测：$D_n=x^n+x^{n-1}y+\cdots+xy^{n-1}+y^n$

证明

（1）n = 1, 2, 3 时，命题成立。假设 $n\leqslant k-1$ 时命题成立,考察 n=k 的情形：

$$D_k=\begin{vmatrix} x+y & xy & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & x+y & xy & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x+y & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x+y & xy \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & x+y \end{vmatrix}$$

$$=(x+y)D_{k-1}-xy\begin{vmatrix} 1 & xy & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x+y & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & x+y & xy \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & x+y \end{vmatrix}$$

$=(x+y)D_{k-1}-xyD_{k-2}$

$D_{k-1}=x^{k-1}+x^{k-2}y+\cdots+xy^{k-2}+y^{k-1}$

$D_{k-2}=x^{k-2}+x^{k-3}y+\cdots+xy^{k-3}+y^{k-2}$

$D_k=(x+y)D_{k-1}-xyD_{k-2}$

$=(x+y)(x^{k-1}+x^{k-2}y+\cdots+xy^{k-2}+y^{k-1})$

$\quad -xy(x^{k-2}+x^{k-3}y+\cdots+xy^{k-3}+y^{k-2})$

$=x^k+x^{k-1}y+\cdots+xy^{k-1}+y^k$

故命题对一切*自然数* n 成立。