第二章　矩阵

1.矩阵易错运算法则：A・B=推不出 A=0 或 B=0

矩阵相乘不满足交换律、消去率

★只有当 A、B 均为 n 阶对角矩阵时，才有 AB=BA

$(AB)^k=A(BA)^{k-1}B$　　　$(\lambda A)^k=\lambda^k A^k$

★只有当 AB=BA 时，才有 $(AB)^m=A^mB^m$

$(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$

$(A-B)(A+B)=A^2-B^2$

$(A+B)^m$用类似二项式定理那样展开

2.反对称矩阵对角线全为 0

奇数阶反对称矩阵的行列式为零

3.$|A^T|=|A|$　　　$|kA|=k^n|A|$

$|AB|=|A||B|=|BA|\Rightarrow|A_1A_2\cdots A_n|=|A_1||A_2|\cdots|A_n|$

$(A^T)^{-1}=(A^{-1})^T$　　　$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$

4．①★$AA^*=|A|I$★

②$(A^*)^T=(A^T)^*$

③$(A^*)^{-1}=(A^{-1})^*=\frac{A}{|A|}$

④$|A^*|=|A|^{n-1}$

⑤$(A^*)^*=|A|^{n-2}A$

⑥$(AB)^*=B^*A^*$

⑦$(kA)^*=k^{n-1}|A|A^{-1}=k^{n-1}A^*$

⑧$|A^{-1}|=|A|^{-1}$

5.规定：$A^0=E$　　$A^mA^n=A^{m+n}$　　$A^{-k}=(A^{-1})^k$　　$(A^m)^n=A^{mn}$

6.分块矩阵：①转置：将它的行列式依次互换，同时将各子块转置

②乘法：$AB=\begin{bmatrix}C_{11} & \ldots C_{1t}\\ \ldots & \ldots\\ C_{s1} & \ldots C_{st}\end{bmatrix}$，$C_{ij}=\sum_{k=1}^{r}A_iB_{kj}$　（注：划分 A 的纵线的位置与划分 B 的横线的位置对应一致）

③分块对角矩阵：<1>若 $A=\begin{bmatrix}A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ldots & \\ & & & A_s\end{bmatrix}$，则 $A^{-1}=\begin{bmatrix}A_1^{-1} & & & \\ & A_2^{-1} & & \\ & & \ldots & \\ & & & A_s^{-1}\end{bmatrix}$

<2>若 $A=\begin{bmatrix} & & & A_1\\ & & A_2 & \\ & \ldots & & \\ A_s & & & \end{bmatrix}$，则 $A^{-1}=\begin{bmatrix} & & & A_s^{-1}\\ & & \ldots & \\ & A_2^{-1} & & \\ A_1^{-1} & & & \end{bmatrix}$

7.矩阵的秩：r（A）

A 可逆⇔r（A）=n⇔det（A）≠0⇔A 满秩

秩标准型=$\begin{bmatrix}2r & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$

$$\begin{cases} p \text{ 为 } m \text{ 阶满秩矩阵，} Q \text{ 为 } n \text{ 阶满秩矩阵} \\ \qquad A_{mxn}\text{：} r(PAQ) = r(A) \end{cases}$$

方阵 A 可逆⇔A 可以表示为若干个初等矩阵的乘积

→ 通过若干次初等变换化成同阶单位矩阵

初等行变换：$[A|I] \rightarrow [I|A^{-1}]$

$[I|B] \rightarrow [I|A^{-1}B]$

$r(A_{mxn}) = r > 0 \qquad PAQ = \begin{bmatrix} Ir & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{mxn}$

存在列满秩 G_{mxr}，行满秩 H_{rxn}

$A=GH$ → 满秩分解