第一章 行列式

一、行列式的定义及性质

1. 定义

定义 1.1.1（n 阶行列式） n 阶行列式是由 n^2 个数 $a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$ 排成 n 行、n 列的算式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \tag{1.1.7}$$

可简记成 $\det(a_{ij})_{n\times n}$ 或 $\det(a_{ij})$，并用它来表示一个数. 当 $n=1$ 时，规定

$$D=|a_{11}| \xlongequal{\text{def}} a_{11}$$

（注意不要把 1 阶行列式 $|a_{11}|$ 与 a_{11} 的绝对值相混淆）. 当 $n=2,3,\cdots$ 时，用以下公式递归地定义 n 阶行列式的值为

$$\boxed{D \xlongequal{\text{def}} a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\cdots+a_{1n}A_{1n}=\sum_{j=1}^{n} a_{1j}A_{1j} ①}, \tag{1.1.8}$$

其中，$A_{1j}=(-1)^{1+j}M_{1j}$，而 M_{1j} 是删去 D 中第 1 行元素和第 j 列元素后由剩余元素按照它们原来的相对次序所形成的 $n-1$ 阶行列式，即

$$M_{1j}=\begin{vmatrix} a_{21} & \cdots & a_{2,j-1} & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & \cdots & a_{3,j-1} & a_{3,j+1} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad j=1,2,\cdots,n.$$

定义 1.1.2（余子式与代数余子式） 在 n 阶行列式 $D=\det(a_{ij})$ 中，称删去 a_{ij} 所在的第 i 行元素和第 j 列元素后由剩余元素按照它们原来的相对次序所形成的 $n-1$ 阶行列式为 a_{ij} 的**余子式**，记为 M_{ij}，而称

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$$

为 a_{ij} 的**代数余子式**.

性质 1.1.3 行列式 D 等于它的任一行各元素分别与其对应的代数余子式的乘积之和，即

$$D=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}=\sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij}, \quad i=1,2,\cdots,n. \tag{1.1.10}$$

并称(1.1.10)式为**行列式按第 i 行展开的公式**.

2. 性质

性质 1.1.1 行列式与它的转置行列式相等，即 $D=D^{\mathrm{T}}$.

性质 1.1.2 互换行列式两列的位置，行列式的值反号.

性质 1.1.4 若行列式某行的各元素有公因子 k，则可将 k 提到行列式符号外边来(或者说，用一个数 k 去乘行列式，就等于用 k 去乘行列式某行的每个元素)，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}. \tag{1.1.12}$$

性质 1.1.5 若行列式某行的每个元素都是两个数的和，则可将此行列式写成两个行列式的和：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+b_{i1} & a_{i2}+b_{i2} & \cdots & a_{in}+b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}. \tag{1.1.13}$$

以下这个尤其重要

性质 1.1.7 把行列式某行的 k 倍加到另一行上去(指某行每个元素乘以常数 k 后加到另一行的对应元素上去)，行列式的值不变，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1}+ka_{i1} & a_{j2}+ka_{i2} & \cdots & a_{jn}+ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}. \tag{1.1.14}$$

“把行列式第 i 行的 k 倍加到第 j 行上去”也说成“行列式的第 j 行加上第 i 行的 k 倍”，注意在这个变换中，只有第 j 行变了，第 i 行没有改变.

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{kj} = \begin{cases} D, & 当\ k = i\ 时, \\ 0, & 当\ k \neq i\ 时. \end{cases}$$

二、行列式的计算

1. 化上三角行列式法

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn},$$

即下三角形行列式的值等于它的主对角线元素之积.

例 1.2.2　计算行列式

$$D=\begin{vmatrix}3&-3&7&1\\1&-1&3&1\\4&-5&10&3\\2&-4&5&2\end{vmatrix}.$$

2. 处理绝大多数数字相同的有效方法——通减法，通加法，升阶法

例 1.2.3　计算 n 阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix}a&b&b&\cdots&b\\b&a&b&\cdots&b\\b&b&a&\cdots&b\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\b&b&b&\cdots&a\end{vmatrix}.$$

3. 范德蒙行列式

例 1.2.5　证明：$n(n\geqslant 2)$ 阶 Vandermonde（范德蒙德）行列式

$$D_n=\begin{vmatrix}1&1&\cdots&1\\a_1&a_2&\cdots&a_n\\a_1^2&a_2^2&\cdots&a_n^2\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_1^{n-1}&a_2^{n-1}&\cdots&a_n^{n-1}\end{vmatrix}=\prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(a_i-a_j),\qquad(1.2.1)$$

其中“$\prod$”为连乘号，$\prod\limits_{1\leqslant j<i\leqslant n}(a_i-a_j)$ 表示所有的形如 (a_i-a_j) $(1\leqslant j<i\leqslant n)$ 的因子的乘积.

注意乘积的顺序！

另注：对于有许多元素相等的行列式，一般采用所有行减去或加上同一行；
对

4. 数学归纳法

例 1.2.7　计算 5 阶行列式

$$D_5=\begin{vmatrix}2&-1&0&0&0\\-1&2&-1&0&0\\0&-1&2&-1&0\\0&0&-1&2&-1\\0&0&0&-1&2\end{vmatrix}.$$

5. 其他结论

例 1.2.6　证明：

$$D=\begin{vmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1n}&c_{11}&\cdots&c_{1m}\\\vdots&&\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&\cdots&a_{nn}&c_{n1}&\cdots&c_{nm}\\0&\cdots&0&b_{11}&\cdots&b_{1m}\\\vdots&&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&\cdots&0&b_{m1}&\cdots&b_{mm}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1n}\\\vdots&&\vdots\\a_{n1}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}b_{11}&\cdots&b_{1m}\\\vdots&&\vdots\\b_{m1}&\cdots&b_{mm}\end{vmatrix}.$$

(1.2.2)

三、克莱姆法则

定理 1.3.1（Cramer 法则） 对于由 n 个方程、n 个未知量组成的线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n, \end{cases} \tag{1.3.1}$$

其中 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 为未知量；a_{ij} 为第 i 个方程中未知量 x_j 的系数，$i, j = 1, 2, \cdots, n$；$b_1, \cdots, b_n$ 为常数项，如果它的系数行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0,$$

则方程组（1.3.1）有惟一解

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, x_2 = \frac{D_2}{D}, \cdots, x_n = \frac{D_n}{D}. \tag{1.3.2}$$

其中，D_j 是将 D 的第 j 列元素 $a_{1j}, a_{2j}, \cdots, a_{nj}$ 依次用方程组右端的常数项 $b_1, b_2, \cdots, b_n$ 替换后所得到的 n 阶行列式，即

$$D_j = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,j-1} & b_2 & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad j = 1, 2, \cdots, n.$$

对于一个线性方程组，当它的常数项不全为零时，称它为**非齐次线性方程组**；当它的常数项全为零时，称它为**齐次线性方程组**.

对于任意一个齐次线性方程组

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = 0, \quad i = 1, 2, \cdots, m, \tag{1.3.3}$$

$x_1 = 0, x_2 = 0, \cdots, x_n = 0$ 一定是它的解，称这个解为齐次线性方程组（1.3.3）的**零解**（或称为**平凡解**）. 如果 $x_1 = c_1, x_2 = c_2, \cdots, x_n = c_n$ 也是方程组（1.3.3）的一个解，且常数 $c_1, c_2, \cdots, c_n$ 不全为零，则称这个解为方程组（1.3.3）的一个**非零解**（或称为**非平凡解**）. 齐次线性方程组总有零解，但不一定有非零解. 如果齐次线性方程组没有非零解，就说它只有零解.

推论 1.3.1 对于由 n 个方程、n 个未知量组成的齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = 0, \end{cases} \tag{1.3.4}$$

如果它的系数行列式 $D=\det(a_{ij})\neq 0$,则齐次线性方程组(1.3.4)只有零解.

推论 1.3.2① 如果齐次线性方程组(1.3.4)有非零解,则它的系数行列式必为零.

3.练习

(1) 若 n 阶行列式 $D=0$,则

(A) D 中必有一行(列)元素全为零.

(B) D 中必有两行(列)的元素对应成比例.

(C) 以 D 为系数行列式的非齐次线性方程组必有惟一解.

(D) 以 D 为系数行列式的齐次线性方程组必有非零解. [ ]

另论：行列式为 0 的线性方程组，只可能无解或有无穷多组解。

推论：行列式为 0 的其次线性方程组必有无穷多组解。

(2) 设 A_{ij} 为 $D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 6 & 1 \\ 5 & 6 & 7 & 9 \\ 6 & 8 & 9 & 5 \end{vmatrix}$ 的 (i,j) 元素的代数余子式,则 $A_{31}+2A_{32}+3A_{33}+4A_{34}=$

(A) 0. (B) 1. (C) -1. (D) 16. [ ]

3. 设 M_{ij} 为行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 8 & 9 & 8 \\ 3 & 5 & 7 & 2 \\ 5 & 4 & 3 & 5 \\ 5 & 6 & 5 & 4 \end{vmatrix}$ 的 (i,j) 元素的余子式,试计算 $M_{13}+2M_{23}+5M_{33}$.

(2) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}=(a+b+c)(b-a)(c-a)(c-b)$;

第二章 矩阵

1. 矩阵的运算

矩阵的数乘运算满足下列运算规律(其中 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 为任意 $m\times n$ 矩阵, k, l 为任意常数):

(1) $1\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}$;

(2) $k(l\boldsymbol{A})=(kl)\boldsymbol{A}$;　　　(结合律)

(3) $(k+l)\boldsymbol{A}=k\boldsymbol{A}+l\boldsymbol{A}$;　　　(分配律)

(4) $k(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=k\boldsymbol{A}+k\boldsymbol{B}$.　　　(分配律)

定义 2.1.5(矩阵乘法)　设矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times s}, \boldsymbol{B}=(b_{ij})_{s\times n}$, 规定 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的乘积为矩阵 $\boldsymbol{C}=(c_{ij})_{m\times n}$, 记为 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{C}$, 其中

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{is}b_{sj}=\sum_{k=1}^{s}a_{ik}b_{kj},\quad i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n. \tag{2.1.5}$$

即 $\boldsymbol{AB}$ 的 (i,j) 元素为 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行各元素分别与 $\boldsymbol{B}$ 的第 j 列对应元素的乘积之和.

例 2.1.7(线性方程组与矩阵)　在中学代数中讨论过 2 元及 3 元线性方程组,但在自然科学和工程技术中所遇到的线性方程组,其未知量个数可能更多,而且方程个数与未知量个数也不一定相等.因此需要讨论一般的线性方程组.由 m 个方程、n 个未知量组成的线性方程组(称为一个 $m\times n$ 线性方程组)的一般形式是

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m. \end{cases} \tag{2.1.15}$$

利用矩阵相等和矩阵乘法的定义,可将方程组(2.1.15)简写成矩阵形式

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

或

$$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}, \tag{2.1.16}$$

其中,矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$, 并称 $\boldsymbol{A}$ 为方程组(2.1.15)的**系数矩阵**, $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{b}$ 分别是由未知量和方程组右端的常数项组成的列向量:

$$\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix},\qquad \boldsymbol{b}=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}.$$

例 2.1.6（线性变换与矩阵） 设有由变量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 到变量 $y_1,y_2,\cdots,y_m$ 的变换

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n, \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_m = a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n, \end{cases} \tag{2.1.11}$$

其中 $a_{ij}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$ 为常数.由矩阵相等和矩阵乘法的定义,可将变换(2.1.11)写成矩阵形式

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

或

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}, \tag{2.1.12}$$

其中,矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$,$\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}$ 分别为 n 维列向量和 m 维列向量:

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}.$$

矩阵的转置满足下列运算规律:

(1) $(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$;

(2) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$;

(3) $(k\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}}=k\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$($k$ 为数);

(4) $(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$.

例 2.1.9 设

$$\boldsymbol{\alpha} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{A} = \boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}},$$

求 $\boldsymbol{A}^n(n=2,3,\cdots)$.

解法 2 注意到

$$\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=\begin{bmatrix}3 & 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1\\2\\3\end{bmatrix}=-3+2+3=2,$$

利用矩阵乘法满足结合律,得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}^{n}&=(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}})(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}})\cdots(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}})=\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha})\cdots(\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha})\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\\&=\boldsymbol{\alpha}2^{n-1}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}=2^{n-1}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}=2^{n-1}\begin{bmatrix}-3 & -1 & -1\\6 & 2 & 2\\9 & 3 & 3\end{bmatrix},n=2,3,\cdots.\end{aligned}$$ ▌

方阵的行列式满足下列运算规律(设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均为 n 阶方阵,k 为数):

(1) $\det(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})=\det(\boldsymbol{A})$;

(2) $\det(k\boldsymbol{A})=k^{n}\det(\boldsymbol{A})$;

(3) $\det(\boldsymbol{AB})=\det(\boldsymbol{A})\cdot\det(\boldsymbol{B})$.

3. 已知两个线性变换

$$\begin{cases}x_1=y_1+y_2+y_3,\\x_2=2y_1-y_2,\\x_3=4y_1+5y_3;\end{cases}\qquad\begin{cases}y_1=-3z_1+z_2,\\y_2=4z_1-z_2,\\y_3=z_1+z_2.\end{cases}$$

求由它们复合所得到的从 z_1,z_2 到 x_1,x_2,x_3 的线性变换的矩阵.

2. 逆矩阵

定义 2.2.1(逆矩阵) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵,如果存在 n 阶方阵 $\boldsymbol{B}$,使得

$$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{I},\tag{2.2.1}$$

① 为了书写方便,本书中常常用“$P\Leftrightarrow Q$”来表示“P 成立的充要条件是 Q 成立”,或“P 成立当且仅当 Q 成立”,或“P 与 Q 等价”.

则称方阵 $\boldsymbol{A}$ 是**可逆的**(或称为**非奇异的**),并称方阵 $\boldsymbol{B}$ 为方阵 $\boldsymbol{A}$ 的**逆矩阵**或**逆阵**,记为 $\boldsymbol{A}^{-1}$,即 $\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{B}$.

不存在逆阵的方阵也称为**奇异矩阵**.

定义 2.2.2(伴随矩阵) 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$ 为 $n(n\geqslant2)$ 阶方阵，$\det(\boldsymbol{A})$ 的元素 a_{ij} 的代数余子式为 $A_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$，则称以 A_{ji} 为 (i,j) 元素的 n 阶方阵为 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，记为 $\boldsymbol{A}^*$（或记为 $\mathrm{adj}(\boldsymbol{A})$），即

$$\boldsymbol{A}^*=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}.$$

定理 2.2.1 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $n(n\geqslant2)$ 阶方阵，则成立

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*=\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}=\det(\boldsymbol{A})\boldsymbol{I}. \tag{2.2.2}$$

定理 2.2.2(方阵可逆的充要条件) $n(n\geqslant2)$ 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆的充要条件是 $\det(\boldsymbol{A})\neq0$. 且当 $\boldsymbol{A}$ 可逆时，有

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\frac{1}{\det(\boldsymbol{A})}\boldsymbol{A}^*. \tag{2.2.4}$$

逆矩阵的基本性质 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为同阶可逆方阵，常数 $k\neq0$，则有：

(1) $\boldsymbol{A}^{-1}$ 可逆，且 $(\boldsymbol{A}^{-1})^{-1}=\boldsymbol{A}$；

(2) $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 可逆，且 $(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{-1}=(\boldsymbol{A}^{-1})^{\mathrm{T}}$；

(3) $k\boldsymbol{A}$ 可逆，且 $(k\boldsymbol{A})^{-1}=\frac{1}{k}\boldsymbol{A}^{-1}$；

(4) $\boldsymbol{AB}$ 可逆，且 $(\boldsymbol{AB})^{-1}=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$；

(5) $\det(\boldsymbol{A}^{-1})=\frac{1}{\det(\boldsymbol{A})}$.

要把这个和转置的记清楚!

此外，要会推转置，逆矩阵，伴随矩阵复合的计算式：

例 2.19 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶 $(n\geqslant2)$ 可逆矩阵，证明：

(1) $(\boldsymbol{A}^*)^{-1}=(\boldsymbol{A}^{-1})^*$； (2) $(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^*=(\boldsymbol{A}^*)^{\mathrm{T}}$； (3) $(k\boldsymbol{A})^*=k^{n-1}\boldsymbol{A}^*$（$k$ 为非零常数）.

证 这里主要是利用可逆矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 与 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^*$ 的关系，即

$$\boldsymbol{A}^{-1}=|\boldsymbol{A}^{-1}|\boldsymbol{A}^*;\quad \boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}.$$

(1) $(\boldsymbol{A}^*)^{-1}=(|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1})^{-1}=\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}=|\boldsymbol{A}^{-1}|\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{A}^{-1})^*$.

(2) $(\boldsymbol{A}^*)^{\mathrm{T}}=(|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1})^{\mathrm{T}}=|\boldsymbol{A}|(\boldsymbol{A}^{-1})^{\mathrm{T}}=|\boldsymbol{A}|(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{-1}=|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{-1}=(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^*$.

(3) 利用 $\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}$ 得

$$(k\boldsymbol{A})^*=|k\boldsymbol{A}|(k\boldsymbol{A})^{-1}=k^n|\boldsymbol{A}|\frac{1}{k}\boldsymbol{A}^{-1}=k^{n-1}|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}=k^{n-1}\boldsymbol{A}^*.$$

这里需要指出，(2)、(3) 的结论，当 $\boldsymbol{A}$ 不可逆时也是成立，这需要用伴随阵的定义来证明.

4° $(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{-1}=(\boldsymbol{A}^{-1})^{\mathrm{T}}$；

3. 设 A 为 n 阶可逆矩阵($n \geq 2$)，I 为 n 阶单位矩阵，则 $\left(\left(A^*\right)^*\right)^{-1} =$（　　）

A. $|A|^{n-1} I$　　B. $|A|^{1-n} I$　　C. $|A|^{n-1} A^*$　　D $|A|^{1-n} A^*$

推论 2.2.1 如果 $n(n \geqslant 2)$ 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的行列式 $\det(\boldsymbol{A}) \neq 0$,则

$$\det(\boldsymbol{A}^*) = [\det(\boldsymbol{A})]^{n-1}. \tag{2.2.3}$$

例 2.2.5 设 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}-4\boldsymbol{I}=\boldsymbol{O}$,证明 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I}$ 可逆,并求 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})^{-1}$.

解 因为

$$\boldsymbol{O} = \boldsymbol{A}^2 + \boldsymbol{A} - 4\boldsymbol{I} = (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{I})(\boldsymbol{A} + 2\boldsymbol{I}) - 2\boldsymbol{I},$$

故有

$$(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{I})(\boldsymbol{A} + 2\boldsymbol{I}) = 2\boldsymbol{I},$$

即

$$(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{I})\left[\frac{1}{2}(\boldsymbol{A} + 2\boldsymbol{I})\right] = \boldsymbol{I}.$$

由推论 2.2.2 即知 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I}$ 可逆,且 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})^{-1}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{I})$. ▌

(1) 若 2 阶方阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ 的行列式 $\det(\boldsymbol{A})=ad-bc\neq 0$,证明:

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

10. 设 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 满足 $2\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}-4\boldsymbol{I}$,其中 $\boldsymbol{I}$ 是 3 阶单位矩阵.

(1) 证明:$\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I}$ 可逆;　　(2) 若 $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$,求矩阵 $\boldsymbol{A}$.

3. 分块矩阵

3. 分块矩阵的乘法

设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为可相乘的矩阵,分块成

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12} & \cdots & \boldsymbol{A}_{1r}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \boldsymbol{A}_{s1} & \boldsymbol{A}_{s2} & \cdots & \boldsymbol{A}_{sr}\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{B}_{11} & \boldsymbol{B}_{12} & \cdots & \boldsymbol{B}_{1t}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \boldsymbol{B}_{r1} & \boldsymbol{B}_{r2} & \cdots & \boldsymbol{B}_{rt}\end{bmatrix},$$

其中 $\boldsymbol{A}_{i1},\boldsymbol{A}_{i2},\cdots,\boldsymbol{A}_{ir}$ 的列数分别等于 $\boldsymbol{B}_{1j},\boldsymbol{B}_{2j},\cdots,\boldsymbol{B}_{rj}$ 的行数($i=1,2,\cdots,s;j=1,2,\cdots,t$),则有

$$\boldsymbol{AB}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{C}_{11} & \boldsymbol{C}_{12} & \cdots & \boldsymbol{C}_{1t}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \boldsymbol{C}_{s1} & \boldsymbol{C}_{s2} & \cdots & \boldsymbol{C}_{st}\end{bmatrix},$$

其中

$$\boldsymbol{C}_{ij}=\sum_{k=1}^{r}\boldsymbol{A}_{ik}\boldsymbol{B}_{kj},\quad i=1,2,\cdots,s;j=1,2,\cdots,t.$$

一般地,有

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12} & \cdots & \boldsymbol{A}_{1t}\\ \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_{22} & \cdots & \boldsymbol{A}_{2t}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \boldsymbol{A}_{s1} & \boldsymbol{A}_{s2} & \cdots & \boldsymbol{A}_{st}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_{11}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{A}_{21}^{\mathrm{T}} & \cdots & \boldsymbol{A}_{s1}^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{A}_{12}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{A}_{22}^{\mathrm{T}} & \cdots & \boldsymbol{A}_{s2}^{\mathrm{T}}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \boldsymbol{A}_{1t}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{A}_{2t}^{\mathrm{T}} & \cdots & \boldsymbol{A}_{st}^{\mathrm{T}}\end{bmatrix},$$

即分块矩阵的转置是将它的行列依次互换,同时将各子块转置.

容易将(2.3.2)式推广,即当方阵 $\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\cdots,\boldsymbol{A}_m$ 都可逆时,就有

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_1 & & & \\ & \boldsymbol{A}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boldsymbol{A}_m\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_1^{-1} & & & \\ & \boldsymbol{A}_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boldsymbol{A}_m^{-1}\end{bmatrix}.$$

例 2.3.3 设矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times s},\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{s\times n}$,若记 $\boldsymbol{B}$ 的第 j 个列向量为

$$\boldsymbol{B}_j=\begin{bmatrix}b_{1j}\\ b_{2j}\\ \vdots\\ b_{sj}\end{bmatrix},\quad j=1,2,\cdots,n,$$

则 $\boldsymbol{B}$ 可以写成

$$\boldsymbol{B}=[\boldsymbol{B}_1\quad \boldsymbol{B}_2\quad \cdots\quad \boldsymbol{B}_n],$$

称上式为 $\boldsymbol{B}$ 的按列分块表示.证明:$\boldsymbol{AB}=[\boldsymbol{AB}_1\quad \boldsymbol{AB}_2\quad \cdots\quad \boldsymbol{AB}_n]$,即 $\boldsymbol{AB}$ 的第 j 列等于 $\boldsymbol{AB}_j(j=1,2,\cdots,n)$.

例 2.3.4 设 $\boldsymbol{\alpha}_j(j=1,2,3)$ 均为 3 维列向量，方阵 $\boldsymbol{A}=[\boldsymbol{\alpha}_1\quad\boldsymbol{\alpha}_2\quad\boldsymbol{\alpha}_3]$，$\boldsymbol{B}=$

$[\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2\quad 2\boldsymbol{\alpha}_2+3\boldsymbol{\alpha}_3\quad 3\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1]$，已知 $\det(\boldsymbol{A})=a$，求 $\det(\boldsymbol{B})$.

解 由矩阵乘法可得

$$\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2=[\boldsymbol{\alpha}_1\quad\boldsymbol{\alpha}_2\quad\boldsymbol{\alpha}_3]\begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix}=\boldsymbol{A}\begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix},$$

同理有

$$2\boldsymbol{\alpha}_2+3\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{A}\begin{bmatrix}0\\2\\3\end{bmatrix},3\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{A}\begin{bmatrix}1\\0\\3\end{bmatrix},$$

于是再由例 2.3.3 可得

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}\begin{bmatrix}1&0&1\\2&2&0\\0&3&3\end{bmatrix}=\boldsymbol{AP},\text{其中 }\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}1&0&1\\2&2&0\\0&3&3\end{bmatrix},$$

两端取行列式，得

$$\det(\boldsymbol{B})=\det(\boldsymbol{A})\cdot\det(\boldsymbol{P})=12a.\ \blacksquare$$

2. 设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 均为 3 维列向量，方阵 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，$B=(\alpha_1+2\alpha_2,2\alpha_2+3\alpha_3,3\alpha_3+\alpha_1)$，已知 $\det(A)=a$，求 $\det(B)$.

(4) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶矩阵，可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 按列分块为 $\boldsymbol{P}=[\boldsymbol{\alpha}_1\quad\boldsymbol{\alpha}_2\quad\boldsymbol{\alpha}_3]$，且有 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\begin{bmatrix}0&&\\&1&\\&&2\end{bmatrix}$，则 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2+3\boldsymbol{\alpha}_3)=$

(A) $\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2$.　(B) $2\boldsymbol{\alpha}_2+3\boldsymbol{\alpha}_3$.　(C) $2\boldsymbol{\alpha}_2+6\boldsymbol{\alpha}_3$.　(D) $2\boldsymbol{\alpha}_2+4\boldsymbol{\alpha}_3$.　[　]

注意这两种的区别与联系！

4. 初等变换及初等矩阵

定义 2.4.1(初等变换) 对矩阵施行的下列 3 种变换：

(1) 交换第 i 行与第 j 行的位置(记为 r_{ij})；

(2) 用非零数 k 乘矩阵的第 i 行(记为 $r_i(k)$)；

(3) 把矩阵第 i 行的 k 倍加到第 j 行上去(记为 $r_{ij}(k)$)

分别称为矩阵的第 1 种、第 2 种和第 3 种初等行变换,统称为矩阵的**初等行变换**.如果将上面的“行”都换成“列”,就是矩阵**初等列变换**的定义(对应地,分别将初等行变换记号中的字母“r”换成字母“c”,就是 3 种初等列变换的记号).矩阵的初等行变换和初等列变换统称为矩阵的**初等变换**.

定义 2.4.2(矩阵等价) 如果矩阵 $\boldsymbol{A}$ 经若干次初等行(列)变换变成了矩阵 $\boldsymbol{B}$,则称 **$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 行(列)等价**,或 **$\boldsymbol{A}$ 行(列)等价于 $\boldsymbol{B}$**,记为 $\boldsymbol{A}\cong\boldsymbol{B}$.矩阵行等价和矩阵列等价统称为**矩阵等价**.

定义 2.4.3(初等矩阵) 对单位矩阵只作 1 次初等变换所得到的矩阵,称为初等矩阵,或初等方阵.

因为初等行(列)变换只有 3 种,所以初等矩阵也只有 3 种,它们是：

(1) 互换单位矩阵 $\boldsymbol{I}$ 的第 i 行与第 j 行(或互换 $\boldsymbol{I}$ 的第 i 列与第 j 列)得初等矩阵(其中未写出的元素都是零,以下都如此)

$$\boldsymbol{P}_{ij}=\begin{array}{cl}\left[\begin{array}{ccccccccccc}
1 &&&&&&&&&& \\
& \ddots &&&&&&&&& \\
&& 1 &&&&&&&& \\
&&& 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 &&& \\
&&&& 1 &&&&&& \\
&&& \vdots && \ddots && \vdots &&& \\
&&&&&& 1 &&&& \\
&&& 1 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 &&& \\
&&&&&&&& 1 && \\
&&&&&&&&& \ddots & \\
&&&&&&&&&& 1
\end{array}\right] & \begin{array}{l} \\ \\ \\ \leftarrow \text{第 } i \text{ 行} \\ \\ \\ \\ \leftarrow \text{第 } j \text{ 行} \\ \\ \\ \\ \end{array} \\
\begin{array}{ccc} \uparrow & \qquad\qquad & \uparrow \\ \text{第 } i \text{ 列} & & \text{第 } j \text{ 列} \end{array} &
\end{array};$$

（2）用非零数 k 乘 $\boldsymbol{I}$ 的第 i 行（或用非零数 k 乘 $\boldsymbol{I}$ 的第 i 列）得初等矩阵

$$\begin{array}{cc}\boldsymbol{P}_i(k)=\begin{bmatrix}1&&&&&&\\&\ddots&&&&&\\&&1&&&&\\&&&k&&&\\&&&&1&&\\&&&&&\ddots&\\&&&&&&1\end{bmatrix} & \begin{matrix}\\ \\ \\ \leftarrow \text{第 } i \text{ 行；}\\ \\ \\ \\ \end{matrix}\\ \begin{matrix}\uparrow\\ \text{第 } i \text{ 列}\end{matrix} & \end{array}$$

（3）把 $\boldsymbol{I}$ 的第 i 行的 k 倍加到第 j 行上去（或把 $\boldsymbol{I}$ 的第 j 列的 k 倍加到第 i 列上去）得初等矩阵

$$\begin{array}{cc}\boldsymbol{P}_{ij}(k)=\begin{bmatrix}1&&&&&&\\&\ddots&&&&&\\&&1&&&&\\&&\vdots&\ddots&&&\\&&k&\cdots&1&&\\&&&&&\ddots&\\&&&&&&1\end{bmatrix} & \begin{matrix}\\ \\ \leftarrow \text{第 } i \text{ 行}\\ \\ \leftarrow \text{第 } j \text{ 行}\\ \\ \\ \end{matrix}\\ \begin{matrix}\uparrow \qquad\qquad \uparrow\\ \text{第 } i \text{ 列} \quad \text{第 } j \text{ 列}\end{matrix} & \end{array}$$

初等矩阵都是可逆的，且易验证

$$(\boldsymbol{P}_{ij})^{-1}=\boldsymbol{P}_{ij},\quad (\boldsymbol{P}_i(k))^{-1}=\boldsymbol{P}_i\left(\frac{1}{k}\right),\quad (\boldsymbol{P}_{ij}(k))^{-1}=\boldsymbol{P}_{ij}(-k),$$

用矩阵乘法表示 初等行变换	用矩阵乘法表示 初等列变换
$A \xrightarrow{r_{ij}} B$，则 $B = P_{ij}A$ $A \xrightarrow{r_i(k)} B$，则 $B = P_i(k)A$ $A \xrightarrow{r_{ij}(k)} B$，则 $B = P_{ij}(k)A$	$A \xrightarrow{c_{ij}} B$，则 $B = AP_{ij}$ $A \xrightarrow{c_i(k)} B$，则 $B = AP_i(k)$ $A \xrightarrow{c_{ji}(k)} B$，则 $B = AP_{ij}(k)$

考试时有时会考初等矩阵相关的问题：

4. $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{2018} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{2019} = (\quad)$

A. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ B. $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 6 & 5 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ C. $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 6 & 5 & 4 \\ 9 & 8 & 7 \end{bmatrix}$ D. $\begin{bmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

如果矩阵某一行的元素不全为零，则称该行为矩阵的**非零行**，否则称为**零行**.并称非零行中左起第 1 个非零元素为该行的**首非零元**.

定义 2.4.4（阶梯形矩阵） 如果一个矩阵满足下列两个条件，则称它为**行阶梯形矩阵**，简称为**阶梯形矩阵**：

（1）如果存在零行，则零行都在非零行的下边；

（2）在任意两个相邻的非零行中，下一行的首非零元都在上一行的首非零元的右边，即从上到下，各非零行的首非零元的列标随着行标的递增而严格增大.

如果一个矩阵满足下列两个条件，则称它为**简化行阶梯形矩阵**（或**行最简形**）：

（1）是阶梯形矩阵；

（2）每个首非零元都是 1，并且在每个首非零元所在的列中，除首非零元 1 以外的其他元素全都为零.

5. 矩阵的秩

定义 2.5.2（矩阵的秩） 如果矩阵 $A = O$，则称 A 的秩为零.如果 $A \neq O$，则称 A 中非零子式的最高阶数为 A 的秩，记为 $r(A)$，或秩(A).

上面的讨论表明，矩阵经初等变换后，秩不改变，或者说，等价的矩阵有相同的秩.这就提供了求矩阵秩的一般方法：**用初等变换将矩阵化成阶梯形矩阵，则阶梯形矩阵中非零行的个数即是所求矩阵的秩**.

例 2.5.3 设 $r(A_{m\times n})=r$. 证明:存在列满秩矩阵 $G_{m\times r}$ 和行满秩矩阵 $H_{r\times n}$,使 $A=GH$,其中 $r(G)=r(H)=r$.

证 由定理 2.5.2 知存在可逆矩阵 P,Q,使

$$PAQ=\begin{bmatrix} I_r & O \\ O & O \end{bmatrix}_{m\times n}=\begin{bmatrix} I_r \\ O \end{bmatrix}_{m\times r}\begin{bmatrix} I_r & O \end{bmatrix}_{r\times n}.$$

用 P^{-1} 左乘上式两端,用 Q^{-1} 右乘上式两端,得

$$A=P^{-1}\begin{bmatrix} I_r \\ O \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_r & O \end{bmatrix}Q^{-1}=GH,$$

其中 $G=P^{-1}\begin{bmatrix} I_r \\ O \end{bmatrix}$ 是 $m\times r$ 矩阵,且显然有 $r(G)=r$, $H=\begin{bmatrix} I_r & O \end{bmatrix}Q^{-1}$ 是 $r\times n$ 矩阵,且显然有 $r(H)=r$.

通常称 $A=GH$ 是 A 的一个**满秩分解**. ▍

定理 2.5.2 设 $r(A_{m\times n})=r>0$,则必存在 m 阶可逆方阵 P 和 n 阶可逆方阵 Q,使

$$PAQ=\begin{bmatrix} I_r & O \\ O & O \end{bmatrix}_{m\times n}, \tag{2.5.1}$$

其中 I_r 为 r 阶单位矩阵,并称(2.5.1)式右端的矩阵为矩阵 A 的**秩标准形**.

5. 证明:同型矩阵 $A_{m\times n}$ 与 $B_{m\times n}$ 等价 $\Leftrightarrow r(A)=r(B)$.

4. 设矩阵 $A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & a-3 & -2 & b \\ 3 & 2 & 1 & a & -1 \end{bmatrix}$,试讨论矩阵 A 的秩.

5. 设矩阵 $A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & -2 \\ 4 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & \mu & \lambda \end{bmatrix}$,讨论矩阵 A 的秩.

8. 设线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的增广矩阵为

$$\overline{\boldsymbol{A}}=[\boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{b}]=\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \lambda & 4 \\ -1 & \lambda & 1 & \lambda^{2} \\ 1 & -1 & 2 & -4 \end{array}\right],$$

求 $r(\boldsymbol{A})$ 及 $r(\overline{\boldsymbol{A}})$.

第三章 空间解析几何

1. 向量及其运算

定理 3.1.1 两个向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 共线的充要条件是存在不全为零的常数 k_1 和 k_2,使得

$$k_1\boldsymbol{a}+k_2\boldsymbol{b}=\mathbf{0}.$$

推论 3.1.1 在一条直线上取定一个非零向量 $\boldsymbol{e}_1$,则该直线上任一向量 $\boldsymbol{a}$ 必可由 $\boldsymbol{e}_1$ 惟一地表示为 $\boldsymbol{a}=x\boldsymbol{e}_1$,其中 x 为一个常数.

定理 3.1.1 和推论 3.1.1 的证明留给读者完成.

定理 3.1.2 3 个向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 共面的充要条件是存在不全为零的常数 k_1,k_2,k_3,使得

$$k_1\boldsymbol{a}+k_2\boldsymbol{b}+k_3\boldsymbol{c}=\mathbf{0}. \tag{3.1.3}$$

在直角坐标系$\{O;\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}\}$中,一个向量 $\boldsymbol{a}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$ 分别与 3 个基向量 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 的夹角(即分别与 x 轴、y 轴、z 轴正向之间的夹角)α,β,γ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 的**方向角**,方向角的余弦 $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 的**方向余弦**.显然,方向余弦完全确定了向量的方向.从图 3.1.16 可以看出

$$\begin{cases}\cos\alpha=\dfrac{x}{\|\boldsymbol{a}\|}=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\\ \cos\beta=\dfrac{y}{\|\boldsymbol{a}\|}=\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\\ \cos\gamma=\dfrac{z}{\|\boldsymbol{a}\|}=\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.\end{cases} \tag{3.1.14}$$

这就是**方向余弦的坐标表达式.**

对于 3 个向量 $\boldsymbol{a}=(x_1,y_1,z_1)$，$\boldsymbol{b}=(x_2,y_2,z_2)$，$\boldsymbol{c}=(x_3,y_3,z_3)$，由定理3.1.2，有

$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 共面$\Leftrightarrow$存在不全为零的常数 k_1,k_2,k_3，使得 $k_1\boldsymbol{a}+k_2\boldsymbol{b}+k_3\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$

$\Leftrightarrow$存在不全为零的常数 k_1,k_2,k_3，使得

$$\begin{cases} x_1k_1+x_2k_2+x_3k_3=0, \\ y_1k_1+y_2k_2+y_3k_3=0, \\ z_1k_1+z_2k_2+z_3k_3=0. \end{cases}$$

上面的方程组可看成是以 k_1,k_2,k_3 为未知量的 3×3 齐次线性方程组，它有非零解，故由 Cramer 法则的推论，得

$$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\text{ 共面}\Leftrightarrow\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}=0.$$

定义 3.1.3（正交射影向量和正交射影） 设向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 θ，定义向量

$$\mathrm{Proj}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b}=\|\boldsymbol{b}\|\cos\theta\,\boldsymbol{a}^{\circ} \tag{3.1.19}$$

为向量 $\boldsymbol{b}$ 在向量 $\boldsymbol{a}$ 上的**正交射影向量**，简称为**射影向量**.定义数值

$$(\boldsymbol{b})_{\boldsymbol{a}}=\|\boldsymbol{b}\|\cos\theta \tag{3.1.20}$$

为 $\boldsymbol{b}$ 在 $\boldsymbol{a}$ 上的**正交射影**（或**代数射影**），简称为**射影**.

定义 3.2.1（数量积） 设向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 θ，规定 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的数量积是一个数量，记为 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$，定义为

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\|\boldsymbol{a}\|\;\|\boldsymbol{b}\|\cos\theta. \tag{3.2.2}$$

由射影的定义（(3.1.20)式），$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的数量积也可以写成

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\|\boldsymbol{a}\|(\boldsymbol{b})_{\boldsymbol{a}}=\|\boldsymbol{b}\|(\boldsymbol{a})_{\boldsymbol{b}}. \tag{3.2.3}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}&=(a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k})\cdot(b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k})\\&=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z.\end{aligned} \tag{3.2.5}$$

写成坐标形式就是

$$(a_x,a_y,a_z)\cdot(b_x,b_y,b_z)=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z. \tag{3.2.6}$$

定义 3.2.2（向量积） 规定两个向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的向量积是一个向量，记为 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 的方向与 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 都垂直，且使 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 符合右手法则（如图 3.2.3 所示），$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 的模等于以 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 为邻边的平行四边形的面积，即 $\|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\|=\|\boldsymbol{a}\|\;\|\boldsymbol{b}\|\sin(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$.

向量积又叫**外积**或**叉积**.

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}.$$

定义 3.2.3(混合积) 规定 3 个向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 的混合积是一个数，它等于 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 先作向量积，然后再用 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 作数量积所得到的数，记成 $[\boldsymbol{a}\quad\boldsymbol{b}\quad\boldsymbol{c}]$，即 $[\boldsymbol{a}\quad\boldsymbol{b}\quad\boldsymbol{c}]=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$.

$$\begin{aligned}[\boldsymbol{a}\quad\boldsymbol{b}\quad\boldsymbol{c}] &= (\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c} \\ &= \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} c_x + \begin{vmatrix} a_z & a_x \\ b_z & b_x \end{vmatrix} c_y + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} c_z = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.\end{aligned}$$

(1) $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{a}=(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}$，即 $[\boldsymbol{a}\quad\boldsymbol{b}\quad\boldsymbol{c}]=[\boldsymbol{b}\quad\boldsymbol{c}\quad\boldsymbol{a}]=[\boldsymbol{c}\quad\boldsymbol{a}\quad\boldsymbol{b}]$；

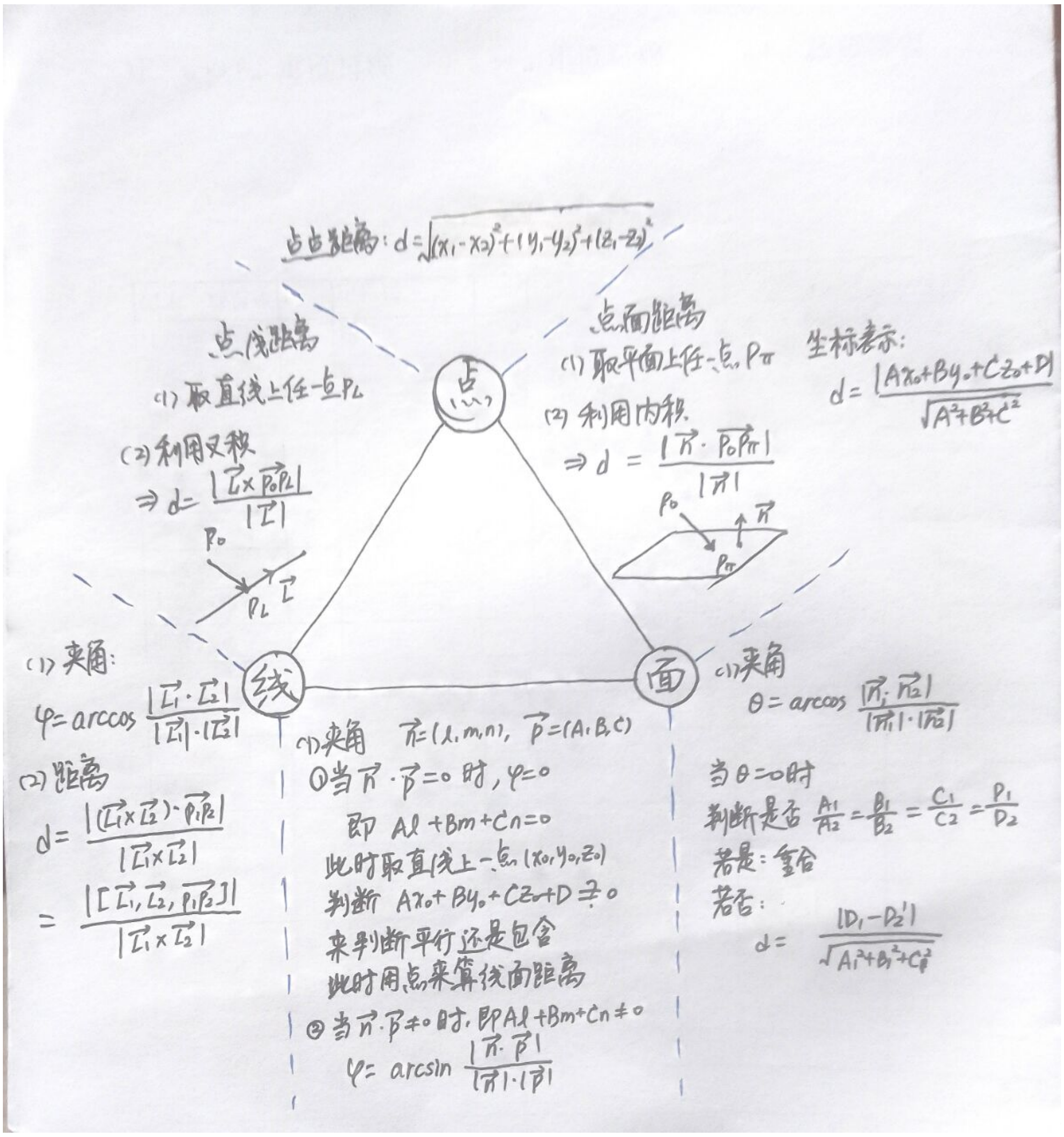
(2) 互换混合积中任意两个向量的位置，则混合积变号.例如，

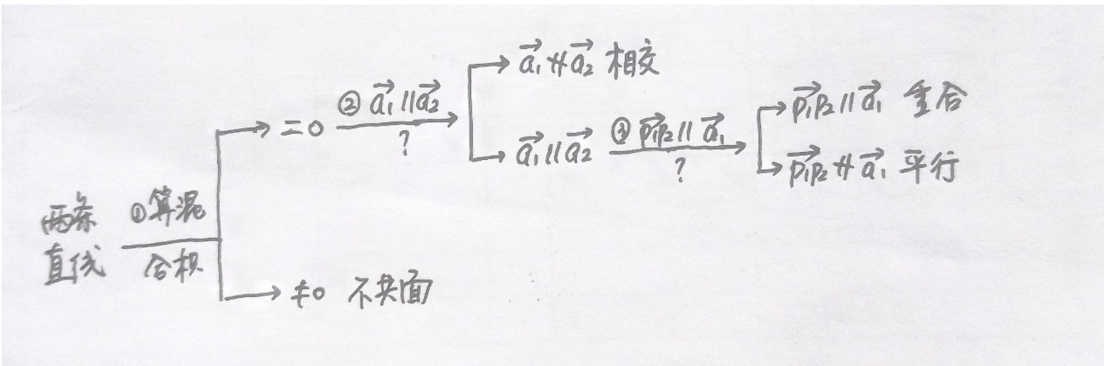
$$[\boldsymbol{b}\quad\boldsymbol{a}\quad\boldsymbol{c}]=-[\boldsymbol{a}\quad\boldsymbol{b}\quad\boldsymbol{c}].$$

2. 点，直线与平面

点，直线，平面的表示

- 直线
  - (1) 点向式：$\vec{p}-\vec{p_0}=u\vec{a}$
  - (2) 对称式：$\dfrac{x-x_0}{a_1}=\dfrac{y-y_0}{a_2}=\dfrac{z-z_0}{a_3}$
  - (3) 参数式：$\begin{cases} x=ua_1+x_0 \\ y=ua_2+y_0 \\ z=ua_3+z_0 \end{cases}$
  - (4) 两点式：$\vec{p}-\vec{p_1}=u(\vec{p_1}-\vec{p_2}) \Leftrightarrow \dfrac{x-x_1}{x_1-x_2}=\dfrac{y-y_1}{y_1-y_2}=\dfrac{z-z_1}{z_1-z_2}$
  - (5) 一般式：$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$ (当不好找直线上的点使用)
- 平面
  - (1) 点法式：$(\vec{p}-\vec{p_0})\cdot\vec{n}=0 \Leftrightarrow A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=D$
  - (2) 一般式：$Ax+By+Cz+D=0$ $\boxed{\text{缺谁平行于谁，不缺谁垂直于谁}}$
  - (3) 截距式：$\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$
  - (4) 参数式：$\vec{p}-\vec{p_0}=u\vec{a}+v\vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} x-x_0=ua_1+vb_1 \\ y-y_0=ua_2+vb_2 \\ z-z_0=ua_3+vb_3 \end{cases}$
  - (5) 三点式：即 $[\vec{p}-\vec{p_1},\vec{p_1}-\vec{p_2},\vec{p_2}-\vec{p_3}]=0$





3. 设有两条直线 $L_1:\begin{cases}x-y=3\\3x-y+z=1\end{cases}$ 和 $L_2:x+1=\frac{y-1}{-2}=\frac{z}{2}$，点 $M(1,0,-1)$.

(1)求 L_1 的对称式方程；(2)求点 M 到 L_1 的距离；(3)研究 L_1 与 L_2 的位置关系.

(6) 过点 $P_0(-3,5,9)$，且与直线 $L_1:\begin{cases} y=3x+5, \\ z=2x-3 \end{cases}$ 及 $L_2:\begin{cases} y=4x-7, \\ z=5x+10 \end{cases}$ 都相交.

4. 求过点 $P_0(-3,5,9)$ 且与直线 $L_1:\begin{cases} y=3x+5 \\ z=2x-3 \end{cases}$ 及 $L_2:\begin{cases} y=4x-7 \\ z=5x+10 \end{cases}$ 都相交的直线 L 的方程.

例 3.11 已知两直线的方程为：$L_1:\begin{cases} 2x-2y-z+1=0 \\ x+2y-2z-4=0 \end{cases}$，$L_2:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z}{-1}$.

(1) 证明二直线异面；

(2) 求它们之间的距离；

(3) 求此二直线的公垂线方程(即与它们垂直相交).

解 (1) 化 L_1 为对称式得

L_1: $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z+1}{2}$，因此取点 $M_1(0,1,-1)$ 及方向向量 $\boldsymbol{L}_1=(2,1,2)$，

对 L_2 同样取点 $M_2(1,-2,0)$ 及方向向量 $\boldsymbol{L}_1=(1,2,-1)$ 故

$\overrightarrow{M_1M_2}\cdot(\boldsymbol{L}_1\times\boldsymbol{L}_2)=\begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix}=-14\neq 0$ 知 L_1 和 L_2 异面.

(2) $\boldsymbol{L}_1\times\boldsymbol{L}_2=(-5,4,3)$，$\|\boldsymbol{L}_1\times\boldsymbol{L}_2\|=5\sqrt{2}$，所以，两直线之间的距离为

$$d=\frac{|\overrightarrow{M_1M_2}\cdot(\boldsymbol{L}_1\times\boldsymbol{L}_2)|}{\|\boldsymbol{L}_1\times\boldsymbol{L}_2\|}=\frac{14}{5\sqrt{2}}.$$

(3) 为求公垂线 L，易知其方向 $\boldsymbol{L}\parallel\boldsymbol{L}_1\times\boldsymbol{L}_2=(-5,4,3)$，但很难找到 L 上一点. 因此，我们转而考虑建立 L 的一般方程，即找包含 L 的两张平面. 设 L 已知，则 L 与 L_1 所决定的平面 π_1 及 L 与 L_2 所决定的平面 π_2 的交线就是 L，所以只要分别建立 π_1、π_2 的方程即可.

π_1 过 L_1 上点 $M_1(0,1,-1)$，法向量 $\boldsymbol{n}_1=\boldsymbol{L}_1\times\boldsymbol{L}=(2,1,2)\times(-5,4,3)=(-5,-16,13)$，因此，得 π_1 的方程为

$$5x+16y-13z-29=0;$$

π_2 过 $M_2(1,-2,0)$，$\boldsymbol{n}_2=\boldsymbol{L}_2\times\boldsymbol{L}=(1,2,-1)\times(-5,4,3)=(10,2,14)\parallel(5,1,7)$，故 π_2 的方程为 $5x+y+7z-3=0$，因此，所求直线的方程为

$$L:\begin{cases} 5x+16y-13z-29=0 \\ 5x+y+7z-3=0 \end{cases}$$

2. 设 A,B 均为 n 阶方阵，且满足 $A^2=I,B^2=I,|A|+|B|=0$，证明：$|A+B|=0$.