线性代数期末讲座（6~7章）

日期：2021.1.9

电气93　李潘铭

复习方法与考试建议

Solution Ways

基本题型掌握（必考题）

求特征值和特征向量

将二次型化为标准型

…… 每类基础题起码认认真真做一个，形成套路

熟悉理解知识点（灵活类考题）

熟悉知识点的定义、定理、性质，必要时需要一些证明加以理解

同时将其相互联系，融汇贯通

知识点一定要全面，找对应题做一做

拓展知识点&适当熟悉（证明题）

想要冲刺满分，就等在这一块下一点功夫

考试有概率考到自己看过的原题或相似题（注：往年题重复概率小）

1.多看一些题，了解思路

2.适当总结，相似题好下手

考试建议：

一般而言，时间充裕

做完之后，试着将每道题重新做一遍，

再返回去对照，不要照着原思路检查

不容易检查出错误

- 知识点
  - 特征值与特征向量
    - 定义
    - 基本性质
  - 相似及相似对角化
    - 相似矩阵的定义及性质
    - 相似对角化
  - 二次型的定义
    - 二次型定义
    - 标准型
    - 规范型
  - ★ 三种矩阵
    - 实对称矩阵
    - 正交矩阵
    - 正定矩阵
  - ★ 四种关系
    - 等价
    - 相似
    - 合同
    - 正交相似

- 例题
  - 三种矩阵
    - 例5
    - 例6
    - 例7
  - 特征值性质应用
    - 例8
    - 例9
    - 例10
    - 例18
  - 秩为1的矩阵
    - 例11
    - 例12
    - 例13
  - 正定性质的证明
    - 定义法
      - 例14
      - 例15
    - 特征值大与0
      - 例16
    - 各阶顺序主子式大于0
      - 例17
    - 与正定阵合同

over

特征值与特征向量

$Ax=\lambda x$

$|\lambda E-A| \to$ 特征多项式

$|\lambda E-A|=0 \to$ 特征方程

特征值性质 ① A, A^T 具有相同特征值;

② $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}=tr(A)$

$\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n=|A|$

③④ 特征向量线性无关

⑤ 特征向量个数 ≤ 特征值重数

其他: $\lambda^k \Updownarrow A^k$ $\quad \lambda^{-1} \Updownarrow A^{-1}$ $\quad |A|\lambda^{-1} \Updownarrow A^*$ $\quad f(\lambda) \Updownarrow f(A)$

$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*$

例1

已知 $\begin{bmatrix}0&1&2\\1&0&a\\2&a&3\end{bmatrix}$ 与 $\begin{bmatrix}5&&\\&b&\\&&-1\end{bmatrix}$ 相似, 则 $a=?$, $b=?$

$$\begin{cases}5+b-1=3\\-5b=|A|=4a-3\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a=2\\b=-1\end{cases}$$

例2

求 $(A^*)^*$ 的特征值 (λ 是 A 的特征值)

$$|A^*|\cdot\lambda_*^{-1}=\frac{|A|^{n-1}}{|A|\cdot\lambda^{-1}}=|A|^{n-2}\lambda$$

λ_* 为 A^* 的特征值 $\lambda_*=|A|\lambda^{-1}$

相似及相似对角化

相似：A、B n阶方阵

$P^{-1}AP=B \Leftrightarrow A\sim B$（P为可逆矩阵）

性质：① A、B有相同特征值；

② $r(A)=r(B)$

③ $A^m \sim B^m$

相似对角化

定义：$A\sim\Lambda$，则称A可相似对角化

（存在可逆矩阵P，使 $P^{-1}AP=\Lambda$）

性质：① Λ主对角线元素即为A的特征值

② P的列向量即为A特征值对应的特征向量

题：① 给定A，求P，Λ

<1> 求A特征值；$|\lambda I-A|=0$

<2> 求对应特征向量；$(\lambda I-A)x=0$

相似及相似对角化

判断是否相似

<1> A是否实对称
- 否，A是否有n个不同λ
  - 是，可对角化
  - 否，看对每个λ，几何重数 $\overset{?}{=}$ 代数重数
- 是，可对角化

例3

已知A与 $B=\begin{bmatrix} & & 1 \\ & 1 & \\ 1 & & \end{bmatrix}$ 相似，则 $r(A-2I)+r(A-I)=$ ____

$$|\lambda I-B|=\begin{vmatrix} \lambda & & -1 \\ & \lambda-1 & \\ -1 & & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2(\lambda-1)+(-1)(\lambda-1)$$

$$=(\lambda^2-1)(\lambda-1)$$

$$=(\lambda-1)^2(\lambda+1)$$

$\lambda=1$，几何重数 2，$r(A-I)=1$

$r(A-2I)=3$

$+ \ =4$

二次型

二次型

$f(x_1, x_2, \cdots x_n) = x^TAx$

其中，A为二次型 f 的矩阵

① 对 $f(x) = x^TAx$ 作可逆线性变换 $x = Cy$

$f(x) = d_1y_1^2 + d_2y_2^2 + \cdots d_ny_n^2$ $\qquad f(x) = y^T\underbrace{C^TAC}_{\text{对角型}}y$

上式称之为 $f(x)$ 的标准型

化为标准型方法：①配方法
②初等变换
③正交变换

标准型：二次型只有平方项，无混合项
A 只有主对角线

规范型：标准型前题下，系数只有 0, 1, -1
A 主对角线 1, 0, -1

三种矩阵

正交矩阵

定义：$A^TA=E$

性质：① $|A|=1$或-1

② $A^{-1}=A^T$

③ A、B正交$\Rightarrow AB$正交

④ A正交 $\Rightarrow (A\alpha, A\beta)=(\alpha,\beta)$

⑤ A正交 $\Rightarrow A$的列(行)向量标准正交向量组

实对称矩阵

定义 $A^T=A$

性质：① 实对称矩阵必能相似对角化

② λ_1, λ_2是对称矩阵A的两个不同特征值

α_1, α_2分别为其对应的特征向量，

则α_1与α_2正交

③ 必存在正交矩阵P

$P^{-1}AP=P^TAP=\mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots\lambda_n)$

② 正定：$\forall x\neq 0 \quad x^TAx>0 \Leftrightarrow A$正定

A的特征值全部$>0 \Leftrightarrow A$正定

A顺序主子式均$>0 \Leftrightarrow \sim$

存在可逆阵M，$A=M^TM \Leftrightarrow \sim$

正定矩阵必为实对称矩阵

四种关系

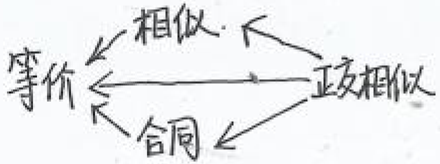
等价、合同、相似、正交相似

等价：A、B同型，存可逆 P、Q. $PAQ=B$

相似：A、B同为方阵，存可逆P、Q $P^{-1}AP=B$

正交相似. A、B同方 存正交P $P^{-1}AP=B$, $P^{T}AP=B$

合同：A、B同方 存可逆P $P^{T}AP=B$



相似：A、B n阶方阵

$P^{-1}AP=B \Leftrightarrow A\sim B$ (P为可逆矩阵)

性质：① A、B有相同特征值；

② $r(A)=r(B)$

③ $A^{m}\sim B^{m}$

合同：

定义：$P^{T}AP=B \Leftrightarrow A\simeq B$ (P可逆)

性质：① A,B正负惯性指数相同；

↓

标准型平方项系数

A,B的特征值（A,B实对称）

四种关系

例4

$A=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{bmatrix}$ $B=\begin{bmatrix}3&&\\&0&\\&&0\end{bmatrix}$, $C\begin{bmatrix}1&&\\&0&\\&&0\end{bmatrix}$ 讨论相似/合同关系

易得$\lambda=3$为A的其中一个特征值

(每行相加和为0)

$\lambda=0$的代数重数为2 ($r(A)=1$)

故A的正惯性指数为1，特征值为3,0,0

A，B相似.

ABC合同

例5

若A，B均为实对称矩阵，A的特征值大于a，B的特征值大于b

证：A+B的特征值大于a+b

证：$A-aE=P^T(\Lambda_A-aE)P$

$B-bE=M^T(\Lambda_B-bE)M$

∵ A特征值大于a

B特征值大于b

∴ $A-aE$，$B-bE$均正定

则 $A+B-(a+b)E$正定，$\lambda>a+b$

三种矩阵

例6

若n阶正定矩阵A是正交矩阵，其正交变换可化为标准型为：

A为正定矩阵：$A=P^T\Lambda P$

$\Rightarrow$ A为实对称 $A^T=P^T\Lambda P$（P为正交矩阵）

A为正交矩阵：$AA^T=E$

$\Rightarrow AA^T=P^T\Lambda^2P=E$

$\Rightarrow \Lambda^2=E$

$\Lambda=E$

故其标准型 $\Lambda=E$

三种矩阵

例7

A为正定矩阵、B为实对称矩阵

证明：存在可逆矩阵P，使得P^TAP、P^TBP均为对角阵

证明：设 $P_1^T A P = I$

$P_2^T P_1^T B P_1 P_2 = \Lambda$（$P_2$为正交矩阵）.

则 $P = P_1 P_2$ $\quad P_2^T P_1^T A P_1 P_2 = P_2^T P_2 = I$

正定矩阵

例8

A满足$A^2-3A+2E=0$，证明其特征值只能取值1或2

证明：设λ是A的特征值

$\because A^2-3A+2E=0$

$\therefore \lambda^2-3\lambda+2=0 \Rightarrow (\lambda-2)(\lambda-1)=0$

即只要λ是A的特征值就必要符合上式

则$\lambda=2$或1，不会等于其他数

特征值的性质

例9

$A^2=A$，证明：A必相似于对角矩阵（A为方阵）

证明：$A(A-I)=0 \Rightarrow$ 特征值为0或1

①若 $r(A)=n$ （A可逆）

$A^2=A$

$A^{-1}A^2=A^{-1}A \Rightarrow A=E$

②若 $r(A)<n$，且 $r(A)\neq 0$

$(I-A)x=0 \Rightarrow \lambda=1$ 的几何重数 $n-r(I-A)$

$(0I-A)x=0 \Rightarrow \lambda=0$ $\quad n-r(A)$

则线性无关的特征向量有 $n-r(I-A)+n-r(A)=2n-[r(I-A)-r(A)]$

$\because A(A-I)=0 \qquad -A+A-I=-I$

$\therefore r(A)+r(A-I)\leq n \qquad r(A)+r(A-I)\geq n$

$\Rightarrow r(A)+r(I-A)=n$

$\Rightarrow$ 线性无关的特征向量有n个

③若 $r(A)=0$，$A=0$，故A可对角化

特征值的性质

例10

A为奇数阶正交矩阵，$\det(A)=1$，

证明：A有特征值为1

设λ是A的特征值

$\frac{1}{\lambda}$也是A的特征值（$A^{-1}=A^T$）

设$\lambda_1,\cdots\lambda_{\frac{n}{2}}$

则必能找到$\frac{1}{\lambda_1},\cdots\frac{1}{\lambda_{\frac{n}{2}}}$也是A的特征值.

列举其特征值：

$\lambda_1,\cdots\lambda_{\frac{n}{2}},\frac{1}{\lambda_1},\cdots,\frac{1}{\lambda_{\frac{n}{2}}},\lambda'$（奇数阶）

①若$\lambda_1,\cdots\lambda_{\frac{n}{2}}$，其中存在1，成立

②若$\lambda_1,\cdots\lambda_{\frac{n}{2}}$均不为1.

则λ'必$=1$

若$\lambda'\neq1$，则无法找到$\frac{1}{\lambda'}$这一特征值，不成立

特征值的性质

例18

A，B均为n阶矩阵，A有n个不同的特征值

(1)若AB=BA，B相似于对角阵

(2)若A的特征向量也是B的特征向量 AB=BA

(1) $BAx=\lambda Bx=ABx$

则Bx是A的一个特征向量

则 $Bx=\lambda x$，$\Rightarrow$ A的特征值也是B的特征值

$\Rightarrow$ B相似于对角阵

(2) 设 $P^{-1}AP=\Lambda_1$，$P^{-1}BP=\Lambda_2$

$\Rightarrow AB=P^{-1}\Lambda_1\Lambda_2P=P^{-1}\Lambda_2\Lambda_1P=P^{-1}\Lambda_2PP^{-1}\Lambda_1P$

$=BA$

特征值的性质

例11

$A=\alpha\beta^T$，证明：$\lambda_n=\beta^T\alpha$ 也是 A 的特征值

且 α 为对应的一个特征向量（α,β 均为横向量）

证明：$A\alpha=\beta^T\alpha\cdot\alpha$

$\alpha\beta^T\alpha=(\beta^T\alpha)\alpha=\beta^T\alpha\cdot\alpha$

例12

$B=A\alpha\alpha^T$，A 可逆，求 B 的特征值

$BA\alpha=A\alpha\alpha^TA\alpha=\alpha^TA\alpha A\alpha$

$B\cdot A\alpha=\alpha^TA\alpha\cdot A\alpha\Rightarrow\alpha^TA\alpha$ 为 B 特征值，$A\alpha$ 为对应特征向量

另外 0 也为 B 特征值

秩为1的矩阵

例13

α,β正交，$A=\alpha\beta^T+\beta\alpha^T$，

问：A是否可相似对角化，若可，求相似矩阵

$$A\alpha=\alpha\underbrace{\beta^T\alpha}_{0}+\beta\underbrace{\alpha^T\alpha}_{1}=\beta \qquad A\beta=\alpha\underbrace{\beta^T\beta}_{1}+\beta\underbrace{\alpha^T\beta}_{0}=\alpha$$

$$\Rightarrow A(\alpha+\beta)=\alpha+\beta$$

$$A(\alpha-\beta)=(-1)(\alpha-\beta) \qquad r(A)\geqslant 2.$$

$$r(A)\leq r(\alpha\beta^T)+r(\beta\alpha^T)=2 \qquad r(A)\leq 2$$

$\Rightarrow r(A)=2 \Rightarrow \cdots$ 则可对角化

相似矩阵为 $\begin{bmatrix}1 & & & & \\ & -1 & & & \\ & & 0 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 0\end{bmatrix}$

秩为1的矩阵

秩为1矩阵知识点

若 $A_{n\times n}$，且 $r(A)=1$

- 矩阵 A 都可以拆成两向量乘积，即 $A=\alpha\beta^T$，其中 α 和 β 为非零列向量
- $A^n=\alpha\beta^T\alpha\beta^T\cdots\alpha\beta^T=(\beta^T\alpha)^{n-1}\cdot A$，令人惊喜的是 $\beta^T\alpha=\mathrm{tr}(A)=\sum_{i=1}^n a_n$
- 若 $\mathrm{tr}(A)=\sum_{i=1}^n a_n\neq 0$，则矩阵 A 可相似对角化，否则不可相似对角化。

$$A=\alpha\beta^T=\begin{bmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & \cdots & a_1b_n \\ a_2b_1 & a_2b_2 & \cdots & a_2b_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_nb_1 & a_nb_2 & \cdots & a_nb_n \end{bmatrix}$$

秩为1的矩阵

例14

A为正定矩阵，B为反对称矩阵，证 $A-B^2$ 正定

证明正定：定义法

$B^T=-B \Rightarrow -B^2=BB^T \Rightarrow A-B^2=A+BB^T$

对于 $\forall x\neq 0$ $\quad x^T(A+BB^T)x$

$= x^TAx+x^TBB^Tx$

$= x^TAx+(B^Tx)^TB^Tx$

其中 $x^TAx>0$

$(B^Tx)^TB^Tx\geq 0$

$\Rightarrow x^T(A+BB^T)x>0$

例15

设 A 为 $m\times n$ 实矩阵，$B=\lambda I+A^TA$. 证明：当 $\lambda>0$ 时，B 为正定矩阵.

正定矩阵

例16

$AB=BA$，A,B均正定

证明：AB正定

$$AB\gamma=\lambda\gamma$$

$$B\gamma=\lambda A^{-1}\gamma$$

$$\gamma^TB\gamma=\lambda\gamma^TA^{-1}\gamma$$

$$\lambda=\frac{\gamma^TB\gamma}{\gamma^TA^{-1}\gamma}>0$$

证明正定：特征值大于0

例17

若 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+4x_2^2+4x_3^2+2tx_1x_2-2x_1x_3+4x_2x_3$ 是正定的，则实数 t 的取值范围是______.

f 对应的矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & t & -1\\ t & 4 & 2\\ -1 & 2 & 4\end{pmatrix}$.

A正定 $\Leftrightarrow$ A的各阶顺序主子式都大于零.

即 $1>0,\ 4-t^2>0,\ t^2+t-2<0,$

$\therefore\ -2<t<1.$

证明正定：顺序主子式大于0

正定矩阵


考的全会
蒙的全对
超常发挥
高分不累
考试专用喷雾


蟹蟹\(˙▿˙)/♡


逢考必过