例1. *(缺项的Vandermonde行列式)* 求

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-2} & x_2^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2} \\ x_1^{n} & x_2^{n} & \cdots & x_n^{n} \end{vmatrix}$$

分析: 该行列式和标准的范德蒙行列式在最后一行上有区别, 次方是n而不是$n-1$. 此类问题的求解方法为**利用加一行加一列(含有不定元x)的方法将行列式扩充成一个$n+1$ 阶的范德蒙行列式, 然后利用比较多项式系数的方法来求得原来的n阶行列式的值**.

解: 构造$n+1$阶行列式

$$P(x)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n & x \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ x_1^{n-2} & x_2^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2} & x^{n-2} \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} & x^{n-1} \\ x_1^{n} & x_2^{n} & \cdots & x_n^{n} & x^{n} \end{vmatrix},$$

$P(x)$按照最后一列展开得到关于x的n次多项式, 其中x^{n-1}前面的系数为$(-1)^{n+(n+1)}D$. 按照范德蒙行列式的计算公式得

$$P(x)=(x-x_1)\cdots(x-x_n)\prod_{1\le j<i\le n}(x_i-x_j),$$

x^{n-1}的系数为

$$-(x_1+\cdots+x_n)\prod_{1\le j<i\le n}(x_i-x_j),$$

因此$D=(x_1+\cdots+x_n)\prod\limits_{1\le j<i\le n}(x_i-x_j)$.