第五章 线性空间与欧氏空间

基本要求

1、能够验证W是否为线性空间V的子空间.

2、会求向量空间的基、维数，向量在一组基下的坐标.

3、会求向量空间不同基之间的过渡矩阵，了解基变换与坐标变换之间的关系.

主要内容

1、线性空间的判定

2要素：集合V，数域F；2种运算：加法，数乘

要求：线性运算封闭且满足8条运算规则

2、线性子空间的判定

设W是线性空间V的非空子集，则W为V的子空间的充要条件是W对V中的线性运算封闭.

3、线性空间的基、维数，向量的坐标

V中一组线性无关的向量$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n,\forall\alpha\in V$,有

$$\alpha = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n \quad (x_i\in F, i=1,2,\cdots,n)$$

则称$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$为$V$的一个基,$V$的维数$\dim(V)=n$.

$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$为α在基$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$下的坐标.

4、基变换与坐标变换

设$\alpha_1,\cdots\alpha_n$与$\beta_1,\cdots\beta_n$是n维线性空间的两个基，A是由$\alpha_1,\cdots\alpha_n$到$\beta_1,\cdots\beta_n$的过渡矩阵，则

$$[\beta_1,\cdots\beta_n]=[\alpha_1,\cdots\alpha_n]A \quad \text{（基变换）}$$

向量α在基$\alpha_1,\cdots\alpha_n$下的坐标为$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$,

即$\alpha = x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_n\alpha_n = [\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n]x$

向量α在基$\beta_1,\cdots\beta_n$下的坐标为$y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)^T$,

即$\alpha = y_1\beta_1+y_2\beta_2+\cdots+y_n\beta_n = [\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n]y$

$\Rightarrow$ $x=Ay$ 或 $y=A^{-1}x$. （坐标变换）

5、几个常用的子空间

(1)设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_s$是$R^n$中的向量，则

$V=\{\alpha \mid \alpha = k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s\}$是$R^n$的子空间

称为由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_s$生成的子空间.记为 $span\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_s\}$

$\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_s$的极大无关组是$V$的基,$\dim(V)=r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_s)$

(2)设A是$m\times n$矩阵，则$V=\{Ax, x\in R^n\}$是R^m的子空间.

A的列向量组的极大无关组是V的基,$\dim(V)=r(A)$.

(3)齐次线性方程组Ax=0的全部解向量构成R^n的子空间.

$S=\{x \mid Ax=0\}=span\{\xi_1,\cdots,\xi_{n-r}\}$,

其中$\xi_1,\cdots,\xi_{n-r}$是$Ax=0$的基础解系.

基：$\xi_1,\cdots,\xi_{n-r}$; $\dim(S)=n-r(A)$

记$A=[\alpha_1\ \alpha_2\cdots\alpha_n]$, $Ax=[\alpha_1\cdots\alpha_n]\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$

6、线性空间的同构

如果两个线性空间V_1与V_2之间能够建立一个同构映射（一一对应的线性映射），则称V_1与V_2同构.

(1) n维线性空间V中取定一个基后，向量与它的坐标之间的对应就是V到F^n的一个同构映射.

(2) 数域F上两个有限维线性空间同构的充要条件是它们的维数相同.

7、扩充定理

设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$是$n$维线性空间$V$中一个线性无关向量组，且$r<n$,则由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$扩充必能得到$V$的基。

7、子空间的交与和

(1)设V_1,V_2都是线性空间V的子空间,则$V_1\cap V_2$,及$V_1+V_2=\{\alpha+\beta \mid \alpha\in V_1,\beta\in V_2\}$也都是$V$的子空间.

(2)设$V_1=span\{\alpha_1,\cdots,\alpha_n\}$,$V_2=span\{\beta_1,\cdots,\beta_n\}$，则

$V_1+V_2=span\{\alpha_1,\cdots,\alpha_n,\beta_1,\cdots,\beta_n\}$

(3)（维数公式）

设V_1,V_2都是线性空间V的子空间,则

$\dim(V_1)+\dim(V_2)=\dim(V_1+V_2)+\dim(V_1\cap V_2)$.

(4)直和$V_1\oplus V_2$: V_1+V_2中每个向量α的表达式惟一.

V_1+V_2为直和 $\Leftrightarrow V_1\cap V_2=\{0\}$

$\Leftrightarrow \dim(V_1)+\dim(V_2)=\dim(V_1+V_2)$.

8、 格拉姆_施密特正交化方法

设$\alpha_1,\cdots,\alpha_n$是n维欧氏空间V的一个基.

1）正交化

令$\beta_1=\alpha_1$;

$$\beta_2=\alpha_2-\frac{\langle\alpha_2,\beta_1\rangle}{\langle\beta_1,\beta_1\rangle}\beta_1;$$

$\boxed{\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n\text{两两正交，且与 }\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\text{等价.}}$

……

$$\beta_n=\alpha_n-\frac{\langle\alpha_n,\beta_1\rangle}{\langle\beta_1,\beta_1\rangle}\beta_1-\frac{\langle\alpha_n,\beta_2\rangle}{\langle\beta_2,\beta_2\rangle}\beta_2-\cdots-\frac{\langle\alpha_n,\beta_{n-1}\rangle}{\langle\beta_{n-1},\beta_{n-1}\rangle}\beta_{n-1}$$

2）标准化：令$\zeta_1=\dfrac{\beta_1}{\|\beta_1\|}$， $\zeta_2=\dfrac{\beta_2}{\|\beta_2\|},\cdots$， $\zeta_n=\dfrac{\beta_n}{\|\beta_n\|}$.

则$\zeta_1,\zeta_2,\cdots,\zeta_n$是一个标准正交基 .

9、 正交矩阵与正交变换

如果实方阵满足 $AA^T=A^TA=I$, 称A为正交矩阵.

正交矩阵的性质：

（1）正交矩阵的列（行）向量组是标准正交向量组.

（2）设A, B为同阶正交矩阵，则

1) $|A|=\pm1$;

2) A^T,A^{-1},A^*都是正交矩阵；

3) AB是正交矩阵 .

正交变换

设P为n 阶正交矩阵，称$y=Px$为R^n上的正交变换.

例1 设$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$，求$\alpha_2$，$\alpha_3$使$\alpha_1$，$\alpha_2$，$\alpha_3$相互正交.

解 设$\alpha=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$， $\alpha\perp\alpha_1$. 则有 $x_1+x_2+x_3=0$,

得基础解系$\xi_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$,$\xi_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$，则$\xi_1\perp\alpha_1$， $\xi_2\perp\alpha_1$

再将ξ_1， ξ_2正交化，得

$$\alpha_2=\xi_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}，\quad \alpha_3=\xi_2-\frac{<\xi_2,\xi_1>}{<\xi_1,\xi_1>}\xi_1=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\\1\end{pmatrix}.$$

则α_1， α_2， α_3相互正交.

例2 设R^4中两个向量组(I) : $\alpha_1=(1,1,0,0)^T,\alpha_2=(1,0,1,1)^T$ (II) : $\beta_1=(2,-1,3,3)^T$, $\beta_2=(0,1,-1,-1)^T$证明:(I)和(II)是R^4的同一子空间的两个基, 并求由基 II到基 I的过渡矩阵 A.

习题5. 1, 10

证 $A=[\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2]\xrightarrow{\text{初等行变换}}\begin{bmatrix}1&0&-1&1\\0&1&3&-1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$

$\Rightarrow\beta_1=-\alpha_1+3\alpha_2,\beta_2=\alpha_1-\alpha_2.$

$$\alpha_1=\frac{1}{2}\beta_1+\frac{3}{2}\beta_2,\alpha_2=\frac{1}{2}\beta_1+\frac{1}{2}\beta_2$$

所以(I)和(II)等价,从而是R^4的同一子空间的两个基 .

因$[\alpha_1,\alpha_2]=[\beta_1,\beta_2]\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\\frac{3}{2}&\frac{3}{2}\end{pmatrix}\Rightarrow A=\dfrac{1}{2}\begin{bmatrix}1&1\\3&1\end{bmatrix}$

例3 设$\alpha_1,\cdots,\alpha_m$是欧氏空间V的m个向量，令

$$D=\begin{bmatrix}\langle\alpha_1,\alpha_1\rangle&\langle\alpha_1,\alpha_2\rangle&\cdots&\langle\alpha_1,\alpha_m\rangle\\\langle\alpha_2,\alpha_1\rangle&\langle\alpha_2,\alpha_2\rangle&\cdots&\langle\alpha_2,\alpha_m\rangle\\\vdots&\vdots&&\vdots\\\langle\alpha_m,\alpha_1\rangle&\langle\alpha_m,\alpha_2\rangle&\cdots&\langle\alpha_m,\alpha_m\rangle\end{bmatrix}$$

习题5.2,8

证明： $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$线性无关$\Leftrightarrow|D|\neq0$

证： $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$线性无关$\Leftrightarrow x_1\alpha_1+\cdots+x_m\alpha_m=0$只有零解

$|D|\neq0\Leftrightarrow Dx=0$只有零解

只要证明$(I):x_1\alpha_1+\cdots+x_m\alpha_m=0$与$(II):Dx=0$同解即可.

(I)两端分别与$\alpha_1,\cdots$， α_m做内积，知(I)的解是(II)的解.

若$\sum_{j=1}^m\langle\alpha_i,\alpha_j\rangle x_j=0\ \Rightarrow\sum_{j=1}^m\langle\alpha_i,x_j\alpha_j\rangle=0\ \Rightarrow\langle\alpha_i,\sum_{j=1}^m x_j\alpha_j\rangle=0$

$\Rightarrow\langle x_i\alpha_i,\sum_{j=1}^m x_j\alpha_j\rangle=0\ \Rightarrow\langle\sum_{i=1}^m x_i\alpha_i,\sum_{j=1}^m x_j\alpha_j\rangle=0\ \Rightarrow\sum_{i=1}^m x_i\alpha_i=0$

知(II)的解是(I)的解.

例4 设 $B=I_3-2\alpha^T\alpha$， 其中$\alpha=\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$

证明： B是正交矩阵。

证明： $B^T=(I_3-2\alpha^T\alpha)^T=(I_3-2\alpha^T\alpha)$

$\alpha\alpha^T=1$

$\therefore BB^T=(I_3-2\alpha^T\alpha)(I_3-2\alpha^T\alpha)$

$=I_3-2\alpha^T\alpha-2\alpha^T\alpha+4\alpha^T\underline{\alpha\alpha^T}\alpha$

$=I_3$

故有 $B^{-1}=B^T$,从而B是正交矩阵.

例5 设向量组$\alpha_1=(1,2,1)^T,\alpha_2=(1,3,2)^T,\alpha_3=(1,a,3)^T$为$\mathbf{R}^3$的一个基，$\beta=(1,1,1)^T$在这个基下的坐标为$(b,c,1)^T$.
(1)求a,b,c;(2)证明α_2,α_3,β为$\mathbf{R}^3$的一个基，并求α_2,α_3,β到$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$的过渡矩阵.

2019考研题

解（1） 由已知得$b\alpha_1+c\alpha_2+\alpha_3=\beta$

$$\text{即}\begin{cases} b+c+1=1,\\ 2b+3c+a=1,\\ b+2c+3=1,\end{cases}\Rightarrow a=3,b=2,c=-2.$$

解（2）
$$\det(\alpha_2\ \alpha_3\ \beta)=\begin{vmatrix}1&1&1\\3&3&1\\2&2&1\end{vmatrix}=2\neq 0,\Rightarrow \alpha_2\ \alpha_3\ \beta\text{为}\mathbf{R}^3\text{的基}.$$

由(1)知$\beta=2\alpha_1-2\alpha_2+\alpha_3 \Rightarrow \alpha_1=\alpha_2-\frac{1}{2}\alpha_3+\frac{1}{2}\beta$

$$(\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3)=(\alpha_2\ \alpha_3\ \beta)\begin{pmatrix}1&1&0\\-\frac{1}{2}&0&1\\\frac{1}{2}&0&0\end{pmatrix},\ \text{故}\begin{pmatrix}1&1&0\\-\frac{1}{2}&0&1\\\frac{1}{2}&0&0\end{pmatrix}\text{为所求过渡矩阵.}$$

例6 在R^3中,求由基$\alpha_1=(1,0,0)^T,\alpha_2=(1,1,0)^T,\alpha_3=(1,1,1)^T$通过过渡矩阵$A=\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}$所得到的新基$\beta_1,\beta_2,\beta_3$,并求$\alpha=-\alpha_1-2\alpha_2+5\alpha_3$在基$\beta_1,\beta_2,\beta_3$下的表达式.

解 $(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)A$

$$=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

故$\beta_1=(1,0,0)^T,\beta_2=(0,1,0)^T,\beta_3=(0,0,1)^T$为所求的新基.

$\alpha=-\alpha_1-2\alpha_2+5\alpha_3$

$$=(\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3)\begin{pmatrix}-1\\-2\\5\end{pmatrix}=(\beta_1\ \beta_2\ \beta_3)A^{-1}\begin{pmatrix}-1\\-2\\5\end{pmatrix}=2\beta_1+3\beta_2+5\beta_3.$$

例7 令线性空间$R[x]_2$的内积为$\langle f,g\rangle=\int_{-1}^{1}f(x)g(x)\mathrm{d}x$,应用Gram－Schmidt正交化方法，由$R[x]_2$的基$1,x,x^2$求$R[x]_2$的标准正交基.

习题5.2 14

解 $\alpha_1=1,\alpha_2=x,\alpha_3=x^2$

$\beta_1=\alpha_1=1,\quad \|\beta_1\|^2=\langle\beta_1,\beta_1\rangle=\int_{-1}^{1}\mathrm{d}x=2$

$\beta_2=\alpha_2-\frac{\langle\alpha_2,\beta_1\rangle}{\langle\beta_1,\beta_1\rangle}\beta_1=x-\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}x\mathrm{d}x=x,\quad \|\beta_2\|^2=\langle\beta_2,\beta_2\rangle=\int_{-1}^{1}x^2\mathrm{d}x=\frac{2}{3}.$

$$\beta_3=\alpha_3-\frac{\langle\alpha_3,\beta_1\rangle}{\langle\beta_1,\beta_1\rangle}\beta_1-\frac{\langle\alpha_3,\beta_2\rangle}{\langle\beta_2,\beta_2\rangle}\beta_2$$
$$=x^2-\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}x^2\mathrm{d}x-\frac{3}{2}x\int_{-1}^{1}x^3\mathrm{d}x=x^2-\frac{1}{3},\ \|\beta_3\|^2=\frac{8}{45}.$$

故所求标准正交基为$\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{6}}{2}x,\frac{\sqrt{10}}{4}(3x^2-1)$

例8 设B_1:$1,-1+x,1-x+x^2$, B_2:$1-x-x^2,3x-2x^2,1-2x^2$,
(1)证明B_1,B_2都是$R[x]_2$的基;(2)求基B_1到基B_2的过渡矩阵;
(3)已知$[p(x)]_{B_1}=(1,4,3)^T$,求$[p(x)]_{B_2}$.

解(1) $1,x,x^2$是$R[x]_2$的一个基,又$\begin{cases}1=1\cdot 1+0\cdot x+0\cdot x^2\\-1+x=-1\cdot 1+1\cdot x+0\cdot x^2\\1-x+x^2=1\cdot 1-1\cdot x+1\cdot x^2\end{cases}$

即$[1,-1+x,1-x+x^2]=[1,x,x^2]A$,其中$A=\begin{bmatrix}1&-1&1\\0&1&-1\\0&0&1\end{bmatrix}$

A可逆$\Rightarrow$向量组$1,-1+x,1-x+x^2$与$1,x,x^2$可相互线表.

故B_1: $1,-1+x,1-x+x^2$也是$R[x]_2$的一个基.

同理可证B_2也是$R[x]_2$的一个基.

例8 设B_1:$1,-1+x,1-x+x^2$, B_2:$1-x-x^2,3x-2x^2,1-2x^2$,
(1) 证明B_1,B_2都是$R[x]_2$的基;
(2) 求基B_1到基B_2的过渡矩阵;
(3) 已知$[p(x)]_{B_1}=(1,4,3)^T$,求$[p(x)]_{B_2}$.

$A=\begin{bmatrix}1&-1&1\\0&1&-1\\0&0&1\end{bmatrix}$

解(2) $[1,-1+x,1-x+x^2]=[1,x,x^2]A$

$$[1-x-x^2,3x-2x^2,1-2x^2]=[1,x,x^2]\begin{bmatrix}1&0&1\\-1&3&0\\-1&-2&-2\end{bmatrix}$$
$$=[1,-1+x,1-x+x^2]A^{-1}\begin{bmatrix}1&0&1\\-1&3&0\\-1&-2&-2\end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$基B_1到基B_2的过渡矩阵为

$$C=A^{-1}\begin{bmatrix}1&0&1\\-1&3&0\\-1&-2&-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&3&1\\-2&1&-2\\-1&-2&-2\end{bmatrix}$$

例8 设B_1:$1,-1+x,1-x+x^2$, B_2:$1-x-x^2,3x-2x^2,1-2x^2$,
(1) 证明B_1,B_2都是$R[x]_2$的基;
(2) 求基B_1到基B_2的过渡矩阵;
(3) 已知$[p(x)]_{B_1}=(1,4,3)^T$,求$[p(x)]_{B_2}$.

$C=\begin{bmatrix}0&3&1\\-2&1&-2\\-1&-2&-2\end{bmatrix}$

解(3)
$[1-x-x^2,3x-2x^2,1-2x^2]=[1,-1+x,1-x+x^2]C$

$[p(x)]_{B_1}=(1,4,3)^T$

即 $p(x)=[1,-1+x,1-x+x^2](1,4,3)^T$

$=[1-x-x^2,3x-2x^2,1-2x^2]C^{-1}(1,4,3)^T$

故$[p(x)]_{B_2}=C^{-1}(1,4,3)^T=(11,4,-11)^T$

练习题

1 设3维线性空间V有两个基(I)$:\alpha_1,\cdots\alpha_n$;(II)$\beta_1,\cdots\beta_n$.

已知由基(I)到基(II)的过渡矩阵为$A=\begin{pmatrix}1&2&1\\-1&3&3\\0&2&2\end{pmatrix}$.

求向量$\alpha=2\beta_1-\beta_2+3\beta_3$在基(I)下的坐标;

解法1　α在基（II）：β_1,β_2,β_3下的坐标为$y=\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}$

又$[\beta_1,\beta_2,\beta_3]=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]A$

所以α在(I)$:\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$下的坐标为

$$x=Ay=\begin{pmatrix}1&2&1\\-1&3&3\\0&2&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\4\\4\end{pmatrix}$$

1 设3维线性空间V有两个基(I)$:\alpha_1,\cdots\alpha_n$;(II)$\beta_1,\cdots\beta_n$.

已知由基(I)到基(II)的过渡矩阵为$A=\begin{pmatrix}1&2&1\\-1&3&3\\0&2&2\end{pmatrix}$.

求向量$\alpha=2\beta_1-\beta_2+3\beta_3$在基(I)下的坐标;

解法2　$[\beta_1,\beta_2,\beta_3]=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]A$

$$\alpha=2\beta_1-\beta_2+3\beta_3=[\beta_1,\beta_2,\beta_3]\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}$$

$$=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]A\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]\begin{pmatrix}3\\4\\4\end{pmatrix}$$

故向量 α在基(I)下的坐标为 $(3,4,4)^T$.

2 证明$1,x-1,(x-2)(x-1)$是$R[x]_2$的一组基，
并求向量$1+x+x^2$在该基下的坐标.

解法1（1）因为$R[x]_2$是3维线性空间,所以$R[x]_2$中任意三个线性无关的向量都构成它的一组基.

$1,x-1,(x-2)(x-1)\in R[x]_2$.

令　$k_1\cdot1+k_2(x-1)+k_3(x-2)(x-1)=0$.

整理得　$k_1-k_2+2k_3+(k_2-3k_3)x+k_3x^2=0$

比较等式两边得 $\begin{cases}k_1-k_2+2k_3=0,\\ k_2-3k_3=0,\\ k_3=0,\end{cases}$

其系数行列式$D=1\neq0$.　故$k_1=k_2=k_3=0$.

所以$1,(x-1),(x-2)(x-1)$线性无关,从而是$R[x]_2$的一组基.

2 证明$1,x-1,(x-2)(x-1)$是$R[x]_2$的一组基，
并求向量$1+x+x^2$在该基下的坐标.

解法1（2）设$1+x+x^2$在给定基下的坐标为$(a_1,a_2,a_3)^T$

则有　$1+x+x^2=a_1\cdot1+a_2(x-1)+a_3(x-2)(x-1)$,

整理得　$1+x+x^2=(a_1-a_2+2a_3)+(a_2-3a_3)x+a_3x^2$,

比较系数得 $\begin{cases}a_1-a_2+2a_3=1,\\ a_2-3a_3=1,\\ a_3=1,\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a_1=3,\\ a_2=4,\\ a_3=1,\end{cases}$

所以$1+x+x^2$在给定基下的坐标为$(3,4,1)^T$.

2 证明$1,x-1,(x-2)(x-1)$是$R[x]_2$的一组基，
并求向量$1+x+x^2$在该基下的坐标.

解法2（1）因$1,x,x^2$是$R[x]_2$的一组基,又$1,x-1,(x-2)(x-1)\in R[x]_2$,且

$$\begin{cases}1=1\\ x-1=(-1)\cdot1+1\cdot x\\ (x-2)(x-1)=x^2-3x=2=2\cdot1+(-3)\cdot x+1\cdot x^2\end{cases}$$

即$[1,x-1,(x-2)(x-1)]=[1,x,x^2]\begin{pmatrix}1&-1&2\\0&1&-3\\0&0&1\end{pmatrix}=[1,x,x^2]A$

因A可逆，所以$1,x,x^2$可由$1,x-1,(x-2)(x-1)$线性表示.

所以向量组$1,x-1,(x-2)(x-1)$与向量组$1,x,x^2$等价,

故$1,x-1,(x-2)(x-1)$是$R[x]_2$的一组基.

2 证明$1,x-1,(x-2)(x-1)$是$R[x]_2$的一组基，
并求向量$1+x+x^2$在该基下的坐标.

解法2（2）
由$[1,x-1,(x-2)(x-1)]=[1,x,x^2]\begin{pmatrix}1&-1&2\\0&1&-3\\0&0&1\end{pmatrix}$

$\Rightarrow$由基$1,x,x^2$到基$1,x-1,(x-2)(x-1)$的过渡矩阵为

$$A=\begin{pmatrix}1&-1&2\\0&1&-3\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

由于向量$1+x+x^2$在基$1,x,x^2$下的坐标为$x=(1,1,1)^T$,
设它在基$1,x-1,(x-2)(x-1)$下的坐标为y,则有

则有　$y=A^{-1}x=\begin{pmatrix}1&-1&2\\0&1&-3\\0&0&1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\4\\1\end{pmatrix}$.

西安交通大学 XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY

第六章　特征值与特征向量 习题课

李换琴

内容小结

一、特征值、特征向量

1. 定义 $Ax=\lambda x,\quad x\neq 0$

2. 性质

1) 设A的n个特征值为$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$,则

$$\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n=|A|,$$

$$\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n=\mathrm{tr}(A)=a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}.$$

2) n阶矩阵A可逆 $\Leftrightarrow$ A的所有特征值均非零；

3) 对应于A的特征值λ的特征向量$\xi_1,\xi_2,\cdots\xi_t$的任意线性组合只要是非零向量, 仍然是A对应于λ的特征向量 .

4) 对应于不同特征值的特征向量必线性无关.

5) 设λ是方阵A的k重特征值, 则A对应于λ的线性无关的特征向量个数不超过k.(“几何重数”$\leq$“代数重数”)

6) 若λ是可逆矩阵A的特征值, ξ是对应的特征向量, 则

(1)λ^{-1}是A^{-1}的特征值, ξ是对应的特征向量.

(2)$|A|\lambda^{-1}$是A^*的特征值, ξ是对应的特征向量.

(3) $f(\lambda)$是$f(A)$的特征值, ξ是$f(A)$对应$f(\lambda)$的特征向量.

其中$f(x)$是多项式，$f(A)$是方阵A的矩阵多项式.

二、相似矩阵、矩阵可对角化

1 相似矩阵的定义与性质 $P^{-1}AP=B$

特别地，若A能与对角阵相似，则称A可对角化。

此时，对角阵的主对角元素即是A的特征值，

可逆矩阵P的列向量即是对应的特征向量。

性质 若A与B相似($A\sim B$)，则

1) $|A|=|B|,\ r(A)=r(B),\ \mathrm{tr}(A)=\mathrm{tr}(B), A, B$有相同的特征值.

2) $A^T\sim B^T$; $h(A)\sim h(B)$,其中$h(x)$是x的多项式.

3) 若A,B可逆, 则$A^{-1}\sim B^{-1}, A^*\sim B^*$.

2 n阶矩阵可对角化的条件

1)矩阵可对角化 $\Longleftrightarrow$ A有n个线性无关的特征向量

$\Longleftrightarrow$ A的每个特征值的几何重数=代数重数

$\Longleftrightarrow$ A的所有特征值的几何重数之和=n

2)若A有n个互不相同的特征值，则A必可对角化。

3 实对称矩阵的相似对角化

设A为n阶实对称阵，则有

1) A必可对角化;

2) A的每个特征值的几何重数和代数重数相等

3) A的所有特征值均为实数;

4) A的属于不同特征值的特征向量是正交的;

5) 存在正交矩阵Q,使得$Q^{-1}AQ=Q^TAQ=D$,

其中D是对角阵,对角线上的元素为A 的特征值,

Q的列向量是对应的特征向量.

4、求特征值的方法　设A为n阶方阵

（1）定义法　$Ax=\lambda x$, $|\lambda I-A|=0\Rightarrow\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$

（2）若$|A|=0$或$r(A)=r<n$, 则$\lambda=0$是一个特征值

$\Rightarrow(0I-A)x=0$的基础解系含$n-r$个解向量

$\Rightarrow\lambda=0$的几何重数为$n-r$ $\Rightarrow\lambda=0$是A的至少$n-r$重特征值.

若$|2I-A|=0$或$r(2I-A)=r<n\Rightarrow$则$\lambda=2$是一个特征值

$\Rightarrow\lambda=2$的几何重数$=n-r\Rightarrow 2$是A的至少$n-r$重特征值.

若$Ax=0$有非零解x,则$\lambda=0$是一个特征值, x为对应的特征向量.

（3）利用　$\mathrm{tr}(A)=\lambda_1+\cdots+\lambda_n$,　$|A|=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$
及已知的特征值求其它 特征值.

（4）实对称矩阵，一定有n个实特征值，其几何重数等于代数重数.结合秩的情况，可得出特征值的重数.

(5) 设λ是n阶矩阵A的特征值, 若A满足$f(A)=O$, 则$f(\lambda)=0$.其中f是多项式.

例如：若方阵A满足$A^2=A$,则A的特征值只能是0或1.

（6）相似矩阵有相同的特征值；A^{T}与A有相同的特征值；
设A,B为n阶矩阵, 则AB与BA有相同的特征值

习题选讲

例1　设A为5阶实对称矩阵,且已知$r(A-I)=3$, $r(A-2I)=2$,求$|A|$.

例2　设$A_{4\times4}$相似于$\mathrm{diag}(2,2,2,-2)$,则$\det\left(\frac{1}{4}A^*+3I\right)=$___.

例3　已知A与$B=\begin{bmatrix} & & 1\\ & 1 & \\ 1 & & \end{bmatrix}$相似, 则$r(A-2I)+r(A-I)=$___.

例4　设A是n阶实对称阵, α是A的属于特征值λ的特征向量, 求矩阵$(P^{-1}AP)^T$属于特征值λ的特征向量.

例1 设A为5阶实对称矩阵,且已知$r(A-I)=3$, $r(A-2I)=2$,求$|A|$.

解　$r(A-I)=3\ \Leftrightarrow r(I-A)=3$

$$\Rightarrow\begin{cases}|1I-A|=0\\5-r(1I-A)=2\end{cases}\Longrightarrow 1\text{是}A\text{的二重特征根.}$$

同理由$r(A-2I)=2$,　知2是A的三重特征根.

故　$|A|=1^2\cdot2^3=8$

例2　设$A_{4\times4}$相似于$\mathrm{diag}(2,2,2,-2)$,则$\det\left(\frac{1}{4}A^*+3I\right)=$___.

解　A的特征值为：2,2,2, −2. $|A|=-16$.

$$\frac{1}{4}A^*+3I=\frac{1}{4}|A|A^{-1}+3I=-4A^{-1}+3I$$

令$f(x)=-4x^{-1}+3$,

则$\frac{1}{4}A^*+3I$的特征值为$f(2)$, $f(2)$, $f(2)$, $f(-2)$. 即1, 1, 1, 5.

$$\Rightarrow\det\left(\frac{1}{4}A^*+3I\right)=1\times1\times1\times5=5.$$

例3
已知A与$B=\begin{bmatrix} & & 1\\ & 1 & \\ 1 & & \end{bmatrix}$相似, 则$r(A-2I)+r(A-I)=$___.

解　$A-2I\sim B-2I=\begin{bmatrix}-2&0&1\\0&-1&0\\1&0&-2\end{bmatrix}$, $\Rightarrow r(A-2I)=r(B-2I)=3$

$A-I\sim B-I=\begin{bmatrix}-1&0&1\\0&0&0\\1&0&-1\end{bmatrix}$, $\Rightarrow r(A-I)=r(B-I)=1$

故　$r(A-2I)+r(A-I)=4$.

例4 设A是n阶实对称阵, α是A的属于特征值λ的特征向量,求矩阵$(P^{-1}AP)^T$属于特征值λ的特征向量.

解 $A\alpha=\lambda\alpha, \alpha\neq 0$. 记 $B=(P^{-1}AP)^T=P^TA(P^T)^{-1}$

则 $A=(P^T)^{-1}BP^T$

$\Rightarrow A\alpha=(P^T)^{-1}BP^T\alpha$ 即 $\lambda\alpha=(P^T)^{-1}BP^T\alpha$.

$\therefore$ $B(P^T\alpha)=\lambda(P^T\alpha)$. 又 $\alpha\neq 0$, P可逆 $\Rightarrow P^T\alpha\neq 0$

故矩阵$(P^{-1}AP)^T$属于特征值λ的特征向量为 $P^T\alpha$.

类似地, 矩阵$B=P^{-1}AP$属于特征值λ的特征向量为 $P^{-1}\alpha$.

可见, $A\sim B\Rightarrow A$与B有相同的特征值. 但特征向量并不相同.

例5 设A,B均为n阶矩阵, 证明: AB与BA有相同的特征值.

例6 设λ为正交矩阵 A的特征值. 证明: $\dfrac{1}{\lambda}$也是 A的特征值.

例7 设$A=\begin{bmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&a\end{bmatrix}$可逆, λ为A^*的一个特征值且相应的特征向量为$\alpha=(1,b,1)^T$, 求a,b和λ的值.

例8 设 $A=\begin{bmatrix}3&2&2\\2&3&2\\2&2&3\end{bmatrix}$, $P=\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&0&1\end{bmatrix}$, $B=P^{-1}A^*P$,

求$B+2I$的特征值与特征向量.

例5 设A,B均为n阶矩阵, 证明: AB与BA有相同的特征值.

习题6. 1, A 19

证 (1) 设$\lambda\neq 0$是AB的特征值, α是对应特征向量, 则$\alpha\neq 0$,

$(AB)\alpha=\lambda\alpha$,

$\Rightarrow B(AB)\alpha=\lambda B\alpha$, $\Rightarrow (BA)(B\alpha)=\lambda(B\alpha)$,

而$B\alpha\neq 0$ (否则 $A(B\alpha)=0$,与$(AB)\alpha=\lambda\alpha\neq 0$矛盾)

故λ也是 BA的特征值, 相应的特征向量为$B\alpha$.

(2) 设$\lambda=0$是 AB的一个特征值, 则有 $\det(AB)=0$, 从而 $\det(BA)=\det(AB)=0$, 故0也是 BA的特征值.

总之, AB与BA有相同的特征值. $\Rightarrow \mathrm{tr}(AB)=\mathrm{tr}(BA)$

注意: 虽AB和BA有相同的特征值, 但特征向量并不相同.

例6 设λ为正交矩阵 A的特征值.证明$\dfrac{1}{\lambda}$也是A 的特征值.

证 若λ是正交矩阵 A的特征值, 则 A可逆, $\lambda\neq 0$, 且$|A-\lambda I|=0$.

$0=|A-\lambda I|=|A-\lambda AA^T|=|A(I-\lambda A^T)|$

$=|A||(I-\lambda A)^T|=|A||I-\lambda A|=|A|\lambda^n\left|\dfrac{1}{\lambda}I-A\right|$

所以 $\left|\dfrac{1}{\lambda}I-A\right|=0$, 故$\dfrac{1}{\lambda}$也是$A$的特征值.

正交矩阵的定义 $AA^T=A^TA=I$ 或 $A^T=A^{-1}$

例7 设$A=\begin{bmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&a\end{bmatrix}$可逆, λ为A^*的一个特征值且相应的特征向量为$\alpha=(1,b,1)^T$, 求a,b和λ的值.

解 $A^*\alpha=\lambda\alpha\Rightarrow AA^*\alpha=\lambda A\alpha$, $\Rightarrow |A|\alpha=\lambda A\alpha$. $|A|=3a-2$

$\Rightarrow A\alpha=\dfrac{3a-2}{\lambda}\alpha$ 即 $\begin{bmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&a\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\b\\1\end{bmatrix}=\dfrac{3a-2}{\lambda}\begin{bmatrix}1\\b\\1\end{bmatrix}$

解得 $a=2, b=-2, \lambda=4$ 或 $a=2, b=1, \lambda=1$.

例8 设 $A=\begin{bmatrix}3&2&2\\2&3&2\\2&2&3\end{bmatrix}$, $P=\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&0&1\end{bmatrix}$, $B=P^{-1}A^*P$,

求$B+2I$的特征值与特征向量.

解 $|A-\lambda I|=0 \Rightarrow \lambda_1=7, \lambda_2=\lambda_3=1. \Rightarrow |A|=7$.

$\lambda_1=7$ 对应特征向量为 $\xi_1=(1,1,1)^T$.

$\lambda_2=\lambda_3=1$对应特征向量为 $\xi_2=(1,-1,0)^T, \xi_3=(1,1,-2)^T$.

A^*的三个特征值为: 1, 7, 7, 对应特征向量为: ξ_1,ξ_2,ξ_3.

$B\sim A^*$, B的特征值为: 1, 7, 7, 特征向量: $P^{-1}\xi_1, P^{-1}\xi_2, P^{-1}\xi_3$.

$B+2I$ 的特征值为: 3, 9, 9, 特征向量: $P^{-1}\xi_1, P^{-1}\xi_2, P^{-1}\xi_3$.

其中$P^{-1}\xi_1=(0,1,1)^T$, $P^{-1}\xi_2=(-1,1,0)^T$, $P^{-1}\xi_3=(3,1,-2)^T$.

例9 设 $-1,1$ 都是3阶阵A的特征值，α_1,α_2为对应的特征向量，α_3满足$A\alpha_3=\alpha_2+\alpha_3$，$P=[\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3]$，则下列结论正确的是( ).

（A）P不可逆　　（B）P可逆且$P^{-1}AP=\mathrm{diag}(-1,1,1)$

（C）P可逆且$P^{-1}AP=\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}$（D）$P$是否可逆不能确定.

例10 设矩阵$A=\begin{pmatrix}0&0&1\\x&1&y\\1&0&0\end{pmatrix}$可相似对角化，求$x,y$满足的关系式.

习题6.1, 14

例11 设3阶矩阵A的特征值为$1,2,-3$，$f(x)=x^3-7x+5$，$B=f(A)$，求B.

习题6.2, 10

例9 设 $-1,1$ 都是3阶阵A的特征值，α_1,α_2为对应的特征向量，α_3满足$A\alpha_3=\alpha_2+\alpha_3$，$P=[\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3]$，则下列结论正确的是( ).

（A）P不可逆　　（B）P可逆且$P^{-1}AP=\mathrm{diag}(-1,1,1)$

（C）P可逆且$P^{-1}AP=\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}$（D）$P$是否可逆不能确定.

解

$$A[\alpha_1\ \ \alpha_2\ \ \alpha_3]=[-\alpha_1\ \ \alpha_2\ \ \alpha_2+\alpha_3]=[\alpha_1\ \ \alpha_2\ \ \alpha_3]\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}$$

设 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3=0$, (1)

左乘A得 $-k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3(\alpha_2+\alpha_3)=0$, (2)

(1)−(2)得 $2k_1\alpha_1-k_3\alpha_2=0$, $\Rightarrow k_1=0,\ k_3=0,\ k_2=0$.

所以$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关，$P$可逆.　　答案：C

例10

设矩阵$A=\begin{pmatrix}0&0&1\\x&1&y\\1&0&0\end{pmatrix}$可相似对角化，求$x,y$满足的关系式.

习题6.1, 14

解

A可相似对角化 $\Leftrightarrow$ A的所有特征值的几何重 数等于代数重数.

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda&0&1\\x&\lambda-1&y\\1&0&\lambda\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda+1)$$

故$\lambda=1$的几何重数为 2，即$r(I-A)=1$

$$\text{又}I-A=\begin{pmatrix}1&0&-1\\-x&0&-y\\-1&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1\\0&0&-y-x\\0&0&0\end{pmatrix}\Rightarrow y+x=0$$

例11 设3阶矩阵A的特征值为$1,2,-3$，$f(x)=x^3-7x+5$，$B=f(A)$，求B.

习题6.2, 10

解法1 3阶矩阵A有3个不同特征值，故A可对角化.

即存在可逆矩阵 P使得$P^{-1}AP=\mathrm{diag}(1,2,-3)$

$$\Rightarrow A=P\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&-3\end{pmatrix}P^{-1}$$

$B=A^3-7A+5I$

$$=P\left(\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&-3\end{pmatrix}^3-7\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&-3\end{pmatrix}+5\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\right)P^{-1}$$

$$=P\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}P^{-1}=-I$$

例11 设3阶矩阵A的特征值为$1,2,-3$，$f(x)=x^3-7x+5$，$B=f(A)$，求B.

习题6.2, 10

解法2 3阶矩阵A有3个不同特征值，故A可对角化.

即存在可逆矩阵 P使得

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&-3\end{pmatrix}=D$$

$B=A^3-7A+5I$

$\because P^{-1}BP=P^{-1}A^3P-7P^{-1}AP+5I=D^3-7D+5I$

$$=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}=-I\Rightarrow B=P(-I)P^{-1}=-I$$

例12 设 n阶非零矩阵A满足 $A^m=O$(m为正整数)，证明：A不相似于对角阵.

习题6. 2, A 12

例13 已知$A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&3&1\\1&1&1\end{pmatrix}$，

(1)求P，使$P^{-1}AP$为对角阵。

(2)求Q，使Q^TAQ为对角阵。

例14 设3阶矩阵A的特征值为$-1,1,2$，证明矩阵$B=(I+A)^2$可对角化，并求B的相似对角阵.

例12 设 n 阶非零矩阵 A 满足 $A^m=O$(m 为正整数), 证明:

A 不相似于对角阵. 习题6.2, A 12

证法一 首先, 由于 $A^m=O$, 从而 0 是 A 的 n 重特征值. 其次,

$A\neq O, r(A)\geq 1$, 所以 $Ax=0$ 的基础解系中最多含 $n-1$ 个解,

即 A 的特征值 0 的几何重数 $\leq n-1<n$ (代数重数),

所以 A 不相似于对角阵.

证法二 用反证法. 首先, 由于 $A^m=O$, 从而 A 的特征值全为零.

假设 A 相似于对角阵, 则存在可逆阵 P, 使得 $P^{-1}AP=O$.

从而得 $A=O$, 与题设中 A 为非零矩阵矛盾.

故 A 不能相似于对角阵.

例13 已知 $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&3&1\\1&1&1\end{pmatrix}$, (1)求 P, 使 $P^{-1}AP$ 为对角阵。(2)求 Q, 使 Q^TAQ 为对角阵。

解 $|\lambda I-A|=\lambda(\lambda-1)(\lambda-4)\Rightarrow\lambda_1=0,\lambda_2=1,\lambda_3=4$

解 $(0I-A)x=0$, 得 $\xi_1=(1,0,-1)^{\mathrm{T}}$;

解 $(1I-A)x=0$, 得 $\xi_2=(1,-1,1)^{\mathrm{T}}$;

解 $(4I-A)x=0$, 得 $\xi_3=(1,2,1)^{\mathrm{T}}$.

令 $P=[\xi_1,\xi_2,\xi_3]$, 则 $P^{-1}AP=diag\{0,1,4\}$.

令 $Q=[\frac{\xi_1}{\sqrt2},\frac{\xi_2}{\sqrt3},\frac{\xi_3}{\sqrt6}]$, 则 Q 为正交矩阵, 且 $Q^TAQ=diag\{0,1,4\}$.

例14 设3阶矩阵 A 的三个特征值为 $-1,1,2$, 证明矩阵 $B=(I+A)^2$ 可对角化，并求 B 的相似对角阵.

解 A 的三个特征值为 $-1,1,2$

$\Rightarrow$ $I+A$ 的三个特征值为 $0,2,3$.

$B=(I+A)^2$ 的三个特征值为 $0,4,9$.

因 B 的三个特征值互不相等，所以 B 可以对角化.

B 的相似对角阵为 $\begin{pmatrix}0&&\\&4&\\&&9\end{pmatrix}$.

难题选讲

例1 设 α,β 均为 n 维非零列向量, $A=\alpha\beta^T$, 证明:

(1) $r(A)=1$; (2) 0 为 A 的特征值且几何重数为 $n-1$;

(3) $\beta^T\alpha$ 也是 A 的特征值且 α 是相应的特征向量;

(4) 当 $\beta^T\alpha\neq 0$ 时, A 可以对角化. 习题6.2, A 20

证 (1) $\alpha\neq 0, r(\alpha)=1$ 是列满秩阵, 从而 $r(A)=r(\alpha\beta^T)=r(\beta^T)=1$.

(2) 由于 $r(A)=1<n$, 所以 $\lambda=0$ 是 A 的一个特征值. 由于 $Ax=0$ 的基础解系含 $n-r(A)=n-1$ 个向量, 即 0 的几何重数为 $n-1$.

(3) $A\alpha=(\alpha\beta^T)\alpha=\alpha(\beta^T\alpha)=(\beta^T\alpha)\alpha$, 所以 $\lambda=\beta^T\alpha$ 是 A 的特征值, 相应的特征向量为 α.

(4) 当 $\beta^T\alpha\neq 0$ 时, 由(2),(3)知 A 的每个特征值的几何重数都等于代数重数, 所以 A 可以对角化.

例2 设3阶实对称矩阵 A 的各行元素之和均为3，向量 $\alpha_1=(-1,2,-1)^T,\alpha_2=(0,-1,1)^T$ 是 $Ax=0$ 的解,

(1) 求 A 的特征值与特征向量;

(2) 求正交矩阵 Q 和 D，使得 $Q^TAQ=D$;

(3) 求 A 及 $(A-\frac{3}{2}I)^6$.

第6章习题 7

解(1) $\lambda=3$ 是 A 的一个特征值,对应特征向量为 $\xi_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.

又 $A\alpha_1=0\alpha_1$, $A\alpha_2=0\alpha_2$,

所以 0 是 A 的二重特征值.

0 特征值对应的特征向量为 $\alpha_1=\begin{pmatrix}-1\\2\\-1\end{pmatrix}$, $\alpha_2=\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$.

例2 设3阶实对称矩阵 A 的各行元素之和均为 3, 向量 $\alpha_1=(-1,2,-1)^T,\alpha_2=(0,-1,1)^T$ 是 $Ax=0$ 的解,

(2) 求正交矩阵 Q 和 D，使得 $Q^TAQ=D$;

解（2）将 α_1，α_2 正交化，得 $\beta_1=\alpha_1=(-1,2,-1)^T$,

$\beta_2=\alpha_2-\frac{\langle\alpha_2,\beta_1\rangle}{\langle\beta_1,\beta_1\rangle}\beta_1=(-\frac12,0,\frac12)^T$. 得正交向量组

$e_1=\frac{1}{\sqrt6}(-1,2,-1)^T$, $e_2=\frac{1}{\sqrt2}(-1,0,1)^T$, $e_3=\frac{1}{\sqrt3}(1,1,1)^T$.

令 $Q=(e_1,e_2,e_3)$, 则 Q 正交，且 $Q^TAQ=D=\begin{pmatrix}0&&\\&0&\\&&3\end{pmatrix}$.

例2　设3阶实对称矩阵 A 的各行元素之和均为 3,

向量 $\alpha_1=(-1,2,-1)^T,\alpha_2=(0,-1,1)^T$ 是 $Ax=0$ 的解,

(3) 求 A 及 $(A-\frac{3}{2}I)^6$.

解（3）

$$A=Q\begin{pmatrix}0&&\\&0&\\&&3\end{pmatrix}Q^T=(e_1,e_2,e_3)\begin{pmatrix}0&&\\&0&\\&&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e_1^T\\e_2^T\\e_3^T\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}.$$

$$A-\frac{3}{2}I=QDQ^T-\frac{3}{2}I=Q(D-\frac{3}{2}I)Q^T$$

$$\Rightarrow (A-\frac{3}{2}I)^6=Q(D-\frac{3}{2}I)^6Q^T=(\frac{3}{2})^6I$$

例3 设 A 为 n 阶实对称矩阵, $A^2=A,r(A)=r$

(1)求 A 的相似对角阵；(2)求行列式 $|2I-A|$;

(3)若将 A 的实对称条件去掉, A 还能否对角化，为什么？

解(1) A 为实对称矩阵, 故 A 可对角化, 设其相似对角阵为 D,

则 $r(D)=r(A)=r$, D 的对角元为 A 的所有特征值.

又由 $A^2-A=O$ 可知 A 的特征值为1或0, 于是由 $r(D)=r$ 知,

$$D=\begin{pmatrix}1&&&&&\\&\ddots&&&&\\&&1&&&\\&&&0&&\\&&&&\ddots&\\&&&&&0\end{pmatrix}$$ 其中1的个数为 r 个

例3 设 A 为 n 阶实对称矩阵, $A^2=A,r(A)=r$

(1)求 A 的相似对角阵；(2)求行列式 $|2I-A|$;

(3)若将 A 的实对称条件去掉, A 还能否对角化，为什么？

解(2) A 的特征值为1(r重)和0($n-r$重),

记 $f(x)=2-x$,

则 $f(1)=1$ 是 $f(A)=2I-A$ 的 r 重特征值,

$f(0)=2$ 是 $f(A)=2I-A$ 的 $n-r$ 重特征值,

$\Rightarrow |2I-A|=1^r\cdot 2^{n-r}=2^{n-r}$

$$A\sim\begin{pmatrix}1&&&&&\\&\ddots&&&&\\&&1&&&\\&&&0&&\\&&&&\ddots&\\&&&&&0\end{pmatrix}$$

其中1的个数为 r 个

例3 设 A 为 n 阶实对称矩阵, $A^2=A,r(A)=r$

(1)求 A 的相似对角阵；(2)求行列式 $|2I-A|$;

(3)若将 A 的实对称条件去掉, A 还能否对角化，为什么？

解(3) $A^2=A\Rightarrow A$ 的特征值为1或0.

如果 $r=0$, 即 $A=O$,则 A 可对角化,其相似对角阵 $D=O$;

如果 $r=n$,则 A 可逆, $A^2=A\Rightarrow A^{-1}AA=A^{-1}A=I$

$\Rightarrow A=I$, A 可对角化.

如果 $0<r<n$

则特征值0的几何重数是 $n-r(A)$, 特征值1的几何重数是 $n-r(I-A)$

$A^2-A=O\Leftrightarrow A(A-I)=O\Rightarrow r(A)+r(A-I)\le n$

又 $r(-A)=r(A),(-A)+(A-I)=-I$, $\Rightarrow r(A)+r(A-I)\ge n$

$\Rightarrow r(A)+r(A-I)=n$ 即 $r(A)+r(I-A)=n$, 故 A 可对角化.

A 可对角化 $\Leftrightarrow n-r(A)+n-r(I-A)=n\Leftrightarrow r(A)+r(I-A)=n$

例3 设 A 为 n 阶实对称矩阵, $A^2=A,r(A)=r$

(1)求 A 的相似对角阵；(2)求行列式 $|2I-A|$;

(3)若将 A 的实对称条件去掉, A 还能否对角化，为什么？

解(3) 如果 $0<r<n$　方法2证明A可对角化

令 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$,

则由 $AA=A$,有 $A(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$,

即 $(A\alpha_1,A\alpha_2,\cdots,A\alpha_n)=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$, 所以 $A\alpha_j=1\alpha_j,(j=1,2,\cdots,n)$

又 $r(A)=r>0$,故 A 有特征值1,且属于1有 r 个线性无关的特征向量

又因 $r(A)<n$,故有特征值0,属于0有 $n-r$ 个线性无关特征向量.

综上, A 有 n 个线性无关的特征向量,可对角化,其相似对角阵为 $D=\mathrm{diag}(1,1,\cdots,1,0,\cdots,0)$(1 的个数为 r).

例4　设3阶实对称矩阵 A 的秩为2, $\lambda_1=\lambda_2=6$ 是 A 的二重特征值，且 $\alpha_1=(1,1,0)^T,\alpha_2=(2,1,1)^T,\alpha_3=(-1,2,-3)^T$ 都是 A 的属于特征值 6的特征向量,求矩阵 A.　　习题6.2, 15

解 $r(A)=2<3$, $\Rightarrow |A|=0\Rightarrow 0$ 是 A 的特征值.

设 $\alpha_3=(x_1,x_2,x_3)^T$ 是 A 的属于特征值 0的特征向量,

则 $\alpha_3\perp\alpha_1$, $\alpha_3\perp\alpha_2$. 将 α_1, α_2 正交化得 $\xi_1=(1,1,0)^T,\xi_2=(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},1)^T$

$$\Rightarrow\begin{cases}x_1+x_2=0\\2x_1+x_2+x_3=0\end{cases}$$

$\Rightarrow \alpha_3=(1,-1,-1)^T$

$$令Q=(\frac{\xi_1}{\|\xi_1\|},\frac{\xi_2}{\|\xi_2\|},\frac{\alpha_3}{\|\alpha_3\|})=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt6}&\frac{1}{\sqrt3}\\\frac{1}{\sqrt2}&-\frac{1}{\sqrt6}&-\frac{1}{\sqrt3}\\0&\frac{2}{\sqrt6}&-\frac{1}{\sqrt3}\end{pmatrix},$$

$$则A=Q\begin{pmatrix}6&&\\&6&\\&&0\end{pmatrix}Q^T=\begin{pmatrix}4&2&2\\2&4&-2\\2&-2&4\end{pmatrix}$$

例5 设A为n阶实对称矩阵，试证：对任意正奇数k，必有实对称矩阵B，使$A=B^k$。

证 A为n阶实对称矩阵,所以必存在正交矩阵Q，使得

$$Q^TAQ=\Lambda=\begin{pmatrix}\lambda_1&&&\\&\lambda_2&&\\&&\ddots&\\&&&\lambda_n\end{pmatrix},\text{则}A=Q\Lambda Q^T,\text{令}\tilde{\Lambda}=\begin{pmatrix}\sqrt[k]{\lambda_1}&&&\\&\sqrt[k]{\lambda_2}&&\\&&\ddots&\\&&&\sqrt[k]{\lambda_n}\end{pmatrix}$$

则$A=\tilde{\Lambda}^k$，令$B=Q\tilde{\Lambda}Q^T$，则$B^k=(Q\tilde{\Lambda}Q^T)^k=Q\Lambda Q^T=A.$

注：因为k为正奇数，所以不论A的特征值λ_i是正是负，$\sqrt[k]{\lambda_i}$均有意义.

练习题

1、当$x=$____，$y=$____时，矩阵A与B相似，其中

$$A=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&0&1\\0&1&x\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&y&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$$

解 A,B都是实对称矩阵，故可以对角化，它们相似的充要条件是有相同的特征值。

于是由$2+0+x=2+y-1$以及$|A|=|B|$，得$y=1,\ x=0.$

应填 0, 1.

2、设λ_1,λ_2是矩阵A的不同特征值，ξ_1和ξ_2分别是λ_1和λ_2对应的特征向量，则当( )时，$\xi=k_1\xi_1+k_2\xi_2$必是A的特征向量. **(D)**

$(A)k_1=0$且$k_2=0$　　$(B)k_1\neq 0,k_2\neq 0$

$(C)k_1k_2\neq 0$　　$(D)k_1=0,k_2\neq 0$

设λ_1,λ_2是矩阵A的两个不同特征值，x_i为属于λ_i的特征向量$(i=1,2)$.则x_1+x_2不是A的特征向量.

3、设向量$\alpha=(1,1,1)^T,\beta=(1,0,k)^T$，若方阵$\alpha\beta^T$有特征值3，则$k=$___.

解 $r(\alpha\beta^T)=1$，所以矩阵$\alpha\beta^T$至少有2重特征值0，

矩阵$\alpha\beta^T$的三个特征值为3, 0, 0.

$$\mathrm{tr}(\alpha\beta^T)=3+0+0=3,$$

而　$\mathrm{tr}(\alpha\beta^T)=\mathrm{tr}(\beta^T\alpha)=1+k$

所以　$k=2.$

设A是$m\times n$矩阵，B是$n\times m$矩阵，则$\mathrm{tr}(AB)=\mathrm{tr}(BA)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}b_{ji}$.

4、若方阵A满足$A^2=A$，证明：A的特征值必为0或1.

习题6. 1, A 17　**幂等矩阵**

证法1 设λ是A的特征值，α是对应的特征向量，则$\alpha\neq 0, A\alpha=\lambda\alpha.$

$\Rightarrow A^2\alpha=A(A\alpha)=\lambda A\alpha=\lambda^2\alpha$，又$A^2=A\Rightarrow A^2\alpha=A\alpha=\lambda\alpha$

$\Rightarrow(\lambda^2-\lambda)\alpha=0$，又$\alpha\neq 0$，故$\lambda^2-\lambda=0\Rightarrow\lambda=0$或1.

证法2 设λ是A的特征值，则$\lambda^2-\lambda$是A^2-A的特征值，

由$A^2-A=O$，得$\lambda^2-\lambda=0$，故$\lambda=0$或1.

注意：虽然A的特征值必为0或1，但是0,1未必都能取到.

例如$\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$.

5、设3阶矩阵A满足$|2I+A|=0, A^TA=I, |A|<0$，求A^*的一个特征值.

解 因为$|A^TA|=|I|=1$，即$|A|^2=1.$

又$|A|<0$，所以$|A|=-1.$

又因A有特征值-2，则A^{-1}有特征值$-\frac{1}{2}$

而$A^*=|A|A^{-1}=-A^{-1}$

$\Rightarrow A^*$有一个特征值为$\frac{1}{2}$.

第7章 二次型

习题课

内容小结

1、实二次型及其矩阵表示

$$f = x^{\mathrm{T}}Ax$$
$$= a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \cdots + 2a_{1n}x_1x_n + a_{22}x_2^2 + 2a_{23}x_2x_3 + \cdots + 2a_{2n}x_2x_n + \cdots + a_{nn}x_n^2$$

其中$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}} \in \mathrm{R}^n, A=(a_{ij})_{n\times n}$为实对称矩阵.

称A为二次型的矩阵. 矩阵A的秩称为二次型的秩.

对于任意n阶矩阵B, $f(x)=x^TBx$也是n元二次型,

该二次型的矩阵为$A=\frac{1}{2}(B+B^T)$.

2 化二次型为标准型

（1）正交变换法

对于实二次型 $f(x)=x^TAx$(其中A为n阶实对称矩阵)

总存在正交变换 $x=Py$（P为正交矩阵）,使得

$$f(x)=x^{\mathrm{T}}Ax=\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2+\cdots+\lambda_ny_n^2 \quad \text{(标准型)}$$

其中$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$是矩阵$A$的$n$个特征值.

$P=[p_1,p_2,\cdots,p_n], p_1,p_2,\cdots,p_n$分别是$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$对应的$n$个正交特征向量.

（2）配方法

注意（1）正交变换法与配方法所化标准型可能不一样；
（2）配方法所得标准型的系数不一定是特征值.

惯性定律：设二次型$f(x)=x^{\mathrm{T}}Ax$的秩为r，则不论用怎样的可逆线性变换把f化成标准形，标准形中系数为正的项的个数p（从而系数为负的项的个数$r-p$）由f本身唯一确定，并不依赖于所用的线性变换.

正（负）惯性指数：标准型中正（负）系数的个数，也就是A的正（负）特征值的个数.

二次型的规范形是唯一的：

$$f=z_1^2+\cdots+z_p^2-z_{p+1}^2-\cdots-z_r^2$$

3 正定二次型与正定矩阵

n元二次型$f=x^TAx$正定(对应实对称阵 A是正定矩阵)充分必要条件为下列任 意一条：

(1)对任意的非零列向量 $x, f=x^TAx>0$.

(2) f的正惯性指数为 n;

(3)A的特征值全为正数；

(4)存在可逆阵 M,使得$A=M^TM$;

(5)A与单位矩阵合同 .

(6)A的各阶顺序主子式都大于零.

基本要求

1、会用正交变换法化二次型为标准型，能写出正交矩阵、正交变换、标准型

2、会用配方法化二次型为标准型

3、能够判定二次型和实对称矩阵的正定性

4、了解相似矩阵、合同矩阵的性质

例1 化二次型 $f = x_1^2 + 2x_2^2 + 5x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 6x_2x_3$ 成标准形，并求所用的可逆线性变换矩阵.

解法1（配方法）由于 f 中含变量 x_1 的平方项，故把含 x_1 的项归并起来，配方可得

$$
\begin{aligned}
f &= x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2^2 + 5x_3^2 + 6x_2x_3 \\
&= (x_1 + x_2 + x_3)^2 - x_2^2 - x_3^2 - 2x_2x_3 + 2x_2^2 + 5x_3^2 + 6x_2x_3 \\
&= (x_1 + x_2 + x_3)^2 + x_2^2 + 4x_2x_3 + 4x_3^2, \\
&= (\underline{x_1 + x_2 + x_3})^2 + (\underline{x_2 + 2x_3})^2 = y_1^2 + y_2^2 \quad \text{为标准形}
\end{aligned}
$$

所做的线性变换为

$$
\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 + x_3, \\ y_2 = x_2 + 2x_3, \\ y_3 = x_3, \end{cases}
\text{即}
\begin{cases} x_1 = y_1 - y_2 + y_3, \\ x_2 = y_2 - 2y_3, \\ x_3 = y_3, \end{cases}
$$

可逆变换矩阵为

$$
C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

解法2（正交变换法） $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$

$$
|\lambda I - A| = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0, \lambda_2 = 4 + \sqrt{10}, \lambda_3 = 4 - \sqrt{10}
$$

解 $(0I - A)x = 0$ 得 $\lambda_1 = 0$ 对应的特征向量 $\xi_1 = (1, -2, 1)^{\mathrm{T}}$

同理，解得 λ_2 对应的特征向量 $\xi_1 = (-5 + 2\sqrt{10}, \sqrt{10}, 5)^{\mathrm{T}}$

解得 λ_3 对应的特征向量 $\xi_3 = (5 + 2\sqrt{10}, \sqrt{10}, -5)^{\mathrm{T}}$

令 $P = \begin{pmatrix} \dfrac{\xi_1}{\|\xi_1\|} & \dfrac{\xi_2}{\|\xi_2\|} & \dfrac{\xi_3}{\|\xi_3\|} \end{pmatrix}$,

则正交变换 $x = Py$ 可将二次型化为标准型

$$
f = (4 + \sqrt{10})y_2^2 + (4 - \sqrt{10})y_3^2
$$

注意： 二次型标准型不唯一，标准型中的系数不一定是特征值.

例2 已知实二次型 $f = x^T Ax$ 在正交变换 $x = Py$ 下的标准型为 $y_1^2 + y_2^2$，且 P 的第3列为 $(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2})^T$，求

（1）实对称矩阵 A；（2）证明 $A + I$ 是正定矩阵.

解(1) A 的特征值为 1,1,0，且属于0的特征向量为 $\alpha_3 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$,

设特征值 1 对应的特征向量为 $x = (x_1, x_2, x_3)^T$

则 $\alpha_3^{\mathrm{T}} x = 0$，即 $x_1 + x_3 = 0$,

$$
\Rightarrow \xi_1 = (0,1,0)^T, \xi_2 = (-1,0,1). \Rightarrow \xi_1 \text{与} \xi_2 \text{正交}
$$

令 $\alpha_1 = (0,1,0)^T, \alpha_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,0,1)$. 则 $P = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]$ 为正交阵

且 $P^{\mathrm{T}} AP = \mathrm{diag}(1,1,0) = D$

$$
A = PDP^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.
$$

解(2) $(A + I)^{\mathrm{T}} = A + I$

$A + I$ 的所有特征值 2,2,1 都大于0，故 $A + I$ 正定.

例3 设$f(x_1,x_2,x_3)=(1-a)x_1^2+(1-a)x_2^2+2x_3^2$ $+2(1+a)x_1x_2$的秩为2,

（1）求a；(2)求正交变换化二次型为标准型；

（3）指出$f(x_1,x_2,x_3)=1$表示的曲线名称；

（4）求方程$f(x_1,x_2,x_3)=0$的解.

解（1）$A=\begin{pmatrix}1-a & 1+a & 0\\ 1+a & 1-a & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$,

$r(A)=2\Rightarrow |A|=0\Rightarrow a=0$，故$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$.

（2）A的特征值为0,2,2.

因此f在正交变换下的标准型 为$2y_2^2+2y_3^2$.

求正交变换留给同学们完成

例3 设$f(x_1,x_2,x_3)=(1-a)x_1^2+(1-a)x_2^2+2x_3^2$ $+2(1+a)x_1x_2$的秩为2,

（3）指出$f(x_1,x_2,x_3)=1$表示的曲线名称；

（4）求方程$f(x_1,x_2,x_3)=0$的解.

解(3) 二次曲面 $f(x_1,x_2,x_3)=1$的标准方程为 $2y_2^2+2y_3^2=1$. 这是一个圆柱面.

解(4)

$$f=(x_1+x_2)^2+2x_3^2=0$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x_1+x_2=0\\ x_3=0\end{cases}$$

$$\Rightarrow x=k\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}(k\in\mathbf{R})$$

如何判定两个矩阵等价、相似、合同？

(1)A,B是同型矩阵，则

A,B等价 $\Leftrightarrow$ A经初等变换得$B\Leftrightarrow r(A)=r(B)$

$\Leftrightarrow$ 有可逆矩阵P,Q,使$PAQ=B$

(2)A,B是同阶方阵，则

A,B相似 $\Leftrightarrow$ 有可逆矩阵P,使$P^{-1}AP=B$

$A\sim B\Rightarrow |A|=|B|,r(A)=r(B),\mathrm{tr}(A)=\mathrm{tr}(B)$

两个可对角化的同阶方阵相似 $\Leftrightarrow$ 它们有相同的特征值

(3)A,B是同阶方阵，则

A,B合同 $\Leftrightarrow$ 有可逆矩阵C,使$C^{\mathrm T}AC=B$

实对称阵A,B合同 $\Leftrightarrow$ A,B有相同的正负特征值个数

$\Leftrightarrow$ $x^{\mathrm T}Ax,x^{\mathrm T}Bx$有相同的正负惯性指数(相同规范型)

$\Leftrightarrow$ $x^{\mathrm T}Ax,x^{\mathrm T}Bx$有相同的秩及正惯性指数

A,B相似 $\Rightarrow$ A,B等价；A,B合同 $\Rightarrow$ A,B等价；

两个实对称矩阵A,B相似，则A,B必合同.

例4 设$A=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$, 问$A,B$是否等价，合同，相似？

解 (1)因为$r(A)=r(B)$，故A,B等价.

(2) A,B都是实对称矩阵

法1 $f(x_1,x_2,x_3)=x^TAx=x_2^2+2x_1x_3$，令$\begin{cases}x_1=y_1+y_3,\\x_3=y_1-y_3,\\x_2=y_2,\end{cases}$

可逆线性变换$x=Cy$ 化f为标准型$f=2y_1^2+y_2^2-2y_3^2$.

又$g(x_1,x_2,x_3)=x^TBx=x_1^2+2x_2^2-x_3^2$

f,g有相同的正负惯性指数，故A与B合同.

法2 $|\lambda I-A|=(\lambda-1)^2(\lambda+1)=0\Rightarrow\lambda_1=\lambda_2=1,\lambda_3=-1.$

$|\lambda I-B|=0\Rightarrow\lambda_1=1,\lambda_2=2,\lambda_3=-1.$

A,B有相同的正负特征值个数，故A与B合同.

(3) A,B的特征值不相同，故A与B不相似.

练习 设$A=\begin{pmatrix}2&1&0\\1&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3&0&0\\0&1&0\\0&0&3\end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&3\end{pmatrix}$,

哪些矩阵相似？哪些合同？为什么？

答案： A,B相似, A,B合同；B,D不相似, B,D合同; A,D不相似, A,D合同

解 A,B,D都是实对称矩阵$|\lambda I-A|=0\Rightarrow\lambda_1=\lambda_2=3,\ \lambda_3=1$

(1) A,B有相同的特征值$\Rightarrow A,B$相似，且A,B合同.

(2) B,D的特征值不相同，所以B,D不相似.

B,D有相同的正负特征值个数$\Rightarrow B,D$合同

(3)利用相似合同的传递性$\Rightarrow A,D$不相似，A,D合同.

例5 设A正定，证明：A^{-1},A^m都是正定矩阵（m为正整数）

证 因 A正定

故A的所有特征值$\lambda_1,\cdots,\lambda_n$都大于0

从而A^{-1}的所有特征值$\frac{1}{\lambda_1},\cdots,\frac{1}{\lambda_n}$都大于0

A^m的所有特征值$\lambda_1^m,\cdots,\lambda_n^m$都大于0

所以A^{-1}和A^m都正定.

例6 二次型$f(x_1,x_2,x_3)=(x_1+x_2)^2+(x_2-x_3)^2+(x_3+x_1)^2$的秩等于多少？

错解 令$x_1+x_2=y_1, x_2-x_3=y_2, x_3+x_1=y_3$，

则 $f=y_1^2+y_2^2+y_3^2$，所以f的秩为3. ×

错因：$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$不是可逆线性变换.

正解：$f=2x_1^2+2x_2^2+2x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3-2x_2x_3$,

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

故$r(f)=r(A)=2$.

16

例7 实数a_1,a_2,a_3满足什么条件时，二次型
$f(x_1,x_2,x_3)=(x_1+a_1x_2)^2+(x_2+a_2x_3)^2+(x_3+a_3x_1)^2$
为正定二次型？

解法1 显然$f(x)\geq 0$,且$f(0)=0$

f 正定 $\Leftrightarrow \forall x\neq 0, f(x)>0 \Leftrightarrow$ 当且仅当$x=0$时$f(x)=0$

$\Leftrightarrow$ 当且仅当$x=0$时$x_1+a_1x_2=x_2+a_2x_3=x_3+a_3x_1=0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1+a_1x_2=0 \\ x_2+a_2x_3=0 \\ x_3+a_3x_1=0 \end{cases}\text{只有零解}\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & a_1 & 0 \\ 0 & 1 & a_2 \\ a_3 & 0 & 1 \end{vmatrix}\neq 0 \Leftrightarrow a_1a_2a_3\neq -1$$

解法2 令$y_1=x_1+a_1x_2, y_2=x_2+a_2x_3, y_3=x_3+a_3x_1$

即$y=Cx$,其中$C=\begin{pmatrix} 1 & a_1 & 0 \\ 0 & 1 & a_2 \\ a_3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，若$C$可逆，即$a_1a_2a_3\neq -1$

$\Rightarrow f=y_1^2+y_2^2+y_3^2$ 正定，从而原二次型正定。

17

例8 n元二次型$f=x^TAx$正定的充要条件是(　)

A 存在正交矩阵P,使$P^TAP=I$

B 负惯性指数为零

C A与单位阵合同

D 存在n阶矩阵C，使得$A=C^TC$

解 应选（C）

（A）是充分条件

（B）是必要条件

（D）中C可逆才行

18

例9 方阵A的秩等于它的非零特征值的个数，对吗？

答 实对称矩阵A的秩等于它的非零特征值的个数.

但对于非实对称矩阵，未必有此结论.

例如$A=\begin{pmatrix}0&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$, $r(A)=1$,

$$|\lambda I-A|=\det\begin{pmatrix}\lambda&-1&-1\\0&\lambda&0\\0&0&\lambda\end{pmatrix}=\lambda^3$$

A的三个特征值全部为 0.

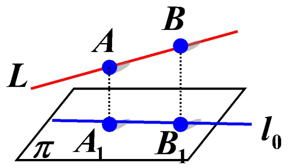
若A为方阵，$r(A)=1,\Rightarrow 0$是A的至少$n-1$重特征值.

若$r(A)=1$,且A是实对称阵,$\Rightarrow 0$是A的$n-1$重特征值.

例10 求直线$L: x-1=y=1-z$在平面$\pi: x-y+2z=1$上的投影直线l_0的方程，并求l_0绕y轴旋转面方程.

解（1） 方法 1 习题7.1（A）7

在直线上取两点 $A(1,0,1), B(1,-1,-2)$



求得A,B在π上的投影点

$A_1(\frac{2}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}), B_1(-\frac{2}{3},-\frac{1}{3},\frac{2}{3})$

连接A_1,B_1得投影线l_0的方程为

$$\frac{x-\frac{2}{3}}{4}=\frac{y-\frac{1}{3}}{2}=\frac{z-\frac{1}{3}}{-1} \quad \text{或} \begin{cases} x=\frac{2}{3}+4t, \\ y=\frac{1}{3}+2t, \\ z=\frac{1}{3}-t. \end{cases}$$

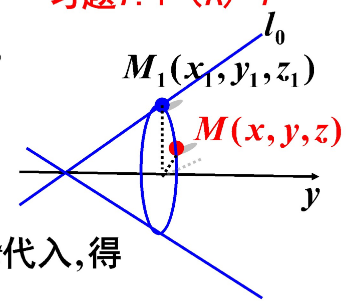
例10 求直线$L: x-1=y=1-z$在平面$\pi: x-y+2z=1$上的投影直线l_0的方程，并求l_0绕y轴旋转面方程.

解（2） 习题7.1（A）7

在旋转面上任取一点 $M(x,y,z)$,

则存在l_0上的点$M_1(x_1,y_1,z_1)$,

满足 $y_1=y,\ x_1^2+z_1^2=x^2+z^2$



将$x_1=\frac{2}{3}+4t, y_1=\frac{1}{3}+2t, z_1=\frac{1}{3}-t$代入,得

$$y=\frac{1}{3}+2t,\quad x^2+z^2=17t^2+\frac{14}{3}t+\frac{5}{9}$$

消去t，得旋转面方程：$4x^2-17y^2+4z^2+2y-1=0.$

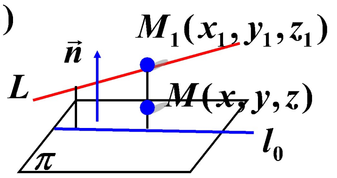
例10 求直线$L: x-1=y=1-z$在平面$\pi: x-y+2z=1$上的投影直线l_0的方程，并求l_0绕y轴旋转面方程.

解（1） 方法 2 　　习题7.1（A） 7

以L为准线,母线平行于π的法向量的柱面S与π的交线即为l_0

在S上任取$M(x,y,z)$，$\vec{n}=(1,-1,2)$

过$M(x,y,z)$且平行于母线$\vec{n}$的直线交L于$M_1(x_1,y_1,z_1)$，



$$\frac{x_1-x}{1}=\frac{y_1-y}{-1}=\frac{z_1-z}{2}$$

将$x_1=x+t, y_1=y-t, z_1=z+2t$ 代入L方程，并消去t,得

$$x-3y-2z+1=0$$

故投影线l_0的方程为$\begin{cases} x-y+2z-1=0 \\ x-3y-2z+1=0 \end{cases}$ 或$\begin{cases} x=2y \\ z=-\frac{1}{2}(y-1) \end{cases}$

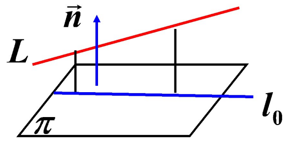
例10 求直线$L: x-1=y=1-z$在平面$\pi: x-y+2z=1$上的投影直线l_0的方程，并求l_0绕y轴旋转面方程.

解（1） 方法 3 　　习题7.1（A） 7

过L且垂直于π的平面（投影柱面） S与π的交线即为l_0

过L的平面束方程为

$$\mu(x-y-1)+\lambda(y+z-1)=0$$



$$\vec{n}_1=(\mu,\lambda-\mu,\lambda)\perp\vec{n}=(1,-1,2)$$

$$\mu-\lambda+\mu+2\lambda=0\Rightarrow\lambda=-2\mu$$

$$\Longrightarrow x-3y-2z+1=0$$

故投影线l_0的方程为

$$\begin{cases} x-y+2z-1=0 \\ x-3y-2z+1=0 \end{cases} \quad 或\begin{cases} x=2y \\ z=-\frac{1}{2}(y-1) \end{cases}$$

例11 设实对称矩阵A满足$A^4-A^3+A^2-3A+2I=0$,

(1) A是否为正定矩阵？为什么？

(2) 求矩阵A.

解(1) 设λ为的特征值,则

$$\lambda^4-\lambda^3+\lambda^2-3\lambda+2=0$$

即$(\lambda-1)^2(\lambda^2+\lambda+2)=0$

实对称矩阵的特征值都是实数

$\Rightarrow \lambda=1$是A的所有特征值

故A正定。

(2) 存在正交矩阵Q,使$Q^TAQ=I$

$$\Rightarrow A=QIQ^T=I$$

例12 设A是n阶正定矩阵, B是n阶反对称实矩阵, 证明矩阵$A-B^2$是正定阵.

证 首先证明$A-B^2$是实对称矩阵

$$A^T=A,\quad B^T=-B,$$

$$(A-B^2)^T=A^T-(B^T)^2=A-B^2$$

所以$A-B^2$是实对称矩阵.

其次，证明正定性.

$$\forall x\in \mathbf{R}^n, x\neq 0,\quad x^TAx>0$$

$$x^T(A-B^2)x=x^TAx-x^TB^2x$$

$$=x^TAx+x^TB^TBx=x^TAx+\underbrace{(Bx)^TBx}_{\geq 0}>0$$

所以$A-B^2$是正定矩阵.

例13 设A, B分别为m, n阶正定矩阵, 证明

$C=\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$也是正定矩阵.

证法1 (定义法)

A,B是实对称矩阵$\Rightarrow C$是实对称矩阵

$\forall x\in \mathbf{R}^m, y\in \mathbf{R}^n$, 令$z=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\in \mathbf{R}^{m+n}$, 且$z\neq 0$.

则x,y不全为0, 不妨设$x\neq 0$.

则$z^TCz=\left(x^T,y^T\right)\begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=x^TAx+y^TBy$

A正定, $x\neq 0\Rightarrow x^TAx>0$, B正定, $\Rightarrow y^TBy\geq 0$,

故$z^TCz>0$,即C为正定矩阵。

例13 设A, B分别为m, n阶正定矩阵, 证明

$C=\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$也是正定矩阵.

证法2 (证明特征值全部大于零)

$$|\lambda I-C|=\det\begin{bmatrix} \lambda I-A & O \\ O & \lambda I-B \end{bmatrix}$$

$$=|\lambda I-A|\cdot|\lambda I-B|$$

C的特征多项式等于A与B的特征多项式的乘积

故A与B的全部特征值组成C的全部特征值。

由于A,B正定, 特征值全部大于0,

故C的特征值全部大于0,即C为正定矩阵。

例13 设A, B分别为m, n阶正定矩阵, 证明

$$C=\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$$也是正定矩阵.

证法3 (证明与单位矩阵合同)

A,B正定, 故存在可逆矩阵M,N,使$A=M^TM,B=N^TN$

从而$C=\begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} M^TM & O \\ O & N^TN \end{bmatrix}$

$$=\begin{bmatrix} M^T & O \\ O & N^T \end{bmatrix}\begin{bmatrix} M & O \\ O & N \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} M & O \\ O & N \end{bmatrix}^T\begin{bmatrix} M & O \\ O & N \end{bmatrix}$$

令$P=\begin{bmatrix} M & O \\ O & N \end{bmatrix}$,则$|P|=|M|\cdot|N|\neq 0$,$P$可逆, 且$C=P^TP$

故C正定。

例13 设A, B分别为m, n阶正定矩阵, 证明

$$C=\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$$也是正定矩阵.

证法4 (证明顺序主子式都大于0)

$$C=\begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix}$$

C的前m阶顺序主子式为A各阶顺序主子式,

由于A正定, 故全部大于0.

C的$m+1$至$m+n$阶顺序主子式等于$|A|$乘以B对应的顺序主子式, 故也全部大于0.

所以C是正定矩阵。

例14 设A是n阶实对称阵, x是R^n中的任意非零列向量,

称
$$R(x)=\frac{x^TAx}{x^Tx}$$
为关于矩阵A的瑞利(*Rayleigh*)商.

试证瑞利原理: 设A的全部特征值按照从小到大排列成$\lambda_1\le\lambda_2\le\cdots\le\lambda_n$, ξ_1为对应λ_1的特征向量, ξ_n为对应λ_n的特征向量, 则

$$\lambda_1\le R(x)\le\lambda_n$$

且$\lambda_1=\min\limits_{x\neq 0}R(x)=R(\xi_1)$,$\lambda_n=\min\limits_{x\neq 0}R(x)=R(\xi_n)$.

例14 设λ_1与λ_n是实对称矩阵A的最小与最大特征值，

证明 $(1)\lambda_1 \le \dfrac{x^T Ax}{x^T x} \le \lambda_n$; $(2)\lambda_1 = R(\xi_1), \lambda_n = R(\xi_n)$.

证（1）设$f = x^T Ax$,则存在正交变换$x = Py$,化f为标准形

$$\lambda_1 y^T y \le f = \lambda_1 y_1^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2 \le \lambda_n (y_1^2 + \cdots + y_n^2) = \lambda_n y^T y$$

即$\lambda_1 y^T y \le x^T Ax \le \lambda_n y^T y$

由于$x^T x = (Py)^T (Py) = y^T (P^T P) y = y^T Iy = y^T y$,

$$\Rightarrow \lambda_1 x^T x \le x^T Ax \le \lambda_n x^T x \quad \because x \ne 0, \therefore x^T x = \|x\|^2 > 0$$

故 $\lambda_1 \le \dfrac{x^T Ax}{x^T x} \le \lambda_n$

证（2） $A\xi_1 = \lambda_1 \xi_1, \Rightarrow \xi_1^T A\xi_1 = \xi_1^T \lambda_1 \xi_1 = \lambda_1 \xi_1^T \xi_1$

$\therefore R(\xi_1) = \lambda_1$. 即$R(x)$的最小值在对应特征向量处取得。

同理可证, $R(x)$的最大值λ_n也在对应特征向量处取得。

由于 $$R(x) = \frac{x^T Ax}{x^T x} = \frac{x^T Ax}{\|x\|^2}$$

$$= \left(\frac{x}{\|x\|}\right)^T A \left(\frac{x}{\|x\|}\right) = y^T Ay, \quad \|y\| = 1.$$

则瑞利原理可以写成如下的等价形式:

二次型$f(x) = x^T Ax$在$\|x\| = 1$条件下的最大(小) 值等于A的最大(小)特征值，且最大(小)值在对 应的单位特征向量处取到.

练习1 已知实二次型$f(x_1, x_2, x_3) = a(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3$经正交变换$x = Py$可化为标准型$f = 6y_1^2$,求$a$

解 $$A = \begin{pmatrix} a & 2 & 2 \\ 2 & a & 2 \\ 2 & 2 & a \end{pmatrix} \text{与} B = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{相似}$$

故$\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(B)$, 即$3a = 6 \Rightarrow a = 2$.

或 $$|A| = \begin{vmatrix} a & 2 & 2 \\ 2 & a & 2 \\ 2 & 2 & a \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow a = 2$$

或 $\mathrm{r}(A) = \mathrm{r}(B) = 1 \quad \Rightarrow a = 2$

练习2 设矩阵$A=\begin{pmatrix}2&2&0\\8&2&0\\0&a&6\end{pmatrix}$相似于对角阵.(1)求$a$;

(2)$f=x^TAx$是否是一个二次型？如果是求一个正 交变换, 将$f=x^TAx$化为标准型;如果不是, 请 说明理由.

解 $|\lambda I-A|=0\Rightarrow\lambda_1=\lambda_2=6,\lambda_3=-2$

$3-r(6I-A)=2\Rightarrow r(6I-A)=1\Rightarrow a=0$

$f=x^TAx$是二次型, f的矩阵$B=\frac{1}{2}(A^T+A)=\begin{pmatrix}2&5&0\\5&2&0\\0&0&6\end{pmatrix}$

$B=C+2I,C=\begin{pmatrix}0&5&0\\5&0&0\\0&0&4\end{pmatrix}$, C的特征值为$4,5,-5$

$\Rightarrow B$的特征值为$6,7,-3$

分别求得特征值$6,7,-3$对应的特征向量$\xi_1=(0,0,1)^T$, $\xi_2=(1,-1,0)^T,\xi_3=(1,1,0)^T$, 令$Q=[\xi_1,\frac{1}{\sqrt{2}}\xi_2,\frac{1}{\sqrt{2}}\xi_3]$,

则$x=Qy$化f为$f=6y_1^2+7y_2^2-3y_3^2$

练习3 设3阶矩阵A有特征值$-1,1$,对应特征向量分别为α_1, α_2,向量α_3满足$A\alpha_3=\alpha_2+\alpha_3$,证明:(1) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关；(2) 令$P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$, 求$P^{-1}AP$.

证(1) 设 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3=0$, (1)

又$A\alpha_1=-\alpha_1,A\alpha_2=\alpha_2,A\alpha_3=\alpha_2+\alpha_3$

(1)式两端左乘A得$-k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3(\alpha_2+\alpha_3)=0$,(2)

(1)−(2)得 $2k_1\alpha_1-k_3\alpha_2=0$,

因α_1,α_2线性无关$\Rightarrow k_1=k_3=0$, 代入(1)得 $k_2=0$.

所以$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关.

证(2) $A[\alpha_1\ \ \alpha_2\ \ \alpha_3]=[-\alpha_1\ \ \alpha_2\ \ \alpha_2+\alpha_3]$

$=[\alpha_1\ \ \alpha_2\ \ \alpha_3]\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}\Rightarrow P^{-1}AP=\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}$

END

西安交通大学
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY

第8章 线 性 变 换
习题课

数学与统计学院
李换琴

1、T 是 V 到 W 的一个**线性变换**：$\forall \alpha,\beta \in V, k \in F$，恒有
(1) $T(\alpha+\beta)=T(\alpha)+T(\beta)$；(2) $T(k\alpha)=kT(\alpha)$；

2、**线性变换的基本性质**）设 $T \in L(V,W)$，则
(1) $T(k_1\alpha_1+\cdots+k_r\alpha_r)=k_1T(\alpha_1)+\cdots+k_rT(\alpha_r)$；
(2) 若 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$ 线性相关，则 $T(\alpha_1),\cdots,T(\alpha)$ 线性相关.

3、**线性变换的核与值域**
T 的核 $\ker(T)=\{\alpha \mid \alpha\in V,\ T(\alpha)=0\}$，是 V 的子空间，称为 T 的零空间.
$\ker(T)$ 的维数称为 T 的零度，记为 $\mathrm{nullity}(T)$
T 的值域 $R(T)=\{T(\alpha) \mid \alpha\in V\}$，它是 W 的子空间，也称 T 的像空间.
$R(T)$ 的维数称 为 T 的秩，记为 $\mathrm{rank}(T)$

4、**秩+零度定理** 设 $T \in L(V,W)$，$\dim(V)=n$，则
$$\mathrm{nullity}(T)+\mathrm{rank}(T)=n.$$

5、A 是 $m\times n$ 实矩阵，线性变换 $T(x)=Ax$ 的核 $\ker(T)$ 就是 $Ax=0$ 的解空间，$\mathrm{nullity}(T)=n-r(A)$；值域 $R(T)$ 就是 A 的列空间(列向量组生成的子空间)，$\mathrm{rank}(T)=r(A)$.

6、**线性变换是单射的等价条件**
设 $T\in L(V,W)$，$\dim(V)=n$，则
T 是单射 $(T(\alpha)=T(\beta)\Rightarrow \alpha=\beta)$
$\Leftrightarrow \ker(T)=\{0\} \Leftrightarrow \mathrm{rank}(T)=n.$
$\Leftrightarrow$ T 把 V 中线性无关向量组映射为 W 中线性无关组.

T 是满射
$\Leftrightarrow R(T)=W$
$\Leftrightarrow \mathrm{rank}(T)=\dim(W)$.

7、**线性变换是可逆的等价条件**
设 $T\in L(V,W)$，$\dim(V)=\dim(W)=n$，则下列条件等价：
(1) T 是可逆线性变换；(2) T 是单射；
(3) T 是满射；(4) $\mathrm{rank}(T)=n$；(5) $\mathrm{nullity}(T)=0$.

8、**线性变换的矩阵**
设 $T\in L(V,W)$，$\dim(V)=n$，$\dim(W)=m$，$B=\{\alpha_1,\ldots,\alpha_n\}$ 是 V 的一个基，$B'=\{\beta_1,\ldots,\beta_m\}$ 是 W 的一个基.若

$$\boxed{T(\alpha_1\cdots\alpha_n)=(\beta_1\cdots\beta_m)A}$$

A 的第 k 列是 $T(\alpha_k)$ 在基 B' 下的坐标向量

称 A 为线性变换 T 的矩阵.

若 $T\in L(V)$，取 $B=B'$，
$T(\alpha_1\cdots\alpha_n)=(\alpha_1\cdots\alpha_n)A$，
此时 A 为 n 阶方阵.

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

设 $\alpha\in V$，α 在基 B 下的坐标为 x，即 $\alpha=x_1\alpha_1+\cdots+x_n\alpha_n=(\alpha_1\cdots\alpha_n)x$
则 $T(\alpha)$ 在基 B' 下的坐标为 $y=Ax$，即 $T(\alpha)=(\beta_1\cdots\beta_m)Ax$.

9、**线性算子 T 在不同基下的矩阵是相似的**
设 $T\in L(V)$，$B=\{\alpha_1,\ldots,\alpha_n\}$ 和 $B'=\{\beta_1,\ldots,\beta_n\}$ 是 V 的两个不同的基，T 在 B,B' 下的矩阵分别为 A 和 D，且知 B 到 B' 的过渡阵为 C，则 $C^{-1}AC=D$.

10、设 $T\in L(V,W)$，T 在 基 B,B' 下的矩阵为 A，则有
(1) $R(T)$ 与 A 的列空间(记为 $R(A)$)同构. $\Rightarrow rank(T)=r(A)$
(2) $\ker(T)$ 与 $Ax=0$ 的解空间($N(A)$) 同构. $\Rightarrow nullity(T)=n-r(A)$
$\forall\alpha\in V,\alpha=(\alpha_1\cdots\ \alpha_n)x$，$\Rightarrow T(\alpha)=(\beta_1\cdots\ \beta_m)Ax$，
建立了 $R(T)\to R(A)$ 的坐标映射 $T(\alpha)\to Ax$ (同构映射)
$\forall\alpha\in\ker(T),\exists x\in R^n$，$x$ 是 α 在基 B 下的坐标.
$T(\alpha)=0\Rightarrow Ax=0$ 即 $x\in N(A)$. 建立了 $\ker(T)\to N(A)$ 的同构映射.

13、**利用线性变换 $y=Ax$ 的值域与核求 T 的值域与核的方法：**
设 $T\in L(V,W)$ 在基 $B=(\alpha_1\cdots\alpha_n)$，$B'(\beta_1\cdots\beta_m)$ 的矩阵为 A，
即 $T(\alpha_1\cdots\alpha_n)=(\beta_1\cdots\beta_m)A$
$\forall\alpha\in V,\alpha=x_1\alpha_1+\cdots+x_n\alpha_n=(\alpha_1\cdots\alpha_n)x$，
则 $T(\alpha)=(\beta_1\cdots\ \beta_m)Ax$.

$$\begin{tikzcd} V(n\text{维}) & W(m\text{维}) \\ \alpha \arrow[r, "T"] \arrow[d, leftrightarrow, "B"] & T(\alpha) \arrow[d, leftrightarrow, "B'"] \\ x \arrow[r] & y=Ax \\ R^n & R^m \end{tikzcd}$$

线性变换 $y=Ax$ 的值域是 A 的列空间，
A 的列向量组的极大无关组 $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_r$ 是基，
令 $\delta_i=(\beta_1\cdots\ \beta_m)\varepsilon_i,(i=1,\cdots,r)$
则 $\delta_1,\cdots,\delta_r$ 是 $R(T)$ 的基.
线性变换 $y=Ax$ 的核是 $Ax=0$ 的解空间，
方程组 $Ax=0$ 的基础解系 $\xi_1,\cdots,\xi_{n-r}$ 是基，令 $\eta_i=(\alpha_1\cdots\alpha_n)\xi_i$，
则 $\eta_1,\cdots,\eta_r$ 是 $\ker(T)$ 的基.

例1 设 $T\in L(R^4,R^3)$,定义为 $T(x_1,x_2,x_3,x_4)^T=$
$(4x_1+x_2-2x_3-3x_4,2x_1+x_2+x_3-4x_4,6x_1-9x_3+9x_4)^T$
(1)判别 $\alpha_1=(6,8,6)^T,\alpha_2=(-1,3,4)^T$ 是否是 $R(T)$ 中的向量;
(2)判别 $\xi_1=(-3,8,-2,0)^T,\xi_2=(2,0,0,1)^T$ 是否是 $\ker(T)$ 的向量;
(3)求 $\ker(T)$ 及 $R(T)$ 的基,T 的零度及秩. 习题8.1，8

解（1） $Tx=Ax$

其中 $A=\begin{pmatrix}4&1&-2&-3\\2&1&1&-4\\6&0&-9&9\end{pmatrix}$, $[A\ \alpha_1\ \alpha_2]\to\left(\begin{array}{cccc|c|c}2&1&1&-4&8&3\\0&1&4&-5&10&7\\0&0&0&6&12&16\end{array}\right)$

$Ax=\alpha_1$, $Ax=\alpha_2$ 有解, $\therefore\alpha_1,\alpha_2$ 都是 $R(T)$ 中的向量.

例1 设 $T\in L(R^4,R^3)$,定义为 $T(x_1,x_2,x_3,x_4)^T=$
$(4x_1+x_2-2x_3-3x_4,2x_1+x_2+x_3-4x_4,6x_1-9x_3+9x_4)^T$
(1)判别 $\alpha_1=(6,8,6)^T,\alpha_2=(-1,3,4)^T$ 是否是 $R(T)$ 中的向量;
(2)判别 $\xi_1=(-3,8,-2,0)^T,\xi_2=(2,0,0,1)^T$ 是否是 $\ker(T)$ 的向量;
(3)求出 $\ker(T)$ 及 $R(T)$ 的基,指出 T 的零度及秩. 习题8.1，8

解（2、3） $Tx=Ax$, $A\to\begin{pmatrix}2&1&1&-4\\0&1&4&-5\\0&0&0&6\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-3/2&0\\0&1&4&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$

得 $Ax=0$ 的基础解系 $\xi=(3,-8,2,0)^T$, $\Rightarrow\ker(T)=\{\alpha\mid\alpha=k\xi,k\in R\}$.
$\xi=(3,-8,2,0)^T$ 是 $\ker(T)$ 的基. $\text{nullity}(T)=1$.
知 $\xi_1=(-3,8,-2,0)^T\in\ker(T)$, $\xi_2\notin\ker(T)$.
A 的第1、2、4列就是 $R(T)$ 的基, $rank(T)=\dim R(T)=3$.

例2 设 $T\in L(R^3)$,定义为 $T(x)=Ax,\forall x\in R^3$,其中
$A=\begin{bmatrix}1&-1&3\\5&6&-4\\7&4&2\end{bmatrix}$, (1)证明 $R(T)$ 是过原点的平面;
(2)证明 $\ker(T)$ 是过原点的直线, 并求该直线的方程. 习题8.1，9

解（1） $A=\begin{bmatrix}1&-1&3\\5&6&-4\\7&4&2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&14/11\\0&1&-19/11\\0&0&0\end{bmatrix}$

$r(A)=2$, A 的第1、2列是 $R(T)$ 的一个基.
$\forall\alpha\in R(T),\alpha=k_1(1,5,7)^T+k_2(-1,6,4)^T\Rightarrow R(T)$ 是过原点的平面.
$\vec{n}=(1,5,7)^T\times(-1,6,4)^T=(-22,-11,11)^T\,//\,(2,1,-1)^T$
平面方程为: $2x+y-z=0$.

例2 设 $T\in L(R^3)$,定义为 $T(x)=Ax,\forall x\in R^3$,其中
$A=\begin{bmatrix}1&-1&3\\5&6&-4\\7&4&2\end{bmatrix}$, (1)证明 $R(T)$ 是过原点的平面;
(2)证明 $\ker(T)$ 是过原点的直线, 并求该直线的方程. 习题8.1，9

解（2） $A=\begin{bmatrix}1&-1&3\\5&6&-4\\7&4&2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&14/11\\0&1&-19/11\\0&0&0\end{bmatrix}$

$Ax=0$ 的基础解系为 $\xi=(-14,19,11)^T$
$\forall\alpha\in\ker(T),\Rightarrow\alpha=k\xi,k\in R$
故 $\ker(T)$ 是过原点的一条直线,直线方程为 $\frac{x}{-14}=\frac{y}{19}=\frac{x}{11}$

例3 设 $V=R[x]_n$ 是实数域R上次数不超过n的1元多项式全体构成的线性空间, D 是微商变换: $Df(x)=f'(x),f(x)\in V$,求
(1) $\dim(V)$; (2) $\ker(D)$ 和 $\text{nullity}(D)$; (3) $R(D)$ 和 $\text{rank}(D)$.

解(1) V 的一个基为: $1,x,x^2,\cdots,x^n$, $\dim(V)=n+1$.

(2) $Df(x)=f'(x)=0\Leftrightarrow f(x)=C$ （$C\in R$ 为任意常数）
所以 $\ker(D)=R$, $\text{nullity}(D)=1$.

(3) $R(D)=R[x]_{n-1}$, $\text{rank}(D)=n$.

例4 设有 R^2 的基 $B:\varepsilon_1=(1,0)^T,\varepsilon_2=(0,1)^T$; R^3 的基 B':
$\alpha_1=(1,1,0)^T,\alpha_2=(1,0,1)^T,\alpha_3=(0,1,1)^T,T\in L(R^2,R^3)$
定义为 $T(x)=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+(x_1+x_2)\alpha_3,\forall x=(x_1,x_2)^T\in R^2$
(1)求 T 的值域与秩, 核与零度;(2) T 是否为单射? 是否满射?
(3)求 T 在基 B,B' 下的矩阵.

解(1) $T(x)=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+(x_1+x_2)\alpha_3$
$=x_1\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+(x_1+x_2)\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1+x_2\\2x_1+x_2\\x_1+2x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\2&1\\1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=Ax$
$R(T)=\text{span}((1,2,1)^T,(1,1,2)^T))$
$=\{x\mid x=k_1(1,2,1)^T+k_2(1,1,2)^T),k_1,k_2\in R\}$, $\text{rank}(T)=r(A)=2$.
因 A 列满秩, $Ax=0$ 只有零解, $\ker(T)=\{0\}$, $\text{nullity}(T)=0$.
解(2) $\ker(T)=\{0\}\Rightarrow T$ 是单射; $\text{rank}(T)=2\neq3\Rightarrow T$ 不是满射.

例4 设有R^2的基$B:\varepsilon_1=(1,0)^T,\ \varepsilon_2=(0,1)^T$; R^3的基B':
$\alpha_1=(1,1,0)^T,\ \alpha_2=(1,0,1)^T,\ \alpha_3=(0,1,1)^T, T\in L(R^2,R^3)$
定义为$T(x)=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+(x_1+x_2)\alpha_3, \forall x=(x_1,x_2)^T\in R^2$
(1)求T的值域与秩，核与零度;(2)T是否为单射？是否满射？
(3)求T在基B,B'下的矩阵.

解(3)

$$T(x)=Ax, \text{其中} A=\begin{pmatrix}1&1\\2&1\\1&2\end{pmatrix}. \qquad \begin{pmatrix}1&1&0\\1&0&1\\0&1&1\end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&1&-1\\1&-1&1\\-1&1&1\end{pmatrix}$$

$$T(\varepsilon_1\ \varepsilon_2)=A(\varepsilon_1\ \varepsilon_2)=(\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3)(\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3)^{-1}A(\varepsilon_1\ \varepsilon_2)$$

所以T在基B,B'下的矩阵为

$$D=(\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3)^{-1}A(\varepsilon_1\ \varepsilon_2)=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&0&1\\0&1&1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1&1\\2&1\\1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\1&1\end{pmatrix}$$

例5 设$T\in L(R^3)$,T在标准基$\{\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3\}$下的矩阵为

$$A=\begin{pmatrix}2&-1&-1\\-1&2&-1\\-1&-1&2\end{pmatrix},$$

(1)求T在基$\beta_1=(1,1,1)^T,\beta_2=(-1,1,0)^T,\beta_3=(-1,0,1)^T$下的矩阵;
(2)若$\alpha=(1,2,3)^T$, 求$T(\alpha)$在基β_1,β_2,β_3下的坐标向量及$T(\alpha)$.

解（1） 由$(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)C$

求得标准基$\{\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3\}$到基$\{\beta_1,\beta_2,\beta_3\}$的过渡矩阵$C=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\1&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$

故T在基$\{\beta_1,\beta_2,\beta_3\}$的矩阵为$B=C^{-1}AC=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&3&0\\0&0&3\end{pmatrix}$.

例5 设$T\in L(R^3)$,T在标准基$\{\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3\}$下的矩阵为

$$A=\begin{pmatrix}2&-1&-1\\-1&2&-1\\-1&-1&2\end{pmatrix},$$

(2)若$\alpha=(1,2,3)^T$, 求$T(\alpha)$在基β_1,β_2,β_3下的坐标向量及$T(\alpha)$.

解（2） 先求α在基$\{\beta_1,\beta_2,\beta_3\}$的坐标向量,

$$\text{由}\alpha=1\varepsilon_1+2\varepsilon_2+3\varepsilon_3=(\varepsilon_1\ \varepsilon_2\ \varepsilon_3)\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=(\beta_1\ \beta_2\ \beta_3)C^{-1}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ α在基$\{\beta_1,\beta_2,\beta_3\}$的坐标向量为$x=C^{-1}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\3\end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ $T(\alpha)$在基$\{\beta_1,\beta_2,\beta_3\}$的坐标$y=Bx=[0,0,3]^T$

$T(\alpha)=0\cdot\beta_1+0\cdot\beta_2+3\cdot\beta_3=[-3,0,3]^T$.

第八章　线性变换

8.2 线性变换的矩阵表示

数学与统计学院
李换琴

习题8.2（A) 1, 4, 7, 8, 10

主要内容

1 线性变换的矩阵

2 线性算子在不同基下的矩阵之间的关系

1、线性变换的矩阵

设$T\in L(V,W),\dim(V)=n,\dim(W)=m$, $B=\{\alpha_1,\dots,\alpha_n\}$是$V$的一个基, $B'=\{\beta_1,\dots,\beta_m\}$是$W$的一个基.

$$
\begin{aligned}
T(\alpha_1)&=a_{11}\beta_1+a_{21}\beta_2+\cdots+a_{m1}\beta_m,\\
T(\alpha_2)&=a_{12}\beta_1+a_{22}\beta_2+\cdots+a_{m2}\beta_m,\\
&\cdots\quad\cdots\quad\cdots\\
T(\alpha_n)&=a_{1n}\beta_1+a_{2n}\beta_2+\cdots+a_{mn}\beta_m.
\end{aligned}
$$

A的第k列是$T(\alpha_k)$在基B'下的坐标向量

$$
A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}\end{pmatrix}\in F^{m\times n}
$$

$$\Leftrightarrow (T(\alpha_1)\cdots\ T(\alpha_n))=(\beta_1\cdots\beta_m)A$$

$$\Leftrightarrow T\left(\alpha_1\cdots\alpha_n\right)=(\beta_1\cdots\beta_m)A$$

称A为线性变换T在给定基B,B'的矩阵,简称为线性变换T的矩阵.

若$T\in L(V)$,取$B=B'$, $T(\alpha_1\cdots\alpha_n)=(\alpha_1\cdots\alpha_n)A$, 此时$A$为$n$阶方阵.

例1 设T为$F[x]_3$上的线性算子，定义为
$T(f(x))=f(x+1)-f(x)$,求T在基$1,x,x^2,x^3$下的矩阵A.

解
$$T(1)=0=0\cdot 0+0\cdot x+0\cdot x^2+0\cdot x^3$$
$$T(x)=x+1-x=1=1\cdot 0+0\cdot x+0\cdot x^2+0\cdot x^3$$
$$T(x^2)=(x+1)^2-x^2=2x+1=1\cdot 0+0\cdot x+0\cdot x^2+0\cdot x^3$$
$$T(x^3)=(x+1)^3-x^3=3x^2+3x+1=1\cdot 0+3\cdot x+3\cdot x^2+0\cdot x^3$$

$$\Rightarrow T[1\ \ x\ \ x^2\ \ x^3]=[1\ \ x\ \ x^2\ \ x^3]\begin{pmatrix}0&1&1&1\\0&0&2&3\\0&0&0&3\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

$$故A=\begin{pmatrix}0&1&1&1\\0&0&2&3\\0&0&0&3\\0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

例2 设T是线性空间V上的恒等变换, 证明T在任何基下的矩阵为 I .

证 设$\alpha_1,\cdots,\alpha_n$是V的一组基, $T(\alpha_i)=\alpha_i \ =0\alpha_1+\cdots 1\alpha_i+\cdots+0\alpha_n$

$\Rightarrow T(\alpha_1\cdots\alpha_n)=(\alpha_1\cdots\alpha_n)I$ 　　故$A=I$

同理可证：零变换, 数乘变换在任何基下的矩阵分别 O 和 kI.

例3 设 $V=\mathrm{span}\{\sin t,\cos t,\mathrm{e}^t\}, D\in L(V)$ 定义如下:

$$D(f(t))=\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t} \quad \forall f(t)\in V,\ B=(\sin t,\cos t,\mathrm{e}^t)$$

求 D 在基 B 下的矩阵.

解

$$D(\sin t)=\cos t=0\cdot\sin t+1\cdot\cos t+0\cdot\mathrm{e}^t$$

$$D(\cos t)=-\sin t=(-1)\cdot\sin t+0\cdot\cos t+0\cdot\mathrm{e}^t$$

$$D(\mathrm{e}^t)=\mathrm{e}^t \ =0\cdot\sin t+0\cdot\cos t+1\cdot\mathrm{e}^t$$

故$A=\begin{pmatrix}0&-1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

例4 设 $T \in L(R^2)$ 定义为:

$$T(x_1,x_2)^T = (x_1 + x_2, -2x_1 + 4x_2)^T, \forall (x_1,x_2)^T \in R^2,$$

$\varepsilon_1 = (1,0)^T, \varepsilon_2 = (0,1)^T; \alpha_1 = (1,2)^T, \alpha_2 = (3,4)^T$ 是 R^2 的两个基,
求 T 在基$\varepsilon_1, \varepsilon_2$和基$\alpha_1, \alpha_2$下的矩阵.

解 $T(x) = Ax, A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$, $\quad T(\varepsilon_1) = A\varepsilon_1,\ T(\varepsilon_2) = A\varepsilon_2,$

$$\Rightarrow T[\varepsilon_1,\varepsilon_2] = [A\varepsilon_1, A\varepsilon_2] = A[\varepsilon_1,\varepsilon_2] = A\, I = I\, A = [\varepsilon_1,\varepsilon_2]A$$

故 T 在基$\varepsilon_1, \varepsilon_2$下的矩阵为$A$.

$$T(\alpha_1\ \alpha_2) = (A\alpha_1\ A\alpha_2) = A(\alpha_1\ \alpha_2) = (\alpha_1\ \alpha_2)\underline{(\alpha_1\ \alpha_2)^{-1}A(\alpha_1\ \alpha_2)}$$

所以 T 在基α_1, α_2下的矩阵为$B = (\alpha_1\ \alpha_2)^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}(\alpha_1\ \alpha_2) = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

R^n 上的线性变换$T(x) = Ax$在标准基$(\varepsilon_1, \cdots \varepsilon_n)$下的矩阵是$A$.

2、向量α与$T(\alpha)$坐标之间的关系

设 $T \in L(V,W)$ 关于基 $B=(\alpha_1 \cdots \alpha_n), B'(\beta_1 \cdots \beta_m)$的矩阵为 A,
V 中的向量 α 在基 B 下的坐标为 x,$T(\alpha)$ 在基B' 下的坐标为 y,
则有$y = Ax$.

证 $T(\alpha_1 \cdots \alpha_n) = (\beta_1 \cdots \beta_m)A$

$$\alpha = x_1\alpha_1 + \cdots + x_n\alpha_n = (\alpha_1 \cdots \alpha_n)x,$$

$$T(\alpha) = y_1\beta_1 + \cdots + y_m\beta_m = (\beta_1 \cdots \beta_m)y$$

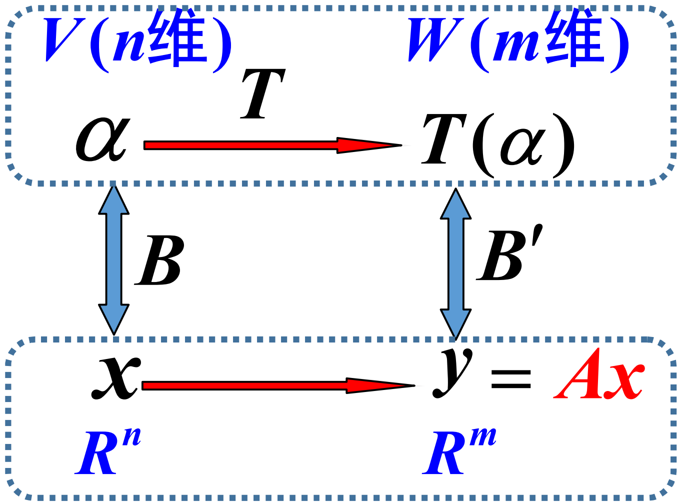
又$T(\alpha) = x_1T(\alpha_1) + \cdots x_nT(\alpha_n)$

$$= T(\alpha_1 \cdots \alpha_n)x = (\beta_1 \cdots \beta_m)Ax$$

向量在给定基下的坐标唯一 $\Rightarrow$ $y = Ax$.

线性变换的矩阵A完全代表了线性变换。

基定，T与A一一对应　该对应还保留了线性运算的对应关系



已知A就可以计算$T(\alpha)$：
$\alpha \to x \to Ay \to T(\alpha)$

定理8. 2. 1 由 $T(\alpha)=(\beta_1 \cdots \beta_m)Ax$ 所表示的 $L(V,W)$与 $F^{m\times n}$之间的一一对应关系$f: L(V,W)\to F^{m\times n}, f(T)=A$,满足如下性质:

(1) 线性变换的和对应于矩阵的和; $f(T_1+T_2)=f(T_1)+f(T_2)$

(2) 线性变换的数量积对应于矩阵的数量 积; $f(kT)=kf(T)$

(3) 线性变换的乘积对应于矩阵的乘积. $f(T_1T_2)=f(T_1)f(T_2)$

证 仅证(3). 设 $T_2: U\to V, T_1: V\to W$ 是两个线性变换,

$B=\{\alpha_1,\ldots,\alpha_n\}, B'=\{\beta_1,\ldots,\beta_p\}, B''=\{\gamma_1,\ldots,\gamma_m\}$ 分别是U,V,W 的基,

在此基下,T_2的矩阵为 C,T_1的矩阵为 A,即有

$$T_2(\alpha_1 \cdots \alpha_n)=(\beta_1 \ldots \beta_p)C, \quad T_1(\beta_1 \ldots \beta_p)=(\gamma_1 \ldots \gamma_m)A$$

$$T_1T_2(\alpha_1 \cdots \alpha_n)=T_1(T_2(\alpha_1 \cdots \alpha_n))=T_1((\beta_1 \ldots \beta_p)C)$$

$$=T_1(\beta_1 \ldots \beta_p)C=(\gamma_1 \ldots \gamma_m)AC.$$ 故 T_1T_2 在基 B,B'' 下的矩阵为 AC.

定理8.2.2 线性空间$L(V,W)$与$F^{m\times n}$同构,其维数为mn.

定理8.2.3 设 $T \in L(V,W)$,T 在基 B,B' 下的矩阵为 A,则有

(1) 像空间$R(T)$与 A 的列空间(记为$R(A)$)同构;

(2) 零空间$\ker(T)$与 $Ax=0$ 的解空间(记为$N(A)$)同构.

证(1) $R(T)$中的向量$T(\alpha)=T(x_1\alpha_1+\cdots+x_n\alpha_n)=(\beta_1 \cdots \beta_m)Ax$

$Ax \in R(A)$ 是 $T(\alpha)$ 在 B' 下的坐标,

映射$T(\alpha)\to Ax$ 是给定基下的坐标映射，从而是同构映射.

所以, $R(T)$与 $R(A)$同构. $\Rightarrow \mathrm{rank}(T)=\mathrm{r}(A)$

(2) $\forall \alpha \in \ker(T), \exists x \in R^n$, x是α在基B下的坐标.

$T(\alpha)=0 \Leftrightarrow Ax=0$ 即$x \in N(A)$.

建立了$\ker(T)\to N(A)$的同构映射. $\Rightarrow \mathrm{nullity}(T)=n-\mathrm{r}(A)$

$\boxed{\text{从而可以利用线性变换} y=Ax \text{的值域与核求得} T \text{的值域与核.}}$

设 $T \in L(V,W)$ 在基 $B=(\alpha_1 \cdots \alpha_n), B'(\beta_1 \cdots \beta_m)$的矩阵为 A,

即 $T(\alpha_1 \cdots \alpha_n)=(\beta_1 \cdots \beta_m)A$

$\forall \alpha \in V, \alpha = x_1\alpha_1 + \cdots + x_n\alpha_n = (\alpha_1 \cdots \alpha_n)x,$

则$T(\alpha)=(\beta_1 \cdots \ \beta_m)Ax$.

$$\begin{tikzcd} V(n\text{维}) & W(m\text{维}) \\ \alpha \arrow[r, "T"] \arrow[d, leftrightarrow, "B"'] & T(\alpha) \arrow[d, leftrightarrow, "B'"] \\ x \arrow[r] & y = Ax \\ R^n & R^m \end{tikzcd}$$

线性变换$y=Ax$的值域是A的列空间,

A的列向量组的极大无关组$\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_r$是基,

令$T(\alpha_i)=(\beta_1 \cdots \ \beta_m)\varepsilon_i, (i=1,\cdots,r)$

则$T(\alpha_1),\cdots,T(\alpha_r)$是$R(T)$的基.

线性变换$y=Ax$的核是$Ax=0$的解空间,

方程组$Ax=0$的基础解系$\xi_1,\cdots,\xi_{n-r}$是基, 令$\eta_i=(\alpha_1 \cdots \alpha_n)\xi_i$,

则$\eta_1,\cdots,\eta_r$是$\ker(T)$的基.

例5 设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 是 V 的一个基，$T\in L(V)$，T 在此基下的矩阵为

$$A=\begin{pmatrix}1&0&2&1\\-1&2&1&3\\1&2&5&5\\2&-2&1&-2\end{pmatrix},$$ 求 T 的值域与核.

解 $R(T)$ 与 A的列空间同构，记 $A=[A_1\ A_2\ A_3\ A_4]$.

$$A\xrightarrow{\text{行}}\begin{pmatrix}1&0&2&1\\0&2&3&4\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow A_1,A_2$ 是 A 的列空间的一个基，

$T(\alpha_1)=(\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3\ \alpha_4)A_1=\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3+2\alpha_4$

$T(\alpha_2)=(\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3\ \alpha_4)A_2=2\alpha_2+2\alpha_3-2\alpha_4$

是 $R(T)$ 的基，$R(T)=\text{span}\{T(\alpha_1),T(\alpha_1)\}$.

$\ker(T)$与$Ax=0$的解空间同构，求得$Ax=0$ 基础解系$x_1=(4,3,-2,0)^T$，$x_2=(1,2,0,-1)^T$，$\Rightarrow 4\alpha_1+3\alpha_2-2\alpha_3$ 和 $\alpha_1+2\alpha_2-\alpha_4$ 是 $\ker(T)$ 的基.

故 $\ker(T)=\text{span}\{4\alpha_1+3\alpha_2-2\alpha_3,\ \alpha_1+2\alpha_2-\alpha_4\}$.

3、可逆线性变换的矩阵与其逆变换的矩阵之间的关系

定理8.2.4 设 $T \in L(V,W), \dim(V)=\dim(W)=n, B$ 和 B' 分别是 V 和 W 的基, T 在 B,B' 下的矩阵为 A,则 T 可逆的充要条件是 A 可逆, 且当 T 可逆时, T^{-1}在基 B',B 下的矩阵为 A^{-1}.

证 $\Longrightarrow$ 设 T 可逆, T^{-1} 对应的矩阵为 C,

则 $TT^{-1}=I_W$ 对应于 $AC=I$, $T^{-1}T=I_V$ 对应于 $CA=I$,

所以, A 可逆, 且 $A^{-1}=C$.

$\Longleftarrow$ A 可逆 $\Rightarrow \dim(R(A))=n \Rightarrow \operatorname{rank}(T)=n$

故 T 可逆.

4、线性算子在不同基下的矩阵之间的关系

定理8.2.5 设 $T\in L(V),B=\{\alpha_1,\dots,\alpha_n\}$ 和 $B'=\{\beta_1,\dots,\beta_n\}$ 是 V 的两个不同的基，T 在 B,B' 下的矩阵分别为 A 和 D，且知 B 到 B' 的过渡阵为 C，则 $C^{-1}AC=D$.

（线性算子 T 在不同基下的矩阵是相似的）.

证

$$T(\alpha_1\cdots\alpha_n)=(\alpha_1\cdots\alpha_n)A,\quad T(\beta_1\cdots\beta_n)=(\beta_1\cdots\beta_n)D,$$

$$(\beta_1\cdots\beta_n)=(\alpha_1\cdots\alpha_n)C,\quad \Rightarrow(\beta_1\cdots\beta_n)C^{-1}=(\alpha_1\cdots\alpha_n)$$

$$\Rightarrow T(\beta_1\cdots\beta_n)=T((\alpha_1\cdots\alpha_n)C)=(T(\alpha_1\cdots\alpha_n))C$$

$$=(\alpha_1\cdots\alpha_n)AC=(\beta_1\cdots\beta_n)C^{-1}AC,$$

由于线性算子在给定基下的矩阵唯一，所以有 $C^{-1}AC=D$.

设A 和 D为同阶方阵，若存在可逆阵C使 $C^{-1}AC=D$，称A和D相似.

例6 设T为$F[x]_2$上的线性算子,T在基$\{x^2,x,1\}$下的矩阵为

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\-1&0&3\\2&1&5\end{pmatrix}$$,求T在基$\{x^2,x^2+x,x^2+x+1\}$下的矩阵.

习题8.2(A)8

解 $x^2=1x^2+0\cdot x+0\cdot 1$, $x^2+x=1x^2+1x+0\cdot 1$,

$x^2+x+1=1x^2+1x+1\cdot 1$

基$\{x^2,x,1\}$到基$\{x^2,x^2+x,x^2+x+1\}$的过渡矩阵$C=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$

$\therefore T$在基$\{x^2,x^2+x,x^2+x+1\}$下的矩阵为

$$C^{-1}=\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$D=C^{-1}AC=\begin{pmatrix}2&4&4\\-3&-4&-6\\2&3&8\end{pmatrix}.$$

例7设$T \in L(R^3), T(\alpha_1) = (-5,0,3)^T, T(\alpha_2) = (0,-1,6)^T, T(\alpha_3) = (-5,-1,9)^T$.其中$\alpha_1 = (-1,0,2)^T$, $\alpha_2 = (0,1,1)^T$, $\alpha_3 = (3,\text{-}1,0)^T$.求$T$在基$\varepsilon_1 = (1,0,0)^T$, $\varepsilon_2 = (0,1,0)^T$, $\varepsilon_3 = (0,0,1)^T$下的矩阵. 习题8.2(A)9

解：设T在基$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$和$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$下的矩阵分别为$A$, D

则有 $[T(\alpha_1) \quad T(\alpha_2) \quad T(\alpha_3)] = [\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3]A$

$$\Rightarrow A = [\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3]^{-1}[T(\alpha_1) \quad T(\alpha_2) \quad T(\alpha_3)]$$

又基$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$到基$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$的过渡矩阵为$C = [\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3]$

则有$A = C^{-1}DC$, $\Rightarrow D = \underline{CA}C^{-1}$.

$$D = [T(\alpha_1)\, T(\alpha_2)\, T(\alpha_3)][\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3]^{-1} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -5 & 20 & -20 \\ -4 & -5 & -2 \\ 27 & 18 & 24 \end{pmatrix}.$$

小结

1、线性变换的矩阵

设$T \in L(V,W)$, $\dim(V)=n$, $\dim(W)=m$, $B=\{\alpha_1,\dots,\alpha_n\}$是$V$的一个基, $B'=\{\beta_1,\dots,\beta_m\}$是$W$的一个基.若

$$\boxed{T(\alpha_1 \cdots \alpha_n)=(\beta_1 \cdots \beta_m)A}$$

称A为线性变换 T 的矩阵.

A的第 k 列是$T(\alpha_k)$在基B'下的坐标向量

2、(α与$T(\alpha)$坐标之间的关系)设$\alpha \in V$, α 在基 B 下的坐标为 x,即

$$\alpha = x_1\alpha_1+\cdots+x_n\alpha_n=(\alpha_1 \cdots \alpha_n)x$$

则$T(\alpha)$ 在基B' 下的坐标为$y=Ax$,即

$$T(\alpha)=(\beta_1 \cdots \beta_m)Ax\,.$$

3、线性算子 T 在不同基下的矩阵是相似的

设 $T \in L(V), B=\{\alpha_1,\dots,\alpha_n\}$ 和 $B'=\{\beta_1,\dots,\beta_n\}$ 是 V 的两个不同的基, T 在 B,B' 下的矩阵分别为 A 和 D, 且知 B 到 B' 的过渡阵为 C, 则 $C^{-1}AC=D$.

4、设 $T \in L(V,W)$, T 在基 B,B' 下的矩阵为 A, 则有

(1) $R(T)$ 与 A 的列空间(记为 $R(A)$)同构. $\Rightarrow rank(T)=r(A)$

(2) $\ker(T)$ 与 $Ax=0$ 的解空间($N(A)$)同构. $\Rightarrow nullity(T)=n-r(A)$

从而可以利用线性变换 $y=Ax$ 的值域与核求 T 的值域与核.

5、线性空间 $L(V,W)$ 与 $F^{m\times n}$ 同构, 其维数为 mn.

1、 设 R^3中的线性变换T在标准基$\{\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3\}$下的矩阵为

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

(1)求T在基$\{\beta_1,\beta_2,\beta_3\}$下的矩阵，其中$\beta_1=(1,1,1)^T,\beta_2=(-1,1,0)^T$, $\beta_3=(-1,0,1)^T$;

(2)$\alpha=(1,2,3)^T$, 求$T(\alpha)$在基$\{\beta_1,\beta_2,\beta_3\}$下的坐标向量及$T(\alpha)$.

解（1）由$(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)C$

求得标准基$\{\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3\}$到基$\{\beta_1,\beta_2,\beta_3\}$的过渡矩阵$C=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

故T在基$\{\beta_1,\beta_2,\beta_3\}$的矩阵为$B=C^{-1}AC=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

1、设 R^3中的线性变换T在标准基$\{\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3\}$下的矩阵为

$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ (1)求T在基$\{\beta_1,\beta_2,\beta_3\}$下的矩阵，其中$\beta_1=(1,1,1)^T$，$\beta_2=(-1,1,0)^T,\beta_3=(-1,0,1)^T$；(2)$\alpha=(1,2,3)^T$，求$T(\alpha)$在基$\{\beta_1,\beta_2,\beta_3\}$下的坐标向量及$T(\alpha)$.

解（2）先求α在基$\{\beta_1,\beta_2,\beta_3\}$的坐标向量，

$$由\ \alpha=1\varepsilon_1+2\varepsilon_2+3\varepsilon_3=(\varepsilon_1\ \varepsilon_2\ \varepsilon_3)\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=(\beta_1\ \beta_2\ \beta_3)C^{-1}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ α在基$\{\beta_1,\beta_2,\beta_3\}$的坐标向量为$x=C^{-1}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\3\end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ $T(\alpha)$在基$\{\beta_1,\beta_2,\beta_3\}$的坐标$y=Bx=[0,0,3]^T$

$$T(\alpha)=0\cdot\beta_1+0\cdot\beta_2+3\cdot\beta_3=[-3,0,3]^T.$$

2、 设$T\in L(R^3)$,定义为$T(x)=Ax,\forall x\in R^3$,其中

$$A=\begin{bmatrix}1 & -1 & 3\\5 & 6 & -4\\7 & 4 & 2\end{bmatrix},$$

(1)证明$R(T)$是过原点的平面；

(2)证明$\ker(T)$是过原点的直线，并求该直线的方程.

习题8.1，9

解（1）

$$A=\begin{bmatrix}1 & -1 & 3\\5 & 6 & -4\\7 & 4 & 2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 0 & 14/11\\0 & 1 & -19/11\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$r(A)=2$, A的第1、2列是$R(T)$的一个基.

$\forall\alpha\in R(T),\alpha=k_1(1,5,7)^T+k_2(-1,6,4)^T\Rightarrow R(T)$是过原点的平面.

$$\vec{n}=(1,5,7)^T\times(-1,6,4)^T=(-22,-11,11)^T//(2,1,-1)^T$$

平面方程为： $2x+y-z=0.$

例2　设$T \in L(R^3)$,定义为$T(x) = Ax, \forall x \in R^3$,其中

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 5 & 6 & -4 \\ 7 & 4 & 2 \end{bmatrix},$$

(1)证明$R(T)$是过原点的平面;
(2)证明$\ker(T)$是过原点的直线,
并求该直线的方程.

习题8.1，9

解（2）

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 5 & 6 & -4 \\ 7 & 4 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 14/11 \\ 0 & 1 & -19/11 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$Ax = 0$的基础解系为$\xi = (-14, 19, 11)^{\mathrm{T}}$

$\forall \alpha \in \ker(T) \Rightarrow \alpha = k\xi, k \in R$

故$\ker(T)$是过原点的一条直线,直线方程为$\dfrac{x}{-14} = \dfrac{y}{19} = \dfrac{x}{11}$