第四章 n维向量与线性方程组

习题选讲

1、3、5-8、10、11、12、
15-17、18、19、21-26、28-30、32

例1 设 $A: \alpha_1=(1,0,2,3)^T, \alpha_2=(1,1,3,5)^T, \alpha_3=(1,-1,a+2,1)^T, \alpha_4=(1,2,4,a+8)^T$

向 量 $\beta=(1,1,b+3,5)^T$

(1) 当a,b满足什么条件时，β不能由向量组A线性表示？

(2) 当a,b满足什么条件时，β能由A线性表示且表示法唯一？

解

$$[A|\beta]=\left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & a+2 & 4 & b+3 \\ 3 & 5 & 1 & a+8 & 5 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{行}} \left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & a+1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 & a+1 & 0 \end{array}\right]$$

(1)当 $a=-1$时$b\neq 0$ ，$r(A)=2, r(A|\beta)=3$，β不能由向量组A线性表示.

(2)当 $a\neq -1$，b为任意数时，$r(A)=r(A|\beta)=4$ β能由A唯一地线性表示.

小结 问题“向量β是否可由向量组A线性表示，可表示时表示法是否唯一”等价于问题“$Ax=\beta$ 是否有解，有解时解是否唯一”，从而讨论 $r(A|\beta)$与 $r(A)$的关系即可.

例2 向量组 $\alpha_1=(1,0,2,3)^T,\alpha_2=(1,1,3,5)^T,\alpha_3=(1,-1,1,1)^T$ 是否线性相关?

若相关，求它们满足的的线性关系式.

解

$$[\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3]=\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&-1\\2&3&1\\3&5&1\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{行}}\begin{bmatrix}1&0&2\\0&1&-1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

由此知，$r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=2<3$ 所以，向量组线性相关. 又可知，$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3=0$ 的一个非零解为：$x_1=2,x_2=-1,x_3=-1$ 所以有：$2\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3=0$

小结 向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 的线性关系正是用式子 $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_m\alpha_m=0$ 来刻画的.如果此式只有零解，则向量组线性无关；如果有非零解，则向量组线性相关.

如果只判断是否相关，上面的初等行变换只需化到阶梯形，可知向量组的秩为2，小于向量个数3，从而向量组线性相关.

例3 设向量β可由向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$线性表示，但不能由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{m-1}$ 线性表示，证明：α_m 可由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{m-1},\beta$ 线性表示.

证 由于向量β可由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性表示，所以存在一组常数$k_1,\cdots,k_{m-1},k_m$，使得

$$\beta = k_1\alpha_1 + \cdots + k_{m-1}\alpha_{m-1} + k_m\alpha_m \qquad (1)$$

下证 $k_m \neq 0$，用反证法.

假设$k_m = 0$，则(1)式变为 $\beta = k_1\alpha_1 + \cdots + k_{m-1}\alpha_{m-1}$ 由此知β可由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{m-1}$ 线性表示，与题目中的条件矛盾. 所以$k_m \neq 0$，从而由(1)式知:

$$\alpha_m = (\beta - k_1\alpha_1 - \cdots - k_{m-1}\alpha_{m-1})\big/k_m$$

小结 欲证某向量可由给定的向量组线性表示，如果可以得到该向量与给定向量组的一个线性关系式，则只需证明关系式中该向量的组合系数非零即可. 此时，反证法常常凑效.

例4 证明：若向量β可由向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_m$唯一表示，则 $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_m$线性无关.

证 由于β可由向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_m$ 唯一线性表示，所以

$r(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_m,\beta)=r(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_m)=m$，所以 $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_m$线性无关.

小结 向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_m$线性无（相）关的充要条件是 $r(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_m)=(<)m$

例5 证明：矩阵的初等行变换不改变列向量组的线性关系.

证 设矩阵 $A=[A_1, A_2 \cdots A_n]$ 且 $k_1A_1+k_2A_2+\cdots+k_nA_n=0$

又A经初等行变换变成了矩阵 $B=[B_1\ B_2\cdots B_n]$. 由于对矩阵A 做一系列初等行变换等价于用某个可逆阵P左乘A，即有 $B=PA$，所以有

$$[B_1\ B_2\cdots B_n]=P[A_1\ A_2\cdots A_n]=[PA_1\ PA_2\cdots PA_n]$$ ，即有 $B_j=PA_j\ (j=1,\dots,n)$

在A的列组所满足的线性关系式两边左乘P，得

$k_1PA_1+k_2PA_2+\cdots+k_nPA_n=0$，即 $k_1B_1+k_2B_2+\cdots+k_nB_n=0.$

所以，A的列组与B的列组有完全相同的线性关系.

小结 由这个结论，可得解决问题“求一个向量组的秩、一个极大无关组、用极大无关组表示其余向量”的方法：将所给向量组按列构成矩阵A，用初等行变换把A化成行简化阶梯型B，在B中解决问题，就得到A的列组的相应结论.

例6 设 $\alpha_1=(1,1,1,3)^T,\alpha_2=(-1,-3,5,1)^T,\alpha_3=(3,2,-1,p+2)^T,\alpha_4=(-2,-6,10,p)^T$，

P为何值时此向量组线性相关？求它的一个极大无关组并用极大无关组表示其余向量.

解

$$[\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3\ \alpha_4]=\begin{bmatrix}1&-1&3&-2\\1&-3&2&-6\\1&5&-1&10\\3&1&p+2&p\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{行}}\begin{bmatrix}1&-1&3&-2\\0&-2&-1&-4\\0&0&1&0\\0&0&0&p-2\end{bmatrix}$$

当 $p=2$ 时， $r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=3<4$ **向量组线性相关；此时，** $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ **是它的**

一个极大无关组， 且 $[\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3\ \alpha_4]\xrightarrow{\text{行}}\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&2\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$，所以 $\alpha_4=2\alpha_2$.

小结求给定的向量组的秩，求一个极大无关组，并用极大无关组表示其余向量的方法必须掌握. 此题中，也可先求出 $\det(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$ 得到当 $p=2$ 时向量组线性相关，然后再用初等行变换求秩、极大无关组以及其余向量的线性表示.

例7 设向量组 $P:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性无关，向量组 $B:\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 可由 P 线性表示：

$$\beta_1 = a_{11}\alpha_1 + a_{21}\alpha_2 + \cdots + a_{r1}\alpha_r$$

$$\beta_2 = a_{12}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + \cdots + a_{r2}\alpha_r$$

$$\vdots$$

$$\beta_s = a_{1s}\alpha_1 + a_{2s}\alpha_2 + \cdots + a_{rs}\alpha_r$$

证明：向量组 B 线性无关 $\Leftrightarrow$ 矩阵 $A=(a_{ij})_{r\times s}$ 的秩为 s（即 A 是列满秩的）.

证 将题设中的线性表示形成矩阵形式

$$[\beta_1 \quad \beta_2 \quad \cdots \quad \beta_s] = [\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \cdots \quad \alpha_r]\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1s} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2s} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rs} \end{bmatrix}$$

或

$$B_{n\times s} = P_{n\times r}A_{r\times s} \tag{4-3}$$

由题设知，P 的秩为 r（列满秩）.下证 $r(B)=r(A)$,

为此只需证明两个齐次线性方程组 $Bx=0$ 与 $Ax=0$ 同解即可.

显然 $Ax=0$ 的解都是 $Bx=0$ 的解；反之，若 $Bx=0$，即有 $PAx=0$，或 $P(Ax)=0$，

由于 P 是列满秩的，所以齐次线性方程组 $Py=0$ 只有零解，故由 $P(Ax)=0$ 知 $Ax=0$，

所以 $Bx=0$ 的解也是 $Ax=0$ 的解，从而两个齐次线性方程组同解，$r(A)=r(B)$.

从而，B 的列组无关 $\Leftrightarrow r(B)=s \Leftrightarrow r(A)=s$.

小结 本题的证明过程中，得到下列结论：

(1)若 P 列满秩，则 $r(PA)=r(A)$，即用列满秩阵左乘矩阵，不改变矩阵的秩.

(2)若 Q 行满秩，则 $r(AQ)=r(A)$，即用行满秩阵右乘矩阵，不改变矩阵的秩.

(3)列满秩矩阵的乘积还是列满秩阵.

(4)行满秩矩阵的乘积还是行满秩阵.

(5)在本题条件下，当 $r=s$ 时，B 的列组线性无关 $\Leftrightarrow \det(A)\neq 0$.

例8 已知向量组 A: $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m \ (m \geq 2)$ 线性无关， B: $\beta_1 = \alpha_1 + \alpha_2$,

$\beta_2 = \alpha_2 + \alpha_3, \ldots, \beta_{m-1} = \alpha_{m-1} + \alpha_m, \beta_m = \alpha_m + \alpha_1$，讨论向量组 B 的线性相关性。

解 解法 1:

$$[\beta_1\ \beta_2 \cdots \beta_{m-1}\ \beta_m] = [\alpha_1\ \alpha_2 \cdots \alpha_m]\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 \end{bmatrix}$$，记为 $B = AC$ 。

$$\det(C) = 1 + (-1)^{m+1} = \begin{cases} 2 & \text{若 } m \text{为奇数} \\ 0 & \text{若 } m \text{为偶数} \end{cases}$$

由例 7 的结论知，当 m 为奇数时， B 组线性无关；当 m 为偶数时， B 组线性无关。

解法 2: 设有一组数 $x_1, x_2, \ldots, x_m$, 使得 $x_1\beta_1 + x_2\beta_2 + \cdots + x_m\beta_m = 0$,

将题设中的条件代入并整理, 可得 $(x_1 + x_m)\alpha_1 + (x_1 + x_2)\alpha_2 + \cdots + (x_{m-1} + x_m)\alpha_m = 0$

由 于 向 量 组 A线 性 无 关 , 所 以 得

$$\begin{cases} x_1 + \quad\quad\quad\quad + x_m = 0 \\ x_1 + x_2 \quad\quad\quad\quad = 0 \\ \quad x_2 + x_3 \quad\quad\quad = 0 \\ \quad\quad\quad \ddots \\ \quad\quad\quad\quad x_{m-1} + x_m = 0 \end{cases}$$

此齐次线性方程组的系数行列式为 $\det(C)$, 余下讨论同解法 1。

例9　已知 $P_{m\times n}$是列满秩矩阵，又 n维列向量组 $A:\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s(s\leq n)$线性无关，证明：向量组 $B:P\alpha_1,P\alpha_2,\ldots,P\alpha_s$线性无关。

证明

$$B=\left[P\alpha_1\ P\alpha_2\ \ldots\ P\alpha_s\right]=P\left[\alpha_1\ \alpha_2\ \ldots\ \alpha_s\right]=PA$$

由于向量组 A线性无关，所以 A列满秩。

由例7的小结知道，PA是列满秩的，即 B是列满秩的，所以，B组线性无关。

小结：例8以及例9都是例7结论的直接应用。

例10 设向量 $\alpha_1 \neq 0$, 证明：向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m (m \geq 2)$线性无关 $\Leftrightarrow$ 每个向量 α_i都不能由 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{i-1}$线性表示 $(i = 2,3,\ldots,m)$。

证明 必要性：用反证法，若有某个向量 α_i可由 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{i-1}$线性表示，

则 $\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, \alpha_i$线性相关，从而 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$线性相关，与题设矛盾。

故每个向量 α_i都不能由 $\alpha_1, \ldots, \alpha_{m-1}$线性表示 $(i = 2,3,\ldots,m)$

充分性：用归纳法。显然，当 $m = 2$时结论成立；假设结论对 $m-1$个向量的情形成立。由于 $\alpha_1, \ldots, \alpha_{m-1}$线性无关，$\alpha_m$不能由 $\alpha_1, \ldots, \alpha_{m-1}$线性表示，

则 $\alpha_1, \ldots, \alpha_{m-1}, \alpha_m$一定线性无关，否则 $\alpha_1, \ldots, \alpha_{m-1}, \alpha_m$线性相关，则 α_m一定能由 $\alpha_1, \ldots, \alpha_{m-1}$线性表示，矛盾。

小结：注意反证法的用法，特别是在证明向量组线性无关时，常用反证法。

例11 已知 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ 是 n 维向量组，且 n 维基本单位组 $e_1,e_2,\ldots,e_n$ 可由它们线性表示，证明 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ 线性无关。

证明 由于 $e_1,e_2,\ldots,e_n$ 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ 线性表示，所以

$$n = r(e_1,\ldots,e_n) \le r(\alpha_1,\ldots,\alpha_n) \le n$$

所以 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ 线性无关。

小结：若 A 组能由 B 组线性表示，则 $r(A) \le r(B)$; 若 A 组与 B 组等价，则 $r(A) = r(B)$.

例12 已知 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$是 n维向量组，证明：$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$线性无关 $\Leftrightarrow$ 任一n维向量都可由 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$线性表示。

证明 充分性：由题设知：特别地，$e_1,e_2,\ldots,e_n$可由 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$线性表示，由例 11知 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$线性无关。

必要性：设 β是任意一个 n维向量，由于 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n,\beta$是 $n+1$个 n维向量，线性相关，而 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$线性无关，所以 β前的系数必须不为 0，于是可由 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$线性表示。

小结：所有 n维向量的全体构成 R^n，从线性关系的观点看，他们的代表"就是 n维基本单位向量组 $e_1,e_2,\ldots,e_n$.在学习了向量空间以后，我们知道，$e_1,e_2,\ldots,e_n$是 R^n最简单、最自然的基底；同时，R^n中任意 n个线性无关的向量，都可做 R^n的基底。

例13 设 A 是 n 阶方阵，$2 \le k < n$，方程组 $A^k X = 0$ 有解向量 α，且 $A^{k-1}\alpha \neq 0$. 证明：向量组 $\alpha, A\alpha, \cdots, A^{k-1}\alpha$ 线性无关.

解 设 $\lambda_1\alpha + \lambda_2 A\alpha + \cdots + \lambda_k A^{k-1}\alpha = 0$，两边左乘 A^{k-1} 得：

$\lambda_1 A^{k-1}\alpha = 0$，又因为 $A^{k-1}\alpha \neq 0$，所以 $\lambda_1 = 0$；

再于等式两边左乘 A^{k-2} 得 $\lambda_2 = 0, \cdots$，这样可证

$\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_k = 0$，故向量组 $\alpha, A\alpha, \cdots, A^{k-1}\alpha$ 线性无关. 证毕.

例14 求证：向量组的任何一个线性无关组都可以扩充成它的极大无关组。

解 设向量组 $A:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 的秩为 r，不妨设 $A_0:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ $(s\le r)$ 是 A 的一个线性无关组. 如果 $s=r$，则 A_0 已经是 A 的一个极大无关组了；如果 $s<r$，则在 $\alpha_{s+1},\cdots,\alpha_m$ 中至少有一个向量不能由 A_0 线性表示 (不然的话，则 A_0 是 A 的极大无关组，从而 $s=r$，矛盾)，不妨设 α_{s+1} 不能被 A_0 线性表示，做向量组 $A_1:\alpha_1,\cdots,\alpha_s,\alpha_{s+1}$，则 A_1 是 A 中的一个线性无关组，

再对 A_1做与 A_0相似的讨论，$\cdots$，直至扩充到 $s+l=r$，得到

$\alpha_1,\cdots,\alpha_s,\alpha_{s+1},\cdots\alpha_{s+l}$，此向量组就是 A 的极大无关组 . 证毕 .

小结: 此题的结论称为 极大无关组的扩充定理 .
由这个定理知道，一个向量组只要含有非零向量，
则一定有极大无关组. 这个结论回答了向量组的极
大无关组的存在性问题. 在线性空间的理论中，
有 基的扩充定理 ，其证明的方法与此题类似.

例15 设向量组 A 的秩为 r，向量组 $A_0:\beta_1,\cdots,\beta_r$ 为 A 中的线性无关组．证明：A_0 可以做 A 的极大无关组．

证明 根据极大无关组的定义，只需要证明 A 中任一向量均可由 A_0 线性表示即可．由 A 的秩为 r 可知，A 中任意 $r+1$ 个向量（如果有的话）线性相关；从而，对于 A 中任一向量 α，向量组 $(A_0\mid\alpha)$ 线性相关；又因为向量组 A_0 线性无关，所以，α 可由 A_0 线性表示，因此，A_0 是 A 的一个极大无关组．

小结　此题表明：秩为r 的向量组中，任意r个 线 性无关的向量构成的向量组都可做极大无关组，在线性空间的理论中，用类似 的方法可以证明：若线性空间V的维数为r，则V中任意r个线性无关的向量所组成的向量组，都可做V的基底.

例16 设 A 与 B 都是 n 维向量组，证明：B 组可由 A 组线性表示 $\Leftrightarrow$ $r(A)=r(A\mid B)$.

证明 必要性：由于 B 组可由 A 组线性表示，进而向量组 $(A\mid B)$ 可由 A 组线性表示，有 $r(A\mid B)\le r(A)$；另一方面，A 组可由 $(A\mid B)$ 线性表示，有 $r(A)\le r(A\mid B)$；所以有 $r(A)=r(A\mid B)$.

推论 1 向量组 A 与 B 等价 $\Leftrightarrow$ $r(A)=r(B)=r(A\mid B)$.

推论 2 矩阵方程 $AX=B$ 有解 $\Leftrightarrow$ $r(A)=r(A\mid B)$.

例17 A为 $m\times n$矩阵，证明：$r(A)=m \Leftrightarrow$ 存在矩阵 $P_{n\times m}$，使得 $AP=I_m$

证明 必要性：$r(A)=m \Rightarrow r(A\,|\,I_m)=m=r(A)$，由例16推论知

矩阵方程 $AX=I_m$有解，记其解为 $P_{n\times m}$，则有 $AP=I_m$.

充分性 由于 $AP=I_m$，所以有 $m=r(I_m)=r(AP)\le r(A)\le m$，

得 $r(A)=m$.

小结　此题中的矩阵 A 是行满秩阵，P 称为 A 的右逆。有结论：矩阵 A 行满秩的充要条件是 A 存在右逆．从而，若 A 是行满秩矩阵，且 $BA = CA$，则 $B = C$，即：行满秩矩阵满足右消去律．类似地，列满秩矩阵存在左逆，满足左消去律。另外，矩阵 A 行（列）满秩的另一个等价表述是：A 的行（列）组线性无关。

例18 设 $A_{m\times n}, B_{n\times p}$满足 $AB=O$，证明: $r(A)+r(B)\le n$

解 如果 $B=O$，则 $r(A)+r(B)=r(A)\le n$

如果 $B\ne O$，则至少有一列非0。将 B写成 $[\beta_1,\dots,\beta_n]$

$AB=O$说明 B的每一列都是 $Ax=0$的解，从而 B

线性无关的向量的个数至多不超过 $n-r(A)$。

于是 $r(A)+r(B)\le r(A)+n-r(A)=n$

例19 设矩阵 $A_{m\times n}$ 满足 $r(A) = r$。证明：存在秩为 $n-r$ 的方阵 B，使得 $AB = O$.

解 因为 $r(A) = r$，$Ax = 0$ 的基础解系有 $n-r$ 个线性无关的向量，不妨设为 $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-r}$。

令 $B = [\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-r}, 0, \ldots, 0]$

B 就是符合题目要求的矩阵。

例20 已知齐次线性方程组 $\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

(1) λ 取什么值，方程组只有 0 解；(2) λ 取什么值，方程组有非 0 解

解 系数矩阵满秩时方程只有 0 解，不满秩有非 0 解。

方程组的系数矩阵的行列式为 $\begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 1)^2(\lambda + 2)$

(1) $\lambda \neq 1$ 且 $\lambda \neq -2$

(2) $\lambda = 1$ 或 $\lambda = -2$

小结 一般地，齐次线性方程组的解判定是用系数阵的秩进行的. 只有系数阵是方阵，也可用系数阵的行列式来判定

例21 已知齐次线性方程组 $Ax=\begin{pmatrix}1 & 2 & -2\\ 2 & -1 & \lambda\\ 3 & 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$

若非 0方阵 B满足 $AB=O$，求 $\det(B)$和 λ

解 B不为 O说明 $Ax=0$有非 0解，故 A不满秩

$$\det(A)=\begin{vmatrix}1 & 2 & -2\\ 2 & -1 & \lambda\\ 3 & 1 & -1\end{vmatrix}=5(\lambda-1)$$

$\lambda=1$； 又由 $AB=O$，知 $\det(B)=0$， 不然将推出 $A=O$；

小结：若非 0方阵 B满足 $AB=O$，则必有 $|A|=|B|=0$

例22 已知 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$是方程 $Ax=0$的基础解系，且 $\beta_1=\alpha_1$, $\beta_2=\alpha_1+\alpha_2$, $\beta_3=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$。问 $[\beta_1,\beta_2,\beta_3]$是否也是基础解系?

解 β_1,β_2,β_3是方程的解，且 $[\beta_1,\beta_2,\beta_3]=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$，故

$$[\beta_1,\beta_2,\beta_3]\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}^{-1}=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3],\quad r([\beta_1,\beta_2,\beta_3])=r([\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]),$$

这说明 $r([\beta_1,\beta_2,\beta_3])=r([\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3])$，且这两组解可相互表出

于是 β_1,β_2,β_3与 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$等价且线性无关，因此 也是基础解系。

小结：一般地，齐次线性方程组组如果有非零解，则必有基础解系，且基础解系不唯一；与已知的基础解系**等价**的线性无关组也是基础解系. 此题中 的线性无关性也可用例7的结论来证.

例23 设方阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 的行列式为零，a_{ij} 的代数余子式记为 A_{ij}，已知 $A_{21}\neq 0$，证明：齐次线性方程组 $Ax=0$ 的通解为 $x=k(A_{21},A_{22},\cdots,A_{2n})^T$，其中 k 为任意常数.

解 由于 $M_{21}=-A_{21}\neq 0$ 是矩阵的一个 $n-1$ 阶非零子式，且 $\det(A)=0$，所以 $r(A)=n-1$，从而 $Ax=0$ 的基础解系中只含一个解向量，进而 $Ax=0$ 的任一非零解均可作为基础解系.

考察向量 $\xi=(A_{21},A_{22},\cdots,A_{2n})$，由于 $A_{21}\neq 0$ 知，$\xi\neq 0$；

由行列式展开定理及推论知，$A\xi$ 的第 i 个分量为 $\sum\limits_{k=1}^{n}=\begin{cases}0, & i\neq 2\\ |A|=0, & i=2\end{cases}$，

所以，ξ 是 $Ax=0$ 的一个非零解，从而可以作为基础解系，

故 $Ax=0$ 的通解为 $x=k(A_{21},A_{22},\cdots,A_{2n})$，其中 k 为任意常数.

例24 设 A 为 $n(n \geq 2)$ 阶方阵，A^* 为 A 的伴随阵，证明：

$$r(A^*) = \begin{cases} n, & r(A) = n, \\ 1, & r(A) = n-1, \\ 0, & r(A) < n-1, \end{cases}$$

解 (1)当 $r(A) = n$ 时，$|A| \neq 0$，所以 $|A^*| = |A|^{n-1} \neq 0$，知 $r(A^*) = n$.

(2)当 $r(A) = n-1$ 时，A 中至少有一个 $n-1$ 阶子式非零，且 $|A| = 0$；

由于 n 阶方阵的 $n-1$ 阶子式必为其某个元素的余子式，

而 A^* 由 $|A|$ 的所有元素的代数余子式构成，

故知 A^* 至少有一个元素非零，所以 $r(A^*) \geq 1$；

另一方面，由于 $AA^* = |A|I = O$，所以 $r(A) + r(A^*) \leq n$，

从而得 $r(A^*) \leq n - r(A) = 1$；故有 $r(A^*) = 1$.

(3) 若 $r(A) < n-1$，则 A 的所有的 $n-1$ 阶子式均为零，从而 $A^* = O$，故 $r(A^*) = 0$

例25 设 $Ax=0$ 和 $Bx=0$ 都是 n 元线性方程组，证明：

(1) 若 $Ax=0$ 的解都是 $Bx=0$ 的解，则 $r(A)\ge r(B)$;

(2) 若 $Ax=0$ 与 $Bx=0$ 同解，则 $r(A)=r(B)$.

解 (1)可知，$Ax=0$ 的基础解系中的 $n-r(A)$ 个解向量都是 $Bx=0$ 的解，

从而 $Bx=0$ 的解中至少已有 $n-r(A)$ 个线性无关，

所以 $n-r(A)\le n-r(B)$，故 $r(A)\ge r(B)$.

(2)用(1)的结论，知 $r(A)\ge r(B)$ 且 $r(A)\le r(B)$，所以有 $r(A)=r(B)$.

例26 已知A为$m\times n$阶实矩阵，证明$r(AA^T)=r(A)=r(A^TA)$.

解 只要证明了$Ax=0$与$A^TAx=0$同解，则有$r(A)=r(A^TA)$

一方面，$Ax=0$的解显然都是$A^TAx=0$的解.

另一方面，若x是$A^TAx=0$的解，则$x^T(A^TAx)=0$，即$(Ax)^T(Ax)=0$

可得$Ax=0$，即x也是方程组$Ax=0$的解，故$Ax=0$与$A^TAx=0$同解

同理得$r(AA^T)=r(A^T)=r(A)$，故$r(AA^T)=r(A)$.

例27 当 a, b为何值时，线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - 6x_3 + 4x_4 = -1 \\ 3x_1 + 2x_2 + ax_3 + 7x_4 = -1 \\ x_1 - x_2 - 6x_3 - x_4 = b \end{cases}$$

有解？并在有解时，求其结构式通解．

解 对方程组的增广阵做初等行变换，化为阶梯形

$$\bar{A} = \left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 1 & -2 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & -6 & 4 & -1 \\ 3 & 2 & a & 7 & -1 \\ 1 & -1 & -6 & -1 & b \end{array}\right] \xrightarrow{行} \left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & a+8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b+2 \end{array}\right]$$

由阶梯形矩阵可见

(1)当 $b \neq -2$时，$r(A) \neq r(\overline{A})$，方程组无解．

(2)当 $b=-2$且 $a \neq -8$时，$r(A)=r(\overline{A})=3<4$，方程组有无穷解．

$$\overline{A} \to \left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

结构式通解为 $x=(-1,1,0,0)^T+c(-1,-2,0,0)^T$（$c$为任意常数）

(3)当 $b=-2$且 $a=-8$时，$r(A)=r(\overline{A})=2<4$，方程组有无穷解．

$$\overline{A} \to \left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 0 & -4 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

结构式通解为 $x=(-1,1,0,0)^T+c_1(4,-2,1,0)^T+c_2(-1,-2,0,1)^T$

c_1, c_2为任意常数）

例28 线性方程组
$$\begin{cases} ax_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + ax_2 + x_3 = a \\ x_1 + x_2 + ax_3 = a^2 \end{cases}$$

1）当 a为何值时，有唯一解？

2）当 a为何值时，无解？

3）当 a为何值时，有无穷多解 ？求其结构式通解。

解 方程组的系数行列式为

$$|A| = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = (a+2)(a-1)^2$$

1）当 $a \neq -2$且 $a \neq 1$时，$|A| \neq 0$，由克莱姆法则知，方程组有唯一解。

2）当 $a=-2$时，对增广阵做初等行变换（前两行都加到第三行）

$$\overline{A}=\left[\begin{array}{ccc:c} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{行}} \left[\begin{array}{ccc:c} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right]$$

可见，$r(A)=2, r(\overline{A})=3$，方程组无解。

3）当 $a=1$时，$\overline{A}=\left[\begin{array}{ccc:c}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{array}\right]\xrightarrow{行}\left[\begin{array}{ccc:c}1&1&1&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{array}\right]$

方程组有无穷多解，

通解为 $x=(1,0,0)^T+c_1(-1,1,0)^T+c_2(-1,0,1)^T\,(c_1,c_2$为任意常数 $)$。

例29 已知 A 为 $m \times n$ 矩阵，非齐次线性方程组 $Ax = b$ 满足 $r(A \mid b) = r(A) = r < n$，证明：$Ax = b$ 存在 $n - r + 1$ 个线性无关的解，可以线性表示该方程组的任意一个解，而且表示系数的和为1.

证明 由题设知，$Ax = 0$ 的基础解系中含 $n-r$ 个解，记为 $\xi_1, \cdots, \xi_{n-r}$；

又 $Ax = b$ 有解，记它的一个特解为 ξ^*。由线性方程组的解的性质知：$\xi^*, \xi^* + \xi_1, \cdots, \xi^* + \xi_{n-r}$ 是 $Ax = b$ 的 $n - r + 1$ 个解。

下面，证明这个解组满足此题结论。

首先，此组线性无关。

事实上，设 $k_0\xi^* + k_1(\xi^* + \xi_1) + \cdots + k_{n-r}(\xi^* + \xi_{n-r}) = 0,$

整理得：$(k_0 + k_1 + \cdots + k_{n-r})\xi^* + k_1\xi_1 + \cdots + k_{n-r}\xi_{n-r} = 0,$

两边同时左乘 A，注意到 $A\xi^* = b, A\xi_j = 0,$

得 $(k_0 + k_1 + \cdots + k_{n-r})b = 0,$ 而 $b \neq 0,$ 所以 $k_0 + k_1 + \cdots + k_{n-r} = 0,$

代入式，注意到 $\xi_1, \cdots, \xi_{n-r}$ 是基础解系，线性无关，所以知

$k_1 = \cdots = k_{n-r} = 0,$ 又 $k_0 + k_1 + \cdots + k_{n-r} = 0,$ 所以 $k_0 = 0,$

故，此解组线性无关。

其次，设 η 是 $Ax = b$ 的任一解，

由非齐次线性方程组的解结构定理知，存在一组系数 $c_1, \cdots, c_r$，

使得 $\eta = \xi^* + c_1\xi_1 + \cdots + c_{n-r}\xi_{n-r}$，可以变形为

$$\eta = (1 - c_1 - \cdots - c_{n-r})\xi^* + c_1(\xi^* + \xi_1) + \cdots + c_{n-r}(\xi^* + \xi_{n-r})$$

所以，$Ax = b$ 的任一解可由此解组线性表示，

且表示系数之和为 1.

例30 已知方程组

$$(\mathrm{I})\begin{cases} x_1+x_2+x_3=0 \\ x_1+2x_2+ax_3=0 \\ x_1+4x_2+a^2x_3=0 \end{cases} \text{与}(\mathrm{II})\ x_1+2x_2+x_3=a-1$$

有公共解，求 a以及所有公共解。

解 （I）与（II）的公共解就是两个方程组合在一起得到的方程组的解。

$$(A\,|\,b)=\left[\begin{array}{ccc:c}1&1&1&0\\1&2&a&0\\1&4&a^2&0\\1&2&1&a-1\end{array}\right]\xrightarrow{\text{行}}\left[\begin{array}{ccc:c}1&1&1&0\\0&1&a-1&0\\0&0&1-a&a-1\\0&0&0&(a-1)(a-2)\end{array}\right]$$

1）当 $a=2$时，有唯一公共解 $x=(0,1,-1)^T$。

2）当 $a=1$时，公共解为 $x=c(1,0,-1)^T$，其中 c为任意常数。

例31 已知方程组

$$(\mathrm{I})\begin{cases} -2x_1 + x_2 + ax_3 - 5x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 + bx_4 = 4 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = c \end{cases} \text{与}(\mathrm{II})\begin{cases} x_1 + x_4 = 1 \\ x_2 - 2x_4 = 2 \\ x_3 + x_4 = -1 \end{cases}$$

同解，求 a, b, c。

解 记(I)的增广阵为 A，(II)的增广阵为 B，(I)与(II)同解

$\Leftrightarrow$ 两组方程可以相互线性表示

$\Leftrightarrow$ A的行向量组与 B的行向量组等价

$\Leftrightarrow r(B^T \mid A^T) = r(A^T) = r(B^T)$

显见，$r(B^T)=3$，所以得 $r(B^T \mid A^T)=3$

$$\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&-2&1&3\\0&1&0&1&1&1\\0&0&1&a&-1&1\\1&-2&1&-5&b&2\\1&2&-1&1&4&c\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&-2&1&3\\0&1&0&1&1&1\\0&0&1&a&-1&1\\0&0&0&-1-a&-2-b&0\\0&0&0&1+a&0&c-4\end{array}\right]$$

由此得，$a=-1, b=-2, c=4$

例32 设 $\alpha_i=(\alpha_{i1},\alpha_{i2},\dots,\alpha_{ir})^T$ 为 n 维实向量 $(i=1,2,\dots,r;r<n)$，且 $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_r$ 线性无关，令 $A=[\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_r]^T$.设齐次线性方程组 $Ax=0$ 的解为 $\alpha_{r+1},\alpha_{r+2},\dots,\alpha_n$，证明：$\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_r,\alpha_{i1},\alpha_{r+1},\dots,\alpha_n$ 线性无关

证明： 注意，A 的第 i 行为 α_i^T，α_j 是 $Ax=0$ 的解，满足 $Ax=0$ 的第 i 个方程，从而有

$$\alpha_i^T\alpha_j=0(i=1,\dots,r;\ j=r+1,\dots n)$$

设有一组系数 $k_1,\dots, k_r, k_{r+1},\dots, k_n$，使得

$$k_1\alpha_1 + \dots + k_r\alpha_r + k_{r+1}\alpha_{r+1} + \dots + k_n\alpha_n = 0$$

左乘 $(k_1\alpha_1,\dots, k_r\alpha_r)^T$，得 $(k_1\alpha_1,\dots, k_r\alpha_r)^T(k_1\alpha_1,\dots, k_r\alpha_r) = 0$,

即向量 $k_1\alpha_1 + \dots + k_r\alpha_r$ 的各分量平方和为 0，故 $k_1\alpha_1 + \dots + k_r\alpha_r = 0$;

又 $\alpha_1,\dots, \alpha_r$ 线性无关，得 $k_1 = \dots = k_r = 0$;

代入式，得 $k_{r+1}\alpha_{r+1} + \dots + k_n\alpha_n = 0$,

注意到 $\alpha_{r+1},\dots, \alpha_n$ 是基础解系，线性无关，

所以 $k_{r+1} = \dots = k_n = 0$.

至此 $k_1 = \dots = k_r = k_{r+1} = \dots = k_n = 0$; 故 $\alpha_1,\dots, \alpha_r, \alpha_{r+1},\dots, \alpha_n$ 线性无关.