2019版

南卷汇

大一上线代期末试题汇总

南洋书院学生会制作

目录

试题

2018 年线代期末试题

一，单选题（每小题 3 分，共 15 分）

1， 设 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ ，$B=\begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31}+a_{11} & a_{32}+a_{12} & a_{33}+a_{13} \end{pmatrix}$ ，$P_1=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ，

，$P_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，则 【 】

（A） $AP_1P_2=B$； (B) $AP_2P_1=B$； (C) $P_1P_2A=B$； (D) $P_2P_1A=B$

2， 设 n 阶方阵 A 经过有限次初等变换后得到矩阵 B，则， 【 】

(A) $|A|=|B|$； (B) 方程组 $Ax=0$ 与 $Bx=0$ 同解 ；

(C) A 与 B^T 等价； (D) 一定存在初等矩阵 P，Q，使得 $A=PBQ$

3，设 $Ax=0$ 是非齐次线性方程组 $Ax=b$ 对应的齐次方程组，则， 【 】

(A) 若 $Ax=0$ 只有零解，则 $Ax=b$ 有唯一解；
(B) 若 $Ax=0$ 只有非零解，则 $Ax=b$ 有无穷多解；
(C) 若 $Ax=0$ 有无穷多解，则 $Ax=b$ 只有零解；
(D) 若 $Ax=0$ 有无穷多解，则 $Ax=b$ 有非零解；

4，设 $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & x \\ -3 & -3 & 5 \end{pmatrix}$，$A$ 有特征值 $\lambda_1=6$， $\lambda_2=\lambda_3=2$，且 A 有 3 个线性无关的特征向量，则 x 等于 【 】

(A) 2; (B) -2; (C) 4; (D) -4;

5，设 n 维向量组 β_1,β_2,β_3 可由 α_1,α_2 线性表出，则 【 】

(A) 仅当 α_1,α_2 线性无关时， β_1,β_2,β_3 线性无关；

(B) 仅当 α_1,α_2 线性相关时， β_1,β_2,β_3 线性相关；

(C) β_1,β_2,β_3 线性无关；

(D) β_1,β_2,β_3 线性相关；

二，填空题（每小题 3 分，共 15 分）

1，设 A 为三阶方阵，且 $|A-2I|=|A+I|=|2A-I|=0$，则 $|A^*|=$____，

2，设 n 阶矩阵 A 满足 $A^2-2A+3I=0$，则 $A^{-1}=$_____，

3，设 $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -2\\ 4 & t & 3\\ 3 & -1 & 1\end{pmatrix}$，$B$ 为 3 阶非零矩阵，且 $AB=0$,则 $t=$_____，

4，二次曲面 $x^2+2y^2-2xy=1$，在 R^3 中表示的图形是_____柱面，

5，已知 R^3 中向量满足 $\|a\|=\|b\|=2$，$(a,b)=\frac{\pi}{3}$，则 $\|2a-3b\|=$_____，

三，(本题 10 分)求过点 $A(-3,0,1)$ 且于平面 π_1：$3x-4y-z+5=0$ 平行，与直线 $l_1=\frac{x}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z+1}{-1}$ 相交的直线 l 的方程。

四，（本题 8 分）已知 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，证明 $\alpha_1+\alpha_2,3\alpha_2+2\alpha_3,\alpha_1-2\alpha_2+\alpha_3$ 线性无关。

五，（本题 10 分）设 $A=\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 1\\ 0 & \lambda-1 & 0\\ 1 & 1 & \lambda\end{pmatrix}$，$b=\begin{pmatrix}a\\ 1\\ 1\end{pmatrix}$,且线性方程组 $Ax=b$ 存在两个不同的解，（1）求参数 λ，a 的值；（2）求方程组的 $Ax=b$ 的同解。

六，（本题 10 分）设 3 阶方阵 A 满足 $A\alpha_i=i\alpha_i\,(i=1,2,3)$，其中 $\alpha_1=(1,2,3)^T,\alpha_2=(2,-2,1)^T,\alpha_3=(-2,-1,2)^T$，求矩阵 A。

七，（本题 12 分）已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+3x_2^2+3x_3^2+2ax_2x_3(a>0)$,

（1） 若此二次型正定，求参数 $A,BnAB=BA,\frac{1}{3}(2I-A)2\sqrt{7}1N=(m,n,p),l//\pi_1$ 的范围；

（2） 若此二次型通过正交变换化成标准形方程 $f(y_1,y_2,y_3)=y_1^2+2y_2^2+5y_3^2$，求参数 a 的取值及所用的正交变化。

八，（本题 10 分）学习了第八章线性代换的同学做题一，其余同学做题二。

题一：设 $T\in L(V)$，T 在 V 的基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 下的矩阵 $A=\begin{pmatrix}15 & -11 & 5\\ 20 & -15 & 8\\ 8 & -7 & -6\end{pmatrix}$，

（1） 证明 $\beta_1=2\alpha_1+3\alpha_2+\alpha_3,\beta_2=3\alpha_1+4\alpha_2+\alpha_3,\beta_3=\alpha_1+2\alpha_2+2\alpha_3,$ 也是 V 的基；

（2） 求 T 在基 β_1,β_2,β_3 下的矩阵，

题二；设线性空间 $f[x]_2$ 有两个基 $(I):1,x,x^2(II):x^2+x,x^2-x,x+1$ 。

（1） 求由基 (I) 到基 (II) 的过渡矩阵；

（2） 求 $f=4x^2+4x+2$ 在基 (II) 下的坐标。

九，（本题 10 分）设 A,B 均为 n 阶矩阵，A 有 n 个不同的特征值，证明：

（1） 若 $AB=BA,$ 则 B 相似于对角矩阵；

（2） 若 A 的特征向量也是 B 的特征向量，则 $AB=BA,$

2018 年线性代数与解析几何期末考试

一、单选题（每小题 3 分，共 15 分）

1.C　2.C　3.D　4.B　5.D

二、填空题（每小题 3 分，共 15 分）

1. 1　　2. $\frac{1}{3}(2I-A)$　　3. -3　　4. 椭圆　　5. $2\sqrt{7}$

三、解：

（1） 设 l 的方向向量为 (m,n,p)，则由 $l//\pi_1$，可得 $3m-4n-p=0$（2 分）由 $A(-3,0,1)\in l, B(0,1,-1)\in l_1$ 且 $l\ l_1$ 相交，可得 $\begin{vmatrix} m & n & p \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix}=0$ 即

$-m+n-p=0$　　　（4 分）

（2）解方程组 $\begin{cases} 3m-4n-p=0 \\ -m+n-p=0 \end{cases}$ 可得 $m=-5p, n=-4p$，令 $p=1$，则

$s=(-5,-4,1)$（2 分）

（3）直线 $l: \dfrac{x+3}{-5}=\dfrac{y}{-4}=\dfrac{z-1}{1}$（2 分）

四、证：

令 $k_1(\alpha_1+\alpha_2)+k_2(3\alpha_2+2\alpha_3)+k_3(\alpha_1-2\alpha_2+\alpha_3)=0$，即

$(k_1+k_3)\alpha_1+(k_1+3k_2-2k_3)\alpha_2+(2k_2+k_3)=0.$　　　（2 分）

由于 α_1，α_2，α_3 线性无关，故 $\begin{cases} k_1+k_3=0 \\ k_1+3k_2-2k_3=0 \\ 2k_2+k_3=0 \end{cases}$（3分）

因 $D=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}=9\neq 0.$（2 分）

故齐次方程组只有零解，即 $k_1=k_2=k_3=0$

故 $\alpha_1+\alpha_2, 3\alpha_2+2\alpha_3, \alpha_1-2\alpha_2+\alpha_3$ 线性无关。（1 分）

五、解：（1）对方程组的增广矩阵做初等行变换

$$\bar{A}=(A,b)=\begin{pmatrix}\lambda&1&1&a\\0&\lambda-1&0&1\\1&1&\lambda&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&\lambda&1\\0&\lambda-1&0&1\\0&1-\lambda&1-\lambda^2&a-\lambda\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&\lambda&1\\0&\lambda-1&0&1\\0&0&1-\lambda^2&a-\lambda+1\end{pmatrix}.$$

（2 分）

因 $Ax=b$ 存在两个不同的解，所以 $r(A)=r(\bar{A})<3$ （2 分）故 $\lambda=-1,a=-2$

当 $\lambda=-1,a=-2$ 时，$\bar{A}\to\begin{pmatrix}1&1&-1&1\\0&-2&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&-1&\frac{3}{2}\\0&1&0&\frac{-1}{2}\\0&0&0&0\end{pmatrix}$.

故可得 $\begin{cases}x_1=\frac{3}{2}+x_3\\x_2=-\frac{1}{2}+0x_3\end{cases}$.

令 $x_3=0$ 可得 $x_1=\frac{3}{2},x_2=-\frac{1}{2}$，故 $\eta=\frac{1}{2}(3,-1,0)^T$ 为该方程的一个特解。（2 分）

令 $x_3=1$ 可得 $x_1=1,x_2=0$，故 $\xi=(1,0,1)^T$ 为对应齐次方程组的一个基础解系. (2 分) 故该方程组的通解为 $x=\eta+k\xi=\frac{1}{2}(3,-1,0)^T+k(1,0,1)^T,\forall k$. (2 分)

六、解： 因 $A\alpha_i=l\alpha_i(i=1,2,3)$,即$A\alpha_1=1\alpha_1,A\alpha_2=2\alpha_2,A\alpha_3=3\alpha_3$,故

$$A(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(A\alpha_1,A\alpha_2,A\alpha_3)=(\alpha_1,2\alpha_2,3\alpha_3)\begin{pmatrix}1&&\\&2&\\&&3\end{pmatrix}$$（5分）

所以

$$A=Pdiag(1,2,3)P^{-1}=\begin{pmatrix}1&2&-2\\2&-2&-1\\2&1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&&\\&2&\\&&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&-2\\2&-2&-1\\2&1&2\end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}7&0&-2\\0&5&-2\\-2&-2&6\end{pmatrix}$$

(3 分)

七、解（1）二次型的矩阵为 $A=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&3&a\\0&a&3\end{pmatrix}$.因二次型正定，故

$D_1=2>0,D_2=\begin{vmatrix}2&0\\0&3\end{vmatrix}=6>0,D_3=\begin{vmatrix}2&0&0\\0&3&a\\0&a&3\end{vmatrix}=2(9-a^2)>0,$

$-3<a<3,$ 又 $a>0,$ 故 $0<a<3.$（3 分）

（2）记 $\Lambda=\begin{pmatrix}1&&\\&2&\\&&5\end{pmatrix}$，则 $|A|=2(9-a^2)=1\times2\times5=10,$ 故 $a=\pm2,$ 又 $a>0,$ 故 $a=2.$ 此

时 $A=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&3&2\\0&2&3\end{pmatrix}$（6 分）

$I-A=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-2&-2\\0&-2&-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix},\zeta_1=(0,1,-1)^T$ 为 $\lambda_1=1$ 对应的特征向量.

$2I-A\begin{pmatrix}0&0&0\\0&-1&-2\\0&-2&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix},\zeta_2=(1,0,0)^T$ 为 $\lambda_2=2$ 对应的特征向量.

$5I-A\begin{pmatrix}3&0&0\\0&2&-2\\0&-2&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix},\zeta_3=(0,1,1)^T$ 为 $\lambda_3=5$ 对应的特征向量.（3 分）

将 ξ_1,ξ_2,ξ_3 单位化，可得 $\eta_1=\frac{1}{\sqrt2}(0,1,-1)^T,\eta_2=(1,0,0)^T,\eta_3=\frac{1}{\sqrt2}(0,1,1)^T.$ 故所用的

正交变换矩阵为 $C=(\eta_1,\eta_2,\eta_3)=\begin{pmatrix}0&1&0\\\frac{1}{\sqrt2}&0&\frac{1}{\sqrt2}\\-\frac{1}{\sqrt2}&0&\frac{1}{\sqrt2}\end{pmatrix}$.(3分)

八、 题一解：（1）$[\beta_1\quad\beta_2\quad\beta_3]=[\alpha_1\quad\alpha_2\quad\alpha_3]\begin{pmatrix}2&3&1\\3&4&2\\1&1&3\end{pmatrix}$（2分）

因为 $\det\begin{pmatrix}2&3&1\\3&4&2\\1&1&3\end{pmatrix}=-2\neq0,$ 所以 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 与 β_1,β_2,β_3 等价（3 分）

（2）基$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$到基$\beta_1,\beta_2,\beta_3$的过渡矩阵$C=\begin{pmatrix}2&3&1\\3&4&2\\1&1&3\end{pmatrix}$,(2分）

故T在基β_1,β_2,β_3下的矩阵

$$B=C^{-1}AC=\begin{pmatrix}-6&5&-2\\4&-3&1\\1&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}15&-11&5\\20&-15&8\\8&-7&-6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&3&1\\3&4&2\\1&1&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}.\text{（3分）}$$

题二解：$\left[x^2+x,x^2-x,x+1\right]=\left[1\quad x\quad x^2\right]\begin{pmatrix}0&0&1\\1&-1&1\\1&1&0\end{pmatrix}$.

所以由基（Ⅰ）到基（Ⅱ）的过渡矩阵$A=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&-1&1\\1&1&0\end{pmatrix}$.(5分）

由f在基（Ⅰ）下的坐标$x=(2,4,4)^T$,得f在基（Ⅱ）下的坐标为

$$y=A^{-1}x=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1&1&1\\1&-1&1\\1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\4\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix}.\text{(5分）}$$

或：令$f=4x^2+4x+2=a(x^2+x)+b(x^2-x)+c(x+1)$,比较两端同次幂的系数，

得$\begin{cases}a+b=4\\a-b+c=4\\c=2\end{cases}$,解得$a=3,b=1,c=2$.故$f$在基（Ⅱ）下的坐标为$y=\begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix}$.

2017 年线性代数期末

一． 单项选择题（每小题 3 分，共 15 分）

1. 设 A 和 B 均为 n 阶方阵，$\det(A)=a,\det(B)=b$。又设 A^* 和 B^* 分别为 A 和 B 的伴随矩阵。则 $\begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix}$ 的伴随矩阵为 （ ）

A. $\begin{bmatrix} aA^* & O \\ O & bB^* \end{bmatrix}$ B. $\begin{bmatrix} bA^* & O \\ O & aB^* \end{bmatrix}$ C. $\begin{bmatrix} bB^* & O \\ O & aA^* \end{bmatrix}$ D. $\begin{bmatrix} aB^* & O \\ O & bA^* \end{bmatrix}$

2. 设 A 为 3 阶矩阵，将 A 的第 2 列加到第 1 列得矩阵 B，再交换 B 的第 2 行和第 3 行得单位矩阵。记 $P_1=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},P_2=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$，则 A= （ ）

A. P_1P_2 B. $P_1^{-1}P_2$ C. P_2P_1 D. $P_2P_1^{-1}$

4. 已知齐次线性方程组 $Ax=0$ 的基础解系为 $(1,0,-1,0)^{\mathrm{T}}$，则 $A=[\alpha_1\ \ \alpha_2\ \ \alpha_3\ \ \alpha_4\ ]$ 的列向量组的一个极大线性无关组是 （ ）

A. α_1,α_2 B. α_2,α_3 C. $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ D. $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$

5. 设 A 是 n 阶实对称矩阵，P 是 n 阶可逆矩阵，n 维列向量 α 是 A 的属于特征值 λ 的特征向量. 则矩阵 $(P^{-1}AP)^{\mathrm{T}}$ 属于特征值 λ 的特征向量是 （ ）

A. $P^{-1}\alpha$ B. $P\alpha$ C. $P^{\mathrm{T}}\alpha$ D. $(P^{-1})^{\mathrm{T}}\alpha$

二．填空题（每小题 3 分，共 15 分）

1. 设 A 是 n 阶方阵，$\det(A)=5$，A^* 为 A 的伴随矩阵，则 $\det\left[A^*-\left(\frac{1}{10}A\right)^{-1}\right]=$ ______.

2. 设方阵 A 满足 $A^3=O$，则 $(A^2+2A+4I)^{-1}=$__________.

3. 设 3 元非齐次线性方程组 $Ax=b$ 的三个解向量 η_1,η_2,η_3 满足 $\eta_1+2\eta_2=(3,-0,)^{\mathrm{T}}\ 6\ \eta_2\ 2\ \eta_3(\ -\ -2)^{\mathrm{T}}$,，且 $r(A)=2$。则方程组的通解是________.

4. 已知空间曲线$C:\begin{cases}3y^2+4z^2=1\\ x=0\end{cases}$，则以 C 为准线、母线方向为$a=(1,0,1)$的柱面方程为_____________;以 C 为准线、顶点为$p_0(1,0,0)$的锥面方程为___________;曲线 C 绕 z 轴旋转所得的旋转面方程为_____________.

（注意：学习了第八章线性变换者做第 6 题，其余同学做第 5 题）

5. 设$R[x]_2$（次数不超过 2 额一元实系数多项式全体按通常多项式的加法和数与多项式的乘法构成的实线性空间）的内积为$\langle f,g\rangle=\int_0^1 f(x)g(x)dx$，则$R[x]_2$的一个正交基为____________

6. 设 T 为 2 维线性空间 V 上的线性算子，T 在 V 的基α_1,α_2下的矩阵为$\begin{bmatrix}3&4\\-2&-3\end{bmatrix}$，且由基$\alpha_1,\alpha_2$到基$\beta_1,\beta_2$的过渡矩阵为$\begin{bmatrix}-1&-2\\1&1\end{bmatrix}$，则 T 在 V 的基$\beta_1,\beta_2$下的矩阵为_________.

三.（9 分）计算 n 阶行列式.

$$D_n=\begin{vmatrix}1+a&2&3&\cdots&n\\1&2+a&3&\cdots&n\\1&2&3+a&\cdots&n\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\1&2&3&\cdots&n+a\end{vmatrix}$$

四、（9 分）设$A=\begin{bmatrix}2&-1&0\\-2&2&0\\0&0&1\end{bmatrix}$，且$A^*X\left(\frac{1}{2}A^*\right)^*=2A^{-1}X+I$，其中$A^*$为$A$的伴随矩阵，$I$是 3 阶单位矩阵，求矩阵$X$.

五.（13 分）λ 取何值时，线性方程组 $\begin{cases} (2\lambda-2)x_1+(\lambda-2)x_3=2\lambda-1 \\ 3x_1+(1-\lambda)x_2+3x_3=-\lambda \\ (\lambda-2)x_1+(1-\lambda)x_2+(\lambda-2)x_3=\lambda \end{cases}$ 有唯一解、无解、无穷多解？在有无穷多解时，求结构通解.

六.（9 分）设 α_1 和 α_2 分别是 n 阶方 A 对应特征值 1 和 2 特征向量，又设向量 α_3 满足 $A\alpha_3=\alpha_2+2\alpha_3$. 证明：向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关.

七.（13 分）一直线过点 P（1, 2, 3）且同时平时于 $x+2y+3z=4$ 和 $2x+3y+4z=5$ 两个平面.

（1）求此直线方程；

（2）求原点到此直线的距离；

（3）求此直线绕 z 轴旋转所得旋转面的方程.

八.（13 分）已知二次型 $f\left(x_1,x_2,x_3\right)=x_1^{\ 2}+5x_2^{\ 2}+x_3^{\ 2}-2x_1x_2+2tx_1x_3+4x_2x_3$.

（1）问 t 取何值时，该二次型是正定的；

（2）取 t=0，试用正交变换化相应的二次型为标准线，并写出所用的正交变换；

（3）$t=0$时，$f=1$表示何种二次曲面？

九.（4 分）设 A 为 $m\times n$ 实矩阵，证明：$r\left(A^{\mathrm{T}}A\right)=r\left(A\right)$

2017 年线性代数期末答案解析

一、 单项选择题（每小题 3 分，共 15 分）

1. B　　2. D　　3. D　　4. C　　5. A

二. 填空题（每小题 3 分，共 15 分）

1. $(-1)^n 5^{n-1}$　　2. $\frac{1}{8}(2I\text{-}A)$　　3. $(1,0,-2)^{T}+k(1,2,-3)^{T}$（k 任意）

4. $y^2+4(z-x)^2=1$；$3y^2+4z^2=(x-1)^2$；$3(x^2+y^2)+4z^2=1$

5. $1, x-\frac{1}{2}, x^2-x+\frac{1}{6}$　　6. $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

三. 解：$D_n=\begin{vmatrix} 1+a & 2 & 3 & \cdots & n \\ -a & a & 0 & \cdots & 0 \\ -a & 0 & a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a & 0 & 0 & \cdots & a \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a+\frac{n(n+1)}{2} & 2 & 3 & \cdots & n \\ 0 & a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a \end{vmatrix}=\left(a+\frac{n(n+1)}{2}\right)a^{n-1}$

四. 解：$\det(A)=2$，于是 $A^*=2A^{-1}$，$\left(\frac{1}{2}A^*\right)^*=\left(A^{-1}\right)^*=\det\left(A^{-1}\right)\cdot\left(A^{-1}\right)^{-1}=\frac{1}{2}A$，

代入矩阵方程得 ：$A^{-1}XA=2A^{-1}X+I$ 。

上式左乘 A 得：$XA=2X+A$，从而 $X(A-2I)=A$，故

$$X=A(A-2I)^{-1}=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

五. 解：$\det(A)=\lambda(\lambda+1)(1-\lambda)$.

（1）$\lambda\neq 0$ 且 $\lambda\neq\pm 1$ 时，线性方程组有唯一解。

（2）λ=0 和 λ=1 时，$r(\overline{A})=3, r(A)=2$，线性方程组无解。

（3）λ=-1 时，$r(\overline{A})=r(A)=2<3$，线性方程组有无穷多解。同解方程组为：

$$\begin{cases} x_1 = 1 - \frac{3}{5}x_3 \\ x_2 = -1 - \frac{3}{5}x_3 \end{cases}$$，通解为$\begin{cases} x_1 = 1 - \frac{3}{5}t \\ x_2 = -1 - \frac{3}{5}t \\ x_3 = t \end{cases}$ 或 $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} -\frac{3}{5} \\ -\frac{3}{5} \\ 1 \end{bmatrix}$ （t 任意）

六. 证：设 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3 = 0$ $(*)$

上式左乘 A，并利用 $A\alpha_1 = \alpha_1, A\alpha_2 = 2\alpha_2, A\alpha_3 = \alpha_2 + 2\alpha_3$，得

$$k_1\alpha_1 + 2k_2\alpha_2 + k_3(\alpha_2 + 2\alpha_3) = 0$$

（*）式乘 2 减去上式得：$k_1\alpha_1$-$k_3\alpha_2$=0

由 α_1,α_2 线性无关（属于不同特征值的特征向量线性无关）得 $k_1 = k_3 = 0$，

代入（*）式得 $k_2\alpha_2 = 0$。再由 $\alpha_2 \neq 0$ 得 $k_2 = 0$。故向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关。

七.（1）由于所求直线平行于两已知平面，所以其方向向量 a 与平面的法向量

$n_1 = (1,2,3)$ 和 $n_2 = (2,3,4)$ 均垂直，于是

$$a = n_1 \times n_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = (-1,2,-1)$$

故所求直线方程为 $\frac{x-1}{-1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{-1}$

（2）原点 O 到此直线的距离为

$$d = \frac{\left\|\overrightarrow{OP} \times a\right\|}{\|a\|} = \frac{1}{\sqrt{6}}\left\|\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix}\right\| = \frac{1}{\sqrt{6}}\|(-8,-2,4)\| = \sqrt{14}$$

（3）设 $P(x,y,z)$ 是旋转面上任一点，过 P 作平行于 Oxy 面的平行平面 $\tilde{z} = z$，

这个平面与已知直线的交点为 Q（z-2，-2z+8，z）。由点 P 和 Q 到 z 轴的距离相等，得

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(z-2)^2 + (-2z+8)^2}$$

故旋转面的方程为：$x^2 + y^2 - 5z^2 + 36z - 68 = 0$

八 （1）二次型的矩阵为 $A=\begin{bmatrix}1 & -1 & t\\ -1 & 5 & 2\\ t & 2 & 1\end{bmatrix}$。由

$$\Delta_1 = 1 > 0_2\,\Delta, \quad \Rightarrow {}_2(4A)\Delta \quad 0(\ t, \quad)t =$$

解得 $-\dfrac{4}{5}<t<0$，即当 $-\dfrac{4}{5}<t<0$ 时，二次型正定。

（2）t=0 时二次型的矩阵为 $A=\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\ -1 & 5 & 2\\ 0 & 2 & 1\end{bmatrix}$。可求得

$$\det(A-\lambda I)=-\lambda(\lambda-1)(\lambda-6)$$

所以 A 的特征值为 $\lambda_1=0,\lambda_2=1,\lambda_3=6$。对应的特征向量分别为

$$p_1=(-1,-1,2)^{\mathrm{T}},\ p_2=(2,0,1)^{\mathrm{T}},\ p_3=(-1,5,2)^{\mathrm{T}}$$

正交变换 $\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\dfrac{1}{\sqrt{6}} & \dfrac{2}{\sqrt{5}} & -\dfrac{1}{\sqrt{30}}\\ -\dfrac{1}{\sqrt{6}} & 0 & \dfrac{5}{\sqrt{30}}\\ \dfrac{2}{\sqrt{6}} & \dfrac{1}{\sqrt{5}} & \dfrac{2}{\sqrt{30}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\ y_2\\ y_3\end{bmatrix}$，

化二次型为 $f=0y_1^2+y_2^2+6y_3^2$

（3）t=0 时 f=1 表示椭圆柱面

九. 证：若 $Ax=0$，则 $A^{\mathrm{T}}Ax=0$。反之，若 $A^{\mathrm{T}}Ax=0$，则有 $x^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}Ax=0$，

即 $(Ax)^{\mathrm{T}}Ax=0$，从而 $Ax=0$。这表明，齐次线性方程组 $Ax=0$ 与 $A^{\mathrm{T}}Ax=0$ 同解，故它们的基础解系所含的线性无关解向量的个数相同，

即 $n-r(A)=n-r(A^{\mathrm{T}}A)$。

故 $r(A)=r(A^{\mathrm{T}}A)$。

2016 年线代期末考试题

一、 填空题（本大题共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分）

1.原点到平面 $2x+2y-z=2$ 的距离 $d=$ ______。

2.设 A 为三阶矩阵，$\left|A^{-1}\right|=2$，A^* 为 A 的伴随矩阵，则 $\left|3A^*\right|=$ ______。

3.齐次线性方程组 $\begin{cases} x_1+2x_2-x_3+3x_4+x_5=0 \\ x_1+x_2-x_3+2x_4=0 \end{cases}$ 的解空间的维数为__________。

4.设 $x\neq 0$，$D=\begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 \\ 1 & 1+x & 1 \\ 1 & 1 & 1+x \end{vmatrix}$，则方程 $D-6x^2=0$ 的根为________。

5.已知三阶矩阵 A 的三个特征值分别为 $\lambda_1=-1$，$\lambda_2=0$，$\lambda_3=1$，$f(x)=x^3-x+2$，

则 $f(\mathrm{A})=$ _______________。

二、 单项选择题（本大题共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分）

6.设 A=$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$ 可逆，则方程组 $\begin{cases} a_1x_1+a_2x_2=a_3 \\ b_1x_1+b_2x_2=b_3 \\ c_1x_1+c_2x_2=c_3 \end{cases}$ （　　）

A．无解　　B.有唯一解　　C.有无穷多解　　D.不能确定

7.设 A=$\begin{Bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{Bmatrix}$，B=$\begin{Bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{Bmatrix}$，C=AB^{-1}，则 C^{-1} 中第 2 行第 3 列的元素设（

）

A．$\frac{1}{3}$　　B. $\frac{2}{3}$　　C. 1　　D. $\frac{1}{2}$

8.直线 L：$\frac{x-1}{1}=\frac{y-5}{1}=\frac{z+6}{-2}$ 与平面 $\Pi: x-2y+z=3$ 的夹角为　　（　　）

A . $\dfrac{2\pi}{3}$　　B. $\dfrac{\pi}{3}$　　C. $\dfrac{\pi}{6}$　　D. $\dfrac{\pi}{4}$

9.已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 0\\ 0 & a & 0\\ 0 & 3 & 1\end{pmatrix}$ 相似于矩阵 $B=\begin{pmatrix}0 & 2 & -3\\ -1 & 3 & -3\\ 1 & -2 & b\end{pmatrix}$，则　　(　　)

A. $a=2$，$b=1$　　B. $a=3$，$b=2$　　C. $a=4$，$b=3$　　D. $a=5$，$b=4$

10.设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x^TAx$ 的负惯性指数 $q=1$，且矩阵 A 满足 $A^2-A=6E$，则二次曲面方程 $f(x_1,x_2,x_3)=x^TAx=6$ 经正交变换 $x=Qy$ 可化为标准型（　　）

A . $\dfrac{y_1^{\,2}}{3}+\dfrac{y_2^{\,2}}{3}-\dfrac{y_3^{\,2}}{2}=1$　　B. $\dfrac{y_1^{\,2}}{2}+\dfrac{y_2^{\,2}}{2}-\dfrac{y_3^{\,2}}{3}=1$

C . $\dfrac{y_1^{\,2}}{3}+\dfrac{y_2^{\,2}}{2}-\dfrac{y_3^{\,2}}{3}=1$　　D. $\dfrac{y_1^{\,2}}{2}+\dfrac{y_2^{\,2}}{3}-\dfrac{y_3^{\,2}}{2}=1$

三、计算与证明题（本大题共 7 小题，每小题 10 分，共 70 分）

11.设 A 为给定的三阶矩阵，E 为三阶单位阵，矩阵 B 由式 $AB=A+B+2E$ 确定。

（1）求 $(B-E)^{-1}$.

（2）若矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$，求矩阵 $\mathbf{B}$.

12.已知$\alpha_1=(1,0,0,\lambda)^T,\alpha_2=(\lambda,1,0,0)^{\mathrm{T}}$，$\alpha_3$=（，0，$\lambda$ 1 0 $)^{\mathrm{T}}$，α_4=（0 ，λ,1 0 $)^{\mathrm{T}}$，

β=（1, -1 0, 0$)^{\mathrm{T}}$，其中λ为实数。求

（1）当λ为何值时，向量α_1，α_2，α_3 α_4线性相关；

（2）当λ为何值时，向量β可由向量组α_1，α_2，α_3 α_4线性表示，且表示不唯一。

13.已知平面Π_1：$x+y-z=0,\Pi_2$ $x+2y+z=0$。

Π_1：$x+y-z=0,\Pi_2$ $x+2y+z=0$

（1）求过点$p(1,2,1)$且与平面Π_1和Π_2的交线平行的直线的对称式方程

（2）求过平面Π_1和Π_2的交线，且与直线$L:\dfrac{x+1}{0}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z+2}{-1}$平行的平面方程。

14.设 A 为三阶实对称矩阵，且 A 的迹 $tr(A)=1$， $B=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&-2\\1&0&1\end{pmatrix}$， 又 $AB=0$。

（1）证明： A 的秩 $r(\mathrm{A})=1$。

（2）求矩阵 A 的全部特征值和特征向量.

15.（1）设矩阵 $A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}, b=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}$， 证明：三张平面

$\Pi_i: a_{i1}x+a_{i2}y+a_{i3}z=b_i, i=1,2,3$ 相交于一直线的充分必要条件为：

$r(A)=r(A\,|\,b)=2$。

（2）已知三张平面 Π_1： $x+y+z=1; \Pi_2: y+z=b \quad \Pi_3: x+ay+2z=2$ 相交于一直线，

求 a,b 的值

16.已知二次型$f(x_1,x_2,x_3)=x^TAx=x_1^2+x_2^2+4x_3^2+4x_1x_2-2x_1x_3-2x_2x_3$。

（1）写出二次型矩阵A

（2）求正交变换$x=Qy$，将f化为标准型，写出正交矩阵Q和f的标准型。

17.已知线性空间R^3的基α_1，α_2 α_3到基β_1，β_2 β_3的过度矩阵为P，且

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\quad \alpha_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\quad \alpha_3=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix};\quad P=\begin{pmatrix}1&1&2\\0&2&2\\-1&-1&0\end{pmatrix}$$

（1） 求β_1，β_2 β_3

（2） 设向量$\alpha\in R^3$在基α_1，α_2 α_3与β_1，β_2 β_3下由相同的坐标，求α

2016年线代期末考试题答案

一、填空题

1. $\frac{2}{3}$；　2. $\frac{27}{4}$；　3. 3；　4. 3，　5. $2E$

二、 选择题

6. A；　7. B；　8. C；　9. D　10. B

三、计算与证明题

11.（1）由 $AB=A+B+2E$ 得：$(A-E)(B-E)=3E$　　2 分

从而　$(B-E)^{-1}=\frac{1}{3}(A-E)$

（2）　$B=E+3(A-E)^{-1}$

$$(A-E)^{-1}=\begin{pmatrix}0 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$　8 分

$$B=\begin{pmatrix}1 & -3 & 0\\ 3 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 4\end{pmatrix}$$　10 分

12.（1）方法一 $|(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)|=\begin{vmatrix}1 & \lambda & 0 & 0\\ 0 & 1 & \lambda & 0\\ 0 & 0 & 1 & \lambda\\ \lambda & 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=1-\lambda^4=0$

当 $\lambda=\pm1$ 时，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性相关

方法二 $\begin{pmatrix}1 & \lambda & 0 & 0\\ 0 & 1 & \lambda & 0\\ 0 & 0 & 1 & \lambda\\ \lambda & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & \lambda & 0 & 0\\ 0 & 1 & \lambda & 0\\ 0 & 0 & 1 & \lambda\\ 0 & 0 & 0 & 1-\lambda^4\end{pmatrix}$

当 $\lambda=\pm1$ 时，$r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=3$，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性相关

（2）$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\beta)=\left(\begin{array}{c|cccc} 1 & \lambda & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 & \lambda & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \lambda & 0 \\ \lambda & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)\to\left(\begin{array}{c|cccc} 1 & \lambda & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 & \lambda & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-\lambda^4 & -\lambda-\lambda^2 \end{array}\right)$

当 $\lambda=-1$ 时，向量 β 可由向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性表示，且表示不唯一。 10 分

13.。（1）平面 Π_1 和 Π_2 的法向量分别为 $\overrightarrow{n_1}=(1,1,-1),\overrightarrow{n_2}=(1,2,1)$，所求直线方向向量 $\vec{s}$ 与平面 Π_1 和 Π_2 的交线平行，故

$$\vec{s}=\overrightarrow{n_1}\times\overrightarrow{n_2}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}=(3,-2,1) \qquad 2\text{ 分}$$

过点 $P(1,2,1)$ 的直线方程为：$\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y-2}{-2}=\dfrac{z-1}{1}$ 4 分

（2）设所求直线方程为：$\Pi_\lambda:(x+y-z)+\lambda(x+2y+z)=0$ 法向量 $\overrightarrow{n_\lambda}=(1+\lambda,1+2\lambda,-1+\lambda)$ 直线 L 的方向向量为 $\overrightarrow{s_1}=(0,1,-1)$，由 $\overrightarrow{n_\lambda}\perp\overrightarrow{s_1}$ 得 λ=-2 所求的平面方程：$x+3y+3z=0$ 10 分

14.（1）由 $AB=0$ 得 $r(A)+r(B)\le 3$ 2 分

因 $r(B)=2$ 得 $r(A)\le 1$;又 $A\ne 0$，所以 $r(A)\ge 1$，故 $r(A)$=1 3 分

（2）记 $B=(\beta_1,\ \beta_2\ \ \beta_3)$，由 $AB=(A\beta_1,A\beta_2,A\beta_3)=0$ 得 $A\beta_1=0$，$A\beta_2=0$ 5 分

因 β_1，β_2 线性无关，A 为对称矩阵，所以 $\lambda_1=\lambda_2=0$ 为 A 得二重特征值，

$\alpha_1=\beta_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$，$\alpha_2=\beta_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ 为对应的特征向量 7 分

另一特征值为 $\lambda_3=tr(A)=1$ 8 分

设$\alpha_3=(x_1,x_2,x_3)^T$为对应于λ_3得特征向量，由α_3与α_1，α_2正交得$\begin{cases} x_1+x_3=0 \\ x_2=0 \end{cases}$

得$\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$ 10 分

15.（1） 充分性 设$r(A)=r(A\,|\,b)=2$，则方程$Ax=b$有无穷多组解，且可表示为

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=t\begin{pmatrix}l\\m\\n\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}x_0\\y_0\\z_0\end{pmatrix},$$ 2 分

其中$\begin{pmatrix}l\\m\\n\end{pmatrix}$为齐次方程的解，$\begin{pmatrix}x_0\\y_0\\z_0\end{pmatrix}$为非齐次方程得解，即方程的解满足

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$$

所以三平面相交于一条直线。

必要性 设三平面相交于一直线，设为$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$，即

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=t\begin{pmatrix}l\\m\\n\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}x_0\\y_0\\z_0\end{pmatrix}$$

表明方程$Ax=b$有无穷多解，$r(A)=r(A\,|\,b)\prec 3$ 4 分

且基础解系由一个解向量组成，从而$r(A)=r(A\,|\,b)=2$ 6 分

（2）由（1）知：方程$\begin{cases} x+y+z=1 \\ y+z=b \\ x+ay+2z=2 \end{cases}$的系数矩阵和增广矩阵的秩相等且为 2

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&1\\0&1&1&b\\1&a&2&2\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&1\\0&1&1&b\\0&a-2&0&1-b\end{array}\right)$$ 8 分

$a=2,b=1$ 10 分

16.（1）二次型 f 得矩阵为 $A=\begin{pmatrix}1&2&-1\\2&1&-1\\-1&-1&4\end{pmatrix}$ 2 分

特征方程 $|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-2&1\\-2&\lambda-1&1\\1&1&\lambda-4\end{vmatrix}=(\lambda+1)(\lambda-2)(\lambda-5)=0$，得特征值为

$\lambda_1=-1,\lambda_2=2,\lambda_3=5$ 4 分

相应的特征向量为：$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$，$\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$，$\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$ 6 分

$\beta_1=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\-\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\end{pmatrix}$，$\beta_2=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$，$\beta_2=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{6}}\\-\frac{2}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}$ 8 分

$$Q=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{6}}\\-\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{6}}\\0&\frac{1}{\sqrt{3}}&-\frac{2}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}$$

标准型为：$f(y_1,y_2,y_3)=-y_1{}^2+2y_2{}^2+5y_2{}^2$。 10 分

17.（1）设 $A=(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3),B=(\beta_1\ \ \beta_2\ \ \beta_3)$，则 $B=AP$，故

$\beta_1=\begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix}$，$\beta_2=\begin{pmatrix}0\\2\\2\end{pmatrix}$，$\beta_3=\begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix}$ 4 分

（2））设所求向量的坐标为 x，则 $Ax = APx$，即 $A(P-E)x = 0$

因为 A 为可逆矩阵，得 $(P-E)x = 0$ 6 分

得 $x = k(1,-2,1)^T$， 8 分

故 $\alpha = k(\alpha_1 - 2\alpha_2 + \alpha_3) = k(1,-1,0)^T$ 10 分

2015 年线代期末试题

一、单项选择（请将正确选项填写在后面的括号中，每小题 3 分，共 15 分）

1. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&0&2&0\\0&2&0&3\\3&0&4&0\\0&4&0&1\end{pmatrix}$，则行列式 $|2A|$ 的值为 【　　】

（A）320　　（B）-320　　（C）40　　（D）-40

2. $\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}^{1896}\begin{pmatrix}a&b&c\\d&e&f\\g&h&i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}^{2015}=$ 【　　】

（A）$\begin{pmatrix}a&b&c\\d&e&f\\g&h&i\end{pmatrix}$　（B）$\begin{pmatrix}g&h&i\\d&e&f\\a&b&c\end{pmatrix}$　（C）$\begin{pmatrix}c&b&a\\f&e&d\\i&h&g\end{pmatrix}$　（D）$\begin{pmatrix}a&c&h\\d&f&e\\g&i&b\end{pmatrix}$

3. 若向量组 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}$ 线性无关，向量组 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\delta}$ 线性相关，则 【　　】

（A）$\boldsymbol{\alpha}$ 必可由 $\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\delta}$ 线性表示　（B）$\boldsymbol{\beta}$ 必可由 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\delta}$ 线性表示

（C）$\boldsymbol{\delta}$ 必可由 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}$ 线性表示　（D）$\boldsymbol{\delta}$ 必不可由 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}$ 线性表示

4. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&-1&1\\x&4&y\\-3&-3&5\end{pmatrix}$ 有 3 个线性无关的特征向量，$\boldsymbol{\lambda}=2$ 是二重特征值，

则 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{y}$ 依次为 【　　】

（A）$-2,\ 2$　（B）$2,\ -2$　（C）$3,\ -1$　（D）$-1,\ 3$

5. 以下说法中正确的是 【　　】

（A）对于方阵 A,B，如果存在矩阵 C，使 $B=C^TAC$，则 A 与 B 合同

（B）若存在矩阵 C，使 $A=C^TC$，则 A 是正定的

（C）二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_2^2$ 是正定的

（D）若实对称矩阵 A 的各阶顺序主子式都是正数，则 A 是正定的

二、填空题（每小题 3 分，共 15 分）

1. 设 A 为 n 阶可逆矩阵 $(n\ge 2)$，则 $(A^*)^{-1}=$____________.

2. 若矩阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)$ 经若干次初等行变换可化为 $\begin{pmatrix}1&0&0&-1\\0&1&0&2\\0&0&1&3\\0&0&0&0\end{pmatrix}$，

则 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组的秩为________，其一个极大无关组为_______________，

其余向量由极大无关组线性表示的关系式为______________.

3. 齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$，对其系数矩阵施以初等行变换得

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0&1\\0&1&0&0&2\\0&0&1&1&3\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

则其结构式通解为__________________.

4. 曲线 L：$\begin{cases}\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{9}=1\\ z=0\end{cases}$ 绕 oy 轴旋转一周所得旋转面的方程为_________________.

5. 已知 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&4&7\\2&5&8\\3&6&9\end{pmatrix}$，则二次型 $f=\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{Bx}$ 的矩阵为_________________，其秩为________.

三、(12 分) 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&1&1&1\\0&0&1&1\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$，

(1) 求 $\boldsymbol{A}^3$ 和 $\boldsymbol{A}^4$；

(2) 试求一个 4 维列向量 $\boldsymbol{\alpha}$，使 $\boldsymbol{A}^3\boldsymbol{\alpha}\neq\boldsymbol{0}$；

(3) 证明：对于（2）中的 $\boldsymbol{\alpha}$，向量组 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{A\alpha},\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{A}^3\boldsymbol{\alpha}$ 是线性无关的，而 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{A\alpha},\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{A}^3\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{A}^4\boldsymbol{\alpha}$ 是线性相关的.

四、(12 分) λ 取何值时，线性方程组

$$\begin{cases}(2-\lambda)x_1+2x_2-2x_3=1\\2x_1+(5-\lambda)x_2-4x_3=2\\-2x_1-4x_2+(5-\lambda)x_3=-\lambda-1\end{cases}$$

有唯一解、无解、无穷多解？并在有无穷多解时，求其结构解.

五、(12 分) 设有直线 L：$\begin{cases}x-y=3\\3x-y+z=1\end{cases}$ 与点 $M(1,0,-1)$.

(1) 求 L 的对称式方程；

(2) 求点 M 到直线 L 的距离.

六、（12 分）（注意：学习了第八章线性变换者做第 2 题，其余同学做第 1 题）

1. 记矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-2&1&1&2\\-1&3&0&2&-2\\0&1&1&3&4\\1&2&5&13&5\end{pmatrix}$ 的第 j 个列向量为 $\boldsymbol{\alpha}_j(j=1,2,\cdots,5)$.

（1）证明 $W=\{\boldsymbol{Ax}\mid \boldsymbol{x}\in\boldsymbol{R}^5\}$ 为线性空间 $\boldsymbol{R}^4$ 的子空间；

（2）求 W 的基与维数；

（3）求 $\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 在该基下的坐标.

2. 设 $T\in L(\boldsymbol{R}^3)$，定义为 $T(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{Ax}$，$\forall\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{R}^3$，其中 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-1&3\\5&6&-4\\7&4&2\end{pmatrix}$，

（1）求 $\mathrm{R}(T)$的基与维数；

（2）求 $\ker(T)$的基与维数；

（3）求 T 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,0)^T,\boldsymbol{\alpha}_2=(1,0,1)^T,\boldsymbol{\alpha}_3=(0,1,1)^T$ 下的矩阵.

七、（12 分）已知实二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=(1-a)x_1^2+(1-a)x_2^2+2x_3^2+2(1+a)x_1x_2$ 的秩为 2，（1）求 a 的值；（2）求正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Py}$ 化 f 为标准形；

八、（10 分）设 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 均为 3 维实单位列向量，且 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 正交，令 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha\beta}^T+\boldsymbol{\beta\alpha}^T$，问矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是否可相似对角化？为什么？若可对角化，求与 $\boldsymbol{A}$ 相似的对角阵 $\boldsymbol{D}$.

2015 年线代期末试题答案

一、1. A 2. C 3. C 4. B 5. D

二、1. $\dfrac{A}{|A|}$； 2. 3，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$，$\alpha_4=-\alpha_1+2\alpha_2+3\alpha_3$；

3. $k_1(0,0,-1,1,0)^T+k_2(-1,-2,-3,0,1)^T$（$k_1,k_2$ 为任意常数）（基础解系不唯一）；

4. $\dfrac{x^2+z^2}{4}-\dfrac{y^2}{9}=1$； 5. $\begin{pmatrix}1&3&5\\3&5&7\\5&7&9\end{pmatrix}$或$\dfrac{1}{2}(B+B^T)$，2

三、（1）$A^2=\begin{pmatrix}0&0&1&2\\0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}, A^3=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}, A^4=O$.

（2）由（1）知 $\alpha=(0,0,0,1)^{\mathrm T}$ 时，$A^3\alpha\neq 0$.

（3）因 $A^4\alpha=0$，故 $\alpha,A\alpha,A^2\alpha,A^3\alpha,A^4\alpha$ 必线性相关.

令 $l_1\alpha+l_2A\alpha+l_3A^2\alpha+l_4A^3\alpha=0$，以 A^3 左乘等式两端得

$l_1A^3\alpha+l_2A^4\alpha+l_3A^5\alpha+l_4A^6\alpha=0$，即有 $l_1A^3\alpha=0$，又 $A^3\alpha\neq 0$，故 $l_1=0$.

再依次以 A^2,A 左乘等式 $l_2A\alpha+l_3A^2\alpha+l_4A^3\alpha=0$ 两端得 $l_2=0,l_3=0$.

从而 $l_4A^3\alpha=0$，由此得 $l_4=0$，故 $\alpha,A\alpha,A^2\alpha,A^3\alpha$ 线性无关

或直接算出 $(\alpha,A\alpha,A^2\alpha,A^3\alpha)=\begin{pmatrix}0&1&2&1\\0&1&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}$，知 $\alpha,A\alpha,A^2\alpha,A^3\alpha$ 线性无关.

四. $\overline{A}=\begin{pmatrix}2-\lambda&2&-2&1\\2&5-\lambda&-4&2\\-2&-4&5-\lambda&-\lambda-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}-2&-4&5-\lambda&-\lambda-1\\0&1-\lambda&1-\lambda&1-\lambda\\0&0&(\lambda-1)(\lambda-10)&(\lambda-1)(\lambda-4)\end{pmatrix}$

（1）当 $\lambda\neq 1$ 且 $\lambda\neq 10$ 时，方程组有唯一解.

(2) 当 $\lambda=10$ 时，方程组无解.

（3）当 $\lambda=1$ 时，方程组有无穷多解. 其结构解为

$x=(1,0,0)^{\mathrm T}+k_1(-2,1,0)^{\mathrm T}+k_2(2,0,1)^{\mathrm T}$ k_1,k_2 为任意常数）

五.（1）直线 L 的方向向量为 $\vec{a}=(1,-1,0)\times(3,-1,1)=(-1,-1,2)$.

在直线 L 上取一点 $(3,0,-8)$，故 L 的对称式方程为 $\dfrac{x-3}{-1}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z+8}{2}$.

（2）**解**：过点 M 且垂直于 L 的平面方程为

$$-(x-1)-(y-0)+2(z+1)=0 \text{ 或 } x+y-2z=3$$

解方程组 $\begin{cases}\dfrac{x-3}{-1}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z+8}{2}\\-(x-1)-(y-0)+2(z+1)=0\end{cases}$ 得 L 与该垂直平面的交点 $P:(\frac{1}{3},-\frac{8}{3},-\frac{8}{3})$

故点 M 到直线 L 的距离为 $d=MP=\sqrt{(1-\frac{1}{3})^2+(\frac{8}{3})^2+(-1+\frac{8}{3})^2}=\dfrac{\sqrt{93}}{3}$.

六、**1.**（1）$W=\mathrm{span}\{\alpha_1,\cdots,\alpha_5\}$，它对 R^4 中线性运算封闭，故 W 是 R^4 的子空间.

（2） $A \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 7 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，所以 W 的一个基为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_5$， $\dim W = 3$.

（3） $\alpha_3 = 3\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_4 = 7\alpha_1 + 3\alpha_2$，所以 α_3, α_4 在该基下的坐标分别为 $(3,1,0)^{\mathrm{T}}, (7,3,0)^{\mathrm{T}}$.

2. （1） $R(T) = \{Ax | x \in \mathrm{R}^3\}$， $A \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 11 & -19 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，故 A 的第 1、2 列，即 $(1,5,7)^{\mathrm{T}}, (-1,6,4)^{\mathrm{T}}$ 为 $R(T)$ 的一个基.其维数为 2.

（2） $\ker(T) = \{x | Ax = 0, x \in \mathrm{R}^3\}$， 故方程组 $Ax = 0$ 的基础解系 $(-14,19,11)^{\mathrm{T}}$ 就是 $\ker(T)$ 的一个基.其维数为 1.

（3）设 T 在 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 下的矩阵为 B， 则有 $T[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3] = [\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]B$，

即 $A[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3] = [\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]B$， 故

$$B = [\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]^{-1} A[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3] = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 0 & 6 & 3 \\ 11 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

七. (1) f 的矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1-a & 1+a & 0 \\ 1+a & 1-a & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

因为 $r(A) = 2$.所以 $0 = |A| = -8a$， 得 $a = 0$.

（2）由 $|\lambda I - A| = (\lambda - 2)^2 \lambda$ 知 A 的特征值为 $\lambda_1 = \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 0$.

求得属于 2 的特征向量 $\xi_1 = (1,1,0)^{\mathrm{T}}, \xi_2 = (0,0,1)^{\mathrm{T}}$. 属于 0 的特征向量 $\xi_3 = (1,-1,0)^{\mathrm{T}}$

注意到 ξ_1, ξ_2 已正交，故将其单位化得 $p_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\xi_1, p_2 = \xi_2, p_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\xi_3$，于是 $P = (p_1, p_2, p_3)$

为正交阵，且 $f \overset{x = Py}{=\!=\!=} 2y_1^2 + 2y_2^2$

八. （1）因 $A^T = A$, 且是实矩阵，故 A 可对角化。

（2）由题设 $\alpha^{\mathrm{T}}\alpha = 1, \beta^{\mathrm{T}}\beta = 1, \alpha^{\mathrm{T}}\beta = 0, \beta^{\mathrm{T}}\alpha = 0$, 故 $A\alpha = \alpha\beta^{\mathrm{T}}\alpha + \beta\alpha^{\mathrm{T}}\alpha = \beta$， 同理 $A\beta = \alpha$.

于是 $A(\alpha + \beta) = \alpha + \beta$， $A(\alpha - \beta) = (-1)(\alpha - \beta)$.

因为 α, β 正交，所以 α, β 线性无关.于是 $\alpha + \beta \neq 0, \alpha - \beta \neq 0$， 所以 A 有特征值 $1, -1$.

又 $r(A) \le r(\alpha\beta^{\mathrm{T}}) + r(\beta\alpha^{\mathrm{T}}) = 2$， 所以 A 还有 0 为特征值. 故 A 可对角化.

且其相似对角阵 $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

2014年《线性代数与解析几何》期末试题

一、单项选择（每小题 3 分，共 15 分）

1. 若为n阶方阵(n≥2)，已知 $A^2=O$ 则下式中未必成立的是( ).

（A） $A=O$　　（B） $(A^T)^2=O$　　（C） $A^3=O$　　（D） $|A|=0$

2. 设 $\alpha_1=(1,2,0)^T$， $\alpha_2=(2,0,1)^T$， $\alpha_3=(-1,k,0)^T$， 当k等于( )时， α_1， α_2， α_3 线性相关.

（A） 1　　（B） 2　　（C） 1　　（D） 2

3. 若方程组 $AX=b$ 中，方程的个数少于未知量的个数，则有( )

（A） $AX=b$ 必有无穷多解　　（B） $AX=0$ 仅有零解

（C） $AX=0$ 必有非零解　　（D） $AX=0$ 必无解

4. 如果(　　　　　　)时，则 n 阶矩阵 A 与 B 相似.

（A） A 与 B 有相同的特征值且均可相似对角化　　（B） $|A|=|B|$

（C） A 与 B 有相同的特征多项式　　（D） $r(A)=r(B)$

5. 设 $T\in L(V,W),\dim(V)=n$， T 是单射，则下列结论未必成立的是( ).

（A） $\ker(T)=\{0\}$　　（B） T 是满射

（C） $rank(T)=n$　　（D） $nullity(T)=0$

二、解答题（每小题 6 分，共 30 分）

1. 设方阵 A 满足 $A^3=O$，证明 $I-A$ 可逆，且 $(I-A)^{-1}=I+A+A^2$.

2. 设 $A=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}$， 3阶方阵 B 满足 $ABA^*=2BA^*+3A^{-1}$, 求 B.

3. 证明定理：若向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性无关，而向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m,\beta$ 线性相关，证明 β 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性表示，且表示式唯一.

4. 设 $\alpha_1=\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)^T$， $\alpha_2=\left(\frac{2}{3},-\frac{1}{3},-\frac{2}{3}\right)^T$， $\alpha_3=\left(\frac{1}{3},-\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)^T$， 证明 α_1， α_2， α_3 构成 R^3 的一组标准正交基，并求向量 $\alpha=(1,2,0)^T$ 在此组基下的坐

标.

5. 求空间曲线 $C:\begin{cases} z=\sqrt{4-x^2-y^2} \\ x^2+y^2=2y \end{cases}$ 在各坐标平面上的投影曲线的方程.

三、（10分）

已知向量组
$\alpha_1=(1,-1,0,0)^T,\alpha_2=(-1,2,1,-1)^T,\alpha_3=(0,1,1,-1)^T,\alpha_4=(-1,3,2,1)^T$.

(1) 求向量组 α_1，α_2，α_3，α_4 的一个极大线性无关组及秩，并把其余向量用该极大线性无关组线性表示. (2) 设 $\beta=(-2,6,a,5)^T$，α 取何值时，β 可由该极大线性无关组线性表示？并求该表示式.

四、（10分）

已知二直线 L_1:$\begin{cases} x-y+z+1=0 \\ 3x-y-z-1=0 \end{cases}$, L_2:$\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y-3}{1}=\dfrac{z+1}{-1}$，证明直线 L_1 和 L_2 相交，并求由直线 L_1 和 L_2 所确定的平面方程.

五、（10分）

已知二次型 $f=3x_1^2+6x_2^2+3x_3^2-4x_1x_2-8x_1x_3-2ax_2x_3$ 经正交变换 $x=Py$ 化成 $f=7y_1^2+7y_2^2-2y_3^2$.

(1) 求参数 a 及矩阵 P. (2) 将该二次型的矩阵表示为秩1矩阵之和.

六、（8分）

设 $T\in L(R^3),(x_1,x_2,x_3)^T\in R^3$，定义
$T(x_1,x_2,x_3)^T=(x_1+2x_2-x_3,x_2+x_3,x_1+x_2-2x_3)^T$.

求（1）T 的值域的一组基，并指出 T 的秩；（2）T 的核的一组基，并指出 T 的零度.

七、（9分）

A 为 n 阶可逆矩阵（$n\geq 2$），α 是 n 维非零实列向量，令矩阵 $B=A\alpha\alpha^T$.

（1）求 B 的秩;（2）求 B 的所有特征值及行列式 $\det(B+2\mathrm{I})$;

（3）B是否可对角化？为什么？

八、（8分）

（1）请给出判断实对称矩A是正定矩阵的三个充要条件.

（2）试举例说明两个同阶正定阵的乘积未必是正定阵.

（3）设实对称矩阵A,B均是正定矩阵，且满足$AB=BA$，证明AB也是正定矩阵.

2014年线性代数与解析几何参考答案

一、

1. A　　2. D　　3. C　　4. A　　5. B

二、

1. $I-A^3=I$，$(I-A)(I+A+A^2)=I$（3分），所以$I-A$可逆，且 $(I-A)^{-1}=I+A+A^2$（6分）

2. $|A|=3$（1分），方程两边右乘A，得到$3AB=6B+3I$（2分），所以

$B=(A-2I)^{-1}$（4分），故$B=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$（6分）

3. 由于$\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_m,\beta$线性相关，所以存在不全为0的$k_1,k_2...,k_m,k$使得：

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+...+k_m\alpha_m+k\beta=0 \text{（2分）}$$

若$k=0$，则上式变为$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+...+k_m\alpha_m=0$，而$\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_m$现象无关，所以$k_1=k_2=......=k_m=0$，与已知矛盾，所以$k\neq0$，因此

$\beta=-\frac{k_1}{k}\alpha_1-\frac{k_2}{k}\alpha_2-...-\frac{k_m}{k}\alpha_m$，即$\beta$可由$\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_m$线性表示（4分）

若有$\beta=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+...+x_m\alpha_m$和$\beta=y_1\alpha_1+y_2\alpha_2+...+y_m\alpha_m$，则两式相减得：

$$(x_1-y_1)\alpha_1+(x_2-y_2)\alpha_2+...+(x_m-y_m)\alpha_m=0$$

由于$\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_m$线性无关，所以$x_1=y_1,x_2=y_2,......,x_m=y_m$，即表示式唯一。（6分）

4. 令$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，则$AA^T=I$是正交矩阵，所以$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$构成$R^3$的一组标准正交基（3分）。向量$\alpha=(1,2,0)^T$在此组基下的坐标为 $(<\alpha,\alpha_1>,<\alpha,\alpha_2>,<\alpha,\alpha_3>)^T=(2,0,-1)^T$。（6分）

5. xoy面上投影曲线的方程为 $\begin{cases}x^2+y^2=2y\\z=0\end{cases}$（2分）

消去x，得到yoz面上的投影曲线方程为$\begin{cases}z=\sqrt{4-2y}\\x=0\end{cases}(0\le y\le 2)$（4分）

消去z，得到xoy面上的投影曲线方程为$\begin{cases}x^2+\frac{1}{4}z^4-z^2=0\\y=0\end{cases}(|x|\le1,0\le z\le2)$（6分）

三、$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\beta)=\begin{pmatrix}1&-1&0&-1&-2\\-1&2&1&3&6\\0&1&1&2&a\\0&-1&-1&1&5\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&0&-1&-2\\0&1&1&2&6\\0&0&0&3&9\\0&0&0&0&a-4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1&0&-1\\0&1&1&0&-2\\0&0&0&1&3\\0&0&0&0&a-4\end{pmatrix}$，

（4分）

（1）$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$ 构成该向量组的一个极大无关组（6分），且$\alpha_3=\alpha_1+\alpha_2$（8分）

（2）当$a=4$时，β可由该极大线性无关组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$线性表示，且

$\beta=-\alpha_1-2\alpha_2+3\alpha_4$（10分）

四、$L_1:P_1(1,2,0),a_1=(2,4,2)$（2分），$L_2:P_2(3,3,-1),a_2=(2,1,-1)$（4分）

$P_1P_2=(2,1,-1)$，所以$\left[P_1P_2,a_1,a_2\right]=0$（6分），但是$a_1\nparallel a_2$，所以这两条直线相交。（8分）$n=a_1\times a_2=(-6,6,-6)$所以他们确定的平面方程为$x-y+z+1=0$（10分）

五、（1）$A=\begin{pmatrix}3&-2&-4\\-2&6&-a\\-4&-a&3\end{pmatrix}$相似于$D=\begin{pmatrix}7&&\\&7&\\&&-2\end{pmatrix}$，所以$|A-7I|=0$或

$|A+2I|=0$，解得$a=2$（2分）。特征值λ=7对应的特征向量为α_1=(1,0,-1)^T

α_1=(1,-4,1)^T（4分）

特征值λ=-2对应的特征向量为α_3=(2,1,2)^T（5分）。令

$e_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\alpha_1,e_2=\frac{1}{3\sqrt{2}}\alpha_2,e_3=\frac{1}{3}\alpha_3,P=(e_1,e_2,e_3)$（7分）

（2）$A=PDP^{-1}=P\begin{pmatrix}7&&\\&0&\\&&0\end{pmatrix}P^{-1}+P\begin{pmatrix}0&&\\&7&\\&&0\end{pmatrix}P^{-1}+P\begin{pmatrix}0&&\\&0&\\&&-2\end{pmatrix}P^{-1}$（9分）

$=A_1+A_2+A_3$，且$r(A_1)=r(A_2)=r(A_3)=1$（10分）

六、1. 在W中任取两个元素$\begin{pmatrix}a&a+b\\0&b\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}x&x+y\\0&y\end{pmatrix}$，则

$\begin{pmatrix}a&a+b\\0&b\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}x&x+y\\0&y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+x&(a+x)+(b+y)\\0&b+y\end{pmatrix}\in W$，$k\begin{pmatrix}x&x+y\\0&y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}kx&kx+ky\\0&ky\end{pmatrix}\in W$

，所以W是$F^{2\times 2}$的子空间。（4分）又$\begin{pmatrix}a&a+b\\0&b\end{pmatrix}=a\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix}$，而$\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}$，

$\begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix}$线性无关，所以W的一组基是$\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix}$，维数是2。（8分）

2. （1）$R(T)=\left\{\begin{pmatrix}x_1+2x_2-x_3\\x_2+x_3\\x_1+x_2-2x_3\end{pmatrix}\middle|x_1,x_2,x_3\in R\right\}=span\left(\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\1\\-2\end{pmatrix}\right)$（2分）

而$\begin{pmatrix}1&2&-1\\0&1&1\\1&1&-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&-1\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}$，所以$R(T)$的一组基为$\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$，维数为2（4分）

（2）$ker(T)=\left\{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\middle|T(x_1,x_2,x_3)^T=0\right\}$，解方程组$\begin{cases}x_1+2x_2-x_3=0\\x_2+x_3=0\\x_1+x_2-2x_3=0\end{cases}$，得基础解系

为$\begin{pmatrix}3\\-1\\1\end{pmatrix}$（6分），所以线性变化的核空间的一组基为$\begin{pmatrix}3\\-1\\1\end{pmatrix}$，维数为1。（8分）

七、（1）由于A可逆，所以$r(B)=r(\alpha\alpha^T)=1$（4分）

（2） $BA\alpha = A\alpha\alpha^T A\alpha = \left(\alpha^T A\alpha\right) A\alpha$，所以 $A\alpha$ 是 B 的对应特征值 $\alpha^T A\alpha$ 的特征向量（5分）。由于 $r(B)=1$ 所以 B 有 $n-1$ 重特征值0，B 的所有特征值为 $\alpha^T A\alpha$，0。（6分）$B+2I$ 的所有特征值为 $\alpha^T A\alpha+2$，2，所以 $|B+2I| = 2^{n-1}(\alpha^T A\alpha + 2)$.（7分）

（3）当 $\alpha^T A\alpha \neq 0$ 时，B 的每个特征值的几何重数等于代数重数，必可对角化。当 $\alpha^T A\alpha=0$ 时，此时 B 有 n 重特征值，而几何重数为 $n-1$，不可对角化。（9分）

八、（1） A 正定 $\Leftrightarrow \forall x \in R^n, x \neq 0, x^T Ax > 0$； A 正定 $\Leftrightarrow$ A 的所有特征值都大于0； A 正定 $\Leftrightarrow \exists$ 可逆矩阵 M，使得 $A = M^T M$；A 正定 $\Leftrightarrow$ A 的各阶顺序主子式都大于0（3分）

（2） $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$，$A, B$ 都是正定阵，但 $AB = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$ 不对称，从而不是正定阵。（5分）

（3）$(AB)^T = B^T A^T = BA = AB$，所以 AB 为实对称矩阵。（6分）

法一：设 λ 为 AB 的任意特征值，x 是对应的特征向量，则 $ABx = \lambda x$，$Bx = \lambda A^{-1} x$，所以 $x^T Bx = \lambda x^T A^{-1} x$。由于 A, B 都是正定阵，所以 $\forall x \in R^n, x \neq 0, x^T A^{-1} x > 0, x^T Bx > 0$, 所以 $\lambda = \dfrac{x^T A^{-1} x}{x^T Bx} > 0$，$AB$ 正定。（8分）

法二：由于 A, B 正定，所以存在可逆矩阵 M, N，使得 $A=M^T M, B = N^T N$，$AB = M^T MN^T N = N^{-1}(NM^T MN^T)N = N^{-1}((MN^T)^T (MN^T))N$，即 AB 与矩阵 $(MN^T)^T (MN^T)$ 相似，而 $(MN^T)^T (MN^T)$ 是正定矩阵，所以 AB 正定。

2013 年线性代数期末（A）

一、单项选择题（每小题 4 分，共 20 分）

（1）设A是$m\times n$矩阵，C为n阶可逆矩阵，矩阵$B=AC$，则（　　）

(A) $r(A)>r(B)$　　(B) $r(A)<r(B)$　　(C) $r(A)=r(B)$　　(D) $r(B)$与C有关

（2）设 A_{ij} 是矩阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 的 (i,j) 元素的代数余子式，若 $A=\begin{bmatrix}1&2&3\\11&12&13\\0&12&21\end{bmatrix}$，则$11A_{31}+12A_{32}+13A_{33}=$（　　）

(A)0　　(B)1　　(C)-1　　(D)16

（3）若四个点$A(1,0,-2),B(7,x,0),C(-8,6,1),D(-2,6,1)$共面，则$x=$（　　）

(A)0　　(B)6　　(C)4　　(D)-4

（4）设向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关，则下列向量组线性相关的是（　　）。

(A) $\alpha_1-\alpha_2,\alpha_2-\alpha_3,\alpha_3-\alpha_1$　　(B) $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1$

(C) $\alpha_1-2\alpha_2,\alpha_2-2\alpha_3,\alpha_3-2\alpha_1$　　(D) $\alpha_1+2\alpha_2,\alpha_2+2\alpha_3,\alpha_3+2\alpha_1$.

（5）下列哪种情况会导致n阶行列式D的值为零（　　）

(A)主对角线上的元素全为零　　(B)副对角线上的元素全为零

(C)至少有一个$n-1$阶子式为零　　(D)所有$n-1$阶子式为零

二、计算题（每小题 5 分，共 20 分）

（1）设矩阵$A=\begin{bmatrix}1&-1&1\\2&4&-2\\-3&-3&a\end{bmatrix}$，已知齐次线性方程组$(2I-A)x=0$的基础解系含 2 个解向量，求$a$的值。

（2）设矩阵$A_{3\times3}$相似于对角矩阵$diag\{2,2,-2\}$，求行列式$\left|\frac{1}{2}A^*+5I\right|$的值。

（3）设多项式$f(x)=2x^5+2x^2-x,P=\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix},P^{-1}AP=\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}$，求$f(A)$.

（4）设$A=\begin{bmatrix}-2&2&1\\0&-4&2\\0&1&-3\end{bmatrix}$，且$AB+9I=A^2+3B$，求$|B|$.

三、（10 分） 证明两直线L_1:$\begin{cases}x=-3-z\\y=4\end{cases}$与$L_2$:$\begin{cases}x+2y+3z=4\\x-z=-2\end{cases}$相交，求出它

们所在平面的方程。

四、（12 分）线性方程组

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$$

有解的条件是什么？在有解的情况下，求出该方程组的所有解。

五、（12 分）已知二次型$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+4x_2^2+4x_3^2-4x_1x_2+4x_1x_3-8x_2x_3$，

（1）写出二次型$f(x_1,x_2,x_3)$的矩阵；

（2）用正交变换把二次型$f(x_1,x_2,x_3)$化为标准型，并写出相应的正交变换。

六、（11 分）设矩阵$A=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}$，矩阵$X$满足$AXA+BXB=AXB+BXA+I$，求矩阵$X$.

七、（10 分）（注意：学习过第 8 章“线性变换”者做第 2 题，其余同学做第 1 题）

1.矩阵$A=\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & -1 & 1 \\ 2 & -5 & 1 & -2 \end{bmatrix}$，线性空间$V=\{b|b\in$，且方程组$Ax=b$有解$\}$.

（1）证明V是R^4的子空间。（2）求V的基与维数。

2.设V是由实数域R上的全体二阶方阵构成的线性空间，在V中取定一个矩阵$A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$，$\forall X\in V$，定义映射$T(X)=AX-XA$.

（1）证明：T是V上的一个线性变换，并求T在基$E_{11}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$，$E_{12}=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$，$E_{21}=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$，$E_{22}=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$下的矩阵；

（2）令$E_{11}'=E_{11}$，$E_{12}'=E_{11}+E_{12}$，$E_{21}'=E_{11}+E_{12}+E_{21}$，$E_{22}'=E_{11}+E_{12}+E_{21}+E_{22}$，证明$E_{11}',E_{12}',E_{21}',E_{22}'$也是$V$的一组基，并求$T$在基$E_{11}',E_{12}',E_{21}',E_{22}'$下的矩阵。

八、（5 分）设三阶方阵A的特征值$-1,1$对应的特征向量分别为α_1,α_2，向量α_3满

足$A\alpha_3=\alpha_2+\alpha_3$，证明：（1）$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关；（2）设$P=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]$，求$P^{-1}AP$.

2013 年线代期末（A）答案

整理人：刘佳庆

一、单项选择题

(1)C　　(2)A　　(3)C　　(4)A　　(5)D

二、计算题

（1）(2I-A)的秩 $r=n-2=1$, $[2I-A]=\begin{bmatrix}1 & 1 & -1\\ -2 & -2 & 2\\ 3 & 3 & 2-a\end{bmatrix}$, 所以$a$=5

(2) A^*的特征值为-4、-4、2，故$\frac{1}{2}A^*+5I$的特征值为3、3、7，$\left|\frac{1}{2}A^*+5I\right|=63$

(3) $P^{-1}AP=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$, $A=P\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}P^{-1}=\begin{bmatrix}1 & -2\\ 0 & -1\end{bmatrix}$

$P^{-1}A^5P=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$, $A^5=A=\begin{bmatrix}1 & -2\\ 0 & -1\end{bmatrix}$, $P^{-1}A^2P=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$所以$A^2=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$.

所以$2\times A^5+2\times A^2-A=\begin{bmatrix}3 & -2\\ 0 & 1\end{bmatrix}$

(4) $AB+9I=A^2+3B\Rightarrow(A-3I)B=A^2-9I=(A-3I)(A+3I)$

而det(A-3I)=-200≠0. ∴ (A-3I)可逆，∴ $(A-3I)=\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & -1 & 2\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}$，故B=-2

三、(10分)

考察直线L_2：$\begin{cases}x+2y+3z=4\\ x-z=-2\end{cases}$, y=4, 得$\begin{cases}x+3z=-4\\ x-z=-2\end{cases}$解之得唯一解 x=-2.5，x=-0.5，

而点o（-2.5, 4，-0.5）也满足L_1的方程，故L_1、L_2相交于点o

取直线L_1上的点P_1（0, 4，-3），直线L_2上的点P_2（0，-1，2），得向量 P P_1 =(0, 5, -5), 0P_1=((2.5, 0, -2.5), 显然 n//(0, 1, -1) ×(1, 0, -1)//(1, 1, 1), 由点法式得平面方程为：(x-0)+(y-1)+(z-2)=0, 即 x+y+z-1=0 ……（10分）

四、(12分)

$[A|b]=\begin{bmatrix}1 & -1 & 0 & a_1\\ 0 & 1 & -1 & a_2\\ -1 & 0 & 1 & a_3\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{各行全加至第三行}}\begin{bmatrix}1 & -1 & 0 & a_1\\ 0 & 1 & -1 & a_2\\ 0 & 0 & 0 & a_1+a_2+a_3\end{bmatrix}$系数行列式的秩为2，方程组有解当且仅当 $r(A)=r(\bar{A})=2$，故方程组有解的充要条件是 $a_1+a_2+a_3=0$ ……（6分）

此时解为$\begin{cases} x_1=a_1+a_2+c \\ x_2=a_2+c \\ x_3=c \end{cases}$，其中 c 为常数 ……（12 分）

五、（12 分）

（1）矩阵为 A=$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 4 & -4 \\ 2 & -4 & 4 \end{bmatrix}$……（3 分）

（2）解方程$|\lambda I\text{-}A|=0$，得 A 的特征式为：0, 0, 9……（6 分）

解方程$|\lambda I\text{-}A|=0$，得 A 的属于特征值 0 和 9 的特征向量为：$(2,1,0)^T$，$(-2,4,5)^T$，$(1,-2,2)^T$，单位化，得$\left(\frac{2}{\sqrt{5}},\frac{1}{\sqrt{5}},0\right)^T$，$\left(\frac{-2}{3\sqrt{5}},\frac{4}{3\sqrt{5}},\frac{5}{3\sqrt{5}}\right)^T$，$\left(\frac{1}{3},\frac{-2}{3},\frac{2}{3}\right)^T$，令正交

矩阵：$\begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{-2}{3\sqrt{5}} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{4}{3\sqrt{5}} & \frac{-2}{3} \\ 0 & \frac{5}{3\sqrt{5}} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$…………（10 分），则正交矩阵为：X=PY……（11 分），

标准型为 $9y_3^2$…………（12 分）

六、（11 分）

A×A+B×B=A×B+B×A+I，AX（A-B）=I,（A-B）×（A-B）=I……（5 分）

而$|A\text{-}B|=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=-1\neq 0 \therefore X=\left[(A-B)^{-1}\right]^2=\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}^2=\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$……（11 分）

七、（10 分）

1(1) $\forall b_1,b_2\in V, Ax=b_1, Ay=b_2$，则 $b_1+b_2=Ax+Ay=A(x+y)\in V$，且 $\forall k\in R$，则 $kb_1=kAx=A(kx)\in V$.故V是R^4 的子空间……（2 分）

(2)V 由 A 的列向量生成，V 的基与维数分别是 A 的列向量组的极大无关组与秩

$$\begin{bmatrix}1 & -2 & 1 & -1\\ 2 & 1 & -1 & 2\\ 3 & -2 & -1 & 1\\ 2 & -5 & 1 & -2\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{行变换}}\begin{bmatrix}1 & -2 & 1 & -1\\ 0 & -1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -8 & 4\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\cdots\cdots（8分）$$

故 V 的基可取为 A 的前三列对应的列向量，维数是 3……（10 分）.

2(1) $\forall x,y\in V,\forall k\in R$，$T(X+Y)=A(X+Y)-(X+Y)A=(AX-XA)+(AY-YA)=T(X)+T(Y),T(KX)=A(KX)-(KX)A=K(AX-XA)=KT(X)$.

故 T 是 V 上的线性变换……（2 分）

(2) 按 T 得定义知，$T(E_{11})=AE_{11}-E_{11}A=\begin{bmatrix}0 & -b\\ c & 0\end{bmatrix}$，同样计算可得 $T(E_{12})=\begin{bmatrix}-c & a-d\\ 0 & c\end{bmatrix},T(E_{21})=\begin{bmatrix}b & 0\\ d-a & -b\end{bmatrix},T(E_{12})=\begin{bmatrix}0 & b\\ -c & 0\end{bmatrix}$，写成矩阵形式即

T($E_{11},E_{12},E_{21},E_{22}$)=（ $E_{11},E_{12},E_{21},E_{22}$ ）$\begin{bmatrix}0 & -c & b & 0\\ -b & a-d & 0 & b\\ c & 0 & d-a & -c\\ 0 & c & -b & 0\end{bmatrix}$，T 在基 $E_{11},E_{12},E_{21},E_{22}$ 下的矩阵为 B=$\begin{bmatrix}0 & -c & b & 0\\ -b & a-d & 0 & b\\ c & 0 & d-a & -c\\ 0 & c & -b & 0\end{bmatrix}$……（5 分）

（3）记 $\left[E_{11}',E_{12}',E_{21}',E_{22}'\right]=\left[E_{11},E_{12},E_{21},E_{22}\right]\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=\left[E_{11},E_{12},E_{21},E_{22}\right]P'$，

易知 P 可逆，故 $E_{11}',E_{12}',E_{21}',E_{22}'$ 线性无关，也是 V 的一组基……（7 分）

（4）由（3）可知，从基 $E_{11},E_{12},E_{21},E_{22}$ 到基 $E_{11}',E_{12}',E_{21}',E_{22}'$ 的过渡矩阵为 P，

故 T 在基 $E_{11}',E_{12}',E_{21}',E_{22}'$ 下的矩阵为：

$$P^{-1}BP=\begin{bmatrix}b & b+d-a-c & 2b+d-a-c & b+d-a-c\\ -b-c & a-b-c-d & 2a-2d-b-c & 2a-2d\\ c & 0 & b+d-a & b+d-a-c\\ 0 & c & c-b & c-b\end{bmatrix}\cdots\cdots\cdots\cdots（10分）$$

八、（5 分）

(1) 因 α_1,α_2, 为 A 的属于不同特征值的特征向量, 所以 α_1,α_2, 线性无关，假设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关，则 α_3 能被 α_1,α_2 线性表示。设 $\alpha_3=m\alpha_1+n\alpha_2$, 则 $A\alpha_3=mA\alpha_1+nA\alpha_2=-m\alpha_1+n\alpha_2$, 又 $A\alpha_3=\alpha_2+\alpha_3=\alpha_2+m\alpha_1+n\alpha_2=m\alpha_1+(n+1)\alpha_2$，二式相减得： $2m\alpha_1+1\alpha_2=0$, 即 α_1,α_2 线性相关，矛盾. 故 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关…………………（3 分）

(2) $AP=A[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]=[A\alpha_1,A\alpha_2,A\alpha_3]=[-\alpha_1,\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3]=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}$

$\therefore AP=P\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}, P^{-1}AP=\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}$………………………(5 分)

更多精彩，尽在南洋书院学生会微信公众号的南卷汇专栏，欢迎通过公众号提供题目或反馈错题信息，南卷汇需要您的支持。