彭·线代

线性代数期中试题集

（2020 版）

彭康书院课外学业辅导学友互助团

目录

2019年线代期中试题

一、选择题

1. 设x,y,z为两两互不相同的数，则行列式$\begin{vmatrix} x+y & z & z^2 \\ y+z & x & x^2 \\ z+x & y & y^2 \end{vmatrix}=0$ 的充要条件是（）

A. $xyz=0$ B. $x+y+z=0$ C. $x=-y,z=0$ D. $y=-z,x=0$

2. 设A为n阶方阵($n\ge 3$)，若$A^3=O$，则下式中未必成立的是（　　）

A. $A=O$ B. $(A^T)^3=O$ C. $A^4=O$ D. $|A|=O$

3. 设A为n阶可逆矩阵($n\ge 2$)，I为n阶单位矩阵，则$\left(\left(A^*\right)^*\right)^{-1}=$（　　）

A. $|A|^{n-1}I$ B. $|A|^{1-n}I$ C. $|A|^{n-1}A^*$ D $|A|^{1-n}A^*$

4. $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{2018}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{2019}=$（　　）

A. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ B. $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 6 & 5 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ C. $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 6 & 5 & 4 \\ 9 & 8 & 7 \end{bmatrix}$ D. $\begin{bmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

5. 设$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$均为非零向量且$\vec{a}=\vec{b}\times\vec{c},\vec{b}=\vec{c}\times\vec{a},\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}$，则$\|\vec{a}\|+\|\vec{b}\|+\|\vec{c}\|=$（　　）

A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

二、填空题

1. 已知x_1,x_2,x_3为方程$x^3+px+q=0$ 的三个根$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_3 & x_1 \\ x_3 & x_1 & x_2 \end{vmatrix}=$__________.

2. 设$\alpha=(1,2,3),\beta=(1,-1,1)$，则$(\alpha^T\beta)^{2020}=$ ______________.

3. 设A为3阶方阵，且$|A|=2$，则$\left|\left(\frac{1}{2}A^*\right)^{-1}-3A\right|=$__________________.

4. 设有直线$L_1:\dfrac{x-1}{9}=\dfrac{y-2}{8}=\dfrac{z-3}{5},L_2:\dfrac{x+2}{2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z}{1}$ 则过直线L_1且与L_2平行的平面方程为____________________________.

5. 以$A(1,1,1)$，$B(2,0,1)$，$C(0,0,1)$，$D(1,3,2)$为顶点的四面体的体积为__________.

三、解答题

1. 设有n元线性方程组$Ax=b$，其中A为三对角矩阵，且

$$A=\begin{bmatrix} 2a & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ a^2 & 2a & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 & 2a & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a^2 & 2a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a^2 & 2a \end{bmatrix}, x=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, b=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

(1) 证明$|A|=(n+1)a^n$; (2) a 为何值时，该方程组有唯一解，并在此时求x_1和x_n.

2. 设A为n阶实矩阵，I为单位阵，满足$AA^T=I$，此时称A为正交矩阵，若已知$|A|<0$，求$|A|$及$|A+I|$.

3. 设有两条直线$L_1:\begin{cases} x-y=3 \\ 3x-y+z=1 \end{cases}$和$L_2: x+1=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z}{2}$，点$M(1,0,-1)$.

(1)求L_1的对称式方程；(2)求点M到L_1的距离；(3)研究L_1与L_2的位置关系.

4. 设矩阵 $B=\begin{bmatrix}1&-1&0&0\\0&1&-1&0\\0&0&1&-1\\0&0&0&1\end{bmatrix}$， $C=\begin{bmatrix}2&1&3&4\\0&2&1&3\\0&0&2&1\\0&0&0&2\end{bmatrix}$， I 为单位阵.矩阵 A 满足 $A(I-C^{-1}B)^T C^T = I$ ，求 A。

5. 设矩阵 $A=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&-2&-1&-2\\4&1&2&1\\2&5&\mu&\lambda\end{bmatrix}$，讨论矩阵 A 的秩.

6. 设 $A=(a_{ij})_{3\times3}$ 为非零实矩阵， A_{ij} 为 a_{ij} 的代数余子式，且 $a_{ij}+A_{ij}=0,(i,j=1,2,3)$
(1)求 $|A|$；(2)证明 A 为正交矩阵（正交矩阵的定义参看第 2 题）

2018 年线代期中试题

一、选择题

1. 若 n 阶行列式 $D=0$，则（　　）

　A. D 中必有一行（列）元素全为零

　B. D 中必有两行（列）的元素对应成比例

　C. 以 D 为系数行列式的非齐次线性方程组必有唯一解

　D. 以 D 为系数行列式的齐次线性方程组必有非零解

2. 设 A，B 都是 n 阶方阵且等价，则必有（　　）

　A. 当 $|A|=a(a\neq 0)$ 时，$|B|=a$

　B. 当 $|A|=a(a\neq 0)$ 时，$|B|=-a$

　C. 当 $|A|\neq 0$ 时，$|B|=0$

　D. 当 $|A|=0$ 时，$|B|=0$

3. 设 A 为 3 阶方阵，将 A 的第二行加到第一行得 B，再将 B 的第一列的 -1 倍加到第二列得 C，记 $P=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$，则 $C=$（　　）

　A. $C=P^{-1}AP$　　B. $C=PAP^{-1}$　　C. $C=P^{T}AP$　　D. $C=PAP^{T}$

4. 设四阶矩阵 $A=(\alpha,\gamma_2,\gamma_3,\gamma_4)$，$B=(\beta,\gamma_2,\gamma_3,\gamma_4)$，其中 $\alpha,\beta,\gamma_2,\gamma_3,\gamma_4$ 均为四维列向量，且已知 $|A|=4$，$|B|=1$，则 $|A+B|=$（　　）

　A. 5　　B. 10　　C. 40　　D. 20

5. 设单位向量 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 满足 $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=0$，则 $\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{a}=$（　　）

　A. $-\dfrac{3}{2}$　　B. -3　　C. 0　　D. 3

二、填空题

1. 已知 n 阶行列式 D 的值为 $a\neq 0$，且 D 的每行元素之和都等于常数 b，则 D 的 j 列 $(1\leq j\leq n)$ 元素的代数余子式之和 $A_{1j}+A_{2j}+\cdots+A_{nj}=$__________.

2. 设 $D=\begin{vmatrix}2&2&2\\a&b&c\\a^2&b^2&c^2\end{vmatrix}$，则 $D=$______________.

3. 设 $A=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&2&0\\0&0&1\end{bmatrix}$，$I$ 为 3 阶单位矩阵，则 $(A+3I)^{-1}(A^2-9I)=$____________________.

4. 过点 $P_1(1,-2,4)$，$P_2(3,5,7)$ 的对称式直线方程为__________________________________.

5. 以 $A(5,1,-1)$，$B(0,-4,3)$，$C(1,-3,7)$ 为顶点的三角形的面积为__________.

三、解答题

1. 计算行列式 $D=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

2. 设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 均为 3 维列向量，方阵 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$， $B=(\alpha_1+2\alpha_2,2\alpha_2+3\alpha_3,3\alpha_3+\alpha_1)$，已知 $\det(A)=a$，求 $\det(B)$.

3. 设 4 阶矩阵 B 满足 $\left[\left(\frac{1}{2}A\right)^*\right]^{-1}BA^{-1}=2AB+12I$，其中 $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$，求矩阵 B.

4. 设矩阵 $A=\begin{bmatrix}1&1&1&1&0\\0&1&2&2&1\\0&-1&a-3&-2&b\\3&2&1&a&-1\end{bmatrix}$，试讨论矩阵 A 的秩.

5. 证明直线 $L_1:\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z+1}{1}$ 与 $L_2:x-4=\dfrac{y+5}{-3}=\dfrac{z-4}{2}$ 位于同一平面，并求这两条直线的交点坐标及所在平面的方程.

6. 已知 n 阶矩阵 $A=\begin{bmatrix}2&2&2&\cdots&2&2\\0&1&1&\cdots&1&1\\0&0&1&\cdots&1&1\\\vdots&\vdots&\vdots&\cdots&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&1&1\\0&0&0&\cdots&0&1\end{bmatrix}$.

（1）求 A^{-1}.

（2）求 A 中所有元素代数余子式的和 $\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}A_{ij}$.

2017 年线代期中试题

一、选择题

1. 设 A 是 2 阶方阵，B 是 3 阶方阵，且 $|A|=2$，$|B|=-2$，则 $\left|-|A|B\right|=$（　　）

A. 4　　B. -4　　C. 16　　D. -16

2. 设 A，B 都是 n 阶方阵，如果 A 和 B 的秩分别为 r 和 n，则 $r(AB)-r(A)=$（　　）

A. 0　　B. r　　C. n　　D. $rn-r$

3. 设 A，B 均为 2 阶方阵，A^*，B^* 分别是 A，B 的伴随矩阵，若 $|A|=1$，$|B|=2$，则分块矩阵 $\begin{bmatrix}0 & A\\ B & 0\end{bmatrix}$ 的伴随矩阵为（　　）

A. $\begin{bmatrix}0 & A^*\\ 2B^* & 0\end{bmatrix}$　　B. $\begin{bmatrix}0 & 2A^*\\ B^* & 0\end{bmatrix}$　　C. $\begin{bmatrix}0 & 2B^*\\ A^* & 0\end{bmatrix}$　　D. $\begin{bmatrix}0 & B^*\\ 2A^* & 0\end{bmatrix}$

4. 已知 $P=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}$，$A=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{bmatrix}$，若 $P^mAP^n=A$，则以下选项中正确的是（　　）

A. $m=5,n=4$　　B. $m=5,n=5$　　C. $m=4,n=5$　　D. $m=4,n=4$

5. 设有直线 $l:\begin{cases}x+3y+2z+1=0\\ 2x-y-10z+3=0\end{cases}$ 及平面 $\pi:4x-2y+z-2=0$，则直线 l（　　）

A. 平行于 π　　B. 垂直于 π　　C. 在 π 上　　D. 与 π 斜交

二、填空题

1. 若 $\begin{vmatrix}1 & 0 & 2\\ x & 3 & 1\\ 4 & x & 5\end{vmatrix}$ 中 $(1,2)$ 元的代数余子式 $A_{12}=-1$，则 $A_{21}=$__________.

2. 设矩阵 A 满足 $A^2+A=4I$，其中 I 为单位矩阵，则 $(A-I)^{-1}=$_______________.

3. 设 $\alpha=(1,0,-1)^T$，矩阵 $A=\alpha\alpha^T$，n 为正整数，则 $A^n=$___________________.

4. 已知 $\|a\|=1$，$\|b\|=2$，$(a,b)=\dfrac{\pi}{3}$，则 $\|2a-b\|=$__________.

5. 若 4 点 $A(1,0,-2)$，$B(7,x,0)$，$C(-8,6,1)$，$D(-2,6,1)$ 共面，则 $x=$__________.

三、解答题

1. 计算行列式 $D=\begin{vmatrix}0 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 1 & 0 & 3 & 4 & 5\\ 1 & 2 & 0 & 4 & 5\\ 1 & 2 & 3 & 0 & 5\\ 1 & 2 & 3 & 4 & 0\end{vmatrix}$.

2. 已知矩阵 A 的伴随矩阵 $A^*=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&-3&0&8\end{bmatrix}$，矩阵 B 满足方程 $ABA^{-1}=BA^{-1}+3I$,求 B .

3. 设矩阵 $A=\begin{bmatrix}a&-1&-1\\-1&a&-1\\-1&-1&a\end{bmatrix}$ 与矩阵 $B=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&-1&1\\1&0&1\end{bmatrix}$ 等价，求常数 a .

4. 讨论 n 阶方阵 $A=\begin{bmatrix}a&b&\cdots&b\\b&a&\cdots&b\\\vdots&\vdots&&\vdots\\b&b&\cdots&a\end{bmatrix}(n\geq 2)$ 的秩.

5. 直线 L 过点 $P_0(1,0,-2)$,与平面 $\pi:3x-y+2z+1=0$ 平行，与直线 $L_1:\dfrac{x-1}{4}=\dfrac{y-3}{-2}=z$ 相交，求 L 的对称式方程.

6. 设平面 π 与 π_1: $x-2y+z-1=0$ 垂直，且与 π_1 的交线落在 yoz 平面上，求 π 的方程.

2016 年线代期中试题

一、填空题

1. 关于 x 的代数方程 $\begin{vmatrix} x+1 & -4 & 2 \\ 3 & x-4 & 0 \\ 3 & -1 & x-3 \end{vmatrix}=0$ 的全部根为____________.

2. 设 A 的伴随矩阵 $A^{*}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 8 \end{bmatrix}$，则 $A^{-1}=\begin{bmatrix} \qquad\qquad \\ \\ \\ \\ \end{bmatrix}$.

3. 设向量 $\vec{a}=(1,1,1),\vec{b}=(1,2,-3),\vec{c}=(0,-2,\lambda)$ 共面，则 $\lambda=$____________.

4. 设有向量 $\vec{a}=(1,1,1),\vec{b}=(1,3,-3)$，则向量 $\vec{b}$ 在向量 $\vec{a}$ 上的正交射影向量 $\mathrm{Pr}oj_{\vec{a}}\overline{\vec{b}}=$ ______________.

5. 点 $P(1,0,-1)$ 到直线 $L:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+2}{0}=\dfrac{z-4}{1}$ 的距离 $d=$_____________.

二、选择题

1. 已知四阶行列式 D，其第 3 列元素分别为 1，3，-2，2，它们对应的余子式分别为 3，-2，1，1，则行列式 D=（　　）

   A. -5　　B. 5　　C. -3　　D. 3

2. 设 A 是 $m\times n$ 的矩阵，$r(A)=r$，则 A 中（　　）

   A. 必有不等于 0 的 r 阶子式，所有 $r+1$ 阶子式均为 0
   B. 必有等于 0 的 r 阶子式，没有不等于 0 的 $r+1$ 阶子式
   C. 没有等于 0 的 r 阶子式，任何 $r+1$ 阶子式均为 0
   D. 至少有一个 r 阶子式不为 0，没有等于 0 的 $r-1$ 阶子式

3. 设 A,B 为同阶可逆方阵，则下列结论正确的是（　　）

   A. $|A+B|=|A|+|B|$　　B. $(AB)^{T}=A^{T}B^{T}$

   C. $(AB)^{-1}=A^{-1}B^{-1}$　　D. $|AB|=|A|\cdot|B|$

4. 设三阶方阵 A 的行列式 $|A|=2$，则 $\left|\dfrac{1}{4}(2A)^{*}\right|=$（　　）（$A^{*}$ 是 A 的伴随矩阵）

   A. $\dfrac{1}{2}$　　B. 4　　C. 16　　D. 32

5. 设$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=2$，则$\left[\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\times\left(\vec{b}+\vec{c}\right)\right]\cdot\overline{\vec{c}=}$（　　　）

A. 1　　B. 2　　C. 4　　D. 8

三、计算与证明题

1. 计算n阶行列式$D_n=\begin{vmatrix} x & a & a & \cdots & a \\ a & x & a & \cdots & a \\ a & a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & a & \cdots & x \end{vmatrix}$.

2. 求矩阵$A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & b \\ 2 & 3 & a & 4 \\ 3 & 5 & 1 & 7 \end{bmatrix}$的秩，其中$a,b$为参数.

3. 设矩阵$A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

（1）试求A^2及A^{-1}.

（2）若方阵B满足$A^2+AB-A^{-1}=I$（其中I为4阶单位阵），求矩阵B.

4. 求过原点且与直线 $L_1:\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z-1}{1}$ 及直线 $L_2:\begin{cases} x=1 \\ y=-1+t \\ z=1+t \end{cases}$ 都平行的平面方程.

5. 求过点 $(1,1,1)$ 且与两直线 $L_1:\dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z}{3}$， $L_2:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z-3}{4}$ 都相交的直线方程.

6. 设 A 为 n 阶非零实方阵，且 $A^*=A^T$（ A^* 是 A 的伴随矩阵），证明 A 可逆.

7. 设矩阵 $A=\begin{bmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & -1 \\ 0 & 1 & a \end{bmatrix}$，且 $A^3=O$.

（1）求 a 的值.

（2）若矩阵 X 满足 $X-XA^2-AX+AXA^2=I$，其中 I 为 3 阶单位阵，求 X .

2015 年线代期中试题

一、填空题

1. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \\ 1 & 8 & 27 & 64 \end{vmatrix} =$______________.

2. 设 M_{ij} 为行列式 $\begin{vmatrix} 5 & 8 & 2 & 9 \\ 3 & 6 & 4 & 7 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \end{vmatrix}$ 的 (i, j) 元素的余子式，则 $2M_{42} + 4M_{44} =$____________.

3. 三个向量 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 共面的充要条件为____________.

4. 设向量 $\vec{a} = (3,2,1), \vec{b} = (7,5,0)$，则 $\vec{b}$ 在 $\vec{a}$ 上的射影 $(\vec{b})_{\vec{a}} =$______________.

5. 过点 $(2,-1,3)$ 且与直线 $\dfrac{x+3}{7} = \dfrac{y}{0} = \dfrac{z+6}{2}$ 平行的直线方程为_____________.

6. 设 A 为 $m \times n$ 矩阵，P 为 m 阶可逆矩阵，且 $PA = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$，则 $r(A) =$_______.

7. 设 A, B 分别为 m 阶、n 阶可逆方阵，则 $\begin{bmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{bmatrix}^{-1} =$___________.

8. 设 A 为 3 阶矩阵，$|A| = 2$，则 $|-3A^*| =$________.

9. $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 6 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} =$____________.

10. 设 3 个向量 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 满足 $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = 2$，则 $\left[(\vec{a} + \vec{b}) \times (\vec{b} + \vec{c})\right] \cdot (\vec{c} + \vec{a}) =$______________.

11. 已知矩阵 $A = (a_{ij})_{3\times3}$ 的第一行元素为 $a_{11} = 1, a_{12} = 2, a_{13} = -1$，$A$ 的伴随矩阵为 $A^* = \begin{bmatrix} -7 & -4 & 9 \\ 5 & 3 & -7 \\ 4 & 2 & -5 \end{bmatrix}$，则 $A =$____________.

12. 设 $\alpha_j\,(j = 1,2,3)$ 均为 3 维列向量，方阵 $A = [\alpha_1 \;\; \alpha_2 \;\; \alpha_3]$，$B = [\alpha_1 + 2\alpha_2 \;\; 2\alpha_2 + 3\alpha_3 \;\; -\alpha_3]$，已知 $|A| = a$，则 $|B| =$____________.

二、选择题

1. 如果齐次线性方程组$\begin{cases}\lambda x_1+x_2+x_3=0\\ x_1+\lambda x_2+x_3=0\\ 3x_1-x_2+x_3=0\end{cases}$有非零解，则$\lambda$的值为（　　）

A. $\lambda\neq 1$　　B. $\lambda=1$　　C. $\lambda\neq 3$　　D. $\lambda=3$

2. 设A,B为同阶方阵，下列等式正确的是（　　）

A. $(AB)^T=A^TB^T$　　B. $(AB)^*=A^*B^*$

C. $A^2-B^2=(A+B)(A-B)$　　D. $|AB|=|A||B|$

3. 设A为n阶可逆矩阵，下列等式不正确的是（　　）

A. $\left|A^*\right|=|A|^{n-1}$　　B. $A^*=|A|A^{-1}$　　C. $A=\frac{1}{|A|}\left(A^*\right)^{-1}$　　D. $\left(A^*\right)^{-1}=\frac{1}{|A|}A$

4. 设有两点$A(1,-2,3),B(3,2,1)$，则向量$\overline{AB}$与y轴正方向的夹角是（　　）

A. $\arccos\frac{\sqrt{6}}{6}$　　B. $\arccos\frac{\sqrt{6}}{3}$　　C. $\arccos\left(-\frac{\sqrt{6}}{6}\right)$　　D. $\arccos\left(-\frac{\sqrt{6}}{3}\right)$

5. 两条直线$L_1:x+1=\frac{y-1}{-2}=\frac{z}{2}$，$L_2:x+1=y+4=\frac{z}{-2}$，则$L_1$与$L_2$的位置关系是（　　）

A.异面　　B.相交　　C.平行不重合　　D.重合

三、计算题

1. 计算行列式$\begin{vmatrix} a_1+b & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2+b & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & a_3+b & \cdots & a_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n+b \end{vmatrix}$的值.

2. 设 3 阶矩阵 A,B 满足 $2A^{-1}B=B=B-4I$，其中 I 是 3 阶单位矩阵.

（1）证明：$A-2I$ 可逆.

（2）若 $B=\begin{bmatrix}1 & -2 & 0\\ 1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}$，求矩阵 A.

3. 设 $B=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix},P=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & -1 & 0\\ 2 & 1 & 1\end{bmatrix}$，矩阵 A 满足 $AP=PB$，求 A 及 A^5.

4. 设四阶矩阵 $A=\begin{bmatrix}1 & a & a & a\\ a & 1 & a & a\\ a & a & 1 & a\\ a & a & a & 1\end{bmatrix}$ 的秩为 3，试求常数 a 的值.

5. 求过点 $P_1(-1,0,2),P_2(1,1,1)$ 且与平面 $x+y+z+1=0$ 垂直的平面方程.

6. 求点 $P(1,2,3)$ 到直线 $\begin{cases} x+y-z-1=0 \\ 2x+z-3=0 \end{cases}$ 的距离.

四、证明题

1. 设 α 为 n 维非零列向量，$A=I-\alpha\alpha^T$，其中 I 为 n 阶单位矩阵，证明：$A^2=A \Leftrightarrow \alpha^T\alpha=1$.

2. 设 A,B 均为 n 阶方阵，且满足 $A^2=I,B^2=I,|A|+|B|=0$，证明：$|A+B|=0$.

2014 年线代期中试题

1. 计算下列行列式：

（1）$|D|=\begin{vmatrix}2&1&1&1&1\\1&3&1&1&1\\1&1&4&1&1\\1&1&1&5&1\\1&1&1&1&6\end{vmatrix}$

（2）已知 A 是 3 阶矩阵，B 是 4 阶矩阵，且 $|A|=12$，$|B|=-6$，求矩阵 $D=\begin{pmatrix}0&\frac{1}{2}A\\-B&C\end{pmatrix}$ 的行列式 $|D|$ 的值.

2. 已知 $|\vec{a}+\vec{b}|=4$，$|\vec{a}-\vec{b}|=18$，求 $|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2$ 与 $\vec{a}\cdot\vec{b}$.

3. 解答题：

（1） 已知 3 阶矩阵 A 满足：$A^3+A+E=0$，证明 $A+2E$ 可逆，并求出 $(A+2E)^{-1}$.

（2） 3 阶矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&2&0\\3&4&5\end{pmatrix}$，求 $\left(A^*\right)^{-1}$.

4. 已知直角坐标系中的 4 个点 $A(3,-1,0)$， $B(-1,-1,1)$， $C(3,2,1)$， $D(5,-\frac{5}{2},-1)$，这四个点是否在同一平面上？若是，请求出此平面方程；若不是，请说明理由.

5. 设矩阵 $A=(a_{ij})_{3\times3}$，满足条件 $a_{33}=-1$ 及 $a_{ij}=A_{ij}, i,j=1,2,3$，其中 A_{ij} 是元素 a_{ij} 的代数余子式.

（1）求 $|A|$.　　　　（2）解线性方程组 $Ax=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$.

2013 年线代期中试题

1. 计算下列行列式：

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2+3\cos x_1 & 2+3\cos x_2 & 2+3\cos x_3 \\ 4\cos x_1+5\cos^2 x_1 & 4\cos x_2+5\cos^2 x_2 & 4\cos x_3+5\cos^2 x_3 \end{vmatrix}$$

2. 设 n 阶矩阵 A 与 B 均为非单位阵 I，且 $AB=A+B-I$，求行列式 $|A-I|$ 和 $|B-I|$ 的值.

3. 设 A 与 B 均为 n 阶正交矩阵（即 $A^{-1}=A^T$，且为实矩阵），满足 $|A|+|B|=0$，求行列式 $|A+B|$ 的值.

4. 在线性方程组 $Ax=b$ 中， $A=\left(a_{ij}\right)_{n\times n}$， $b=\left(b_1,b_2,\cdots,b_n\right)^T$， A_{ij} 是 a_{ij} 的代数余子式，已知 $\sum\limits_{k=1}^{n}a_{nk}A_{nk}=-1$， $\sum\limits_{k=1}^{n}b_kA_{kn}=3$，求 x 的第 n 个分量 x_n 的值.

5. 设 $A=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix}$，试用两种方法求 A^{-1}.

6. 设有直线 $L_1:\dfrac{x+3}{2}=\dfrac{y+2}{3}=\dfrac{z-6}{-4}$ 和 $\begin{cases}x-z=9\\y+4z=-17\end{cases}$，试判断这两条直线的位置关系.若共面，求它们所确定的平面方程；若还相交，求交点.

7. 设 n 阶矩阵 A 满足 $A^3=2I$， $B=A^2-2A+2I$，证明 B 可逆并求 B^{-1}.

8. 设 A 是 n 阶矩阵，$r(A)=r$，证明：必存在 n 阶可逆矩阵 B 及秩为 r 的 n 阶矩阵 C 满足 $C^2=C$，使 $A=BC$.

2019 年线代期中试题答案

一、选择题

1. B　　2. A　　3.D　　4. C　　5. D

二、填空题

1. 0　　2. $2^{2019}\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & -2 & 2\\ 3 & -3 & 3\end{bmatrix}$　　3. -16

4. $3x+y-7z+16=0$　　5. $\dfrac{1}{3}$

三、解答题

1.

(1) $|A_n| \underline{\underline{\text{按第一列展开}}} 2a|A_{n-1}|+a^2\cdot(-1)^{2+1}\cdot|A_{n-2}| = 2a|A_{n-1}|-a^2|A_{n-2}|$,

则 $|A_n|-a|A_{n-1}| = a(|A_{n-1}|-a|A_{n-2}|)=\cdots=a^{n-2}(|A_2|-a|A_1|)=a^n$.

$$\therefore |A_n| = a^n + a|A_{n-1}| = a^n + a(a^{n-1}+a|A_{n-2}|) = 2a^n + a^2|A_{n-2}|$$

$$=\cdots=(n-1)a^n + a^{n-1}|A_1| = (n+1)a^n.$$

也可以使用数学归纳法，或化为上三角形

(2) 由cramer法则知, 当 $D=|A_n|\neq 0$ 时，即 $a\neq 0$ 时方程组有唯一解.

且 $x_1=\dfrac{D_1}{D}=\dfrac{na^{n-1}}{(n+1)a^n}=\dfrac{n}{(n+1)a}$, $x_n=\dfrac{D_n}{D}=\dfrac{(-1)^{n+1}(a^2)^{n-1}}{(n+1)a^n}=(-1)^{n+1}\dfrac{a^{n-2}}{n+1}$.

2.

解：$\because 1=|I|=|AA^T|=|A|^2$, 而已知 $|A|<0$, $\therefore |A|=-1$;

$$|A+I|=|A+AA^T|=|A(I+A^T)|=|A|\cdot|I+A^T|=-|(I+A)^T|=-|I+A|.$$

$$\therefore |I+A|=0$$

3.

解：（1）L_1的方向向量可取作$\vec{a}_1=(1,-1,0)\times(3,-1,1)=(-1,-1,2)$,

易得L_1上一点$P_1(0,-3,-2)$, 则L_1对称式方程为：$\dfrac{x}{-1}=\dfrac{y+3}{-1}=\dfrac{z+2}{2}$.

$$(2)d=\frac{\|P_1M\times\vec{a}_1\|}{\|\vec{a}_1\|}=\frac{\sqrt{93}}{3}$$

(3)L_2过点$P_2(-1,1,0)$, 其方向向量$\vec{a}_2=(1,-2,2)$,

$$\because\left[\overrightarrow{P_1P_2}\ \ \vec{a}_1\ \ \vec{a}_2\right]=\begin{vmatrix}-1&4&2\\-1&-1&2\\1&-2&2\end{vmatrix}=20\neq0,\ \therefore L_1与L_2异面.$$

4.

解：$\because I=A\left[C(E-C^{-1}B)\right]^T=A(C-B)^T$, $\therefore A=\left[(C-B)^T\right]^{-1}=\left[(C-B)^{-1}\right]^T$ 而

$C-B=\begin{bmatrix}1&2&3&4\\0&1&2&3\\0&0&1&2\\0&0&0&1\end{bmatrix}$,求$(C-B)^{-1}$的方法有多种：

如（1）利用初等行变换；（2）利用伴随矩阵；（3）利用矩阵特点等.

得$(C-B)^{-1}=\begin{bmatrix}1&-2&1&0\\0&1&-2&1\\0&0&1&-2\\0&0&0&1\end{bmatrix}$, $\therefore A=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\-2&1&0&0\\1&-2&1&0\\0&1&-2&1\end{bmatrix}$.

5.

$$\textbf{解：}\ A\xrightarrow[\substack{r_3-4r_1\\r_4-2r_1}]{r_2-r_1}\begin{bmatrix}1&1&1&1\\0&-3&-2&-3\\0&-3&-2&-3\\0&3&\mu-2&\lambda-2\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1&1&1&1\\0&-3&-2&-3\\0&0&\mu-4&\lambda-5\\0&0&0&0\end{bmatrix}.$$

故当$\mu=4,\lambda=5$时, $r(A)=2$; 当$\mu\neq4,\lambda\neq5$时, $r(A)=3$.

6.

证：（1）由题意知 $A^* = -A^T \Rightarrow |A^*| = (-1)^3|A| \Rightarrow |A|^2 = -|A| \Rightarrow |A|=0$ 或 $|A| = -1$,

而 A 为非零实矩阵, 不妨设 $a_{11} \neq 0$, 则 $|A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} = -a^2_{11} - a^2_{12} - a^2_{13} < 0$,

故 $|A| = -1$.

(2) 由 (1) 知 $A^{-1} = \dfrac{1}{|A|}A^* = -A^* = A^T$, 故 A 为正交矩阵.

2018 年线代期中试题答案

一、选择题

1. D　　2. D　　3. B　　4. C　　5. A

二、填空题

1. $\dfrac{a}{b}$　　2. $2(b-a)(c-a)(c-b)$　　3. $\begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

4. $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+2}{7} = \dfrac{z-4}{3}$　　5. $12\sqrt{2}$

三、解答题

1. $D = 32$
2. $\det(B) = 12a$
3. $B = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$
4. 当 $a \neq 1$ 时，$r(A) = 4$；当 $a = 1$ 且 $b \neq -1$ 时，$r(A) = 3$；当 $a = 1, b = -1$ 时，$r(A) = 2$.
5. 交点坐标 $(2,1,0)$；平面方程：$7x - 5y - 11z = 9$
6. $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} A_{ij} = 1$

2017 年线代期中试题答案

一、选择题

1. C　　2. A　　3. D　　4. D　　5. B

二、填空题

1. 2　　2. $\frac{1}{2}(A+2I)$　　3. $2^{n-1}\begin{bmatrix}1&0&-1\\0&0&0\\-1&0&1\end{bmatrix}$　　4. 2　　5. 4

三、解答题

1. $D=480$　　2. $B=\begin{bmatrix}6&0&0&0\\0&6&0&0\\6&0&6&0\\0&3&0&-1\end{bmatrix}$　　3. $a=2$

4. 当$a\neq b$且$a\neq(1-n)b$时，$r(A)=n$；当$a=b=0$时，$r(A)=0$；

当$a=b\neq 0$时，$r(A)=1$；当$a\neq b$且$a=(1-n)b$时，$r(A)=n-1$.

5. $\frac{x-1}{-4}=\frac{y-0}{50}=\frac{z+2}{31}$

6. $-5x-2y+z-1=0$

2016年线代期中试题答案

一、填空题

1. 1,2,3　　2. $\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&0&0&0\\0&\frac{1}{2}&0&0\\\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}&0\\0&-\frac{3}{2}&0&4\end{bmatrix}$　　3. 8　　4. $\frac{1}{3}\vec{a}$　　5. $2\sqrt{6}$

二、选择题

1. B　2. A　3. D　4. B　5. B

三、计算与证明题

1. $x+(n-1)a\ (x-a)^{n-1}$

2. 当$a=1$，$b=2$，$r(A)=2$；当$a\neq1$，$b=2$，$r(A)=3$；

当$a=1$，$b\neq2$，$r(A)=3$；当$a\neq1$，$b\neq2$，$r(A)=4$.

3. （1）$A^2=4I$　　$A^{-1}=\frac{1}{4}A$　　（2）$B=\frac{1}{4}(I-3A)$

4. $x-y+z=0$

5. $\frac{x-1}{0}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-1}{2}$

6. $A^*=A^T \Rightarrow a_{ij}=A_{ij} \quad (1\le i\le n,1\le j\le n) \qquad |A|=a_{i1}A_{i1}+\cdots+a_{in}A_{in}=a_{i1}^2+\cdots+a_{in}^2 \quad (1\le i\le n)$

$\because A$为非零矩阵，A 中至少有一个元素不为零，不妨设$a_{i1}\ne 0$，则$|A|\ne 0$，故 A 可逆.

7. （1）$a=0$ （2）$\begin{bmatrix}3 & 1 & -2\\ 1 & 1 & -1\\ 2 & 1 & -1\end{bmatrix}$

2015 年线代期中试题答案

一、填空题

1. 12
2. -140
3. $\exists$不全为零的常数k_1,k_2,k_3满足$k_1\vec{a}+k_2\vec{b}+k_3\vec{c}=0$或混合积为零$[\vec{a},\vec{b},\vec{c}]=0$
4. $\dfrac{31}{\sqrt{14}}$
5. $\dfrac{x-2}{7}=\dfrac{y+1}{0}=\dfrac{z-3}{2}$
6. $r(A)=2$
7. $\begin{bmatrix}0 & B^{-1}\\ A^{-1} & 0\end{bmatrix}$
8. -108
9. $\begin{bmatrix}3 & 0 & 18\\ -1 & 1 & 0\\ 3 & 2 & 12\end{bmatrix}$
10. 4
11. $\begin{bmatrix}1 & 2 & -1\\ 3 & 1 & 4\\ 2 & 2 & 1\end{bmatrix}$
12. $-2a$

二、选择题

1. B 2. D 3. C 4. B 5. A

三、计算题

1. $(b+\sum_{i=1}^{n}a_i)b^{n-1}$

2. （1）由$2A^{-1}B=B-4I\Rightarrow 2B=AB-4A\Rightarrow(A-2I)(B-4I)=8I$得$(A-2I)^{-1}=\dfrac{1}{8}(B-4I)$

（2）$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

3. $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 6 & -1 & -1 \end{bmatrix}$ $\quad A^5=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 6 & -1 & -1 \end{bmatrix}$

4. $a=-\dfrac{1}{3}$

5. $2x-3y+z=0$

6. $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$

四、证明题（略）

2014 年线代期中试题答案

1. （1）394 　　（2）-9

2. 170； -77

3. （1）$\dfrac{A^2-2A+5E}{9}$ 　　（2）$\begin{bmatrix} \frac{1}{10} & 0 & 0 \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & 0 \\ \frac{3}{10} & \frac{2}{5} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

4. 在同一平面，平面方程：$-3(x-3)+4(y+1)-12z=0$

5. （1）1 　　（2）$x=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$

2013 年线代期中试题答案

1. $15(\cos x_2-\cos x_1)(\cos x_3-\cos x_1)(\cos x_3-\cos x_2)$

2. 0； 0

3. 0

4. -3

5. $\begin{bmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}$

6. 共面且相交，平面方程：$13x+6y+11z-15=0$，交点：$(3,7,-6)$

7. $\dfrac{1}{10}(A^2+3A+4I)$

8. $r(A)=r$，则∃可逆矩阵P,Q使$PAQ=\begin{bmatrix} Ir & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ $\quad A=P^{-1}\begin{bmatrix} Ir & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}Q^{-1}=P^{-1}Q^{-1}Q\begin{bmatrix} Ir & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}Q^{-1}$

令$B=P^{-1}Q^{-1}$可逆，$C=Q\begin{bmatrix} Ir & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}Q^{-1}$ $\quad$ 则$C^2=C$且$A=BC$

更多信息，请加入彭康学导团学习 QQ 群：491330131

搜索微信公众号“彭康书院学导团”或扫描下方二维码，关注我们，了解更多学业动态，掌握更新学习资料。

本学期，我们组织了答疑志愿者周一到周五每晚在东 19-114 进行答疑活动，答疑课目主要为高数、线代、大物和一些专业课程。

欢迎同学们前往答疑，一起学习，共同进步！