2015年版

南卷汇

大一上线性代数考试试题汇编

南洋书院学生会 制作

目录

2005 年线性代数期末（A）

一、填空题（每小题 3 分，共 12 分）

（1）若 3 阶方阵 A、B 的行列式分别为 det（A）=2，det（B）=3，则 det（-2$A^{-1}B^*$）=
____________。

（2）设 4 阶可逆方阵 A 按列分块为 A=$[\alpha_4\ \alpha_3\ \alpha_2\ \alpha_1]$, 方阵 B=$[\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3\ \alpha_4]$，已知线性方程组 Bx=b 有唯一解为 x=（1,3,5,7）^{T}，则方程组 Ax=b 的解为 x=_______________。

（3）设 3 阶实对称矩阵 A 的特征值为$\lambda_1=\lambda_2=2$，$\lambda_3=-1$，$\alpha_1=(1,2,3)^r$及$\alpha_2=$（2,3,4）^{T}均为 A 的对应于特征值 2 的特征向量，则 A 的对应于特征值-1 的特征值向量为________________。

（4）设矩阵 A=$\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & -1 & p-3\\ 2 & 2 & t\end{bmatrix}$, b=$\begin{bmatrix}1\\0\\3\end{bmatrix}$, 已知线性方程 Ax-b 无解，则常数 p 与 t 满足的关系式是___________________。

二、单项选择题（每小题 3 分，共 12 分）

（1）设m阶方阵 A 的秩为m，m ∗ n矩阵 B 的秩为s，则

（A）r（AB）<s.　　　　（B）r（AB）>s.

（C）r(AB)=s.　　　　（D）r(AB)>n.　　　　【　】

（2）设方阵 A 与 B 相似，即存在可逆方阵 P，使$P^{-1}AP=B$，已知ξ为 A 的对应于特征值λ的特征向量，则 B 的对应于特征值λ的特征向量为

（A）Pξ.　　（B）$P^T\xi$.　　(C)ξ　　（D）$P^{-1}\xi$　　【　】

（3）设 A 为实对称矩阵，则 det（A）>0 是 A 为正定矩阵的

（A）充分而非必要条件.　　　　（B）必要而非充分条件.

(C)充分必要条件.　　　　(D)既非充分又非必要条件.　　【　】

（4）设α_1，α_2，α_3是齐次线性方程组 Ax=0 的基础解系，则向量组

（A）$\alpha_1+\alpha_2$，$\alpha_2+\alpha_3$，$\alpha_3+\alpha_4$不能作为 Ax=0 的基础解系.

（B）$\alpha_1-\alpha_2$，$\alpha_2+\alpha_3$，$\alpha_3+\alpha_1$可作为 Ax=0 的基础解系.

（C）$\alpha_1+\alpha_2$，$\alpha_2-\alpha_3$，$\alpha_3-\alpha_1$可作为 Ax=0 的基础解系.

（D）$\alpha_1-\alpha_2$，$\alpha_1+\alpha_2$，$\alpha_3+\alpha_1$不能作为 Ax=0 的基础解系.　　【　】

三、（12 分） 已知方阵 A=$(a_{ij})_{3*3}$的第 1 行元素分别为$a_{11}=1, a_{12}=2, a_{13}=-1$,且知$A^*=\begin{bmatrix}-7 & -4 & 9\\ 5 & 3 & -7\\ 4 & 2 & -5\end{bmatrix}$，求 det（A）及 A.

四、（12 分） 设有向量组（Ⅰ）：$\alpha_1=(2,-1,3,5)^T$, $\alpha_2(3,-2,3,4)^T$，$\alpha_3=(4,-3,1,3)^T$，$\alpha_4(4,-1,15,17)^T$. 问向量 β =$(7,-6,7,0)^T$能否表示成向量组（Ⅰ）的线性组合？若能，求出此表达式.

五、（12 分） 求直线 L：x-1=y=1-z 在平面π：x-y+2z=1 上的投影直线l_0（即 L 上各点在π上的垂足点全体所形成的直线）的方程.

六、（13 分） 已知矩阵 A$\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 1 & 2 & 3 & 4\\ 1 & 2 & 3 & b\\ 1 & 2 & 3 & a\end{bmatrix}$相似于对角矩阵 D=$\begin{bmatrix}10 & & & \\ & 0 & & \\ & & 0 & \\ & & & 0\end{bmatrix}$.

（1）求常数 a、b 的值；（2）求一个可逆矩阵 P，使$P^{-1}AP=\mathrm{D}$.

七、（13 分） 求一个正交变换，将二次型 f(x_1,x_2,x_3)=$2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3$化成标准型，并指出二次曲面 f(x_1,x_2,x_3)=0 的名称.

八、（8 分）（注意，学过第 8 章“线性变换”者做第 2 题，其余做第 1 题）

1. 设矩阵$A_1=\begin{bmatrix}1 & 2\\ -1 & 3\end{bmatrix}, A_2=\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 4\end{bmatrix}, A_3=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 1 & -10\end{bmatrix}, A_4=\begin{bmatrix}3 & 7\\ -2 & 6\end{bmatrix}$

证明：元素组A_1,A_2,A_3线性无关，而A_1,A_2,A_3,A_4线性相关，并指出数域 F 上线性空间 W=$\{k_1A_1+\Lambda+k_4A_4 \mid k_i\in F, i=1,\Lambda,4\}$的基与维数.

2. 设 T 为 F$[x]_3$上的线性算子，定义为

T（f（x））=f（x+1）-f（x），∀f（x）∈F$[x]_3$

求 T 在 F$[x]_3$的基：1，x，x^2，x^3下的矩阵，并指出 T 的秩及 T 的零度.

九、（6 分） 设 n 阶方阵 A 的秩为 n-1，证明：A 的伴随矩阵A^*相似于对角矩阵的充要条件是$A_{11}+A_{22}+\Lambda+A_{nn}\neq 0$，其中$A_n$为 det（A）的（i，i）元素的代数

余子式.

2005 年线性代数期末（B）

符号说明：det(***A***)指方阵 ***A*** 的行列式；$\boldsymbol{A}^*$指方阵 ***A*** 的伴随矩阵；$\boldsymbol{A^T}$指矩阵 ***A*** 的转置矩阵；r(***A***)指矩阵 ***A*** 的秩；***I*** 为单位矩阵；$F[x]_n$指次数不超过 n 的一元多项式全体构成的线性空间.

一、填空题(每小题 3 分，共 12 分)

(1)若 **3** 阶方阵 ***A*** 的行列式为 det(*A*)=2,则 $\det(A^{-1}-2A^*)$=__________.

(2)设 ***A*** 为 3×4 的矩阵，秩 r(*A*)=3,已知方程组 ***Ax=b*** 有两个不等的特解η_1，η_2，则方程组 ***A***x=0 的通解为 x=__________.

(3)设 3 阶实对称矩阵 A 的特征值为 $\lambda_1=1$，$\lambda_2=\lambda_3=2$，又 $\alpha_1=(2,0,0)^T$为 A 的对应于特征值 1 的特征向量，则 A 为________.

（4）设 A=$\begin{bmatrix}1&2&3\\0&-1&-3\\2&2&t\end{bmatrix}$，已知非零矩阵 B 满足 AB=0，则 t=______。

二、单项选择题（每小题 3 分，共 12 分）

（1）设 m 阶**方阵** A 的秩为 m-2，则矩阵 A*的秩为（）

（A）m-2　（B）2　（C）1　（D）0

（2）设三阶方阵 A 可逆，且各行元素之和均为 2，则 A 必有特征值（）

（A）1　（B）2　（C）-1　（D）-2

（3）a=2，是 $\alpha_1=(1,1,-1,1)^T$，$\alpha_2=(1,0,a,0)^T$, $\alpha_3=(1,2,2,a)^T$线性无关的（）

（A）充分而非必要条件（B）必要而非充分条件

（C）充分必要条件　（D）既非充分又非必要条件

（4）设 A 为 m ×n 矩阵且 m<n，则下述结论正确的是（）

（A）Ax=b（b≠0）必有解（B）Ax=0 必有无穷多组解

（C）Ax=0 只有零解　（D）Ax=b（b≠0）必无解

三、（12 分）
已知 A=$\begin{bmatrix}2&0&6\\0&3&5\\0&1&4\end{bmatrix}$，B=$\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}$，又三阶方阵 X 满足 XA+B=AB+X，求 X^{101}.

四、（12 分） 已知方程组 $\begin{cases} x_1+2x_2+4x_3+2\,x_4=b \\ x_1+x_2+x_3+ax_4=2 \\ 2x_1+x_2-x_3+x_4=1 \end{cases}$

讨论 a，b 为何值时方程组（1）有解（2）无解?并在有解时求出其通解。

五、（12 分） 求过点（1,2,3）且与直线 L:x-1=y=1-z 垂直相交的直线方程。

六、（13 分） 已知矩阵 A= $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & t \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ 可以相似于对角矩阵，（1）求常数 t 大的值（2）求一个可逆矩阵 P，使 $P^{-1}AP$ 为对角阵。

七、（13 分） 求一个正交变换，将二次型 f（x_1,x_2,x_3）$=x_1^2+2x_2^2+2x_1x_2-2x_1x_3$ 化成标准型，并指出二次曲面 f（x_1,x_2,x_3）=1 的名称。

八、（8 分）（注意：学习过第八章“线性变换”者做第 2 题，其余的做第 1 题）。

1．设矩阵 $A_1=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$，$A_2=\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$，$A_3=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}$，$A_4=\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$，试求数域 F 上线性空间 W={$k_1A_1+\ldots+k_4A_4$|ki∈F，i={1，…, 4}}的基与维数.

2006 年线性代数期末（A）

一、填空题(每小题 3 分, 共 12 分)

(1). 若向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(-2,3,1)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\alpha}_2=(2,t,-1)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\alpha}_3=(0,0,1)^{\mathrm{T}}$ 线性相关, 则常数 t =______.

(2). 若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^*=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\-3&1&0&0\\4&5&1&0\\0&0&6&8\end{bmatrix}$, 则 $\det(\boldsymbol{A})=$_____.

(3). 已知 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,a_3)^{\mathrm{T}}$ 为 3 维向量, $\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}1&-1&2\\-1&1&-2\\2&-2&4\end{bmatrix}$, 则 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}$ =_______.

(4). 已知 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 是齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}x=\boldsymbol{0}$ 的基础解系, 则向量组 $\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1+t_1\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2+t_2\boldsymbol{\alpha}_1$ 也可作为 $\boldsymbol{A}x=\boldsymbol{0}$ 的基础解系的充要条件是常数 t_1,t_2 满足条件________________.

二、单项选择题(每小题 3 分, 共 12 分)

(1). 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&2&2\\2&1&-2\\2&-2&1\end{bmatrix}$,则

(A) $\boldsymbol{A}$ 为正交矩阵 (B) $\dfrac{1}{3}\boldsymbol{A}$ 为正交矩阵. (C) $\dfrac{1}{\sqrt{3}}\boldsymbol{A}$ 为正交矩阵. (D) $\boldsymbol{A}^{-1}=A^{\mathrm{T}}$. 【 】

(2). 已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&8&0\\2&2&a\\0&0&6\end{bmatrix}$ 相似于对角矩阵 $\begin{bmatrix}6&&\\&6&\\&&-2\end{bmatrix}$,则 a 等于

(A) 0. (B) 2. (C) −2. (D) 6. 【 】

(3). 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{bmatrix}$ 的伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^*$ 的秩为 1, 则

(A) $a=b\neq 0$. (B) $a\neq b$ 且 $a+2b=0$. (C) $a+2b\neq 0$. (D) $a\neq b$ 且 $a+2b\neq 0$.【 】

(4). $\boldsymbol{R}^{2\times 2}$ 的子空间 $\left\{ \begin{bmatrix} a+b & a \\ 0 & b \end{bmatrix} \middle| a,b\in \boldsymbol{R} \right\}$ 的维数是

(A) 1. (B) 2. (C) 3. (D) 4. 【 】

三、(12 分) 设 3 阶方阵 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 满足 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{AB}$,

(1) 证明矩阵 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I}$ 可逆; (2) 当 $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 3 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ 时, 求 $\boldsymbol{A}$.

四、(13 分) a、b 取何值时, 线性方程组

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & a & 1 \\ 1 & 7 & 10 & a+6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ b \end{bmatrix}$$

有唯一解、无解、有无穷多解?并在有无穷多解时, 求出方程组的结构式通解.

五、(12 分) 求两相交直线 $L_1:\begin{cases} x=3-z \\ y=2 \end{cases}$ 与 $L_2:\begin{cases} x+y-3z=-7 \\ x-2z=-6 \end{cases}$ 所确定的平面的一般式方程.

六、(12 分) 设 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $1, 2, -3$, 求方阵 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^*-2\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{I}$ 的特征值及 $\det(\boldsymbol{B})$.

七、(13 分) 设矩阵 $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,x_3)^T$,

(1) 写出二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{Bx}$ 的矩阵 $\boldsymbol{A}$;

(2) 求一个正交矩阵 $\boldsymbol{P}$,使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$ 成对角矩阵;

(3) 写出在正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Py}$ 下 f 化成的标准形.

八、(8 分)（注意:学习过第 8 章“线性变换”者做第(2)题, 其余同学做第(1)题）

(1) 设 $\boldsymbol{R}^4$ 的子空间 V 由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,1,3)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(-1,-3,5,1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=(3,2,-1,4)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_4=(-2,-6,10,2)^{\mathrm{T}}$ 生成, 求 V 的基与维数.

(2) 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 为 3 维线性空间 V 的基, V 上的线性算子 T 在该基下的矩阵为 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&1&3\\1&2&2\\2&3&5\end{bmatrix}$,求 T 的值域 $R(T)$ 的基与维数、T 的核 $\ker(T)$ 的基.

九、(6 分) 设 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 均为 n 阶正定矩阵. 证明:关于 λ 的方程 $\det(\lambda\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})=0$ 的根全大于零.

2006 年线性代数期末（B）

说明: $\det(A)$ 指方阵 A 的行列式, A^* 指方阵 A 的伴随矩阵, $r(A)$ 指矩阵 A 的秩, A^T 指矩阵 A 的转置矩阵, I 为单位矩阵.

一、填空题(每小题 3 分, 共 15 分)

1.设矩阵 $A=\begin{pmatrix}2 & -3\\ 2 & -8\end{pmatrix}$,则 $\det(AA^T)$ 的值为 ________.

2.设 A、B 均为可逆方阵,则 $\begin{pmatrix}A & O\\ O & B\end{pmatrix}^{-1}=$________.

3.若线性方程组 $\begin{cases}x_1+3x_2+ax_3=1\\ 2x_1+6x_2-8x_3=1\end{cases}$ 无解,则常数 $a=$________.

4.已知向量 $\xi=\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$ 是矩阵 $A=\begin{pmatrix}5 & -3\\ -3 & k\end{pmatrix}$ 的属于特征值 $\lambda=2$ 的特征向量,则常数 $k=$________.

5.方程组 $x_1+x_2-x_3=0$ 的基础解系是 ________.

二、单项选择题(每小题 3 分, 共 15 分)

1. 设向量 $\alpha=(1,3,-5,4)^T$, 矩阵 $A=\alpha\alpha^T$, 则 $\det(A)$ 等于

$(a)0$.　　$(b)1$.　　$(c)5$.　　$(d)\sqrt{51}$.　　【　　】

2.设 A 为 3 阶方阵, $\det(A)=0$ 的充分必要条件是

(a) A 的列向量组线性无关.　　(b) A 的行向量组线性相关.

(c) A 的秩为 3.　　(d) A 中有两行对应成比例.　　【　　】

3.设 3 阶方阵 $A=\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\end{pmatrix}$,其中 α_i 为 3 维行向量($i=1,2,3$),矩阵 $B=\begin{pmatrix}\alpha_2\\ \alpha_1\\ \alpha_3-2\alpha_1\end{pmatrix}$,

$P_1=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$, $P_2=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ -2 & 0 & 1\end{pmatrix}$,则必有

$(a) AP_1P_2 = B$.　$(b) AP_2P_1 = B$.　$(c) P_1P_2A = B$.　$(d) P_2P_1A = B$.　【　　】

4. 设向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5$ 线性相关,而向量组 $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5$ 线性无关,则向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5$ 的极大无关组是

(a) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$.　　(b) $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$.

(c) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$　　(d) $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5$.　【　　】

5. n 阶方阵 A 正定的充要条件是

(a) $|A|>0$.　　(b) A 的 n 个特征值均大于零.

(c) A 有 n 个线性无关的特征向量.　　(d) A 为对称阵.　【　　】

三、(12 分) 求过三个平面 $2x+y-z-2=0,\ x-3y+z+1=0,\ x+y+z-3=0$ 的交点，且平行于平面 $x+y+2z-2=0$ 的平面方程。

四、(12 分) 当 a、b 为何值时,线性方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=0 \\ x_2+2x_3+2x_4=1 \\ -x_2+(a-3)x_3-2x_4=b \\ 3x_1+2x_2+x_3+ax_4=-1 \end{cases}$$

有唯一解、无解或有无穷多解？并在其有无穷多解时，求出结构式通解.

五、(12 分) 求向量组 $\alpha_1=(2,1,4,3)$，$\alpha_2=(-1,1,-6,6)$，$\alpha_3=(-1,-2,2,-9)$，$\alpha_4=(1,1,-2,7)$，$\alpha_5=(2,4,4,9)$ 的极大线性无关组与秩，并将其余向量用极大无关组线性表示.

六、(10 分) 已知矩阵 $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$，求 A^{50}

七、(10 分) 判定下面的二次型是否正定

$$f(x_1,x_2,x_3)=5x_1^2+2x_2^2+5x_3^2+4x_1x_2-8x_1x_3-4x_2x_3.$$

八、（8 分）(注意:学习过第 8 章“线性变换”者做第(2)题,其余同学做第(1)题).

(1)若三阶方阵 A 有三个互不相等的特征值$1,2,4$，设$B=A^2-2A-I$，求：$\det(B^*)$.

(2)设$T\in L(R^3)$，定义为$T(x_1,x_2x_3)^{\mathrm{T}}=(x_1+2x_2-x_3,x_2+x_3,x_1+x_2-2x_3)^{\mathrm{T}}$，$\forall(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}}\in R^3$.求：$T$ 的值域与T 的秩，T 的核与 T 的零度.

九、（6 分）证明：n阶实矩阵A为正定矩阵的充要条件，是存在n个线性无关的实向量$\alpha_i=(m_{i1},m_{i2},\cdots m_{in}),i=1,2,\cdots,n$，使得$A=\alpha_1^{\mathrm{T}}\alpha_1+\alpha_2^{\mathrm{T}}\alpha_2+\cdots+\alpha_n^{\mathrm{T}}\alpha_n$.

2007 年线性代数期末（A）

说明: $\det(A)$ 指方阵 A 的行列式, A^* 指方阵 A 的伴随矩阵, $r(A)$ 指矩阵 A 的秩, A^T 指矩阵 A 的转置矩阵, I 为单位矩阵. $R^{2\times 2}$ 指实数域 R 上的二阶实方阵全体按通常矩阵的运算构成的线性空间. $F[x]_2$ 表示次数不大于 2 的一元多项式全体所构成的线性空间。

一、填空题(每小题 3 分, 共 12 分)

(1). 若矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&0&1\\0&3&0\\5&0&3\end{pmatrix}$,则 $\det(2\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^T)=$___________.

(2). 若向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\\lambda\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\\lambda\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}\lambda\\1\\1\end{pmatrix}$ 的秩为 2,则 $\lambda=$___________.

(3). 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&2&1&2\\0&1&a&a\\1&a&0&1\end{pmatrix}$,已知齐次线性方程组 $Ax=0$ 的基础解系含有两个向量，则 $a=$_______________.

(4). 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&3\\0&1&-1\\3&-1&a\end{pmatrix}$ 为正定矩阵，则 a 的取值范围是_______________.

二、单项选择题(每小题 3 分, 共 12 分)

(1). 设两个非零矩阵 $\boldsymbol{A},B$,满足 $\boldsymbol{A}B=0$，则必有

(A) $\boldsymbol{A}$ 的列向量组线性相关. (B) $\boldsymbol{A}$ 的列向量组线性无关.
(C) $\boldsymbol{B}$ 的列向量组线性相关. (D) $\boldsymbol{B}$ 的列向量组线性无关. 【 】

(2). 曲线 $\begin{cases}2x^2-y^2=2\\z=0\end{cases}$ 绕 x 轴旋转一周所形成旋转面的名称是

(A) 单叶双曲面. (B) 双叶双曲面. (C)椭圆面. (D) 抛物面. 【 】

(3). 已知 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 1，2，3，则 $A^*-\boldsymbol{I}$ 必相似于对角矩阵

(A) $\begin{pmatrix}0&&\\&1&\\&&2\end{pmatrix}$; (B) $\begin{pmatrix}-1&&\\&-2&\\&&5\end{pmatrix}$; (C) $\begin{pmatrix}-5&&\\&1&\\&&2\end{pmatrix}$; (D) $\begin{pmatrix}1&&\\&2&\\&&5\end{pmatrix}$; 【 】

(4).设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&2&3\\0&0&4\end{pmatrix}$，则 $\left(\frac{1}{2}A^*\right)^{-1}=$

(A) $\frac{1}{2}A$.　(B) $\frac{1}{4}A$.　(C) $\frac{1}{8}A$.　(D) $\frac{1}{16}A$.　【　　】

三、(12 分) 设方阵 $\boldsymbol{B}$ 满足 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{B}=2I+2\boldsymbol{B}$,其中 $A=\begin{pmatrix}1&1&-1\\-1&1&1\\1&-1&1\end{pmatrix}$，求矩阵 B.

四、(12 分) 已知直线 $L_1:\frac{x-1}{-2}=\frac{y}{-3}=\frac{z}{2}$，直线 $L_2:\frac{x-3}{2}=\frac{y+1}{1}=\frac{z+2}{-2}$.

（1）记 L_i 的方向向量为 $\vec{a_i}(i=1,2)$，求过 L_1 且与 $\vec{a}_1\times\vec{a}_2$ 平行的平面 π 的方程.

（2）求 L_2 与 π 的交点.并写出 L_1 与 L_2 的公垂线的方程.

五、(12 分) a 、b 取何值时,线性方程组

$$\begin{pmatrix}1&2&0&2\\1&1&2&3\\0&1&-a&-1\\1&4&-4&a-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-1\\1\\b+3\end{pmatrix}$$

有唯一解、无解、有无穷多解?并在有无穷多解时,求出该方程组的结构式通解。

六、(12 分). 设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=4(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_1x_2+x_1x_2-x_2x_3)$,

(1) 写出二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 的矩阵 $\boldsymbol{A}$;

(2) 求一个正交矩阵 $\boldsymbol{P}$,使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$ 成对角矩阵;

(3) 写出 f 在正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Py}$ 下化成的标准形.

七、 (12 分) 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&-3\\-1&4&-3\\1&a&5\end{pmatrix}$ 的全部特征值之积为 24.

(1) 求 a 的值;

(2) 讨论 A 能否对角化，若能，求一个可逆矩阵 P 使 $P^{-1}AP=D$ 为对角阵。

八、（10 分）（注意:学习过第 8 章“线性变换”者做第(2)题,其余同学做第(1)题)

(1) 在 $\boldsymbol{R}^{2\times 2}$ 中所有 2 阶实对称矩阵所组成的集合构成 $\boldsymbol{R}^{2\times 2}$ 的一个子空间 W .

证明元素组 $\boldsymbol{A_1}=\begin{pmatrix}1 & -2\\ -2 & 1\end{pmatrix}, \boldsymbol{A_2}=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 3\end{pmatrix}, \boldsymbol{A_3}=\begin{pmatrix}4 & -1\\ -1 & -5\end{pmatrix}$ 是 W 的一个基.

(2) 设 $\boldsymbol{T}$ 是 $F[x]_2$ 上的线性算子，T 在 $F[x]_2$ 的基（Ⅰ）：$x^2, x, 1$ 下的矩阵为

$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ -1 & 0 & 3\\ 2 & 1 & 5\end{pmatrix}$,求 T 在 $F[x]_2$ 的基（Ⅱ）：x^2, x^2+x, x^2+x+1 下的矩阵

九、（6 分） 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵，$A\neq 0$ 且 $A\neq I$.证明: $A^2=A$ 的充分必要条件是 $r(A)+r(A-I)=n$.

2007 年线性代数期末（B）

符号说明：det($\boldsymbol{A}$) 指方阵 $\boldsymbol{A}$ 的行列式；$\boldsymbol{A}^*$ 指方阵 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵；$\boldsymbol{A}^T$ 指矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的转置矩阵；$r(\boldsymbol{A})$ 指矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩；$\boldsymbol{I}$ 为单位矩阵；$F[x]_n$ 指次数不超过 n 的一元多项式全体构成的线性空间.L(V)表示线性空间 V 到自身的线性变换。

一、填空题（每小题 3 分，共 12 分）

（1） 设 $A=\begin{bmatrix}0 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}$，$B=P^{-1}AP$，其中 P 为 3 阶可逆矩阵，则 $B^{2008}-2A^2$

=______

（2） 设$A=(a_{ij})_{3\times3}$ 是实正交矩阵，且 $a_{11}=1$, $b=(1,0,0)^T$，则线性方程组 $AX=b$ 的解是______

(3) 设 n 阶方阵 $\begin{bmatrix}1 & a & a & \cdots & a\\ a & 1 & a & \cdots & a\\ a & a & 1 & \cdots & a\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ a & a & a & \cdots & 1\end{bmatrix}$ 的秩为 $n-1$，则 $a=$_____

（4） 已知向量 $a=(1,2,3), b=(-1,0,2)$，则与它们都垂直的一个单位向量是_______.

二、单项选择题（每小题 3 分，共 12 分）

(1)设矩阵 B=$\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}$，已知 $A\cong B$，则 $r(A-2E)+r(A-E)$ 等于

(A) 2.　(B) 3.　(C) 4.　(D) 5.　【　】

(2) 设 4 阶方阵 A 的秩为 2,则其伴随矩阵的秩 $r(A^*)$ 为

(A) 0.　(B) 2.　(C) 3.　(D) 4.　【　】

(3)设向量组 I: $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 可由向量组 II: $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 线性表示，则

(A) 当$r<s$时，向量组 II 必线性相关.

(B) 当$r>s$时，向量组 II 必线性相关.

(C) 当$r<s$时，向量组 I 必线性相关.

(D) 当$r>s$时，向量组 I 必线性相关. 【 】

(4) n 阶方阵 A 有 n 个两两不同特征值是 A 与对角矩阵相似的

(A) 充分必要条件. (B) 充分而非必要的条件.

(C)必要而非充分的条件. (D) 既不是充分也不是必要条件. 【 】

三、（12 分） 求向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5$的秩及一个极大线性无关组.其中

$\alpha_1=(1,1,1,1)^T$ ，$\alpha_2=(1,1,-1,-1)^T$ ，$\alpha_3=(1,-1,1,-1)^T$ ，$\alpha_4=(1,-1,-1,1)^T$ ，

$\alpha_5=(2,0,1,-1)^T$

四、（12 分）计算 n 阶行列式 D_n 的值，其中$(a_i\neq 0,i=1,2\cdots n)$

$$D_n=\begin{vmatrix} a_1^{\ n-1} & a_2^{\ n-1} & a_3^{\ n-1} & \cdots & a_n^{\ n-1} \\ a_1^{\ n-2}b_1 & a_2^{\ n-2}b_2 & a_3^{\ n-2}b_3 & \cdots & a_n^{\ n-2}b_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_1b_1^{\ n-2} & a_2b_2^{\ n-2} & a_3b_3^{\ n-2} & \cdots & a_nb_n^{\ n-2} \\ b_1^{\ n-1} & b_2^{\ n-1} & b_3^{\ n-1} & \cdots & b_n^{\ n-1} \end{vmatrix}$$

五、（12 分）已知齐次线性方程组$\begin{cases}(a_1+b)x_1+a_2x_2+a_3x_3+\cdots+a_nx_n=0\\ a_1x_1+(a_2+b)x_2+a_3x_3+\cdots+a_nx_n=0\\ a_1x_1+a_2x_2+(a_3+b)x_3+\cdots+a_nx_n=0\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3+\cdots+(a_n+b)x_n=0\end{cases}$，

其中$\sum_{i=1}^{n}a_i\neq 0$. 讨论$a_1,a_2,\cdots,a_n$和 b 满足何种关系时，

(1)方程组仅有零解；

(2)方程组有非零解。在有非零解时，求此方程组的一个基础解系。

六、（13 分）已知两条直线的方程分别为

$$L_1: \frac{x+1}{3} = \frac{y+1}{2} = \frac{z+1}{1} \qquad L_2: x-4 = \frac{y+5}{-3} = \frac{z-4}{2}$$

(1) 两直线是否共面？ 如共面，求两直线所在平面的方程。
(2)两直线是否有交点？如有交点，求出交点的坐标。

七、（13 分）设 A= $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & y & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ 的一个特征值为 3，

（1）求 y 的值；　　(2)求可逆方阵 P，使 $(AP)^T(AP)$ 为对角阵。

八、(8 分)（注意：学习过第 8 章“线性变换”者做第 2 题，其余的做第 1 题）.

1、设 $r(A_{5\times4})=2$，$\alpha_1=(1,1,2,3)^T$，$\alpha_2=(-1,1,4,-1)^T$ 和 $\alpha_3=(5,-1,-8,9)^T$ 都是 $Ax=0$ 的解.求 $Ax=0$ 的解空间的维数与一个标准正交基。

2、设 $T\in L(V)$,T 在 V 的基 e_1, e_2, e_3 下的矩阵为 $A=\begin{pmatrix} 15 & -11 & 5 \\ 20 & -15 & 8 \\ 8 & -7 & 6 \end{pmatrix}$，求 T 在基 $\beta_1=2e_1+3e_2+e_3, \beta_2=3e_1+4e_2+e_3, \beta_3=e_1+2e_2+2e_3$ 下的矩阵.

九、（6 分）证明：$r(A)=1$ 的充分必要条件是存在非零列向量 $\boldsymbol{a}$ 及非零行向量 $\boldsymbol{b}^T$，使 $A=\boldsymbol{ab}^T$.

2008 年线性代数期末（A）

说明: $\det(A)$ 指方阵 A 的行列式, A^* 指方阵 A 的伴随矩阵, $r(A)$ 指矩阵 A 的秩, A^T 指矩阵 A 的转置矩阵, I 为单位矩阵.

一、填空题(每小题 4 分, 共 16 分)

(1). 若矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&2&1\\0&3&2\\5&0&0\end{pmatrix}$, 则 $\det(2\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}^*)=$____________.

(2). 已知 $\boldsymbol{\alpha}=(1,2,-2)^T$, 则迹 $\mathrm{tr}(\alpha\alpha^T)=$______________.

(3). 若向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(0,1,\lambda)^T,\boldsymbol{\alpha}_2=(\lambda,1,0)^T,\boldsymbol{\alpha}_3=(0,\lambda,1)^T$ 线性相关, 则 λ =____________.

(4). 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&a&1\\3&-1&-a\end{pmatrix}$ 为正定矩阵，则 a 的取值范围是________________.

二、单项选择题(每小题 4 分, 共 16 分)

(1). 设 $AB=C$，则必有

(A) $r(A+B)\ge r(A)+r(B)$.　　(B) $r(A)+r(B)=r(C)$.

(C) $r(C)\le r(A)$.　　(D) $r(B)\le r(C)$.　　【　　】

(2). 直线 $L_1:\dfrac{x-1}{0}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z-2}{1}$ 和直线 $L_2:\begin{cases}x+y=1\\z=3\end{cases}$

(A) 重合.　(B) 相交.　(C) 平行.　(D) 异面.　　【　　】

(3). $A\vec{x}=\vec{0}$ 只有零解的充分必要条件是

(A) A 的列向量线性相关;　(B) A 的行向量线性相关;

(C) A 是行满秩的; (D) A 是列满秩的; 【 】

(4).设矩阵 $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$，则 $A^{-1} =$

(A) $\frac{1}{2}A^*$. (B) $\frac{1}{2}A$. (C) $\frac{1}{4}A$. (D) $\frac{1}{4}A^*$. 【 】

三、(12 分) 写出以 $(0,0,0)$ 为顶点，$\begin{cases} x^2+y^2+2z^2=1 \\ x+y=z+1 \end{cases}$ 为准线的锥面方程。并指出其在平面 $z=2$ 上的投影曲线的名称。

四、(12 分) a,b 取何值时,线性方程组

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & a \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & a+b \\ 1 & 1 & 1 & 2a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ b+1 \end{pmatrix}$$

有唯一解、无解、有无穷多解?并在有无穷多解时,求出该方程组的结构式通解.

五、(12 分). 设二次型 $f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{B}\boldsymbol{x}$，其中 $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

(1) 写出二次型 $f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 的矩阵 $\boldsymbol{A}$;

(2) 求一个正交矩阵 $\boldsymbol{P}$，使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ 成对角矩阵;

(3) 求一个合同矩阵 $\boldsymbol{C}$，写出 f 在线性变换 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{y}$ 下的规范形.

六、(12 分) 向量组 $\beta_1 = (3,4,2,3)$，$\beta_2 = (4,2,6,3)$,能否由向量组 $\alpha_1 = (2,2,2,1)$，$\alpha_2 = (1,0,2,1)$，$\alpha_3 = (1,2,0,1)$ 线性表示。若能，求出它们的表达式。

七、(10 分) (注意:学习过第 8 章“线性变换”者做第(2)题,其余同学做第(1)题)

设数域 $\boldsymbol{R}$ 上的三维线性空间 V 中定义的两个运算是 $\oplus$ 和 $\circ$，即 $\alpha \oplus \beta \in V$，

$k \circ \alpha \in V$，且 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ 是 V 的一个基，θ 是 V 的零元，若

$$\alpha_1=\varepsilon_1\oplus(-1)\circ\varepsilon_2\oplus2\circ\varepsilon_3,\alpha_2=3\circ\varepsilon_1\oplus(-2)\circ\varepsilon_2\oplus5\circ\varepsilon_3,\alpha_3=2\circ\varepsilon_1\oplus\varepsilon_2\oplus\varepsilon_3$$

(1) 求 $\mathrm{span}\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}$ 的基与维数。

(2) 若 V 中的线性算子 T 的矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&3&2\\-1&-2&1\\2&5&1\end{pmatrix}$，求 $\ker(T)$ 和 $T(V)$ 的一个基。

八、（10 分） 设 $\alpha=(a_1,a_2,a_3)^T$， $\beta=(b_1,b_2,b_3)^T$，且 $\alpha^T\beta=2, A=\alpha\beta^T$，

（1）求 A 的特征值，

（2）求可逆阵 P 及对角阵 Λ，使 $P^{-1}AP=\Lambda$.

2009 年线性代数期末（A）

一、单项选择题(每小题 5 分, 共 15 分)

(1). 设向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关，则下列向量组线性相关的是

(A) $\alpha_1-\alpha_2,\alpha_2-\alpha_3,\alpha_3-\alpha_1$.　(B) $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1$.

(C) $\alpha_1-2\alpha_2,\alpha_2-2\alpha_3,\alpha_3-2\alpha_1$.　(D) $\alpha_1+2\alpha_2,\alpha_2+2\alpha_3,\alpha_3+2\alpha_1$.　【　】

(2). 若 $AB=E$,则

(A) A 的行向量线性相关;　(B) B 的行向量线性无关;

(C) A 是列满秩的;　(D) B 是列满秩的.　【　】

(3).设矩阵 $A=\begin{pmatrix}2&-1&-1\\-1&2&-1\\-1&-1&2\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$, 则 A与B

(A)合同,相似 . (B)合同,不相似 . (C)不合同,相似 . (D)不合同,不相似 .　【　】

二、填空题(每小题 5 分, 共 15 分)

(1). 在 $A\vec{x}=\vec{b}$ 中, $\sum_{j=1}^{n} a_{3j}A_{3j}=3, \sum_{i=1}^{n} b_iA_{i3}=6$, 则 $x_3=$________.

(2). 若n阶矩阵A的特征值为$0,1,2,\cdots,n-1$, 且$B\sim A$, 则$|B+E|=$______.

(3). $\begin{pmatrix}O&A_n\\B_n&O\end{pmatrix}^{-1}=$ ____________

三、(12 分) 求以$\Gamma:\begin{cases}y=0\\z=x^2\end{cases}$为准线,母线平行于向量$(2,1,1)$的柱面方程.

四、(12 分) 设线性方程组$\begin{cases}x_1+x_2+x_3=0\\x_1+2x_2+ax_3=0\\x_1+4x_2+a^2x_3=0\end{cases}$与方程$x_1+2x_2+x_3=a-1$有公共解,求$a$的值及所有公共解.

五、(12 分) 设二次型 $f(\vec{x})=\vec{x}^TA\vec{x}$，其中 $A=\begin{pmatrix}0&2&2\\2&0&2\\2&2&0\end{pmatrix}$.

(1) 求一个正交矩阵 $\boldsymbol{P}$ ，使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$ 成对角矩阵;

(2) 若 $f(\vec{x})=-1$,指出方程所表示的图形名称.

六、(12 分) 设 $A=\begin{pmatrix}2&3&-1\\2&1&0\\0&4&3\end{pmatrix}$ 且知 $AX-A=3X$ ，求矩阵X.

七、(12 分) （注意:学习过第 8 章“线性变换”者做第(2)题,其余同学做第(1)题）

(1) $1+x,x+x^2,x^2-1$ 是否可作为 $\mathrm{span}\{1+x,x+x^2,x^2-1\}$ 的一个基？求 $\mathrm{span}\{1+x,x+x^2,x^2-1\}$ 维数.

(2) 求 $V\to W$ 的线性变换 $T(a,b,c)=\begin{pmatrix}a+b+c&a+c\\0&2a+b+2c\end{pmatrix}$ 的值域的基和零度空间的基

八、(10 分) 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k$ 是齐次线性方程组 $A\vec{x}=\vec{0}$ 的基础解系，向量 β 满足 $A\beta\neq\vec{0}$，证明：向量组 $\alpha_1+\beta,\alpha_2+\beta,\cdots,\alpha_k+\beta$ 线性无关.

2010年线性代数期末（A）

一、单项选择题(每小题5分,共15分)

(1).设A为三阶方阵,将A的第2行加到第1行得矩阵B,再将B的第1列的-1倍加到第2列得矩阵C，记矩阵$P=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，则

(A) $C=P^{-1}AP$. (B) $C=PAP^{-1}$. (C) $C=P^{T}AP$. (D) $C=PAP^{T}$. 【　　】

(2). 设有线性方程组(I) : $AX=O$，　(II): $A^{T}AX=O$,则

(A) (II)的解是(I)的解，(I)的解也是(II)的解;

(B) (II)的解是(I)的解，但(I)的解不是(II)的解;

(C) (I)的解不是(II)的解，(II)的解也不是(I)的解;

(D) (I)的解是(II)的解，但(II)的解不是(I)的解;. 【　　】

(3) 若n阶方阵$\boldsymbol{A}$相似于对角阵，则

(A) $\boldsymbol{A}$有n个不同的特征值;　　(B) $\boldsymbol{A}$为实对称阵;

(C) $\boldsymbol{A}$有n个线性无关的特征向量;　　(D) $r(\boldsymbol{A})=n$. 【　　】

二、填空题(每小题5分,共15分)

(1). 设$\lambda=2$是可逆矩阵 A 的一个特征值，则矩阵$\left(\frac{1}{3}A^2\right)^{-1}$的一个特征值为________.

(2). 矩阵$B=\begin{pmatrix}2&0\\1&0\end{pmatrix}$，则二次型$f(x)=x^{T}Bx$的矩阵为__________.

(3). 已知η_1,η_2,η是四元方程组$AX=b$的三个解，其中$r(A)=3$且$\eta_1+\eta_2=(1,2,3,4)^T,\eta_2+\eta_3=(4,4,4,4)^T$，则方程组$AX=b$的通解为__________

三、(12分)

证明两直线$l_1: x=y=z-4$, $l_2: -x=y=z$异面；求两直线间的距离；并求与l_1,l_2都垂直且相交的直线方程。

四、(12分)

线性方程组

$$\begin{bmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \lambda-3 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

讨论λ取何值时，该方程组有唯一解、无解、有无穷多解?并在有无穷多解时，求出该方程组的结构式通解.

五、(12 分). 已知二次曲面方程$x^2+ay^2+z^2+2bxy+2xz+2yz=4$可经过正交变换$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=P\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}$化为柱面方程$y'^2+4z'^2=4$，求$a,b$的值及正交矩阵 P.

六、(12 分) 设$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,矩阵$X$满足$AX+I=A^2+X$，其中$I$为三阶单位矩阵，求矩阵$X$.

七、(12 分) (注意:学习过第 8 章“线性变换”者做第(2)题,其余同学做第(1)题)

(1) 矩阵$A=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -4 & -3 & -2 \end{bmatrix}$,线性空间$\{b|b\in F^4$，方程组$Ax=b$有解$\}$,求$V$的基与维数.

(2) 设$T\in L(R^3)$,T在R^3的基$\alpha_1=(-1,1,1)^T,\alpha_2=(1,0,-1)^T,\alpha_3=(0,1,1)^T$下的矩阵为$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$，求$T$在基$\beta_1=(1,0,0)^T,\beta_2=(0,1,0)^T,\beta_3=(0,0,1)^T$下的矩阵.

八、(10 分) 设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$是$n$维列向量组，矩阵

$$A=\begin{bmatrix} \alpha_1^T\alpha_1 & \alpha_1^T\alpha_2 & \cdots & \alpha_1^T\alpha_n \\ \alpha_2^T\alpha_1 & \alpha_2^T\alpha_2 & \cdots & \alpha_2^T\alpha_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_n^T\alpha_1 & \alpha_n^T\alpha_2 & \cdots & \alpha_n^T\alpha_n \end{bmatrix}$$

试证明$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性无关的充要条件是对任意$n$维列向量$b$，方程组$AX=b$均有解。

2011 年线性代数期末（A）

一、填空题（每题 4 分，共 20 分）

1.若$A=\begin{bmatrix}5 & 3\\1 & -2\end{bmatrix}$，则$A$的伴随矩阵$A^*=$______________.

2.过ox轴和点$M(1,2,3)$的平面方程为______________.

3.曲线$\begin{cases}z=x^2+y^2\\x+y+z=1\end{cases}$在$xoy$坐标面上的投影曲线的方程为________________.

4.A为n阶方阵，满足$A^2+A-4E=0$，则$(A+E)^{-1}=$_______________.

5.A为 3 阶方阵，第一行元素全为 1，A_{ij}为对应元素a_{ij}的代数余子式，则$A_{21}+A_{22}+A_{23}=$________________.

二、单项选择题（每题 4 分，共 20 分）

1. 设向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关，则下列向量组线性相关的是（　　）。

a. α_1,α_2；　　b. $\alpha_1,\alpha_1+\alpha_2,\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$；

c. $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_1+\alpha_3$；　　d. $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3-\alpha_1$.

2. 设$A=(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)$，$n$维列向量组$\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n$线性无关的充分必要条件是（　　）。

a. $det(A)=1$；　　b. A的特征值全为正；

c. 矩阵A的秩；　　d. $x=0$是方程组$Ax=0$的解.

3. 设A为 3 阶实对称矩阵，二次型$f=x^TAx$经过一个可逆线性变换$x=Cy$化为标准型$f=y_1^2+2y_2^2$，则必有（　　）。

a. A有零特征值；　　b. A有重特征值；

c. 1,2都是A的特征值；　　d. 1,2都不是A的特征值.

4. 设有 4 元非齐次线性方程组$Ax=b$，系数矩阵A的秩$r(A)=2$，η_1,η_2,η_3为它的三个线性无关的解向量，则它的通解为$x=$（　　）。

a. $k_1\eta_1+k_2\eta_2+k_3\eta_3$；　　b. $k_1(\eta_2-\eta_1)+k_2(\eta_3-\eta_1)+\eta_1$；

c. $k_1(\eta_1+\eta_2)+k_2(\eta_2+\eta_3)$；　　d. $k_1(\eta_2-\eta_1)+k_2(\eta_2-\eta_3)$.

5. 直线L_k过P_k点，且与向量$\vec{a}_k$平行（$k=1,2$），则L_1,L_2相交于一点的充分必要条件是（　　）。

a. $(\vec{a}_1 \times \vec{a}_2) \cdot \overrightarrow{P_1P_2} = 0$，且$\vec{a}_1 \times \vec{a}_2 \neq 0$；　b. $(\vec{a}_1 \times \vec{a}_2) \cdot \overrightarrow{P_1P_2} = 0$，且$\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2 \neq 0$；

c. $(\vec{a}_1 \times \vec{a}_2) \cdot \overrightarrow{P_1P_2} \neq 0$，且$\vec{a}_1 \times \vec{a}_2 = 0$　d. $(\vec{a}_1 \times \vec{a}_2) \cdot \overrightarrow{P_1P_2} \neq 0$，且$\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2 = 0$.

三、（12 分） 设有三元方程组$\begin{cases}(1+\lambda)x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + (1+\lambda)x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + x_2 + (1+\lambda)x_3 = \lambda.\end{cases}$

（1）讨论λ取何值时该方程组无解、有唯一解、有无穷多个解？

（2）当方程组有无穷多个解时，求其通解。

四、（12 分） 设三元二次型$f(x_1,x_2,x_3) = 3x_1^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$.

求正交变换$x = Py$将二次型f化为标准形，并写出所用的正交变换；

五、（10 分） 设$A = \begin{bmatrix}1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 3\end{bmatrix}$.

（1）求$(A^*)^{-1}$。其中A^*为A的伴随矩阵；

（2）设$AX + 6(A^*)^{-1}X = B$，其中$B = \begin{bmatrix}1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0\end{bmatrix}$.求$X$。

六、（10 分）（注意：学过第八章线性变换者做第（2）题，其他同学做第（1）题）。

（1）设A为$m \times n$阶矩阵，且$r(A) = n$，证明$B = A^TA$为正定矩阵。

（2）T是n维线性空间V上的线性变换，$\xi \in V$，如果$T^{n-1}\xi \neq 0, T^n\xi = 0$，证明：$\xi, T\xi, \dots, T^{n-1}\xi$是$V$的一组基。并求$T$在这组基下的矩阵。

七、（10 分） 设$A = (a_{ij})_{n\times n}$为 n 阶矩阵，$det(A) = 0$，A_{ij}为a_{ij}对应的代数余子式，$A_{21} \neq 0$，证明：$Ax = 0$的通解为$x = k(A_{21}, A_{22}, \dots, A_{2n})^T$.

八、（6 分） 设$\alpha_i = (\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \dots, \alpha_{in})^T (i = 1,2, \dots r, r < n)$是$n$维实向量，且$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$线性无关。已知$\beta = (b_1, b_2, \dots, b_n)^T$是线性方程组$Ax = 0$的实非零解向量，其中$A = (a_{ij})_{r\times n}$，试判断向量组$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r, \beta$的线性相关性。

2012 年线性代数期末（A）

一、填空题（每题 4 分，共 20 分）

1．若向量组$\alpha_1=(1+k,1,1),\alpha_2=(1,1+k,1),\alpha_3=(1,1,1+k)$线性无关，则$k$应满足________________。

2. 设向量α，β的范数分别为 2 和 3，则内积$<\alpha+\beta$，$\alpha-\beta>$____________。

3. 设实二次型的秩为 4，正惯性指数为 3，则其规范型为_____________ 。

4. 由曲线$\begin{cases} z=x^2 \\ y=0 \end{cases}$绕 z 轴旋转所产生的旋转曲面方程为_____________。

5. $R[x]_2$的基$1,x,x^2$到基$1,1+x,1+x+x^2$的过渡矩阵为_______________。

二、选择题（每题 4 分，共 20 分）

1. 设n阶方程A不可逆，则一定有（　　　）。

(A) $rank(A)<n$　　(B) $rank(A)<n-1$

(C) $A=0$　　(D) 方程组$Ax=0$只有零解

2. 设A是实对称矩阵，C是实可逆矩阵，$B=C^TAC$，则（　　　）。

(A) A与B相似　　(B) A与B的行列式相等

(C) A与B有相同的特征值　　(D) A与B合同

3. 设A是正交矩阵，则下列结论错误的是（　　　）。

(A)$|A|=1$　　(B) $|A|^2=1$

(C)$A^{-1}=A^T$　　(D) A的行（列）向量组是正交的单位向量组

4. 下列矩阵中是正定矩阵的为（　　　）。

(A)$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$　　(B) $\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & -6 \end{bmatrix}$　　(C) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 5 \end{bmatrix}$　　(D) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

5.设α_1=（1,1,0,0），α_2=（0,0,2,2），α_3=（1,0,1,0），α_4=（1,2,3,4），则该向量组的极大线性无关组（　　　）。

(A) α_1,α_2　　(B) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$　　(C) α_1,α_3　　(D) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$

三、（8 分）（本大题共 2 小题，每小题 4 分，共 8 分）

1. 设A为实二阶方阵，且$|A|<0$，证明：A与对角矩阵相似。

2. 设A为n阶矩阵，α是n维列向量，若$A\alpha \neq 0$但$A^2\alpha = 0$，证明：向量组 $\alpha, A\alpha$线性无关。

四、（10 分） 设矩阵A的伴随矩阵$A^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 8 \end{bmatrix}$，且$AXA^{-1} = XA^{-1} + 3I$，求矩阵$X$。

五、（12 分） 已知二次型$f = 5x_1^2 + 5x_2^2 + tx_3^2 - 2x_1x_2 + 6x_1x_3 - 6x_2x_3$的秩为 2.

（1）求参数t。

（2）用正交变换将二次型$f(x_1, x_2, x_3)$化为标准型，并写出所用的正交变换。

六、（12 分）（注意：学过第八章线性变换者做第 2 题，其他同学做第 1 题）。

1.求向量组

$\alpha_1 = (1,-1,2,4), \alpha_2 = (0,3,1,2), \alpha_3 = (3,0,7,14), \alpha_4 = (1,-2,2,0), \alpha_5 = (2,1,5,10)$

的一个极大线性无关组，并将其余向量用此极大线性无关组表示。

2.已知$R^{2\times 2}$的一组基$E_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, E_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, E_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, E_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$，线性算子$T(X) = XM - MX, \forall X \in R^{2\times 2}$，$M = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$，求

（1）$R(T)$的维数和一个基；

（2）$Ker(T)$的维数和一个基；

（3）写出$R(T)$及$Ker(T)$。

七、（10 分）已知空间直角坐标系中三平面方程分别为：

$$\pi_1:\ x + y + 2z = 1 \quad \pi_2:\ x + \lambda y + z = 2 \quad \pi_3:\ \lambda x + y + z = 1 + \lambda$$

问：1：当λ取何值时这三个平面交于一点？交于一直线？没用公共交点？

2：当它们交于一直线时，求直线方程。

八、（8 分）

设m阶实方阵A正定，B为$m \times n$阶实矩阵，证明B^TAB为正定矩阵的充要条件是$r(B) = n$.

2013 年线性代数期末（A）

一、单项选择题（每小题 4 分，共 20 分）

（1）设A是$m\times n$矩阵，C为n阶可逆矩阵，矩阵$B=AC$，则（　　）

(A) $r(A)>r(B)$　(B) $r(A)<r(B)$　(C) $r(A)=r(B)$　(D) $r(B)$与C有关

（2）设A_{ij}是矩阵$A=(a_{ij})_{n\times n}$的(i,j)元素的代数余子式，若$A=\begin{bmatrix}1&2&3\\11&12&13\\0&12&21\end{bmatrix}$，则$11A_{31}+12A_{32}+13A_{33}=$（　　）

(A)0　(B)1　(C)-1　(D)16

（3）若四个点$A(1,0,-2),B(7,x,0),C(-8,6,1),D(-2,6,1)$共面，则$x=$（　　）

(A)0　(B)6　(C)4　(D)-4

（4）设向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关，则下列向量组线性相关的是（　　）。

(A) $\alpha_1-\alpha_2,\alpha_2-\alpha_3,\alpha_3-\alpha_1$　(B) $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1$

(C) $\alpha_1-2\alpha_2,\alpha_2-2\alpha_3,\alpha_3-2\alpha_1$　(D) $\alpha_1+2\alpha_2,\alpha_2+2\alpha_3,\alpha_3+2\alpha_1$.

（5）下列哪种情况会导致n阶行列式D的值为零（　　）

(A)主对角线上的元素全为零　(B)副对角线上的元素全为零

(C)至少有一个$n-1$阶子式为零　(D)所有$n-1$阶子式为零

二、计算题（每小题 5 分，共 20 分）

（1）设矩阵$A=\begin{bmatrix}1&-1&1\\2&4&-2\\-3&-3&a\end{bmatrix}$，已知齐次线性方程组$(2I-A)x=0$的基础解系含 2 个解向量，求$a$的值。

（2）设矩阵$A_{3\times3}$相似于对角矩阵$diag\{2,2,-2\}$，求行列式$\left|\frac{1}{2}A^*+5I\right|$的值。

（3）设多项式$f(x)=2x^5+2x^2-x,P=\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix},P^{-1}AP=\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}$，求$f(A)$.

（4）设$A=\begin{bmatrix}-2&2&1\\0&-4&2\\0&1&-3\end{bmatrix}$，且$AB+9I=A^2+3B$，求$|B|$.

三、（10 分） 证明两直线$L_1:\begin{cases}x=-3-z\\y=4\end{cases}$与$L_2:\begin{cases}x+2y+3z=4\\x-z=-2\end{cases}$相交，求出它

们所在平面的方程。

四、（12 分）线性方程组

$$\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & -1\\ -1 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_1\\ a_2\\ a_3\end{bmatrix}$$

有解的条件是什么？在有解的情况下，求出该方程组的所有解。

五、（12 分）已知二次型$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+4x_2^2+4x_3^2-4x_1x_2+4x_1x_3-8x_2x_3$，

（1）写出二次型$f(x_1,x_2,x_3)$的矩阵；

（2）用正交变换把二次型$f(x_1,x_2,x_3)$化为标准型，并写出相应的正交变换。

六、（11 分）设矩阵$A=\begin{bmatrix}2 & 0 & 1\\ 3 & 0 & 1\\ 0 & 4 & 1\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 3 & 1 & 1\\ 0 & 4 & 0\end{bmatrix}$，矩阵$X$满足$AXA+BXB=AXB+BXA+I$，求矩阵$X$.

七、（10 分）（注意：学习过第 8 章“线性变换”者做第 2 题，其余同学做第 1 题）

1.矩阵$A=\begin{bmatrix}1 & -2 & 1 & -1\\ 2 & 1 & -1 & 2\\ 3 & -2 & -1 & 1\\ 2 & -5 & 1 & -2\end{bmatrix}$，线性空间$V=\{b|b\in$，且方程组$Ax=b$有解$\}$.

（1）证明V是R^4的子空间。　（2）求V的基与维数。

2.设V是由实数域R上的全体二阶方阵构成的线性空间，在V中取定一个矩阵$A=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$，$\forall X\in V$，定义映射$T(X)=AX-XA$.

（1）证明：T是V上的一个线性变换，并求T在基$E_{11}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$，$E_{12}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}$，$E_{21}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix}$，$E_{22}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$下的矩阵；

（2）令$E_{11}'=E_{11}$，$E_{12}'=E_{11}+E_{12}$，$E_{21}'=E_{11}+E_{12}+E_{21}$，$E_{22}'=E_{11}+E_{12}+E_{21}+E_{22}$，证明$E_{11}',E_{12}',E_{21}',E_{22}'$也是$V$的一组基，并求$T$在基$E_{11}',E_{12}',E_{21}',E_{22}'$下的矩阵。

八、（5 分）设三阶方阵A的特征值$-1,1$对应的特征向量分别为α_1,α_2，向量α_3满

足$A\alpha_3=\alpha_2+\alpha_3$，证明：（1）$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关；（2）设$P=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]$，求$P^{-1}AP$.