彭·线代

线性代数期中试题集

（2022版）

彭康书院课外学业辅导学友互助团

2021 年线代期中试题

一、选择题

1. 设 A 为 3 阶方阵，$|A|=3$，则 $|-2A|=$ （　　）

A. -6　　B. 6　　C. -24　　D. 24

2. 设 A,B 为 n 阶方阵，则下式中成立的是 （　　）

A. $AB=BA$　　B. $|AB|=|BA|$　　C. $|A+B|=|A|+|B|$

D. $(A+B)(A-B)=A^2-B^2$

3. 设 A 为 3 阶方阵，A^* 是 A 的伴随矩阵，$|A|=2$，则 $|A^*|=$ （　　）

A. 2　　B. 4　　C. 8　　D. 16

4. 设同阶矩阵 A 与 B 等价，则有 （　　）

A. $|A|=|B|$　　B. $|A|\neq|B|$　　C. $r(A)=r(B)$　　D. $r(A)\neq r(B)$

5. 设 A 为 n 阶可逆矩阵，则 （　　）

A. $(A^{-1})^*=|A|^{-1}A$　　B. $(A^{-1})^*=|A|A$　　C. $(A^{-1})^*=|A|^{-1}A^{-1}$　　D. $(A^{-1})^*=|A|A^{-1}$

6. 设 A 是 n 阶方阵，B 是 m 阶方阵，$C=\begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}$，则 $|C|=$ （　　）

A. $|A|\cdot|B|$　　B. $-|A|\cdot|B|$　　C. $(-1)^{m+n}|A|\cdot|B|$　　D. $(-1)^{mn}|A|\cdot|B|$

7. 设 A,B,C 均为 n 阶方阵，且 $ABC=I$（单位阵），则下式未必成立的是 （　　）

A. $BCA=I$　　B. $CAB=I$　　C. $ACB=I$　　D. $C^\top B^\top A^\top=I$

8. 设 $1\times n$ 矩阵 $\alpha=\left(\frac{1}{2},0,0,\cdots,0,\frac{1}{2}\right)$, $A=I-\alpha^\top\alpha$, $B=I+2\alpha^\top\alpha$，则 （　　）

A. A,B 都不可逆　　B. A 可逆但 B 不可逆

C. A 不可逆但 B 可逆　　D. A,B 都可逆且互为逆矩阵

9. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -5 \end{pmatrix}$，若有下三角可逆矩阵 P 和上三角可逆矩阵 Q 使 PAQ 为对角阵，则 P,Q 可分别取为 （　　）

A. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$　　B. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

C. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$　　D. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

二、填空题

1. 方程 $f(x)=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4+x \\ a_1 & a_2 & a_3+x & a_4 \\ a_1 & a_2+x & a_3 & a_4 \\ a_1+x & a_2 & a_3 & a_4 \end{vmatrix}=0$ 的根为__________.

2. 点 $M(1,2,3)$ 到平面 $x-2y+2z+3=0$ 的距离为__________.

3. 已知向量$\vec{b}$与$\vec{a}=(1,2,-2)$平行，且$\vec{b}$与z轴正向夹角为锐角，则$\vec{b}$的方向余弦为__________.

4. 设矩阵X满足矩阵方程$AX=B$，其中$A=\begin{pmatrix}1&2&1\\2&5&4\\1&1&0\end{pmatrix}$,$B=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\\1&1\end{pmatrix}$，则$X=$__________.

三、解答题

1. 设A,B均为n阶方阵，$|A|=5,|B|=3,|A^{-1}+B|=3$，求$|B^{-1}+A|$.

2. 计算行列式$D=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\2+3a&2+3b&2+3c&2+3d\\4a+5a^2&4b+5b^2&4c+5c^2&4d+5d^2\\6a^2+7a^3&6b^2+7b^3&6c^2+7c^3&6d^2+7d^3\end{vmatrix}$.

3. 求过直线$L:\begin{cases}2x-z=0\\x+y-z+5=0\end{cases}$且垂直于平面$\pi:7x-y+4z=4$的平面方程.

4. 求过点$P_0(-3,5,9)$且与直线$L_1:\begin{cases} y=3x+5 \\ z=2x-3 \end{cases}$及$L_2:\begin{cases} y=4x-7 \\ z=5x+10 \end{cases}$都相交的直线$L$的方程.

5. 设B是$m\times n$矩阵，且$BB^{\top}$可逆，$A=I-B^{\top}(BB^{\top})^{-1}B$.
(1) 证明：A是对称矩阵，且$A^2=A$；(2) A是否可逆，为什么？

6. 设有$m\times n$矩阵A，$r(A)$表示A的秩，证明：
(1) $r(A)=r$的充分必要条件是存在$m\times r$的列满秩矩阵G和$r\times n$的行满秩矩阵H，使$A=GH$.
(2) 若$r(A)=r$，则A可表示为r个秩为1的矩阵之和.

2019 年线代期中试题

一、选择题

1. 设 x, y, z 为两两互不相同的数，则行列式 $\begin{vmatrix} x+y & z & z^2 \\ y+z & x & x^2 \\ z+x & y & y^2 \end{vmatrix}=0$ 的充要条件是（）

A. $xyz=0$ B. $x+y+z=0$ C. $x=-y, z=0$ D. $y=-z, x=0$

2. 设 A 为 n 阶方阵($n\geq 3$)，若 $A^3=O$，则下式中未必成立的是（　　）

A. $A=O$ B. $(A^T)^3=O$ C. $A^4=O$ D. $|A|=O$

3. 设 A 为 n 阶可逆矩阵($n\geq 2$)， I 为 n 阶单位矩阵，则 $\left(\left(A^*\right)^*\right)^{-1}=$（　　）

A. $|A|^{n-1} I$　　B. $|A|^{1-n} I$　　C. $|A|^{n-1} A^*$　　D $|A|^{1-n} A^*$

4. $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{2018} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{2019} =$（　　）

A. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ B. $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 6 & 5 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ C. $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 6 & 5 & 4 \\ 9 & 8 & 7 \end{bmatrix}$ D. $\begin{bmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

5. 设 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 均为非零向量且 $\vec{a}=\vec{b}\times\vec{c},\vec{b}=\vec{c}\times\vec{a},\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}$，则 $\|\vec{a}\|+\|\vec{b}\|+\|\vec{c}\|=$（　　）

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

二、填空题

1. 已知 x_1, x_2, x_3 为方程 $x^3+px+q=0$ 的三个根 $\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_3 & x_1 \\ x_3 & x_1 & x_2 \end{vmatrix}=$__________.

2. 设 $\alpha=(1,2,3), \beta=(1,-1,1)$ ，则 $(\alpha^T\beta)^{2020}=$ ______________.

3. 设 A 为 3 阶方阵，且 $|A|=2$ ，则 $\left|\left(\frac{1}{2}A^*\right)^{-1}-3A\right|=$___________________.

4. 设有直线 $L_1: \dfrac{x-1}{9}=\dfrac{y-2}{8}=\dfrac{z-3}{5}, L_2: \dfrac{x+2}{2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z}{1}$ 则过直线 L_1 且与 L_2 平行的平面方程为______________________________________.

5. 以 $A(1,1,1)$， $B(2,0,1)$， $C(0,0,1)$， $D(1,3,2)$ 为顶点的四面体的体积为__________.

三、解答题

1. 设有 n 元线性方程组 $Ax=b$ ，其中 A 为三对角矩阵，且

$$A=\begin{bmatrix} 2a & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ a^2 & 2a & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 & 2a & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a^2 & 2a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a^2 & 2a \end{bmatrix}, x=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, b=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

(1) 证明$|A|=(n+1)a^n$；(2) a 为何值时，该方程组有唯一解，并在此时求x_1和x_n.

2. 设A为n阶实矩阵，I为单位阵，满足$AA^T=I$，此时称A为正交矩阵，若已知$|A|<0$，求$|A|$及$|A+I|$.

3. 设有两条直线$L_1:\begin{cases} x-y=3 \\ 3x-y+z=1 \end{cases}$和$L_2: x+1=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z}{2}$，点$M(1,0,-1)$.

(1)求L_1的对称式方程；(2)求点M到L_1的距离；(3)研究L_1与L_2的位置关系.

4. 设矩阵 $B=\begin{bmatrix}1 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$，$C=\begin{bmatrix}2 & 1 & 3 & 4\\ 0 & 2 & 1 & 3\\ 0 & 0 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 2\end{bmatrix}$，$I$ 为单位阵. 矩阵 A 满足 $A(I-C^{-1}B)^T C^T=I$，求 A。

5. 设矩阵 $A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & -2 & -1 & -2\\ 4 & 1 & 2 & 1\\ 2 & 5 & \mu & \lambda\end{bmatrix}$，讨论矩阵 A 的秩.

6. 设 $A=(a_{ij})_{3\times 3}$ 为非零实矩阵，A_{ij} 为 a_{ij} 的代数余子式，且 $a_{ij}+A_{ij}=0,(i,j=1,2,3)$

(1)求 $|A|$；(2)证明 A 为正交矩阵（正交矩阵的定义参看第 2 题）

2018 年线代期中试题

一、选择题

1. 若 n 阶行列式 $D=0$，则（　　）

A. D 中必有一行（列）元素全为零

B. D 中必有两行（列）的元素对应成比例

C. 以 D 为系数行列式的非齐次线性方程组必有唯一解

D. 以 D 为系数行列式的齐次线性方程组必有非零解

2. 设 A，B 都是 n 阶方阵且等价，则必有（　　）

A. 当 $|A|=a(a\neq 0)$ 时，$|B|=a$

B. 当 $|A|=a(a\neq 0)$ 时，$|B|=-a$

C. 当 $|A|\neq 0$ 时，$|B|=0$

D. 当 $|A|=0$ 时，$|B|=0$

3. 设 A 为 3 阶方阵，将 A 的第二行加到第一行得 B，再将 B 的第一列的 -1 倍加到第二列得 C，记 $P=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$，则 $C=$（　　）

A. $C=P^{-1}AP$　　B. $C=PAP^{-1}$　　C. $C=P^{T}AP$　　D. $C=PAP^{T}$

4. 设四阶矩阵 $A=(\alpha,\gamma_2,\gamma_3,\gamma_4)$，$B=(\beta,\gamma_2,\gamma_3,\gamma_4)$，其中 $\alpha,\beta,\gamma_2,\gamma_3,\gamma_4$ 均为四维列向量，且已知 $|A|=4$，$|B|=1$，则 $|A+B|=$（　　）

A. 5　　B. 10　　C. 40　　D. 20

5. 设单位向量 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 满足 $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=0$，则 $\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{a}=$（　　）

A. $-\dfrac{3}{2}$　　B. -3　　C. 0　　D. 3

二、填空题

1. 已知 n 阶行列式 D 的值为 $a\neq 0$，且 D 的每行元素之和都等于常数 b，则 D 的 j 列 $(1\leq j\leq n)$ 元素的代数余子式之和 $A_{1j}+A_{2j}+\cdots+A_{nj}=$__________.

2. 设 $D=\begin{vmatrix}2&2&2\\a&b&c\\a^2&b^2&c^2\end{vmatrix}$，则 $D=$______________.

3. 设 $A=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&2&0\\0&0&1\end{bmatrix}$，$I$ 为 3 阶单位矩阵，则 $(A+3I)^{-1}(A^2-9I)=$__________________.

4. 过点 $P_1(1,-2,4)$，$P_2(3,5,7)$ 的对称式直线方程为______________________________.

5. 以 $A(5,1,-1)$，$B(0,-4,3)$，$C(1,-3,7)$ 为顶点的三角形的面积为__________.

三、解答题

1. 计算行列式$D=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

2. 设$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$均为3维列向量，方阵$A=\left(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\right)$，$B=\left(\alpha_1+2\alpha_2,2\alpha_2+3\alpha_3,3\alpha_3+\alpha_1\right)$，已知$\det(A)=a$，求$\det(B)$.

3. 设4阶矩阵B满足$\left[\left(\frac{1}{2}A\right)^*\right]^{-1}BA^{-1}=2AB+12I$，其中$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$，求矩阵$B$.

4. 设矩阵 $A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1\\ 0 & -1 & a-3 & -2 & b\\ 3 & 2 & 1 & a & -1\end{bmatrix}$，试讨论矩阵 A 的秩.

5. 证明直线 $L_1:\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z+1}{1}$ 与 $L_2:x-4=\dfrac{y+5}{-3}=\dfrac{z-4}{2}$ 位于同一平面，并求这两条直线的交点坐标及所在平面的方程.

6. 已知 n 阶矩阵 $A=\begin{bmatrix}2 & 2 & 2 & \cdots & 2 & 2\\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1\\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1\end{bmatrix}$.

（1）求 A^{-1}.

（2）求 A 中所有元素代数余子式的和 $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}A_{ij}$.

2017 年线代期中试题

一、选择题

1. 设 A 是 2 阶方阵，B 是 3 阶方阵，且 $|A|=2$，$|B|=-2$，则 $\left|-|A|B\right|=$（　　）

A. 4　　B. -4　　C. 16　　D. -16

2. 设 A，B 都是 n 阶方阵，如果 A 和 B 的秩分别为 r 和 n，则 $r(AB)-r(A)=$（　　）

A. 0　　B. r　　C. n　　D. $rn-r$

3. 设 A，B 均为 2 阶方阵，A^*，B^* 分别是 A，B 的伴随矩阵，若 $|A|=1$，$|B|=2$，则分块矩阵 $\begin{bmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{bmatrix}$ 的伴随矩阵为（　　）

A. $\begin{bmatrix} 0 & A^* \\ 2B^* & 0 \end{bmatrix}$　　B. $\begin{bmatrix} 0 & 2A^* \\ B^* & 0 \end{bmatrix}$　　C. $\begin{bmatrix} 0 & 2B^* \\ A^* & 0 \end{bmatrix}$　　D. $\begin{bmatrix} 0 & B^* \\ 2A^* & 0 \end{bmatrix}$

4. 已知 $P=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$，$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$，若 $P^mAP^n=A$，则以下选项中正确的是（　　）

A. $m=5,n=4$　　B. $m=5,n=5$　　C. $m=4,n=5$　　D. $m=4,n=4$

5. 设有直线 $l:\begin{cases} x+3y+2z+1=0 \\ 2x-y-10z+3=0 \end{cases}$ 及平面 $\pi:4x-2y+z-2=0$，则直线 l（　　）

A. 平行于 π　　B. 垂直于 π　　C. 在 π 上　　D. 与 π 斜交

二、填空题

1. 若 $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ x & 3 & 1 \\ 4 & x & 5 \end{vmatrix}$ 中 $(1,2)$ 元的代数余子式 $A_{12}=-1$，则 $A_{21}=$__________.

2. 设矩阵 A 满足 $A^2+A=4I$，其中 I 为单位矩阵，则 $(A-I)^{-1}=$________________.

3. 设 $\alpha=(1,0,-1)^T$，矩阵 $A=\alpha\alpha^T$，n 为正整数，则 $A^n=$____________________.

4. 已知 $\|a\|=1$，$\|b\|=2$，$(a,b)=\dfrac{\pi}{3}$，则 $\|2a-b\|=$__________.

5. 若 4 点 $A(1,0,-2)$，$B(7,x,0)$，$C(-8,6,1)$，$D(-2,6,1)$ 共面，则 $x=$__________.

三、解答题

1. 计算行列式 $D=\begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 0 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \end{bmatrix}$.

2. 已知矩阵A的伴随矩阵$A^*=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&-3&0&8\end{bmatrix}$，矩阵$B$满足方程$ABA^{-1}=BA^{-1}+3I$,求$B$.

3. 设矩阵$A=\begin{bmatrix}a&-1&-1\\-1&a&-1\\-1&-1&a\end{bmatrix}$与矩阵$B=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&-1&1\\1&0&1\end{bmatrix}$等价，求常数$a$.

4. 讨论n阶方阵$A=\begin{bmatrix}a&b&\cdots&b\\b&a&\cdots&b\\\vdots&\vdots&&\vdots\\b&b&\cdots&a\end{bmatrix}$$(n\ge 2)$的秩.

5. 直线L过点$P_0(1,0,-2)$,与平面$\pi:3x-y+2z+1=0$平行，与直线$L_1:\dfrac{x-1}{4}=\dfrac{y-3}{-2}=z$相交，求$L$的对称式方程.

6. 设平面π与π_1:$x-2y+z-1=0$垂直，且与π_1的交线落在yoz平面上，求π的方程.

2016 年线代期中试题

一、填空题

1. 关于 x 的代数方程 $\begin{vmatrix} x+1 & -4 & 2 \\ 3 & x-4 & 0 \\ 3 & -1 & x-3 \end{vmatrix}=0$ 的全部根为____________.

2. 设 A 的伴随矩阵 $A^*=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 8 \end{bmatrix}$，则 $A^{-1}=\begin{bmatrix} & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{bmatrix}$.

3. 设向量 $\vec{a}=(1,1,1),\vec{b}=(1,2,-3),\vec{c}=(0,-2,\lambda)$ 共面，则 $\lambda=$____________.

4. 设有向量 $\vec{a}=(1,1,1),\vec{b}=(1,3,-3)$，则向量 $\vec{b}$ 在向量 $\vec{a}$ 上的正交射影向量 $\mathrm{Pr}\,oj_{\vec{a}}\overline{b}=$______________.

5. 点 $P(1,0,-1)$ 到直线 $L:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+2}{0}=\dfrac{z-4}{1}$ 的距离 $d=$____________.

二、选择题

1. 已知四阶行列式D，其第 3 列元素分别为 1，3，-2，2，它们对应的余子式分别为 3，-2，1，1，则行列式D=（　　）

   A. -5　　B. 5　　C. -3　　D. 3

2. 设 A 是 $m\times n$ 的矩阵，$r(A)=r$，则 A 中（　　）

   A. 必有不等于 0 的 r 阶子式，所有 $r+1$ 阶子式均为 0
   B. 必有等于 0 的 r 阶子式，没有不等于 0 的 $r+1$ 阶子式
   C. 没有等于 0 的 r 阶子式，任何 $r+1$ 阶子式均为 0
   D. 至少有一个 r 阶子式不为 0，没有等于 0 的 $r-1$ 阶子式

3. 设 A,B 为同阶可逆方阵，则下列结论正确的是（　　）

   A. $|A+B|=|A|+|B|$　　B. $(AB)^T=A^TB^T$

   C. $(AB)^{-1}=A^{-1}B^{-1}$　　D. $|AB|=|A|\cdot|B|$

4. 设三阶方阵 A 的行列式 $|A|=2$，则 $\left|\dfrac{1}{4}(2A)^*\right|=$（　　）（$A^*$ 是 A 的伴随矩阵）

   A. $\dfrac{1}{2}$　　B. 4　　C. 16　　D. 32

5. 设 $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=2$，则 $\left[\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\times\left(\vec{b}+\vec{c}\right)\right]\cdot\vec{c}=$ （　　　）

A. 1　　B. 2　　C. 4　　D. 8

三、计算与证明题

1. 计算 n 阶行列式 $D_n=\begin{vmatrix} x & a & a & \cdots & a \\ a & x & a & \cdots & a \\ a & a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & a & \cdots & x \end{vmatrix}$.

2. 求矩阵 $A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & b \\ 2 & 3 & a & 4 \\ 3 & 5 & 1 & 7 \end{bmatrix}$ 的秩，其中 a,b 为参数.

3. 设矩阵 $A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

（1）试求 A^2 及 A^{-1}.

（2）若方阵 B 满足 $A^2+AB-A^{-1}=I$（其中 I 为 4 阶单位阵），求矩阵 B.

4. 求过原点且与直线 $L_1:\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z-1}{1}$ 及直线 $L_2:\begin{cases} x=1 \\ y=-1+t \\ z=1+t \end{cases}$ 都平行的平面方程.

5. 求过点 $(1,1,1)$ 且与两直线 $L_1:\dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z}{3}$， $L_2:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z-3}{4}$ 都相交的直线方程.

6. 设 A 为 n 阶非零实方阵，且 $A^*=A^T$（A^* 是 A 的伴随矩阵），证明 A 可逆.

7. 设矩阵 $A=\begin{bmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & -1 \\ 0 & 1 & a \end{bmatrix}$，且 $A^3=O$.

（1）求 a 的值.

（2）若矩阵 X 满足 $X-XA^2-AX+AXA^2=I$，其中 I 为 3 阶单位阵，求 X.

2015 年线代期中试题

一、填空题

1. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \\ 1 & 8 & 27 & 64 \end{vmatrix}=$____________.

2. 设 M_{ij} 为行列式 $\begin{vmatrix} 5 & 8 & 2 & 9 \\ 3 & 6 & 4 & 7 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \end{vmatrix}$ 的 (i,j) 元素的余子式，则 $2M_{42}+4M_{44}=$____________.

3. 三个向量 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 共面的充要条件为____________.

4. 设向量 $\vec{a}=(3,2,1),\vec{b}=(7,5,0)$，则 $\vec{b}$ 在 $\vec{a}$ 上的射影 $(\vec{b})_{\vec{a}}=$____________.

5. 过点 $(2,-1,3)$ 且与直线 $\dfrac{x+3}{7}=\dfrac{y}{0}=\dfrac{z+6}{2}$ 平行的直线方程为____________.

6. 设 A 为 $m\times n$ 矩阵，P 为 m 阶可逆矩阵，且 $PA=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$，则 $r(A)=$______.

7. 设 A,B 分别为 m 阶、n 阶可逆方阵，则 $\begin{bmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{bmatrix}^{-1}=$____________.

8. 设 A 为 3 阶矩阵，$|A|=2$，则 $|-3A^*|=$________.

9. $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 6 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}=$____________.

10. 设 3 个向量 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 满足 $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=2$，则 $\left[\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\times\left(\vec{b}+\vec{c}\right)\right]\cdot(\vec{c}+\vec{a})=$____________.

11. 已知矩阵 $A=(a_{ij})_{3\times 3}$ 的第一行元素为 $a_{11}=1,a_{12}=2,a_{13}=-1$，$A$ 的伴随矩阵为 $A^*=\begin{bmatrix} -7 & -4 & 9 \\ 5 & 3 & -7 \\ 4 & 2 & -5 \end{bmatrix}$，则 $A=$____________.

12. 设 $\alpha_j\,(j=1,2,3)$ 均为 3 维列向量，方阵 $A=[\alpha_1\ \ \alpha_2\ \ \alpha_3]$，$B=[\alpha_1+2\alpha_2\ \ 2\alpha_2+3\alpha_3\ \ -\alpha_3]$，已知 $|A|=a$，则 $|B|=$____________.

二、选择题

1. 如果齐次线性方程组$\begin{cases}\lambda x_1+x_2+x_3=0\\x_1+\lambda x_2+x_3=0\\3x_1-x_2+x_3=0\end{cases}$有非零解，则$\lambda$的值为（　　）

A. $\lambda\neq1$　　B. $\lambda=1$　　C. $\lambda\neq3$　　D. $\lambda=3$

2. 设A,B为同阶方阵，下列等式正确的是（　　）

A. $(AB)^T=A^TB^T$　　B. $(AB)^*=A^*B^*$

C. $A^2-B^2=(A+B)(A-B)$　　D. $|AB|=|A||B|$

3. 设A为n阶可逆矩阵，下列等式不正确的是（　　）

A. $|A^*|=|A|^{n-1}$　　B. $A^*=|A|A^{-1}$　　C. $A=\frac{1}{|A|}\left(A^*\right)^{-1}$　　D. $\left(A^*\right)^{-1}=\frac{1}{|A|}A$

4. 设有两点$A(1,-2,3),B(3,2,1)$，则向量$\overline{AB}$与y轴正方向的夹角是（　　）

A. $\arccos\frac{\sqrt{6}}{6}$　　B. $\arccos\frac{\sqrt{6}}{3}$　　C. $\arccos\left(-\frac{\sqrt{6}}{6}\right)$　　D. $\arccos\left(-\frac{\sqrt{6}}{3}\right)$

5. 两条直线$L_1:x+1=\frac{y-1}{-2}=\frac{z}{2}$，$L_2:x+1=y+4=\frac{z}{-2}$，则$L_1$与$L_2$的位置关系是（　　）

A.异面　　B.相交　　C.平行不重合　　D.重合

三、计算题

1. 计算行列式$\begin{vmatrix}a_1+b & a_2 & a_3 & \cdots & a_n\\ a_1 & a_2+b & a_3 & \cdots & a_n\\ a_1 & a_2 & a_3+b & \cdots & a_n\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & a_n\\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n+b\end{vmatrix}$的值.

2. 设 3 阶矩阵 A,B 满足 $2A^{-1}B=B=B-4I$，其中 I 是 3 阶单位矩阵.

（1）证明：$A-2I$ 可逆.

（2）若 $B=\begin{bmatrix}1 & -2 & 0\\ 1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}$，求矩阵 A.

3. 设 $B=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix},P=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & -1 & 0\\ 2 & 1 & 1\end{bmatrix}$，矩阵 A 满足 $AP=PB$，求 A 及 A^5.

4. 设四阶矩阵 $A=\begin{bmatrix}1 & a & a & a\\ a & 1 & a & a\\ a & a & 1 & a\\ a & a & a & 1\end{bmatrix}$ 的秩为 3，试求常数 a 的值.

5. 求过点 $P_1(-1,0,2),P_2(1,1,1)$ 且与平面 $x+y+z+1=0$ 垂直的平面方程.

6. 求点 $P(1,2,3)$ 到直线 $\begin{cases} x+y-z-1=0 \\ 2x+z-3=0 \end{cases}$ 的距离.

四、证明题

1. 设 α 为 n 维非零列向量，$A=I-\alpha\alpha^T$，其中 I 为 n 阶单位矩阵，证明：$A^2=A \Leftrightarrow \alpha^T\alpha=1$.

2. 设 A,B 均为 n 阶方阵，且满足 $A^2=I,B^2=I,|A|+|B|=0$，证明：$|A+B|=0$.

2014 年线代期中试题

1. 计算下列行列式：

（1）$|D|=\begin{vmatrix}2&1&1&1&1\\1&3&1&1&1\\1&1&4&1&1\\1&1&1&5&1\\1&1&1&1&6\end{vmatrix}$

（2）已知 A 是 3 阶矩阵，B 是 4 阶矩阵，且 $|A|=12$，$|B|=-6$，求矩阵 $D=\begin{pmatrix}0&\frac{1}{2}A\\-B&C\end{pmatrix}$ 的行列式 $|D|$ 的值.

2. 已知 $|\vec{a}+\vec{b}|=4$，$|\vec{a}-\vec{b}|=18$，求 $|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2$ 与 $\vec{a}\cdot\vec{b}$.

3. 解答题：

（1） 已知 3 阶矩阵 A 满足：$A^3+A+E=0$，证明 $A+2E$ 可逆，并求出 $(A+2E)^{-1}$.

（2） 3 阶矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&2&0\\3&4&5\end{pmatrix}$，求 $\left(A^*\right)^{-1}$.

4. 已知直角坐标系中的 4 个点 $A(3,-1,0)$，$B(-1,-1,1)$，$C(3,2,1)$，$D(5,-\frac{5}{2},-1)$，这四个点是否在同一平面上？若是，请求出此平面方程；若不是，请说明理由.

5. 设矩阵 $A=(a_{ij})_{3\times3}$，满足条件 $a_{33}=-1$ 及 $a_{ij}=A_{ij},i,j=1,2,3$，其中 A_{ij} 是元素 a_{ij} 的代数余子式.

（1）求 $|A|$.　　　　（2）解线性方程组 $Ax=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$.

2013 年线代期中试题

1. 计算下列行列式：

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2+3\cos x_1 & 2+3\cos x_2 & 2+3\cos x_3 \\ 4\cos x_1+5\cos^2 x_1 & 4\cos x_2+5\cos^2 x_2 & 4\cos x_3+5\cos^2 x_3 \end{vmatrix}$$

2. 设 n 阶矩阵 A 与 B 均为非单位阵 I，且 $AB=A+B-I$，求行列式 $|A-I|$ 和 $|B-I|$ 的值.

3. 设 A 与 B 均为 n 阶正交矩阵（即 $A^{-1}=A^T$，且为实矩阵），满足 $|A|+|B|=0$，求行列式 $|A+B|$ 的值.

4. 在线性方程组 $Ax=b$ 中，$A=\left(a_{ij}\right)_{n\times n}$，$b=\left(b_1,b_2,\cdots,b_n\right)^T$，$A_{ij}$ 是 a_{ij} 的代数余子式，已知 $\sum_{k=1}^{n}a_{nk}A_{nk}=-1$，$\sum_{k=1}^{n}b_kA_{kn}=3$，求 x 的第 n 个分量 x_n 的值.

5. 设$A=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix}$，试用两种方法求$A^{-1}$.

6. 设有直线$L_1:\dfrac{x+3}{2}=\dfrac{y+2}{3}=\dfrac{z-6}{-4}$和$\begin{cases}x-z=9\\y+4z=-17\end{cases}$，试判断这两条直线的位置关系.若共面，求它们所确定的平面方程；若还相交，求交点.

7. 设n阶矩阵A满足$A^3=2I$，$B=A^2-2A+2I$，证明B可逆并求B^{-1}.

8. 设A是n阶矩阵，$r(A)=r$，证明：必存在n阶可逆矩阵B及秩为r的n阶矩阵C满足$C^2=C$，使$A=BC$.

更多信息，请加入彭小帮 2.0 QQ 群：397499749

搜索微信公众号"彭康书院学导团"或扫描下方二维码，关注我们，了解更多学业动态，掌握更新学习资料。

本学期，我们组织了答疑志愿者周一到周五每晚在东 19-114 进行答疑活动，答疑课目主要为高数、线代、大物和一些专业课程。

欢迎同学们前往答疑，一起学习，共同进步！