2021 年线代期中试题答案

一、选择题

1. **C**

$|-2A|=(-2)^3|A|=-24$.

2. **B**

A. 反例：$A=\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix},B=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}$，此时 $AB=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}\neq BA=\begin{bmatrix}1&1\\0&0\end{bmatrix}$；B. $|AB|=|A|\cdot|B|$；

C. 取同样的反例，$|A+B|=2\neq|A|+|B|=1$；D. 取同样的反例，等式左 $-$ 右 $=BA-AB\neq 0$.

3. **B**

由 $AA^*=|A|I$ 可知 $|A|\cdot|A^*|=||A|I|=|A|^3\Rightarrow|A^*|=|A|^2=4$.

4. **C**

A. 取 $A=I,B=2I$，则 $|A|\neq|B|$ 但 $A=\left(\frac{1}{2}I\right)BI$；B. 取 $A=B$，每个方阵均与自身等价；

C. 左乘或右乘可逆方阵不改变矩阵的秩；D. 由 C 可知此项错误.

5. **A**

$(A^{-1})^*A^{-1}=|A^{-1}|I\Rightarrow(A^{-1})^*=|A|^{-1}A$.

6. **D**

已知 $\left|\begin{pmatrix}A&O\\O&B\end{pmatrix}\right|=|A|\cdot|B|$，由于交换矩阵的两列行列式将变号，而将 C 中矩阵 A 的第一列（即 C 的第 $m+1$ 列）换到 B 之前需要换行 m 次，而 A 一共有 n 列，每列都要换行 m 次，因此总共需要换行 mn 次.

7. **C**

A. $ABC=A(BC)=I\Rightarrow(BC)A=BCA=I$；B. $ABC=(AB)C=I\Rightarrow C(AB)=CAB=I$；

C. 取 $A=\begin{bmatrix}-1&2\\1&-1\end{bmatrix},B=\begin{bmatrix}1&1\\1&0\end{bmatrix},C=\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}\Rightarrow ABC=I$ 但 $ACB=\begin{bmatrix}0&-1\\1&1\end{bmatrix}$；

D. $C^\top B^\top A^\top=(ABC)^\top=I^\top=I$.

8. **D**

$\alpha^\top\alpha=\frac{1}{2}\Rightarrow AB=(I-\alpha^\top\alpha)(I+2\alpha^\top\alpha)=I-\alpha^\top\alpha+2\alpha^\top\alpha-2\alpha^\top\alpha\alpha^\top\alpha=I+\alpha^\top\alpha-2(\alpha\alpha^\top)(\alpha^\top\alpha)=I+\alpha^\top\alpha-\alpha^\top\alpha=I$

9. **C**

代入验算即可.

二、填空题

1. **0 和 $-(\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a}_3+\boldsymbol{a}_4)$**

将第 2，3，4 行均减去第一行，得

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4+x \\ 0 & 0 & x & -x \\ 0 & x & 0 & -x \\ x & 0 & 0 & -x \end{vmatrix} = x^3 \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4+x \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0.$$

交换若干行以后 (由于以上行列式为 0, 交换行是乘若干个-1, 对结果不造成影响), 得

$$x^3 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4+x \end{vmatrix} = 0.$$

将行列式的第 4 行减去第 1 行的 a_1 倍, 第 2 行的 a_2 倍, 第 3 行的 a_3 倍, 则

$$x^3 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & a_1+a_2+a_3+a_4+x \end{vmatrix} = x^3(x+a_1+a_2+a_3+a_4) = 0.$$

2. **2**

点 (a,b,c) 到平面 $Ax+By+Cz+D=0$ 的距离公式: $\frac{|Aa+Bb+Cc+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$.

3. $-\mathbf{\frac{1}{3}},-\mathbf{\frac{2}{3}},\mathbf{\frac{2}{3}}$

解答 答案为 $-\frac{1}{3},-\frac{2}{3},\frac{2}{3}$. 由于 $\vec{a}$ 的方向余弦分别为 $\frac{1}{3},\frac{2}{3},-\frac{2}{3}$, 其中关于 z 轴的方向余弦为 $-\frac{2}{3}<0$, 故 a 与 z 轴正向的夹角是钝角, 为了 $\vec{b}$ 与 z 轴正向的夹角为锐角, 必然有 $\vec{b}$ 与 $\vec{a}$ 反向, 从而 $\vec{b}$ 的方向余弦为 $-\frac{1}{3},-\frac{2}{3},\frac{2}{3}$.

4. $\begin{bmatrix} \mathbf{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{-2} & \mathbf{1} \end{bmatrix}$

解答 答案为 $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$. 计算得 A 的逆矩阵为 $A^{-1}=\begin{pmatrix} -4 & 1 & 3 \\ 4 & -1 & -2 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, 因此 $X=A^{-1}B=\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$.

三、解答题

1. $|B^{-1}+A|=|B^{-1}(I+BA)|=|B^{-1}(A^{-1}+B)A|=|B^{-1}|\cdot|A^{-1}+B|\cdot|A|=5$.

2. $D \xlongequal{r_{12}(-2),r_{23}\left(-\frac{4}{3}\right),r_{34}\left(-\frac{6}{5}\right)} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3a & 3b & 3c & 3d \\ 5a^2 & 5b^2 & 5c^2 & 5d^2 \\ 7a^3 & 7b^3 & 7c^3 & 7d^3 \end{vmatrix} = 105(b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)(d-c)$.

3. 设过直线的平面束为$x+y-z+5+\lambda(2x-z)=0 \Rightarrow (1+2\lambda)x+y-(1+\lambda)z+5=0$，又平面束与已知平面法向量垂直，因此有$7(1+2\lambda)-1-4(1+\lambda)=0 \Rightarrow \lambda=-\frac{1}{5}$，故所求平面方程为$3x+5y$

$-4z+25=0$.

4. 由题意，$L_1{:}x=\dfrac{y-5}{3}=\dfrac{z+3}{2},L_2{:}x=\dfrac{y+7}{4}=\dfrac{z-10}{5}$，显然 L_1 过点 $P_1(0,5,-3)$，方向向量 $\vec{a}_1=(1,3,2)$，对直线 L_2 有 $P_2(0,-7,10),\vec{a}_2=(1,4,5)$，设所求直线方向向量 $\vec{a}=(l,m,n)$，于是依题意有 $\left[\vec{a},\vec{a}_1,\overrightarrow{P_1P_0}\right]=0,\left[\vec{a},\vec{a}_2,\overrightarrow{P_2P_0}\right]=0\Rightarrow\begin{cases}36l-18m+9n=0\\-64l-14m+24n=0\end{cases}$，于是取 $\vec{a}=(17,80,92)$，那么所求直线方程为 $\dfrac{x+3}{17}=\dfrac{y-5}{80}=\dfrac{z-9}{92}$.

5. (1) $A^{\top}=I^{\top}-\left[B^{\top}(BB^{\top})^{-1}B\right]^{\top}=I-B^{\top}\left[(BB^{\top})^{-1}\right]^{\top}B=I-B^{\top}\left[(BB^{\top})^{\top}\right]^{-1}B=I-B^{\top}(BB^{\top})^{-1}B=A$；

$A^2=\left[I-B^{\top}(BB^{\top})^{-1}B\right]\left[I-B^{\top}(BB^{\top})^{-1}B\right]=I-2B^{\top}(BB^{\top})^{-1}B+B^{\top}(BB^{\top})^{-1}BB^{\top}(BB^{\top})^{-1}B=I-B^{\top}(BB^{\top})^{-1}B=A$

(2) A 不可逆。若可逆，由(1)知 $A^2=A$，则 $AAA^{-1}=AA^{-1}\Rightarrow A=I$，于是 $B^{\top}(BB^{\top})^{-1}B=O\Rightarrow$ $BB^{\top}(BB^{\top})^{-1}B=O\Rightarrow B=O$，进而 $BB^{\top}=O$ 与 $BB^{\top}$ 可逆矛盾.

6. (1) 若存在 $r(A)=r$，则有可逆矩阵 P,Q 使 $PAQ=\begin{pmatrix}I_r&O\\O&O\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}I_r\\O\end{pmatrix}(I_r\quad O)$，所以

$A=P^{-1}\begin{pmatrix}I_r\\O\end{pmatrix}(I_r\quad O)Q^{-1}=GH$，其中 $G=P^{-1}\begin{pmatrix}I_r\\O\end{pmatrix},H=(I_r\quad O)Q^{-1},r(G)=r\begin{pmatrix}I_r\\O\end{pmatrix}=r,r(H)=r(I_r\quad O)=r$.

反之，由于 G 列满秩，存在可逆矩阵 $\tilde{P}$ 使 $\tilde{P}G=\begin{pmatrix}I_r\\O\end{pmatrix}$；由于 H 行满秩，存在可逆矩阵 $\tilde{Q}$ 使 $H\tilde{Q}=(I_r\quad O)$；

于是 $\tilde{P}A\tilde{Q}=\tilde{P}GH\tilde{Q}=\begin{pmatrix}I_r&O\\O&O\end{pmatrix}\Rightarrow r(A)=r$.

(2) 由(1)知 $PAQ=\begin{pmatrix}I_r&O\\O&O\end{pmatrix}=I_{11}+I_{22}+\cdots+I_{rr}$，其中 I_{ii} 为 (i,i) 元是 1 其余元素均为 0 的 $m\times n$ 矩阵，则 $r(I_{ii})=1(i=1,2,\cdots,r)$，而 $A=P^{-1}(I_{11}+I_{22}+\cdots+I_{rr})Q^{-1}=P^{-1}I_{11}Q^{-1}+\cdots+P^{-1}I_{rr}Q^{-1}$，且 $r(P^{-1}I_{ii}Q^{-1})=r(I_{ii})=1(i=1,2,\cdots,r)$，故 A 可以表示为 r 个秩为 1 的矩阵之和.

2019 年线代期中试题答案

一、选择题

1. B　2. A　3. D　4. C　5. D

二、填空题

1. 0　　2. $2^{2019}\begin{matrix}1&-1&1\\2&-2&2\\3&-3&3\end{matrix}$　　3. -16

4. $3x+y-7z+16=0$ 5. $\frac{1}{3}$

三、解答题

1.

(1) $|A_n| \underset{\text{按第一列展开}}{=} 2a|A_{n-1}|+a^2\cdot(-1)^{2+1}\cdot|A_{n-2}|=2a|A_{n-1}|-a^2|A_{n-2}|$,

则 $|A_n|-a|A_{n-1}|=a(|A_{n-1}|-a|A_{n-2}|)=\cdots=a^{n-2}(|A_2|-a|A_1|)=a^n$.

$$\therefore |A_n|=a^n+a|A_{n-1}|=a^n+a(a^{n-1}+a|A_{n-2}|)=2a^n+a^2|A_{n-2}|$$

$$=\cdots=(n-1)a^n+a^{n-1}|A_1|=(n+1)a^n.$$

也可以使用数学归纳法，或化为上三角形

(2) 由cramer法则知, 当 $D=|A_n|\neq 0$ 时，即 $a\neq 0$ 时方程组有唯一解.

且 $x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{na^{n-1}}{(n+1)a^n}=\frac{n}{(n+1)a}$, $x_n=\frac{D_n}{D}=\frac{(-1)^{n+1}(a^2)^{n-1}}{(n+1)a^n}=(-1)^{n+1}\frac{a^{n-2}}{n+1}$.

2.

解：$\because 1=|I|=|AA^T|=|A|^2$，而已知 $|A|<0$, $\therefore |A|=-1$;

$$|A+I|=|A+AA^T|=|A(I+A^T)|=|A|\cdot|I+A^T|=-|(I+A)^T|=-|I+A|.$$

$$\therefore |I+A|=0$$

3.

解：（1）L_1的方向向量可取作$\vec{a}_1=(1,-1,0)\times(3,-1,1)=(-1,-1,2)$,

易得L_1上一点$P_1(0,-3,-2)$, 则L_1对称式方程为：$\dfrac{x}{-1}=\dfrac{y+3}{-1}=\dfrac{z+2}{2}$.

(2)$d=\dfrac{\|P_1M\times\vec{a}_1\|}{\|\vec{a}_1\|}=\dfrac{\sqrt{93}}{3}$

(3)L_2过点$P_2(-1,1,0)$, 其方向向量$\vec{a}_2=(1,-2,2)$,

$$\because\left[\overrightarrow{P_1P_2}\ \ \vec{a}_1\ \ \vec{a}_2\right]=\begin{vmatrix}-1&4&2\\-1&-1&2\\1&-2&2\end{vmatrix}=20\neq0,\ \therefore L_1与L_2异面.$$

4.

解：$\because I=A\left[C(E-C^{-1}B)\right]^T=A(C-B)^T,\ \therefore A=\left[(C-B)^T\right]^{-1}=\left[(C-B)^{-1}\right]^T$ 而

$C-B=\begin{bmatrix}1&2&3&4\\0&1&2&3\\0&0&1&2\\0&0&0&1\end{bmatrix}$,求$(C-B)^{-1}$的方法有多种：

如（1）利用初等行变换；（2）利用伴随矩阵；（3）利用矩阵特点等.

$$得(C-B)^{-1}=\begin{bmatrix}1&-2&1&0\\0&1&-2&1\\0&0&1&-2\\0&0&0&1\end{bmatrix},\quad\therefore A=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\-2&1&0&0\\1&-2&1&0\\0&1&-2&1\end{bmatrix}.$$

5.

$$\textbf{解：}A\xrightarrow[\substack{r_3-4r_1\\r_4-2r_1}]{r_2-r_1}\begin{bmatrix}1&1&1&1\\0&-3&-2&-3\\0&-3&-2&-3\\0&3&\mu-2&\lambda-2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&1&1\\0&-3&-2&-3\\0&0&\mu-4&\lambda-5\\0&0&0&0\end{bmatrix}.$$

故当$\mu=4,\lambda=5$时, $r(A)=2$; 当$\mu\neq4,\lambda\neq5$时, $r(A)=3$.

6.

证：（1）由题意知 $A^* = -A^T \Rightarrow |A^*| = (-1)^3|A| \Rightarrow |A|^2 = -|A| \Rightarrow |A| = 0$ 或 $|A| = -1$,

而 A 为非零实矩阵, 不妨设 $a_{11} \neq 0$, 则 $|A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} = -a^2_{11} - a^2_{12} - a^2_{13} < 0$,

故 $|A| = -1$.

(2) 由 (1) 知 $A^{-1} = \frac{1}{|A|}A^* = -A^* = A^T$, 故 A 为正交矩阵.

2018 年线代期中试题答案

一、选择题

1. D　　2. D　　3. B　　4. C　　5. A

二、填空题

1. $\dfrac{a}{b}$　　2. $2(b-a)(c-a)(c-b)$　　3. $\begin{matrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{matrix}$

4. $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+2}{7} = \dfrac{z-4}{3}$　　5. $12\sqrt{2}$

三、解答题

1. $D = 32$

2. $\det(B) = 12a$

3. $B = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

4. 当 $a \neq 1$ 时，$r(A) = 4$；当 $a = 1$ 且 $b \neq -1$ 时，$r(A) = 3$；当 $a = 1, b = -1$ 时，$r(A) = 2$.

5. 交点坐标 $(2,1,0)$；平面方程：$7x - 5y - 11z = 9$

6. $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} A_{ij} = 1$

2017 年线代期中试题答案

一、选择题

1. C　　2. A　　3. D　　4. D　　5. B

二、填空题

1. 2　　2. $\frac{1}{2}(A+2I)$　　3. $2^{n-1}\begin{matrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{matrix}$　　4. 2　　5. 4

三、解答题

1. $D=480$　　2. $B=\begin{matrix} 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -1 \end{matrix}$　　3. $a=2$

4. 当$a\neq b$且$a\neq(1-n)b$时，$r(A)=n$；当$a=b=0$时，$r(A)=0$；

当$a=b\neq 0$时，$r(A)=1$；当$a\neq b$且$a=(1-n)b$时，$r(A)=n-1$.

5. $\frac{x-1}{-4}=\frac{y-0}{50}=\frac{z+2}{31}$

6. $-5x-2y+z-1=0$

2016 年线代期中试题答案

一、填空题

1. 1,2,3　　2. $\begin{matrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{3}{2} & 0 & 4 \end{matrix}$　　3. 8　　4. $\frac{1}{3}\vec{a}$　　5. $2\sqrt{6}$

二、选择题

1. B　2. A　3. D　4. B　5. B

三、计算与证明题

1. $[x+(n-1)a](x-a)^{n-1}$

2. 当$a=1$，$b=2$，$r(A)=2$；当$a\neq 1$，$b=2$，$r(A)=3$；

当$a=1$，$b\neq 2$，$r(A)=3$；当$a\neq 1$，$b\neq 2$，$r(A)=4$.

3. （1）$A^2=4I$　$A^{-1}=\frac{1}{4}A$　　（2）$B=\frac{1}{4}(I-3A)$

4. $x-y+z=0$

5. $\frac{x-1}{0}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-1}{2}$

6. $A^* = A^T \Rightarrow a_{ij} = A_{ij} \quad (1 \quad i \quad n, 1 \quad j \quad n)$ $\quad |A| = a_{i1}A_{i1} + \cdots + a_{in}A_{in} = a_{i1}^2 + \cdots + a_{in}^2 \quad (1 \quad i \quad n)$

$\because A$ 为非零矩阵，A 中至少有一个元素不为零，不妨设 $a_{i1} \neq 0$，则 $|A| \neq 0$，故 A 可逆.

7. （1）$a = 0$ （2）$\begin{matrix} 3 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{matrix}$

2015 年线代期中试题答案

一、填空题

1. 12
2. -140
3. $\exists$ 不全为零的常数 k_1, k_2, k_3 满足 $k_1\vec{a} + k_2\vec{b} + k_3\vec{c} = 0$ 或混合积为零 $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = 0$
4. $\dfrac{31}{\sqrt{14}}$
5. $\dfrac{x-2}{7} = \dfrac{y+1}{0} = \dfrac{z-3}{2}$
6. $r(A) = 2$
7. $\begin{matrix} 0 & B^{-1} \\ A^{-1} & 0 \end{matrix}$
8. -108
9. $\begin{matrix} 3 & 0 & 18 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 12 \end{matrix}$
10. 4
11. $\begin{matrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 1 \end{matrix}$
12. $-2a$

二、选择题

1. B　2. D　3. C　4. B　5. A

三、计算题

1. $(b + \sum_{i=1}^{n} a_i) b^{n-1}$

2. （1）由 $2A^{-1}B = B - 4I \Rightarrow 2B = AB - 4A \Rightarrow (A-2I)(B-4I) = 8I$ 得 $(A-2I)^{-1} = \dfrac{1}{8}(B-4I)$

（2）$\begin{matrix} 0 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{matrix}$

3. $A = \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 6 & -1 & -1 \end{matrix}$ $\qquad A^5 = \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 6 & -1 & -1 \end{matrix}$

4. $a = -\dfrac{1}{3}$

5. $2x - 3y + z = 0$

6. $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$

四、证明题（略）

2014 年线代期中试题答案

1. （1）394 （2）-9

2. 170； -77

3. （1）$\dfrac{A^2 - 2A + 5E}{9}$ （2）$\begin{matrix} \frac{1}{10} & 0 & 0 \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & 0 \\ \frac{3}{10} & \frac{2}{5} & \frac{1}{2} \end{matrix}$

4. 在同一平面，平面方程：$-3(x-3) + 4(y+1) - 12z = 0$

5. （1）1 （2）$x = \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{matrix}$

2013 年线代期中试题答案

1. $15(\cos x_2 - \cos x_1)(\cos x_3 - \cos x_1)(\cos x_3 - \cos x_2)$

2. 0； 0

3. 0

4. -3

5. $\begin{matrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{matrix}$

6. 共面且相交，平面方程：$13x+6y+11z-15=0$，交点：$(3,7,-6)$

7. $\frac{1}{10}(A^2+3A+4I)$

8. $r(A)=r$，则∃可逆矩阵 P,Q 使 $PAQ=\begin{matrix} Ir & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix}$ $A=P^{-1}\begin{matrix} Ir & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix}Q^{-1}=P^{-1}Q^{-1}Q\begin{matrix} Ir & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix}Q^{-1}$

令 $B=P^{-1}Q^{-1}$ 可逆，$C=Q\begin{matrix} Ir & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix}Q^{-1}$ 则 $C^2=C$ 且 $A=BC$