第一章 行列式

重点: 行列式的定义;行列式的性质;行列式按行（列）展开定理;行列式的计算.

一. 特殊行列式的值

1.三角行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & & & * \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & & & 0 \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ * & & & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & & & a_{1n} \\ & & a_{2(n-1)} & \\ & \iddots & & \\ a_{n1} & & & * \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} * & & & a_{1n} \\ & & a_{2(n-1)} & \\ & \iddots & & \\ a_{n1} & & & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2(n-1)}\cdots a_{n1}$$

2.范氏行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \cdots & x_n^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{n\ge i>j\ge 1}(X_i - X_j)$$

3.箭式行列式

$$\begin{vmatrix} x_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ b_2 & x_2 & 0 & \cdots & 0 \\ b_3 & 0 & x_3 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_n & 0 & 0 & \cdots & x_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 - \sum_{k=2}^{n}\frac{a_k b_k}{x_k} & & & \cdots & \\ b_2 & x_2 & 0 & \cdots & 0 \\ b_3 & 0 & x_3 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_n & 0 & 0 & \cdots & x_n \end{vmatrix} = (x_1 - \sum_{k=2}^{n}\frac{a_k b_k}{x_k})\prod_{k=2}^{n} x_k$$

4.与分块矩阵相联系的准三角行列式

$$\begin{vmatrix} A_m & O \\ * & B_n \end{vmatrix} = |A|\cdot|B| = \begin{vmatrix} A_m & * \\ O & B_n \end{vmatrix};\ \begin{vmatrix} O & A_m \\ B_n & * \end{vmatrix} = (-1)^{mn}|A|\cdot|B| = \begin{vmatrix} * & A_m \\ B_n & O \end{vmatrix}.$$

二. 典型例题

例 1 设 $f(x) = \begin{vmatrix} 2x & 1 & -1 \\ -x & -x & x \\ 1 & 2 & x \end{vmatrix}$,则 x^3 的系数是_____-2_________.

解 方法一:由行列式的定义 $f(x) = 2x\cdot(-x)\cdot x + \cdots = -2x^3 + \cdots$

方法二:按第一行展开,得 $f(x) = 2x\begin{vmatrix} -x & x \\ 2 & x \end{vmatrix} + \cdots = -2x^3 + \cdots$

【评注】方法一适用简单情形,方法二适用较复杂情形.

例 2　设 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 4 & 15 \\ 1 & x & x^2 & x^3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 4 & 15 \\ 1 & x & x^2 & x^3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 0 & 2 & 5 & 12 \\ 1 & x & x^2 & x^3 \end{vmatrix} = 0$,求该方程的根.

解　左边 $= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 1 & 4 & 15 \\ 1 & x & x^2 & x^3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 0 & 2 & 5 & 12 \\ 1 & x & x^2 & x^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & x & x^2 & x^3 \end{vmatrix} = 0$,即

$$(2-1)(3-1)(x-1)(3-2)(x-2)(x-3) = 0$$

所以方程的根为 $x = 1, 2, 3$.

【评注】范氏行列式的应用.

例 3　设 α, β, γ 是 $x^3 + px + q = 0$ 的三个根,求 $\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \gamma & \alpha & \beta \\ \beta & \gamma & \alpha \end{vmatrix}$ 的值.

解　$\alpha + \beta + \gamma = 0$,则原式 $= \begin{vmatrix} \alpha+\beta+\gamma & \alpha+\beta+\gamma & \alpha+\beta+\gamma \\ \gamma & \alpha & \beta \\ \beta & \gamma & \alpha \end{vmatrix} = 0$.

例 4　设 $D = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & y & x \end{vmatrix}$,且 $M_{11} + M_{12} - M_{13} = 3, A_{11} + A_{12} + A_{13} = 1$,求 D 之值.

解　$M_{11} + M_{12} - M_{13} = 1 \cdot A_{11} + (-1) \cdot A_{12} + 1 \cdot A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & y & x \end{vmatrix} = 3$,即 $2x - 3y = 5$.

$$A_{11} + A_{12} + A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & y & x \end{vmatrix} = 1,\text{即 } y = 1,\text{得 } x = 4.\text{所以 } D = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 1.$$

【评注】

（1）余子式和代数余子式仅与元素的位置有关,而与元素的值无关;

（2）要解决余子式或代数余子式的线性表达式,都是利用行列式按行（列）展开定理将该线性表达式化成行列式处理.切记!切记!!!

例 5　设 $f(x) = \begin{vmatrix} x & 1 & 2+x \\ 2 & 2 & 4 \\ 3 & x+2 & 4-x \end{vmatrix}$,证明 $f'(x) = 0$ 有小于 1 的正根.

证　方法一: $f(x)$ 是 x 的多项式,则 $f(x)$ 在[0，1]上连续,在（0，1）内可导,且

$$f(0)=\begin{vmatrix}0&1&2\\2&2&4\\3&2&4\end{vmatrix}=0,\ f(1)=\begin{vmatrix}1&1&3\\2&2&4\\3&3&3\end{vmatrix}=0$$

由 Rolle 定理,知存在 $\xi\in(0,1)$,使得 $f'(\xi)=0$.

方法二: $f'(x)=\begin{vmatrix}1&0&1\\2&2&4\\3&x+2&4-x\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}x&1&2+x\\0&0&0\\3&x+2&4-x\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}x&1&2+x\\2&2&4\\0&1&-1\end{vmatrix}=-8x+4=0$,

得 $x=\dfrac{1}{2}$,即 $f'(x)=0$ 有小于 1 的正根.

【评注】行列式的求导是逐行（列）求导.

下面讨论行列式的计算方法:

行列式计算的基本方法是利用行列式的性质,将行列式化成特殊的行列式,再求值.常用方法有:降阶法、递推法、折项法、加边法等.

例 6 $\begin{vmatrix}1&2&2&\cdots&2\\2&2&2&\cdots&2\\2&2&3&\cdots&2\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\2&2&2&\cdots&n\end{vmatrix}\overset{\substack{r_i-r_2\\i\neq2}}{=}\begin{vmatrix}-1&0&0&\cdots&0\\2&2&2&\cdots&2\\0&0&1&\cdots&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&0&0&n-2\end{vmatrix}$

$$\underline{\underline{按r_1展开}}(-1)\begin{vmatrix}2&2&\cdots&2\\0&1&\cdots&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&\cdots&n-2\end{vmatrix}=(-2)(n-2)!.$$

例 7　计算 n 阶行列式 $\begin{vmatrix}a&b&\cdots&b\\b&a&\cdots&b\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\b&b&\cdots&a\end{vmatrix}$.

解　方法一: $\begin{vmatrix}a&b&\cdots&b\\b&a&\cdots&b\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\b&b&\cdots&a\end{vmatrix}\overset{\substack{r_1+r_i\\i=2,\cdots,n}}{=}\begin{vmatrix}a+(n-1)b&a+(n-1)b&\cdots&a+(n-1)b\\b&a&\cdots&b\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\b&b&\cdots&a\end{vmatrix}$

$$=[a+(n-1)b]\begin{vmatrix}1&1&\cdots&1\\b&a&\cdots&b\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\b&b&\cdots&a\end{vmatrix}=[a+(n-1)b]\begin{vmatrix}1&0&\cdots&0\\b&a-b&\cdots&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\b&0&\cdots&a-b\end{vmatrix}$$

$$=[a+(n-1)b](a-b)^{n-1}.$$

方法二: $\begin{vmatrix}a&b&\cdots&b\\b&a&\cdots&b\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\b&b&\cdots&a\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a&b&\cdots&b\\b-a&a-b&\cdots&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\b-a&0&\cdots&a-b\end{vmatrix}$

$$=\begin{vmatrix}a+(n-1)b&b&\cdots&b\\0&a-b&\cdots&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&\cdots&a-b\end{vmatrix}=[a+(n-1)b](a-b)^{n-1}.$$

例 8 $\begin{vmatrix}1&-1&1&x-1\\1&-1&x+1&-1\\1&x-1&1&-1\\x+1&-1&1&-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}x&-1&1&x-1\\x&-1&x+1&-1\\x&x-1&1&-1\\x&-1&1&-1\end{vmatrix}$

$$=x\begin{vmatrix}1&-1&1&x-1\\1&-1&x+1&-1\\1&x-1&1&-1\\1&-1&1&-1\end{vmatrix}=x\begin{vmatrix}1&0&0&x\\1&0&x&0\\1&x&0&0\\1&0&0&0\end{vmatrix}=x^4.$$

例 9 计算n阶行列式 $D_n=\begin{vmatrix}1+a_1&1&\cdots&1\\1&1+a_2&\cdots&1\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\1&1&\cdots&1+a_n\end{vmatrix}$,其中 $a_1a_2\cdots a_n\neq 0$.

解　方法一: $D_n=a_1a_2\cdots a_n\begin{vmatrix}1+\frac{1}{a_1}&\frac{1}{a_2}&\cdots&\frac{1}{a_n}\\\frac{1}{a_1}&1+\frac{1}{a_2}&\cdots&\frac{1}{a_n}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\\frac{1}{a_1}&\frac{1}{a_2}&\cdots&1+\frac{1}{a_n}\end{vmatrix}$

$$=a_1a_2\cdots a_n(1+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i})\begin{vmatrix}1 & \frac{1}{a_2} & \cdots & \frac{1}{a_n}\\ 1 & 1+\frac{1}{a_2} & \cdots & \frac{1}{a_n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 1 & \frac{1}{a_2} & \cdots & 1+\frac{1}{a_n}\end{vmatrix}$$

$$=a_1a_2\cdots a_n(1+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i})\begin{vmatrix}1 & \frac{1}{a_2} & \cdots & \frac{1}{a_n}\\ 0 & 1 & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1\end{vmatrix}=a_1a_2\cdots a_n(1+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}).$$

方法二: $D_n=\begin{vmatrix}1+a_1 & 1 & \cdots & 1\\ -a_1 & a_2 & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ -a_1 & 0 & \cdots & a_n\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1+a_1+\sum_{j=2}^{n}\frac{a_1}{a_j} & 1 & \cdots & 1\\ 0 & a_2 & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & \cdots & a_n\end{vmatrix}$

$$=(1+a_1+\sum_{j=2}^{n}\frac{a_1}{a_j})a_2\cdots a_n=a_1a_2\cdots a_n(1+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}).$$

方法三: $D_n=\begin{vmatrix}1+a_1 & 1 & \cdots & 1 & 1\\ 1 & 1+a_2 & \cdots & 1 & 1\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 1 & 1 & \cdots & 1+a_{n-1} & 1\\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1+a_1 & 1 & \cdots & 1 & 0\\ 1 & 1+a_2 & \cdots & 1 & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 1 & 1 & \cdots & 1+a_{n-1} & 0\\ 1 & 1 & \cdots & 1 & a_n\end{vmatrix}$

所以 $$D_n=a_1a_2\cdots a_{n-1}+a_nD_{n-1}$$

得 $$D_n=a_1a_2\cdots a_n(1+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}).$$

方法四: $D_n=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 0 & 1+a_1 & 1 & \cdots & 1\\ 0 & 1 & 1+a_2 & \cdots & 1\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1+a_n\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ -1 & a_1 & 0 & \cdots & 0\\ -1 & 0 & a_2 & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ -1 & 0 & 0 & \cdots & a_n\end{vmatrix}$

$$=\begin{vmatrix} 1+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i} & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix} = a_1a_2\cdots a_n(1+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}).$$

例 10 计算 n 阶行列式 $D_n=\begin{vmatrix} a+b & b & & & \\ a & a+b & b & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & a & a+b & b \\ & & & a & a+b \end{vmatrix}$.

解 按第一列展开,有 $D_n=(a+b)D_{n-1}-abD_{n-2}$,则

$D_n-aD_{n-1}=b(D_{n-1}-aD_{n-2})=\cdots=b^n$ ……（1）

又 D_n 关于 a 和 b 对称,故 $D_n-bD_{n-1}=a^n$， ……（2）

由（1）与（2）解得 $D_n=\begin{cases}(n+1)a^n, a=b, \\ \dfrac{a^{n+1}-b^{n+1}}{a-b}, a\neq b.\end{cases}$

例 11 计算行列式 $D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 \end{vmatrix}$.

解 构造范氏行列式 $D_5=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d & x \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 & x^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 & x^3 \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 & x^4 \end{vmatrix}$

$$=(b-a)(c-a)(d-a)(x-a)(c-b)(d-b)(x-b)(d-c)(x-c)(x-d)$$

$$=\cdots+[-(b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)(d-c)(a+b+c+d)]x^3+\cdots$$

将 D_5 按第 5 列展开,有 $D_5=\cdots+(-1)^{4+5}Dx^3+\cdots=\cdots+(-D)x^3+\cdots$,所以

$$-D=-(b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)(d-c)(a+b+c+d)$$

即 $D=(b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)(d-c)(a+b+c+d)$.