习题 3.1 (A)

1. 已知平行四边形 $ABCD$ 的对角线构成向量 $\overrightarrow{AC}=\vec{a}$，$\overrightarrow{BD}=\vec{b}$，求 $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{BC}$。

解　$\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}=\frac{1}{2}(\vec{b}-\vec{a})$；

$\overrightarrow{BC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}=\frac{1}{2}(\vec{b}+\vec{a})$。

2. 设 AD，BE，CF 是三角形 ABC 的三条中线，证明：$\overrightarrow{AD}$，$\overrightarrow{BE}$，$\overrightarrow{CF}$ 可以构成一个三角形。

解　$\overrightarrow{BE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{CB}$；　$\overrightarrow{CF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BC}$；$\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BA}$；

$\therefore \overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}-\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$，

又　$\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{BA}$，

$\therefore \overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CF}=\vec{0}$，即 $\overrightarrow{AD}$，$\overrightarrow{BE}$，$\overrightarrow{CF}$ 可以构成一个三角形。

3. 设向量 $\overrightarrow{a_1}$ 与 $\overrightarrow{a_2}$ 不共线，又 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{a_1}-2\overrightarrow{a_2}$，$\overrightarrow{BC}=2\overrightarrow{a_1}+3\overrightarrow{a_2}$，$\overrightarrow{CD}=-\overrightarrow{a_1}-5\overrightarrow{a_2}$，证明：$A,B,D$ 三点共线。

解　$\because \overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{a_1}-2\overrightarrow{a_2}=\overrightarrow{AB}$；

$\therefore \overrightarrow{AB},\overrightarrow{BD}$ 共线，即 A,B,D 三点共线。

4.点 $P(-1,2,3)$ 和 $N(2,3,-1)$ 各在哪个卦限，分别求出点 P 关于各个坐标面、各坐标轴、原点的对称点的坐标。

解 点 $P(-1,2,3)$ 在第 II 卦限，$N(2,3,-1)$ 在第 V 卦限；

点 P 关于 oxy，oyz，ozx 坐标面的对称点分别为 $(-1,2,-3)$、$(1,2,3)$、$(-1,-2,3)$；

点 P 关于 x 轴，y 轴，z 轴的对称点分别为 $(-1,-2,-3)$、$(1,2,-3)$、$(1,-2,3)$；

点 P 关于原点的对称点为 $(1,-2,-3)$。

5.各坐标轴和各坐标面上的点的坐标具有怎样的形式？

解　x 轴上点的坐标形如 $(x,0,0)$，即第 2,3 分量为 0，

y 轴上点的坐标形如 $(0,y,0)$，即第 1,3 分量为 0，

z 轴上点的坐标形如 $(0,0,z)$，即第 1,2 分量为 0；

oxy 坐标面上点的坐标形如 $(x,y,0)$，即第 3 坐标分量为 0，

oyz 坐标面上点的坐标形如 $(0,y,z)$，即第 1 坐标分量为 0，

ozx 坐标面上点的坐标形如 $(x,0,z)$，即第 2 坐标分量为 0.

6. 向量 $\vec{a}=\vec{i}+2\vec{j}-2\vec{k}$ 是单位向量吗？如果不是，求与 $\vec{a}$ 同方向的单位向量。

解　$\because \|\vec{a}\|=\sqrt{1+2^2+(-2)^2}=3$，$\therefore \vec{a}$ 不是单位向量；

与向量 $\vec{a}$ 同方向的单位向量为 $\overrightarrow{a^0}=\frac{1}{3}\vec{i}+\frac{2}{3}\vec{j}-\frac{2}{3}\vec{k}$。

7. 与 x 轴、y 轴、z 轴正向的夹角分别为 $\frac{\pi}{4}$，$\frac{\pi}{4}$，$\frac{\pi}{3}$ 的向量是否存在？

解　对任意向量的方向余弦 $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$，而与 x 轴、y 轴、z 轴正向的夹角分别为 $\frac{\pi}{4}$，$\frac{\pi}{4}$，$\frac{\pi}{3}$ 的向量的方向余弦 $\cos^2\frac{\pi}{4}+\cos^2\frac{\pi}{4}+\cos^2\frac{\pi}{3}\neq 1$，所以这样的向量不存在。

8. 已知向量 $\vec{a}$ 的三个方向角相等且都为锐角，求 $\vec{a}$ 的方向余弦。若 $\|\vec{a}\|=2$，求 $\vec{a}$ 的坐标。

解　由 $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$ 及 $\alpha=\beta=\gamma$ 知 $\vec{a}$ 的方向余弦为

$\cos\alpha=\cos\beta=\cos\gamma=\frac{\sqrt{3}}{3}$；

由 $\|\vec{a}\|=2$ 知，$\vec{a}$ 的坐标 $\vec{a}=\left(\frac{2\sqrt{3}}{3},\frac{2\sqrt{3}}{3},\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$。

9. 已知向量 $\vec{b}$ 与 $\vec{a}=(1,1,-1)$ 平行，且 $\vec{b}$ 与 z 轴正向夹角为锐角，求 $\vec{b}$ 的方向余弦。

解　由 $\vec{a}=(1,1,-1)$ 知，$\overrightarrow{a^0}=\left(\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3},-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$，

又 $\vec{b}$ 与 z 轴正向夹角为锐角，即 $\vec{b}$ 的第三分量为正，

所以 $\overrightarrow{b^0}=\left(-\frac{\sqrt{3}}{3},-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$，即 $\vec{b}$ 的方向余弦为 $-\frac{\sqrt{3}}{3},-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}$。

10. 已知向量 $\vec{a}=(-2,3,x)$ 与 $\vec{b}=(y,-6,2)$ 共线，求 x，y 的值。

解　由向量 $\vec{a}=(-2,3,x)$ 与 $\vec{b}=(y,-6,2)$ 共线知

$\frac{-2}{y}=\frac{3}{-6}=\frac{x}{2}$，所以 $x=-1$，$y=-4$；

11. 已知 3 个力 $\overrightarrow{F_1}=(1,2,3)$，$\overrightarrow{F_3}=(3,-4,-1)$ 作用于一点，求合力 $\vec{F}$ 的大小与方向。

解　$\because \overrightarrow{F_1}+\overrightarrow{F_2}+\overrightarrow{F_3}=(2,1,-3)=\vec{F}$，所以合力 $\vec{F}$ 的大小 $\|\vec{F}\|=3$，

$\overrightarrow{F}$ 的方向角分别为$\alpha=\arccos\frac{2}{3}$，$\beta=\arccos\frac{1}{3}$，$\gamma=\arccos\left(-\frac{2}{3}\right)$。

12. 已知点$P=(1,2,3)$，$Q=(2,3,4)$，求向量$\overrightarrow{PQ}$的模与方向余弦。

解 $\because\overrightarrow{PQ}=(1,1,1)$，

$\therefore\left\|\overrightarrow{PQ}\right\|=\sqrt{3}$，方向余弦为$\cos\alpha=\cos\beta=\cos\gamma=\frac{\sqrt{3}}{3}$。

13. 求常数 a，b，c，使两向量$a\vec{i}+3\vec{j}+(b+2)\vec{k}$与$2\vec{i}+(c+1)\vec{j}+\vec{k}$相等，并求该向量的模与方向余弦。

解 两向量$a\vec{i}+3\vec{j}+(b+2)\vec{k}$与$2\vec{i}+(c+1)\vec{j}+\vec{k}$相等，每一分量分别相等，所以$a=2,b=-1,c=2$，即该向量为$2\vec{i}+3\vec{j}+\vec{k}$，该向量的模为$\sqrt{14}$，方向余弦分别为$\cos\alpha=\frac{\sqrt{14}}{7}$。$\cos\beta=\frac{3\sqrt{14}}{14}$，$\cos\gamma=\frac{\sqrt{14}}{14}$。

14. 在方程$4x-7y+5z-20=0$所代表的图形上求一点 P，使向径$\overrightarrow{OP}$的三个方向角相等。

解 设向经$\overrightarrow{OP}=\vec{r}=(x,y,z)$，要使向径$\overrightarrow{OP}$的三个方向角相等，即$\frac{x}{\|\vec{r}\|}=\frac{y}{\|\vec{r}\|}=\frac{z}{\|\vec{r}\|}$，

从而有$x=y=z$，将点 P 坐标代入方程$4x-7y+5z-20=0$得$P=(10,10,10)$。

15.判断下列各组向量是否共面：

（1）$(4,0,2)$，$(6,-9,8)$，$(6,-3,3)$；

（2）$(1,-2,3)$，$(3,3,1)$，$(1,7,-5)$。

解 三个向量共面的充要条件是有它们的坐标所构成的 3 阶行列式等于零，

（1）$\begin{vmatrix}4&0&2\\6&-9&8\\6&-3&3\end{vmatrix}=60\neq0$，所以该向量组不共面；

（2）$\begin{vmatrix}1&-2&3\\3&3&1\\1&7&-5\end{vmatrix}=0$，所以该向量组共面；

16. 把向量$\vec{a}=(-7,4,7)$表示为不共线向量$\vec{e}_1=(3,2,1)$，$\vec{e}_2=(7,5,0)$，$\vec{e}_3=(-2,3,4)$的分解式.

解 设$\vec{a}=x\vec{e}_1+y\vec{e}_2+z\vec{e}_3$即$\begin{cases}3x+7y-2z=-7\\2x+5y+3z=4\\x\qquad+4z=7\end{cases}$，解该方程组得$x=-1,y=0,z=2$，

$\therefore\vec{a}=-\vec{e}_1+2\vec{e}_3$。

17. 设球面通过$O(0,0,0)$，$A(a,0,0)$，$B(0,b,0)$，$C(0,0,c)$四点，求球心的坐标及球的半径。

解 设球心的坐标为(x_1,y_1,z_1)，半径为R，则球面的方程为，

$(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2=R^2$，

因为球面通过O,A,B,C四点，即这四点的坐标满足球面的方程，

将O,A,B,C四点代入球面的方程得$x_1=\frac{a}{2},y_1=\frac{b}{2},z_1=\frac{c}{2}$，$R=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2+c^2}$。

18. 设有点$A(1,1,1)$，$B(1,2,0)$，点 P 把线段 AB 分成两段的比为$2:1$，求点 P 的坐标。

解 设点 P 的坐标为(x,y,z)，点 P 把线段 AB 分成两段的比为$2:1$，即$\left\|\overrightarrow{AP}\right\|=2\left\|\overrightarrow{PB}\right\|$，

将$A(1,1,1)$，$B(1,2,0)$，$P(x,y,z)$代入得$x=1,y=\frac{5}{3},z=\frac{1}{3}$，即点 P 的坐标为$(1,\frac{5}{3},\frac{1}{3})$。

习题 3.2 (A)

1. 设有向量$\vec{a}=(1,1,-1)$，$\vec{b}=(0,3,4)$，$\vec{c}=(2,8,-1)$，求（1）$3\vec{a}\times4\vec{b}$；（2）$\left[5\vec{a}\quad-\vec{b}\quad\vec{c}\right]$。

解（1）$3\vec{a}\times4\vec{b}=12\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\1&1&-1\\0&3&4\end{vmatrix}=12(7,-4,3)$；

（2）$\left[5\vec{a}\quad-\vec{b}\quad\vec{c}\right]=5\begin{vmatrix}1&1&-1\\0&3&4\\2&8&-1\end{vmatrix}=105$。

2. 设向量$\vec{b}$与$\vec{a}=2\vec{i}-\vec{j}+2\vec{k}$共线，且$\vec{a}\cdot\vec{b}=-18$，求向量$\vec{b}$。

解 设$\vec{b}=(x,y,z)$，则由向量$\vec{b}$与$\vec{a}=2\vec{i}-\vec{j}+2\vec{k}$共线得：

$\frac{x}{2}=\frac{y}{-1}=\frac{z}{2}$， ①

由$\vec{a}\cdot\vec{b}=-18$得

$2x-y+2z=-18$，②

联立①②得 $x=-4, y=2, z=-4$，即 $\vec{b}=(-4,2,-4)$。

3. 已知 $\|\vec{a}\|=4$，$\|\vec{b}\|=2, \|\vec{a}-\vec{b}\|=2\sqrt{7}$，求 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角。

解 $\because \vec{a}\cdot\vec{b}=\|\vec{a}\|\|\vec{b}\|\cos(\vec{a},\vec{b})$，$\|\vec{a}-\vec{b}\|^2=(\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=\|\vec{a}\|^2+\|\vec{b}\|^2+2(\vec{a}\cdot\vec{b})$

$\therefore 28=4+4-16\cos(\vec{a},\vec{b})$，即 $\cos(\vec{a},\vec{b})=\frac{1}{2}$，所以 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为 $\frac{\pi}{3}$。

4. 已知 $\|\vec{a}\|=1$，$\|\vec{b}\|=2$，$(\vec{a},\vec{b})=\frac{\pi}{3}$，求 $\|2\vec{a}-3\vec{b}\|$ 及以 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 为邻边的平行四边形的面积；

解 $\|2\vec{a}-3\vec{b}\|=\sqrt{(2\vec{a}-3\vec{b})\cdot(2\vec{a}-3\vec{b})}=\sqrt{2\|\vec{a}\|^2+9\|\vec{b}\|^2-12\|\vec{a}\|\|\vec{b}\|\cos(\vec{a}\cdot\vec{b})}=2\sqrt{7}$；

以 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 为邻边的平行四边形的面积 $S=\|\vec{a}\times\vec{b}\|=\|\vec{a}\|\|\vec{b}\|\sin(\vec{a},\vec{b})=\sqrt{3}$。

5. 设有向量 $\vec{a}=(2,1,-3)$，$\vec{b}=(1,-3,2)$，$\vec{c}=(3,2,-4)$，若向量 $\vec{d}$ 满足 $\vec{d}\cdot\vec{a}=-5$，$\vec{d}\cdot\vec{b}=-11$，$\vec{d}\cdot\vec{c}=20$，求向量 $\vec{d}$。

解 设 $\vec{d}=(x,y,z)$，则由题意有：$\begin{cases}2x-y+3z=-5\\ x-4y+2z=-11\\ 3x+2y-4z=20\end{cases}$，

解之得 $x=2, y=3, z=-2$，即 $\vec{d}=(2,3,-2)$。

6. 设非零向量 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 满足 $\|\vec{a}-\vec{b}\|=\|\vec{a}\|-\|\vec{b}\|$，问 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的关系如何？

解 $\because \|\vec{a}\|-\|\vec{b}\|=\|\vec{a}-\vec{b}\|\geq 0$，$\therefore \|\vec{a}\|\geq\|\vec{b}\|$；

由 $\|\vec{a}-\vec{b}\|^2=(\|\vec{a}\|-\|\vec{b}\|)^2$ 得 $\cos(\vec{a},\vec{b})=1$，即 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 同向。

7. 设 $(\vec{a}+3\vec{b})\perp(7\vec{a}-5\vec{b})$，$(\vec{a}-4\vec{b})\perp(7\vec{a}-2\vec{b})$，求 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角。

解 由 $(\vec{a}+3\vec{b})\perp(7\vec{a}-5\vec{b})$ 得 $(\vec{a}+3\vec{b})\cdot(7\vec{a}-5\vec{b})=0$，

及由 $(\vec{a}-4\vec{b})\perp(7\vec{a}-2\vec{b})$ 得 $(\vec{a}-4\vec{b})\cdot(7\vec{a}-2\vec{b})=0$，

即 $7\|\vec{a}\|^2-15\|\vec{b}\|^2+16\|\vec{a}\|\|\vec{b}\|\cos(\vec{a},\vec{b})=0$，①

$7\|\vec{a}\|^2+8\|\vec{b}\|^2-30\|\vec{a}\|\|\vec{b}\|\cos(\vec{a},\vec{b})=0$，②

联立①②得 $\cos(\vec{a},\vec{b})=\frac{1}{2}$，所以 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为 $\frac{\pi}{3}$。

8. 设向量 $\vec{a}=(,1,-4)$，$\vec{b}=(1,-2,2)$，求 $\vec{a}$ 在 $\vec{b}$ 上的射影及 $\vec{a}$ 在 $\vec{b}$ 上的射影向量。

解 $\because \vec{a}\cdot\vec{b}=\|\vec{a}\|\|\vec{b}\|\cos(\vec{a},\vec{b})$，$\therefore \cos(\vec{a},\vec{b})=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\|\vec{a}\|\|\vec{b}\|}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$，

所以 $\vec{a}$ 在 $\vec{b}$ 上的射影为：$(\vec{a})_{\vec{b}}=\|\vec{a}\|\cos(\vec{a},\vec{b})=-3$；

$\vec{a}$ 在 $\vec{b}$ 上的射影向量为：$proj_{\vec{b}}\vec{a}=\|\vec{a}\|\cos(\vec{a},\vec{b})\vec{b}^0=-(-1,2,-2)$.

9. 设 $\vec{a}$ 为空间任意向量，证明 $\vec{a}=(\vec{a}\cdot\vec{i})\vec{i}+(\vec{a}\cdot\vec{j})\vec{j}+(\vec{a}\cdot\vec{k})\vec{k}$。

证明：设 $\vec{a}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$，则 $(\vec{a}\cdot\vec{i})=x, (\vec{a}\cdot\vec{j})=y, (\vec{a}\cdot\vec{k})=z$，

$\therefore \vec{a}=(\vec{a}\cdot\vec{i})\vec{i}+(\vec{a}\cdot\vec{j})\vec{j}+(\vec{a}\cdot\vec{k})\vec{k}$。

10. 证明：向量 $(\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b}-(\vec{b}\cdot\vec{c})\vec{a}$ 垂直于向量 $\vec{c}$。

证明：$\because \left[(\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b}-(\vec{b}\cdot\vec{c})\vec{a}\right]\cdot\vec{c}=(\vec{a}\cdot\vec{c})(\vec{b}\cdot\vec{c})-(\vec{b}\cdot\vec{c})(\vec{a}\cdot\vec{c})=0$，

$\therefore (\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b}-(\vec{b}\cdot\vec{c})\vec{a}\perp\vec{c}$。

11. 设单位向量 $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ 满足 $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$，求 $\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{a}$。

解 $\because (\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})\cdot(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})=\vec{0}$，

$\therefore \|\vec{a}\|^2+\|\vec{b}\|^2+\|\vec{c}\|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+2\vec{b}\cdot\vec{c}+2\vec{c}\cdot\vec{a}=0$，

由 $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ 是单位向量得 $\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{a}=-\frac{3}{2}$。

12. 设以 $A(1,-1,1)$，$B(-1,0,2)$，$C(2,-2,1)$ 为顶点的三角形面积，并 AB 求边上的高。

解 $\because \overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -2 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 0\end{vmatrix}=(1,1,1)$，

于是三角形的面积为：$S=\frac{1}{2}\|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\|=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

AB 求边上的高为：$h=S/\frac{1}{2}\|\overrightarrow{AB}\|=\frac{\sqrt{2}}{2}$。

13. 若 $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{c}\times\vec{d}$，$\vec{a}\times\vec{c}=\vec{b}\times\vec{d}$，证明：$\vec{a}-\vec{d}$ 与 $\vec{b}-\vec{c}$ 共线。

证明：$\because (\vec{a}-\vec{d})\times(\vec{b}-\vec{c})=\vec{a}\times\vec{b}-\vec{a}\times\vec{c}-\vec{d}\times\vec{b}+\vec{d}\times\vec{c}$，

将 $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{c}\times\vec{d}$，$\vec{a}\times\vec{c}=\vec{b}\times\vec{d}$ 代入上式得

$(\vec{a}-\vec{d})\times(\vec{b}-\vec{c})=\vec{c}\times\vec{d}-\vec{b}\times\vec{d}-\vec{d}\times\vec{b}+\vec{d}\times\vec{c}=\vec{0}$，

$\therefore \vec{a}-\vec{d}$ 与 $\vec{b}-\vec{c}$ 共线。

14. 若 $\vec{a}\times\vec{b}+\vec{b}\times\vec{c}+\vec{c}\times\vec{a}=\vec{0}$，证明：$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ 共面。

证明：给$\vec{a}\times\vec{b}+\vec{b}\times\vec{c}+\vec{c}\times\vec{a}=\vec{0}$两边点乘$\vec{c}$得，

$$\vec{a}\times\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c}\cdot\vec{c}+\vec{c}\times\vec{a}\cdot\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}\cdot\vec{c}=0,$$

所以$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$共面。

15. 设$\vec{c}=(\vec{b}\times\vec{a})-\vec{b}$，则下列结论正确的是：

（A）$\vec{a}\perp(\vec{b}+\vec{c})$；（B）$\vec{a}//(\vec{b}+\vec{c})$；（C）$\vec{b}\perp\vec{c}$；（D）$\vec{b}//\vec{c}$。 [ ]

解 由$\vec{c}=(\vec{b}\times\vec{a})-\vec{b}$得$\vec{c}+\vec{b}=(\vec{b}\times\vec{a})$，$\therefore\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{a})=0$，

即$\vec{a}\perp(\vec{b}+\vec{c})$，所以选 A。

16. （1）若$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{c}\cdot\vec{b}$，且$\vec{b}\neq\vec{0}$，是否必有$\vec{a}=\vec{c}$？，若$\vec{a}\neq\vec{c}$，问$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$之间有什么关系？

（2）若$\vec{a}\times\vec{b}=\vec{c}\times\vec{b}$，且$\vec{b}\neq\vec{0}$，$\vec{a}\neq\vec{c}$，问$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$之间有什么关系？

解 （1）由$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{c}\cdot\vec{b}$得$(\vec{a}-\vec{c})\cdot\vec{b}=0$，且$\vec{b}\neq\vec{0}$，未必有$\vec{a}=\vec{c}$，

若$\vec{a}\neq\vec{c}$，有$\vec{b}\perp(\vec{a}-\vec{c})$；

（2）由$\vec{a}\times\vec{b}=\vec{c}\times\vec{b}$得$(\vec{a}-\vec{c})\times\vec{b}=\vec{0}$，且$\vec{b}\neq\vec{0}$，$\vec{a}\neq\vec{c}$，有$\vec{b}//(\vec{a}-\vec{c})$。

17. 设$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=2$，则$[(\vec{a}+\vec{b})\times(\vec{b}+\vec{c})]\cdot(\vec{c}+\vec{a})=$______。

解 $[(\vec{a}+\vec{b})\times(\vec{b}+\vec{c})]\cdot(\vec{c}+\vec{a})$

$$=[(\vec{a}+\vec{b})\times(\vec{b}+\vec{c})]\cdot\vec{c}+[(\vec{a}+\vec{b})\times(\vec{b}+\vec{c})]\cdot\vec{a}$$

$$=[\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{b}+\vec{b}\times\vec{c}]\cdot\vec{c}+[\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{b}+\vec{b}\times\vec{c}]\cdot\vec{a}$$

$$=(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}+(\vec{b}\times\vec{c})\cdot\vec{a}=2(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=4。$$

18. 求以$A(3,0,0)$，$B(0,3,0)$，$C(0,0,2)$，$D(4,5,6)$为顶点的四面体的体积。

解 $\because\left[\overrightarrow{AB}\quad\overrightarrow{AC}\quad\overrightarrow{AD}\right]=\begin{vmatrix}-3&3&0\\-3&0&2\\1&5&6\end{vmatrix}=90$，

所以四面体的体积为$V=\dfrac{1}{6}\left[\overrightarrow{AB}\quad\overrightarrow{AC}\quad\overrightarrow{AD}\right]=15$。

19. 试利用混合积的定义、定理 3.2.1 及定理 3.2.2 来证明定理 3.2.3.

证明：

(B)

1. 若$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$，证明：$\vec{a}\times\vec{b}=\vec{b}\times\vec{c}=\vec{c}\times\vec{a}$，并作几何解释。

证明：给$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$两边叉乘$\vec{b}$有：

$$\vec{a}\times\vec{b}+\vec{b}\times\vec{b}+\vec{c}\times\vec{b}=\vec{a}\times\vec{b}-\vec{b}\times\vec{c}=\vec{0},$$

从而有$\vec{a}\times\vec{b}=\vec{b}\times\vec{c}$；

给$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$两边叉乘$\vec{a}$有：

$$\vec{a}\times\vec{a}+\vec{b}\times\vec{a}+\vec{c}\times\vec{a}=-\vec{a}\times\vec{b}+\vec{c}\times\vec{a}=\vec{0},$$

从而有$\vec{a}\times\vec{b}=\vec{c}\times\vec{a}$；$\therefore\vec{a}\times\vec{b}=\vec{b}\times\vec{c}=\vec{c}\times\vec{a}$。

在$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$时，$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$可以形成三角形，因此$\vec{a}\times\vec{b},\vec{b}\times\vec{c},\vec{c}\times\vec{a}$的模都等于三角形面积的 2 倍，即这三个向量的模相等，且同向，故相等。

2. 证明：以$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，$C(x_3,y_3)$为顶点三角形的面积等于

$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix}x_1&y_1&1\\x_2&y_2&1\\x_3&y_3&1\end{vmatrix}$$

的绝对值。

证明：考虑以$A(x_1,y_1,0)$，$B(x_2,y_2,0)$，$C(x_3,y_3,0)$，$D(0,0,-1)$为顶点的四面体的体积，

$$V=\frac{1}{6}\left|(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{AD}\right|=\frac{1}{3}\frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right\|h,\quad h=1$$

$$\therefore\quad S=\frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right\|=\frac{1}{2}\left|(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{AD}\right|=\left|\frac{1}{2}\begin{vmatrix}x_1&y_1&1\\x_2&y_2&1\\x_3&y_3&1\end{vmatrix}\right|。$$

3. （1）证明：$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})=(\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b}-(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c}$；

（2）利用（1）证明：$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot(\vec{c}\times\vec{d})=(\vec{a}\cdot\vec{c})(\vec{b}\cdot\vec{d})-(\vec{a}\cdot\vec{d})(\vec{b}\cdot\vec{c})$；

（3）利用（1）证明：$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})+\vec{b}\times(\vec{c}\times\vec{a})+\vec{c}\times(\vec{a}\times\vec{b})=\vec{0}$。

证明：（1）利用向量积德坐标表示来证明，

设$\vec{a}=(a_x,a_y,a_z)$，$\vec{b}=(b_x,b_y,b_z)$，$\vec{c}=(c_x,c_y,c_z)$，则

$$\vec{b}\times\vec{c}=\left(\begin{vmatrix}b_y&b_z\\c_y&c_z\end{vmatrix},-\begin{vmatrix}b_x&b_z\\c_x&c_z\end{vmatrix},\begin{vmatrix}b_x&b_y\\c_x&c_y\end{vmatrix}\right),$$

$$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})=\left(a_y\begin{vmatrix}b_x&b_y\\c_x&c_y\end{vmatrix}+a_z\begin{vmatrix}b_x&b_z\\c_x&c_z\end{vmatrix},a_z\begin{vmatrix}b_y&b_z\\c_y&c_z\end{vmatrix}-a_x\begin{vmatrix}b_x&b_y\\c_x&c_y\end{vmatrix},-a_x\begin{vmatrix}b_x&b_z\\c_x&c_z\end{vmatrix}-a_y\begin{vmatrix}b_y&b_z\\c_y&c_z\end{vmatrix}\right)$$

$$=((a_xc_x+a_yc_y+a_zc_z)b_x-(a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z)c_x,$$

$$(a_xc_x+a_yc_y+a_zc_z)b_y-(a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z)c_y,$$

$(a_xc_x+a_yc_y+a_zc_z)b_z-(a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z)c_z)=(\vec a\cdot\vec c)\vec b-(\vec a\cdot\vec b)\vec c$

（2）利用（1）的结论 $\vec a\times(\vec b\times\vec c)=(\vec a\cdot\vec c)\vec b-(\vec a\cdot\vec b)\vec c$ 有

$$(\vec a\times\vec b)\cdot(\vec c\times\vec d)=\vec a\cdot(\vec b\times\vec c\times\vec d)=\vec a\cdot[(\vec b\cdot\vec d)\vec c-(\vec b\cdot\vec c)\vec d]$$

$$=(\vec a\cdot\vec c)(\vec b\cdot\vec d)-(\vec a\cdot\vec d)(\vec b\cdot\vec c);$$

（3）利用（1）的结论 $\vec a\times(\vec b\times\vec c)=(\vec a\cdot\vec c)\vec b-(\vec a\cdot\vec b)\vec c$ 有

$$\vec a\times(\vec b\times\vec c)+\vec b\times(\vec c\times\vec a)+\vec c\times(\vec a\times\vec b)$$

$$=(\vec a\cdot\vec c)\vec b-(\vec a\cdot\vec b)\vec c+(\vec b\cdot\vec a)\vec c)-(\vec b\cdot\vec c)\vec a+(\vec c\cdot\vec b)\vec a-(\vec c\cdot\vec a)\vec b=\vec 0$$ 。

习题 3.3（A）

1. 求满足下列条件的平面的方程：

（1）过原点，且与直线 $\begin{cases}x=1\\y=-1+t\\z=1+t\end{cases}$ 及 $x+1=\dfrac{y+2}{2}=z-1$ 都平行；

解 两条直线的方向向量分别为：$(0,1,1)$，$(1,2,1)$，

于是取平面的法向量为：$\vec n=(0,1,1)\times(1,2,1)=(-1,1,-1)$，

所以平面的方程为：$x-y+z=0$。

（2）过直线 $L_1: x-1=\dfrac{y-2}{0}=3-z$ 且与 $L_2:\dfrac{x+2}{2}=y-1=z$ 平行；

解 两条直线的方向向量分别为：$(1,0,-1)$，$(2,1,1)$，

于是取平面的法向量为：$\vec n=(1,0,-1)\times(2,1,1)=(1,-3,1)$，

所求平面过直线 L_1 上的点 $(1,2,3)$，所以平面的方程为：$x-3y+z+2=0$。

（3）平行于平面 $5x-14y+2z+36=0$，且与此平面的距离为 3。

解 设所求平面的方程为 $5x-14y+2z+D=0$，取已知平面上的点 $(-2,2,1)$，

则点到平面的距离为 $d=\dfrac{|5\times(-2)+2\times(-14)+2+D|}{\sqrt{5^2+(-14)^2+2^2}}=3$，

解之得 $D=81$，或 $D=-9$，

所以满足条件的平面的方程有两个：$5x-14y+2z+81=0$，

或 $5x-14y+2z-9=0$。

（4）过点 $A(3,-2,9)$ 及 $B(-6,0,-4)$，且与平面 $2x-y+4z-8=0$ 垂直；

解 所求平面的法向量与已知平面的法向量 $(2,-1,4)$ 垂直，且与 $\overrightarrow{AB}=(9,-2,13)$ 垂直，

于是取平面的法向量为：$\vec n=(2,-1,4)\times(9,-2,13)=(-5,10,5)//(1,-2,-1)$，

所以平面的方程为：$(x-3)-2(y+2)-(z-9)=0$，即 $x-2y-z+2=0$。

（5）过点 $A(3,0,0)$，且通过 x 轴；

解 设所求平面的方程为 $By+Cz=0$，

将 $A(3,0,0)$ 代入平面方程得 $2B=3C$

所以平面的方程为：$3y+2z=0$。

（6）过点 $A(2,-1,5)$，与直线 $\begin{cases}4x+y+2z=3\\5x+2y+3z=2\end{cases}$ 平行，与平面 $2x-y+z=1$ 垂直；

解 已知直线的方向向量为 $\vec l=(4,1,2)\times(5,2,3)=(-1,-2,3)$，

所求平面的法向量与已知平面的法向量 $(2,-1,1)$ 垂直，且与 $\vec l$ 垂直，

于是取平面的法向量为：$\vec n=(2,-1,1)\times(-1,-2,3)=(1,7,5)$，

所以平面的方程为：$(x-2)+7(y+2)+5(z-5)=0$，即 $x+7y+5z-20=0$。

（7）过点 $(2,1,3)$ 及直线 $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y+1}{3}=\dfrac{z-3}{2}$；

解 平面过点 $(2,1,3)$ 和 $(0,-1,3)$，所以垂直于向量 $(2,2,0)$，且垂直于直线的方向向量 $\vec l=(2,3,2)$

于是取平面的法向量为：$\vec n=(2,2,0)\times(2,3,2)=(-4,-4,2)//(2,-2,1)$，

所以平面的方程为：$2(x-2)-2(y-1)+(z-3)=0$，即 $2x-2y+z-5=0$。

（8）过点 $(3,4,-2)$ 且在 3 个坐标轴上的截距相等；

解 设平面的方程为 $x+y+z=a$，

将点 $(3,4,-2)$ 代入平面的方程得 $a=5$，

所以平面的方程为：$x+y+z=5$。

（9）过点 $(1,2,-1)$，且与平面 $x+3y-2z+1=0$ 以及 $2x-y+3z-2=0$ 都垂直；

解 所求平面的法向量与已知平面的法向量 $(1,3,-2)$ 与 $(2,-1,-2)$ 都垂直，

于是取平面的法向量为 $\vec n=(1,3,-2)\times(2,-1,-2)=(7,-7,-7)//(1,-1,-1)$，

所以平面的方程为：$x-y-z=0$。

2. 求满足下列条件的直线的方程：

（1）过两个不同的点 $A(x_1,y_1,z_1)$，$B(x_2,y_2,z_2)$；

解 取直线的方向向量为 $\overrightarrow{AB}=(x_1-x_2,y_1-y_2,z_1-z_2)$，

于是直线的方程为：$\dfrac{x-x_1}{x_1-x_2}=\dfrac{y-y_1}{y_1-y_2}=\dfrac{z-z_1}{z_1-z_2}$。

（2）过点$(2,0,-1)$，且与直线$\begin{cases}2x-3y+z-6=0\\4x-2y+3z+9=0\end{cases}$平行；

解 取已知直线的方向向量为$\vec{l}=(2,-3,1)\times(4,-2,3)=(-7,-2,8)$，

于是直线的方程为：$\dfrac{x-2}{-7}=\dfrac{y}{-2}=\dfrac{z+1}{8}$。

（3）过点$A(2,-1,3)$，且与直线$\dfrac{x+3}{7}=\dfrac{y}{0}=\dfrac{z+6}{2}$垂直相交；

解 设所求直线的方向向量为$\vec{a}=(l,m,n)$，

已知直线的方向向量为$\vec{l}=(7,0,2)$，且过点$B(-3,0,-6)$，

由所求直线的方向向量与已知直线的方向向量垂直，即$\vec{a}\cdot\vec{l}=7l+2n=0$， ①

又由$\overrightarrow{AB},\vec{a},\vec{l}$共面有，$\begin{vmatrix}5&-1&9\\7&0&2\\l&m&n\end{vmatrix}=0$， ②

联立①②得$l=-\dfrac{2}{7}n$，$m=-\dfrac{1}{7}n$，于是可取所求直线的方向向量$\vec{a}//(2,1,-7)$

所以所求直线的方程为：$\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z-3}{-7}$。

（4）过点$(-1,2,3)$，垂直于直线$\dfrac{x}{4}=\dfrac{y}{5}=\dfrac{z}{6}$，且平行于平面$7x+8y+9z+10=0$；

解 设所求直线的方向向量与已知直线的方向向量为$\vec{l}=(4,5,6)$垂直，

且与已知直线的法向量$\vec{n}=(7,8,9)$垂直，

于是取所求直线的方向向量为，即$\vec{a}=\vec{l}\times\vec{n}=(-3,6,-3)//(1,-2,1)$，

所以所求直线的方程为：$x+1=\dfrac{y-2}{-2}=z-3$。

（5）过点$(1,2,3)$，与y轴相交，且与直线$x=y=z$垂直；

解 设直线与y轴相交于点$(0,b,0)$，且过点$(1,2,3)$，

所以可设所求直线的方向向量为$\vec{a}=(1,2-b,3)$，

所求直线方向向量与已知直线的方向向量$\vec{l}=(1,1,1)$垂直，

所以$\vec{a}\cdot\vec{l}=1+2-b+3=0$即$b=6$，$\vec{a}=(1,-4,3)$，

所以所求直线的方程为：$x=\dfrac{y-6}{-4}=\dfrac{z}{3}$。

（6）过点$P_0(-3,5,9)$，且与直线$L_1:\begin{cases}y=3x+5\\z=2x-3\end{cases}$及直线$L_2:\begin{cases}y=4x-7\\z=5x+10\end{cases}$都相交。

解法 1 设过点$P_0(-3,5,9)$及直线L_1的平面为π_1，法向量为$\vec{n}_1$，

因为直线L_1的对称式方程为$x=\dfrac{y-5}{3}=\dfrac{z+3}{2}$，

所以直线L_1的方向向量为$\vec{a}_1=(1,3,2)$，过$P_1(-3,5,9)$，

则$\vec{n}_1=\vec{a}_1\times\overrightarrow{P_1P_0}=(-36,18,-9)//(4,-2,1)$，

于是平面为π_1的方程为：$4x-2y+z+13=0$；

同理设过点$P_0(-3,5,9)$及直线L_2的平面为π_2，法向量为$\vec{n}_2$，

因为直线L_2的对称式方程为$x=\dfrac{y+7}{4}=\dfrac{z-10}{5}$，

所以直线L_2的方向向量为$\vec{a}_2=(1,4,5)$，过$P_2(0,-7,10)$，

则$\vec{n}_2=\vec{a}_2\times\overrightarrow{P_2P_0}=(64,14,-24)//(32,7,-12)$，

于是平面为π_2的方程为：$32x+7y-12z+169=0$；，

所以所求直线的方程为：$\begin{cases}4x-2y+z+13=0,\\32x+7y-12z+169=0.\end{cases}$。

解法 2 设所求直线与直线L_1交于$P(a,3a+5,2a-3)$，

则所求直线的方向向量为$\vec{l}=(a+3,3a,2a-12)$，

又所求直线与直线L_2相交，直线L_2的方向向量为$\vec{a}_2=(1,4,5)$，且过$P_2(0,-7,10)$

所以$\vec{l},\vec{a}_2,\overrightarrow{P_2P_0}$共面，即$\left[\vec{l}\quad\vec{a}_2\quad\overrightarrow{P_2P_0}\right]=\begin{vmatrix}a+3&3a&2a-3\\1&4&5\\3&-12&1\end{vmatrix}=0$

解之得$a=-\dfrac{240}{29}$，即$\vec{l}=(a+3,3a,2a-12)//(17,80,92)$

所以所求直线的方程为：$\dfrac{x+3}{17}=\dfrac{y-5}{80}=\dfrac{z-9}{92}$。

3. 求原点$O(0,0,0)$关于平面$6x+2y-9z+121=0$的对称点；

解 设对称点为$P(a,b,c)$，则$\overrightarrow{OP}=(a,b,c)$与已知平面的法向量$\vec{n}=(6,2,-9)$平行，

所以$\dfrac{a}{6}=\dfrac{b}{2}=\dfrac{c}{-9}$，即$a=3b$，$c=-4.5b$，①

又由原点$O(0,0,0)$和对称点$P(a,b,c)$到平面的距离相等，

即 $\dfrac{|6a+2b-9c+121|}{\sqrt{6^2+2^2+(-9)^2}}=11$，②

联立①②得 $b=-4$，$a=-12$，$c=18$

即对称点为 $(-12,-4,18)$。

4. 在平面 $\pi: x-y-2z=0$ 上找一点，使它与下列 3 点的距离都相等：$A(2,1,5)$，$B(4,-3,1)$ $C(-2,-1,3)$；

解 设所求点为 $P(a,b,c)$，则 $\|\overrightarrow{PP_1}\|=\|\overrightarrow{PP_2}\|=\|\overrightarrow{PP_3}\|$，即

$a-b-2c=0$，

$(a-2)^2+(b-1)^2+(c-5)^2=(a-4)^2+(b+3)^2+(c-1)^2$，

$(a-2)^2+(b-1)^2+(c-5)^2=(a+2)^2+(b+1)^2+(c-3)^2$，

解之得 $a=\dfrac{7}{5}$，$b=1$，$c=\dfrac{1}{5}$，

即满足条件的点为 $p=(\dfrac{7}{5},1,\dfrac{1}{5})$。

5. 单项选择题（下列每小题所提供的 4 个备选项中只有一项是正确的，试选出正确的选项，并说明理由）

（1）设有直线 $L_1:\begin{cases}x+3y+2z+1=0\\2x-y-10z+3=0\end{cases}$ 及平面 $\pi: 4x-2y+z-2=0$，则直线 L

（A）平行于 π；（B）在 π 上；（C）垂直于 π；（D）与 π 斜交.

解 设所求点为 $P(a,b,c)$，直线与 y 轴相交于点 $(0,b,0)$，且过点 $(1,2,3)$，

所以可设所求直线的方向向量为 $\vec{a}=(1,2-b,3)$，

所求直线方向向量与已知直线的方向向量 $\vec{l}=(1,1,1)$ 垂直，

所以 $\vec{a}\cdot\vec{l}=1+2-b+3=0$ 即 $b=6$，$\vec{a}=(1,-4,3)$，

所以所求直线的方程为：$x=\dfrac{y-6}{-4}=\dfrac{z}{3}$

（2）设矩阵 $\begin{bmatrix}a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\\a_3&b_3&c_3\end{bmatrix}$ 是满秩的，则直线 $\dfrac{x-a_3}{a_1-a_2}=\dfrac{y-b_3}{b_1-b_2}=\dfrac{z-c_3}{c_1-c_2}$ 与

直线 $\dfrac{x-a_1}{a_2-a_3}=\dfrac{y-b_1}{b_2-b_3}=\dfrac{z-c_1}{c_2-c_3}$

（A）相交于一点；（B）重合；（C）平行但不重合；（D）异面.

解设所求点为 $P(a,b,c)$，直线与 y 轴相交于点 $(0,b,0)$，且过点 $(1,2,3)$，

所以可设所求直线的方向向量为 $\vec{a}=(1,2-b,3)$，

所求直线方向向量与已知直线的方向向量 $\vec{l}=(1,1,1)$ 垂直，

所以 $\vec{a}\cdot\vec{l}=1+2-b+3=0$ 即 $b=6$，$\vec{a}=(1,-4,3)$，

所以所求直线的方程为：$x=\dfrac{y-6}{-4}=\dfrac{z}{3}$

6. 已知平面 $\pi: 3x-y+2z-5=0$ 与直线 $L_1:\dfrac{x-7}{5}=y-4=\dfrac{z-5}{4}$ 的交点为 M，若直线 L 在 π 上，过 M 点，且与 L_1 垂直，试求 L 的方程。

解 设 $L_1:\dfrac{x-7}{5}=y-4=\dfrac{z-5}{4}=t$，则 $x=7+5t$，$y=4+t$，$z=5+4t$，代入平面的方程得 $t=-1$，即 $M=(2,3,1)$；

所求直线方向向量与已知直线的方向向量垂直，与已知平面的法向量也垂直，

所以可设所求直线 L 的方向向量为 $\vec{a}=(3,-1,2)\times(5,1,4)=(-6,-2,8)//(3,1,-4)$

因此所求直线的方程为：$\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y-3}{1}=\dfrac{z-1}{-4}$。

7. 求两个平面 $2x+y+2z-4=0$ 与 $x+y+5=0$ 的夹角；

解 已知平面的法向量分别为 $\vec{n}_1=(2,1,2)$，$\vec{n}_2=(1,1,0)$，

$\therefore\ \cos\theta=\dfrac{|\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2|}{\|\vec{n}_1\|\|\vec{n}_2\|}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，即两平面的夹角为 $\theta=\dfrac{\pi}{4}$。

8. 求两条直线 $x-1=\dfrac{y-4}{-2}=z+8$ 与 $\begin{cases}x-y=6\\2y+z=3\end{cases}$ 的夹角；

解 将直线 $\begin{cases}x-y=6\\2y+z=3\end{cases}$ 化为对称式方程 $\dfrac{x-6}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-3}{-2}$，

则两直线的方向向量分别为 $\vec{l}_1=(1,-2,1)$，$\vec{l}_2=(1,1,-2)$，

$\therefore\ \cos\theta=\dfrac{|\vec{l}_1\cdot\vec{l}_2|}{\|\vec{l}_1\|\|\vec{l}_2\|}=\dfrac{1}{2}$，即两直线的夹角为 $\theta=\dfrac{\pi}{3}$。

9. 求直线 $\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y-4}{3}=\dfrac{z-5}{6}$ 与平面 $x+y+z=0$ 的交点及夹角；

解 易知直线的参数方程为 $x=3+2t$，$y=4+3t$，$z=5+6t$，代入平面的方程得 $t=-\dfrac{12}{11}$，即 $M=(\dfrac{9}{11},\dfrac{8}{11},-\dfrac{17}{11})$；

已知直线的方向向量为$\vec{a}=(2,3,6)$，平面的法向量为$\vec{n}=(1,1,1)$，

$$\therefore\quad \sin\theta=|\cos(\vec{n},\vec{a})|=\frac{|\vec{n}\cdot\vec{a}_2|}{\|\vec{n}\|\|\vec{a}\|}=\frac{11\sqrt{3}}{21}$$，即直线与平面的夹角为$\theta=\arcsin\frac{11\sqrt{3}}{21}$。

10. 求通过 z 轴，且与平面$2x+y-\sqrt{5}z-7=0$的夹角为$\frac{\pi}{3}$的平面的方程；

解 设所求平面的方程为$Ax+By=0$，则两平面的法向量分别为$\vec{n}_1=(A,B,0)$，

$\vec{n}_2=(2,1,-\sqrt{5})$，

$$\therefore\quad \cos\frac{\pi}{3}=\frac{|\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2|}{\|\vec{n}_1\|\|\vec{n}_2\|}=\frac{|2A+B|}{\sqrt{10}\sqrt{A^2+B^2}}=\frac{1}{2}$$，解之得$B=3A$或$A=-3B$，

即所求平面的方程为：$x+3y=0$或$3x-y=0$。

11. 设平面 S 过 3 点$(1,0,0)$，$(0,1,0)$，$(0,0,1)$，直线L过原点，与 S 的夹角为$\frac{\pi}{4}$，且位于平面$x=y$上，求直线L的方程；

解 设所求直线方向向量$\vec{a}=(l,m,n)$，则直线的方程为：$\frac{x}{l}=\frac{y}{m}=\frac{z}{n}$，

直线位于平面$x=y$上，所以$l=m$，①

又平面 S 的法向量为$\vec{n}=(1,0,-1)\times(1,-1,0)=(-1,-1,-1)//(1,1,1)$，

$$\therefore\quad \sin\frac{\pi}{4}=|\cos(\vec{n},\vec{a})|=\frac{|\vec{n}\cdot\vec{a}_2|}{\|\vec{n}\|\|\vec{a}\|}=\frac{|l+m+n|}{\sqrt{3}\sqrt{l^2+m^2+n^2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$，②

联立①②得$l=m=1$，$n=(4\pm3\sqrt{2})l$

所以所求直线的方程为$x=y=\frac{z}{4\pm3\sqrt{2}}$。

12. 已知一平面平行于平面$6x+3y+2z+21=0$，且与半径为 1 中心在原点的球面相切，求该平面的方程；

解 设所求平面的方程为$6x+3y+2z+D=0$，则中心$(0,0,0)$到平面的距离为$\frac{|D|}{7}=1$，

$\therefore D=\pm7$，即所求平面的方程为$6x+3y+2z\pm7=0$。

13. 证明：若两平行平面于任意第 3 个平面相交，则两条交线平行。

证明：设两平行平面的法向量为$\vec{n}$，第 3 个平面的法向量为$\vec{n}_1$，则两条交线方向向量均可取为$\vec{l}=\vec{n}\times\vec{n}_1$，从而两条交线平行。

14. 证明直线$L_1:\frac{x+1}{3}=\frac{y+1}{2}=\frac{z+1}{1}$与$L_2:x-4=\frac{y+5}{-3}=\frac{z-4}{2}$位于同一平面上，并求这两条直线的交点坐标及所在平面的方程；

证明：直线L_1的方向向量为$\vec{a}_1=(3,2,1)$，且过点$P_1(-1,-1,-1)$，直线L_2的方向向量为$\vec{a}_2=(1,-3,2)$，且过点$P_2(4,-5,4)$，

于是有 $[\vec{a}_1\quad \vec{a}_2\quad \overrightarrow{P_1P_2}]=0$，所以直线$L_1$与直线$L_2$位于同一平面上。

直线L_1参数方程为$x=-1+3t$，$y=-1+2t$，$z=-1+t$，代入的直线L_2的方程得$t=1$，即交点坐标为$(2,1,0)$；

取直线L_1与直线L_2所在平面的法向量为$\vec{n}=\vec{a}_1\times\vec{a}_2=(7,-5,-11)$

于是直线L_1与直线L_2所在平面的方程为：$7x-5y-11z-9=0$。

15. 求点$(1,2,-1)$到平面$x-2y-z+1=0$的距离；

解 由点到平面的距离公式有

$$d=\frac{|Ax_1+By_1+Cz_1+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\frac{1}{\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{6}}{6}。$$

16. 求两个平面$x+y-z+1=0$与$2x+2y-2z-3=0$之间的距离；

解 平面$x+y-z+1=0$过点$P(1,1,3)$，两平面之间的距离就是点$P(1,1,3)$到平面$2x+2y-2z-3=0$的距离：

$$d=\frac{|Ax_1+By_1+Cz_1+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\frac{5\sqrt{3}}{6}。$$

17. 设有直线$L_1:\begin{cases}x-y=3\\3x-y+z=1\end{cases}$，直线$L_2:x+1=\frac{y-5}{-2}=\frac{z}{2}$，点$M(1,0,-1)$

（1）求L_1的对称式方程；

（2）求点M到L_1的距离；

（3）求L_1与L_2之间的距离.

解（1）由$x-y=3$得$x-3=y$，

再将$x=3+y$代入$3x-y+z=1$得$y=\frac{z+8}{-2}$，

于是L_1的对称式方程为：$x-3=y=\frac{z+8}{-2}$；

（2）直线L_1的方向向量为$\vec{a}_1=(1,1,-2)$，且过点$P_1(3,0,-8)$，

于是点M到L_1的距离为：

$$d_1=\left\|\overrightarrow{MP_1}\times\vec{a}_1^{\,0}\right\|=\frac{\left\|\overrightarrow{MP_1}\times\vec{a}_1\right\|}{\|\vec{a}_1\|}=\frac{\|(2,0,7)\times(1,1,-2)\|}{\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{93}}{3}；$$

（3）直线 L_2 的方向向量为 $\vec{a}_2=(1,-2,2)$，且过点 $P_2(-1,5,0)$，

因为 $\left[\vec{a}_1 \quad \vec{a}_2 \quad \overrightarrow{P_1P_2}\right]=-20$，$L_1$ 与 L_2 异面，于是 L_1 与 L_1 之间的距离为:

$$d_2=\frac{\left|\left[\vec{a}_1 \quad \vec{a}_2 \quad \overrightarrow{P_1P_2}\right]\right|}{\|\vec{a}_1\times\vec{a}_2\|}=\frac{20\sqrt{29}}{29} .$$

(B)

求常数 k 的值,使下列 3 个平面过同一直线:

$\pi_1: 3x+2y+4z=1$；$\pi_2: x-8y-2z=3$；$\pi_3: kx-3y+z=2$，

并求出此直线的对称式方程。

解法 1　平面 π_1 与平面 π_2 的交线 L 过 $P(0,\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$，且方向向量为:

$\vec{a}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2=(3,2,4)\times(1,-8,-2)//(14,5,-13)$，

所以交线 L 的参数方程为：$x=14t, y=\frac{1}{2}+5t, z=-\frac{1}{2}-13t$，

直线 L 的方向向量与平面 π_3 的法向量垂直，所以 $\vec{a}\cdot\vec{n}=14k-15-13=0$，即 $k=2$；且当 $k=2$ 时，平面 π_1 与平面 π_2 交线 L 的参数方程满足平面 π_3 的方程，即平面 π_3 通过交线 L，于是当 $k=2$ 时，3 个平面过同一直线。

解法 2　设过平面 π_1 与平面 π_2 的交线的平面束为:

$$3x+2y+4z-1+\lambda(x-8y-2z-3)=0,$$

即　$(3+\lambda)x+(2-8\lambda)y+(4-2\lambda)z-1-3\lambda=0$，

又平面束与平面 π_3 的法向量平行，因此有 $\frac{3+\lambda}{k}=\frac{2-8\lambda}{-3}=\frac{4-2\lambda}{1}$，

解之得 $k=2, \lambda=1$，因此，当 $k=2$ 时，3 个平面过同一直线。

第 3 章习题

1. 填空题

（1）设 $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=2$，则 $[(\vec{a}+\vec{b})\times(\vec{b}+\vec{c})]\cdot(\vec{c}+\vec{a})=$______。

（2）以 $A(5,1,-1)$，$B(0,-4,3)$，$C(1,-3,7)$ 为顶点的三角形的面积=______。

（3）过原点及 $(6,-3,2)$，且与平面 $4x-y+2z=8$ 垂直的平面的方程为____________。

（4）若直线 $x-1=\frac{y+1}{2}=\frac{z-1}{\lambda}$ 与直线 $x+1=y-1=z$ 相交，则 $\lambda=$________。

（5）点 $(2,1,0)$ 到平面 $3x+4y+5z=0$ 的距离为____________。

解　（1）$\because(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=2$，

$\therefore[(\vec{a}+\vec{b})\times(\vec{b}+\vec{c})]\cdot(\vec{c}+\vec{a})=[\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c}]\cdot(\vec{c}+\vec{a})$

$=[\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c}]\cdot\vec{c}+[\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c}]\cdot\vec{a}$

$=\vec{a}\times\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c}\cdot\vec{a}=2\vec{a}\times\vec{b}\cdot\vec{c}=4$。

（2）$\because \overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -5 & -5 & 4\\ -4 & -4 & 8\end{vmatrix}=24\vec{i}-24\vec{j}$，

$\therefore S=\frac{1}{2}\|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\|=12\sqrt{2}$。

（3）过原点及 $(6,-3,2)$ 的方向向量为 $\vec{a}=(6,-3,2)$，已知平面的法向量为 $\vec{n}_1=(4,-1,2)$，所以可取所求平面的法向量 $\vec{n}=\vec{a}\times\vec{n}_1//(2,2,-3)$，因此所求平面的方程为 $2x+2y-3z=0$。

（4）将直线 $x-1=\frac{y+1}{2}=\frac{z-1}{\lambda}$ 的参数方程 $x=1+t, y=-1+2t, z=1+\lambda t$ 代入直线 $x+1=y-1=z$ 中，得 $t=4, \lambda=\frac{5}{4}$。

（5）点 $(2,1,0)$ 到平面 $3x+4y+5z=0$ 的距离:

$$d=\frac{|Ax_1+By_1+Cz_1+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\sqrt{2}。$$

2. 单项选择题

（1）设向量 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 不共面，下列结论正确的是【 B 】

（A）$\vec{a},\vec{c},\vec{a}\times\vec{b}$ 必不共面；　（B）$\vec{c}$ 可由 $\vec{a},\vec{b},\vec{a}\times\vec{b}$ 惟一地线性表示；

（C）当 $\vec{a}\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{b}$ 时，必有 $\vec{b}=\vec{c}$；　（D）当 $\vec{a}\times\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}$ 时，必有 $\vec{b}=\vec{c}$。

解

（2）设 O 为直线 AB 以外的一点，则 3 点 A,B,C 共线的充要条件是【 A 】

（A）存在满足 $\lambda+\mu=1$ 的常数 λ,μ，使得 $\overrightarrow{OC}=\lambda\overrightarrow{OA}+\mu\overrightarrow{OB}$；

（B）若 $k_1\overrightarrow{OA}+k_2\overrightarrow{OB}+k_3\overrightarrow{OC}=\vec{0}$，则 $k_1=k_2=k_3=0$；

（C）若 $k_1\overrightarrow{AB}+k_2\overrightarrow{AC}=\vec{0}$，则 $k_1=k_2=0$；

（D）$(\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB})\cdot\overrightarrow{OC}\neq 0$；

（3）设有直线 $L: x-1=\frac{y+1}{-2}=\frac{z}{6}$ 和平面 $\pi: 2x+3y+z-1=0$，则【 D 】

（A）L 与 π 平行但不在 π 上；　　（B）L 在 π 上；

（C）L 与 π 垂直相交；　　（D）L 与 π 相交但不垂直。

（4）设有直线 $L_1: x=2t-3, y=3t-2, z=-4t+6$ 和

$L_2: x=t+5, y=-4t-1, z=t-4$，则 L_1 与 L_2【 C 】

（A）为异面直线；　　（B）平行但不重合；

（C）相交但不垂直；　　（D）垂直相交。

（5）若 4 点 $A(1,0,-2)$，$B(7,x,0)$，$C(-8,6,1)$，$D(-2,6,1)$ 共面，则 $x=$ 【 C 】

（A）0；　　（B）6；　　（C）4；　　（D）-4。

3．求通过直线 $\begin{cases}2x-z=0\\ x+y-z+5=0\end{cases}$ 且垂直于平面 $7x-y+4z-3=0$ 的平面的方程；

解　设过直线的平面束为：

$$x+y-z+5+\lambda(2x-z)=0,$$

即　$(1+2\lambda)x+y+(-1-\lambda)z+5=0$，

又平面束与已知平面的法向量垂直，因此有 $7(1+2\lambda)-1-4(1+\lambda)=0$，

解之得 $\lambda=-\frac{1}{5}$，因此，所求平面的方程为 $3x+5y-4z+25=0$。

4．直线 L 过点 $P_0(1,0,-2)$，与平面 $3x-y+2z+1=0$ 平行，与直线 $\frac{x-1}{4}=\frac{y-3}{-2}=z$ 相交，求该直线 L 的对称式方程。

解　设直线 L 的方向向量为 $\vec{a}=(l,m,n)$，所求直线与已知直线相交，所以共面，

而已知直线的方向向量 $\vec{a}_1=(4,-2,1)$，且过 $P_1(1,3,0)$，因此

$$\left[\vec{a}\quad \vec{a}_1\quad \overrightarrow{P_0P_1}\right]=\begin{vmatrix}l & m & n\\ 4 & -2 & 1\\ 0 & 3 & 2\end{vmatrix}=-7l-8m+12n=0，①$$

又直线 L 与已知平面法向量 $\vec{n}=(3,-1,2)$ 垂直，$\therefore \vec{a}\cdot\vec{n}=3l-m+2n=0$，②

联立①②解之得：$l=-\frac{2}{25}m$，$n=\frac{31}{50}m$，于是可取直线 L 的方向向量 $\vec{a}=(4,-50,-31)$，

因此直线 L 的对称式方程为：$\frac{x-1}{4}=\frac{y}{-50}=\frac{z+2}{-31}$。

5．求点 $P_0(1,2,3)$ 到直线 $\begin{cases}x+y-z-1=0\\ 2x+z-3=0\end{cases}$ 的距离。

解　已知直线过点 $P_1(0,4,3)$，且方向向量 $\vec{a}=(1,1,-1)\times(2,0,1)=(1,-3,-2)$，

因此点 $P_0(1,2,3)$ 到直线的距离为：$d=\frac{\|\overrightarrow{P_0P_1}\times\vec{a}\|}{\|\vec{a}\|}=\frac{\sqrt{6}}{2}$。

6．设有点 $P_0(2,-3,-1)$，直线 $L_1: \frac{x-1}{-2}=\frac{y+1}{-1}=z$。

（1）求 P_0 且与 L_1 垂直相交的直线的对称式方程；

（2）求 P_0 到 L_1 的垂足点 P_1；

（3）求 P_0 关于 L_1 的对称点 P_2。

解　（1）设过点 P_0 且与 L_1 垂直相交的直线的方向向量 $\vec{a}=(l,m,n)$，则 $\vec{a}=(l,m,n)$ 与直线 L_1 的方向向量 $\vec{a}_1=(-2,-1,1)$ 垂直，所以 $\therefore \vec{a}\cdot\vec{a}_1=-2l-m+n=0$，①

又 $\overrightarrow{P_0P_1},\vec{a},\vec{a}_1$ 共面，$\therefore \left[\vec{a}\quad \vec{a}_1\quad \overrightarrow{P_0P_1}\right]=-3l+m-5n=0$，②

联立①②解之得：$l=-\frac{4}{5}n$，$m=\frac{13}{5}n$，于是可取直线的方向向量 $\vec{a}=(-4,13,5)$，

因此直线 L 的对称式方程为：$\frac{x-2}{-4}=\frac{y+3}{13}=\frac{z+1}{5}$；

（2）联立直线 L_1 与 L 的方程，解之得 $P_1(\frac{4}{3},-\frac{5}{6},-\frac{1}{6})$；

（3）设 P_0 关于直线 L_1 的对称点为 $P_2(x,y,z)$，则

$$\frac{x+2}{2}=\frac{4}{3}，\ \frac{y-3}{2}=-\frac{5}{6}，\ \frac{z-1}{2}=\frac{1}{6}，$$

即　$P_2(\frac{2}{3},\frac{4}{3},\frac{2}{3})$。

7．（1）已知 $\overrightarrow{MP}\perp\overrightarrow{MA}$，将 $\overrightarrow{MP}$ 绕 $\overrightarrow{MA}$ 右旋角度 θ 得 $\overrightarrow{MP_1}$，记 $\vec{e}=\frac{\overrightarrow{MA}}{\|\overrightarrow{MA}\|}$，试用 $\vec{e}$，$\overrightarrow{MP}$ 及 θ 表出 $\overrightarrow{MP_1}$；

（2）设 O,P,A 是 3 个不同点，将 $\overrightarrow{OP}$ 绕 $\overrightarrow{OA}$ 右旋角度 θ 得 $\overrightarrow{OP_1}$，记 $\vec{e}=\frac{\overrightarrow{OA}}{\|\overrightarrow{OA}\|}$，试用 $\vec{e}$，$\overrightarrow{OP}$ 及 θ 表出 $\overrightarrow{OP_1}$；

习题 4.1 (A)

1．用消元法求下列方程组的解：

（1）$\begin{cases} x_1+x_2+5x_3+3x_4=15, \\ x_1+2x_2+3x_3+3x_4=10, \\ x_1+3x_2+2x_3+4x_4=8, \\ 2x_1+5x_2+6x_3+8x_4=21, \\ 2x_1+5x_2+4x_3+7x_4=18; \end{cases}$ （2）$\begin{cases} 2x_1-x_2+4x_3-3x_4=-4, \\ x_1+\quad x_3-x_4=-3, \\ 3x_1+x_2+x_3\quad =1, \\ 7x_1+\quad 7x_3-3x_4=3; \end{cases}$

（3）$\begin{cases} 2x_1-x_2+4x_3-3x_4=-4, \\ x_1+\quad x_3-x_4=-3, \\ 3x_1+x_2+x_3\quad =1, \\ 7x_1+\quad 7x_3-3x_4=3; \end{cases}$ （4）$\begin{cases} 2x_1-x_2+4x_3-3x_4=-4, \\ x_1+\quad x_3-x_4=-3, \\ 3x_1+x_2+x_3\quad =1, \\ 7x_1+\quad 7x_3-3x_4=3; \end{cases}$

解 （1）$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 & 3 & 15 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & 10 \\ 1 & 3 & 2 & 4 & 8 \\ 2 & 5 & 6 & 8 & 21 \\ 2 & 5 & 4 & 7 & 18 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_5-2r_1]{\substack{r_2-r_1 \\ r_3-r_1 \\ r_4-2r_1}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 & 3 & 15 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & -5 \\ 0 & 2 & -3 & 1 & -7 \\ 0 & 3 & -4 & 2 & -9 \\ 0 & 3 & -6 & 1 & -12 \end{bmatrix}$

$$\xrightarrow{\substack{r_3-2r_2 \\ r_4-3r_2 \\ r_5-3r_2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 & 3 & 15 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_4-2r_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 & 3 & 15 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix},$$

与最后这个简化行阶梯形矩阵对应的方程组（原方程组的同解方程组）为

$$\begin{cases} x_1+x_2+5x_3+3x_4=15, \\ x_2-2x_3\quad =-5, \\ x_3+x_4=3, \\ \\ x_4=3; \end{cases}$$

于是得方程组有唯一解：$\begin{cases} x_1=11, \\ x_2=-5, \\ x_3=0, \\ x_4=3; \end{cases}$

（2）$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 & -3 & -4 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & -3 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 7 & 0 & 7 & -3 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{r_1-2r_2 \\ r_3-3r_2 \\ r_4-7r_2 \\ r_2 \leftrightarrow r_1}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 24 \end{bmatrix}$

$$\xrightarrow{\substack{r_3+r_2 \\ r_4-2(r_2+r_3) \\ r_3 \div 2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

与最后这个简化行阶梯形矩阵对应的方程组（原方程组的同解方程组）为

$$\begin{cases} x_1+\quad x_3-x_4=-3, \\ -x_2+2x_3-x_4=2, \\ x_4=6; \end{cases}$$

设 x_3 为自由未知量，于是得方程组有无穷多个解，

$$\begin{cases} x_1=-x_3+3, \\ x_2=2x_3-8, \\ x_4=6; \end{cases} \qquad \text{（} x_3 \text{可以任意取值）。}$$

（3）$\begin{bmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 4 & 7 & 5 \\ 1 & 1 & -4 \\ 2 & 9 & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{r_1 \leftrightarrow r_3 \\ r_2-4r_3 \\ r_1-3r_3 \\ r_4-2r_3}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -4 \\ 0 & 3 & 21 \\ 0 & 2 & 14 \\ 0 & 7 & 14 \end{bmatrix}$

$$\xrightarrow{\substack{r_3 \div 2 \\ r_3-\frac{2}{3}r_2 \\ r_4 \div 7}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{r_4 \leftrightarrow r_3 \\ r_4-r_2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

所以该方程组只有零解：

$$x_1=0, x_2=0, x_3=0;$$

（4）$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & 4 & 2 \\ 7 & 9 & -3 & 5 & 6 \\ 5 & 9 & -3 & 1 & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{r_2-2r_1 \\ r_3-r_4 \\ r_4-5r_1}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 6 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 9 & -3 & 6 & 6 \end{bmatrix}$

$$\xrightarrow[r_4+r_3]{\substack{(r_3-2r_1)\div 6\\(r_4-3r_2)\div 12}}\begin{bmatrix}1&0&1&-1&0\\0&3&-1&6&2\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix},$$

与最后这个简化行阶梯形矩阵对应的方程组（原方程组的同解方程组）为

$$\begin{cases}x_1 \qquad\qquad -x_4=0,\\3x_2-x_3+6x_4+2x_5=0,\\ \qquad\qquad x_4 \quad =0;\end{cases}$$

设 x_3， x_5 为自由未知量，于是得方程组有无穷多个解，

$$\begin{cases}x_1=0,\\x_2=\dfrac{1}{3}x_3-\dfrac{2}{3}x_5,\\x_4=0;\end{cases}\qquad（x_3，x_5 可以任意取值）。$$

2．已知平面上 3 条不同直线的方程分别为（其中 a,b,c 为常数）

$ax+2by+3c=0$， $bx+2cy+3a=0$， $cx+2ay+3b=0$

证明：这 3 条直线交于一点的充分必要条件为 $a+b+c=0$。

证明：3 条直线交于一点 $\Leftrightarrow$ 3 条直线方程联立所得方程组有惟一解；

$$\Leftrightarrow r(\overline{A})=r(A)=2$$

$$\Leftrightarrow \det(\overline{A})=0 \text{ 即} \begin{vmatrix}a&2b&-3c\\b&2c&-3a\\c&2a&-3b\end{vmatrix}=0,$$

$$\Leftrightarrow (a+b+c)[(a-b)^2+(a-c)^2+(b-c)^2]=0$$

由已知平面上 3 条不同直线，知

$(a-b)^2+(a-c)^2+(b-c)^2\neq 0$（否则 3 条直线相同）

$\Leftrightarrow a+b+c=0$。

习题 4.2（A）

1．设 a_1,a_2,a_3 是互不相同的数，证明：任一 3 维向量 $\beta=(b_1,b_2,b_3)^T$ 都可由向量组 $\alpha_1=(1,a_1,a_1^2)^T$， $\alpha_2=(1,a_2,a_2^2)^T$， $\alpha_3=(1,a_3,a_3^2)^T$ 线性表出。

证明：设 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，

$\because\ \det(A)=(a_3-a_2)(a_3-a_1)(a_2-a_1)\neq 0$，

$\therefore\ \alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，而 $\beta,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是 4 个 3 维向量必线性相关，

所以对于任一 3 维向量 β 都可由向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表出。

2．试将向量 β 用向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性表示，其中 $\beta=(1,2,1,1)^T$， $\alpha_1=(1,1,1,1)^T$， $\alpha_2=(1,1,-1,-1)^T$， $\alpha_3=(1,-1,1,-1)^T$， $\alpha_4=(1,-1,-1,1)^T$。

解　设有一组数 x_1,x_2,x_3,x_4，使得 $\beta=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3+x_4\alpha_4$，

记作 $$\beta=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=Ax$$

$$\overline{A}=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\beta)=\begin{bmatrix}1&1&1&1&1\\1&1&-1&-1&2\\1&-1&1&-1&1\\1&-1&-1&1&1\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}1&1&1&1&1\\0&0&-2&-2&1\\0&-2&0&-2&0\\0&0&0&4&-1\end{bmatrix},$$

$$\therefore\ x_1=\frac{5}{4},x_2=\frac{1}{4},x_3=-\frac{1}{4},x_4=-\frac{1}{4},$$

即 $\beta=\dfrac{5}{4}\alpha_1+\dfrac{1}{4}\alpha_2-\dfrac{1}{4}\alpha_3-\dfrac{1}{4}\alpha_4$。

3．设向量 $\beta=(-1,0,1,b)^T$， $\alpha_1=(3,1,0,0)^T$， $\alpha_2=(2,1,1,-1)^T$， $\alpha_3=(1,1,2,a-3)^T$，问 a,b 取何值时，β 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示？并求出此表示式。

解　设有一组数 x_1,x_2,x_3，使得 $\beta=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3$， 记作 $Ax=\beta$，

对该非齐次线性方程组的增广矩阵进行初等变换，

$$\overline{A}=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta)=\begin{bmatrix}3&2&1&-1\\1&1&1&0\\0&1&2&1\\0&-1&a-3&b\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}1&1&1&0\\0&1&2&1\\0&0&a-1&b+1\\0&0&0&0\end{bmatrix},$$

（1）当 $a=1,b\neq -1$ 时，方程组无解，β 不能由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表出；

（2）当 $a\neq 1$ 时， $r(\overline{A})=r(A)=3$，方程组有惟一解，

$$\text{由}\begin{bmatrix}1&1&1&0\\0&1&2&1\\0&0&a-1&b+1\\0&0&0&0\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}1&0&0&\dfrac{b-a+2}{a-1}\\0&1&0&\dfrac{a-2b-3}{a-1}\\0&0&1&\dfrac{b+1}{a-1}\\0&0&0&0\end{bmatrix}\text{知，}$$

方程组唯一的解为：$x_1=\dfrac{b-a+2}{a-1}, x_2=\dfrac{a-2b-3}{a-1}, x_3=\dfrac{b+1}{a-1}$，

从而β可由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$唯一线性表示，且$\beta=\dfrac{b-a+2}{a-1}\alpha_1+\dfrac{a-2b-3}{a-1}\alpha_2+\dfrac{b+1}{a-1}\alpha_3$；

（3）当$a=1,b=-1$时，$r(\overline{A})=r(A)=2<3$，方程组有无穷多个解，

由$\begin{bmatrix}1&1&1&0\\0&1&2&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}1&0&-1&-1\\0&1&2&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$知

方程组的通解为：$x_1=-1+c, x_2=1-2c, x_3=c$

从而β可由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示，且

$\beta=(-1+c)\alpha_1+(1-2c)\alpha_2+c\alpha_3$，其中$c$为任意常数；

4．下列命题是否正确？如正确，给出证明；如不正确，举出反例：

（1）若向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$线性相关，则其中每一个向量都可由该组其余 m-1 个向量线性表示；

（2）若向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$中存在一个向量不能由该组其余 m-1 个向量线性表示，则该向量组线性无关；

（3）齐次线性方程组$Ax=0$只有零解的充要条件是的A列向量组线性无关；

（4）对于实向量$x=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^T$，则$x^Tx\ge 0$，而且$x^Tx=0\Leftrightarrow x=0$；

解　（1）不正确。例如向量组$\alpha_1=(1,0,0)^T$，$\alpha_2=(2,0,0)^T$，$\alpha_3=(0,1,0,)^T$线性相关，但α_3不能由α_1,α_2线性表示；

（2）不正确。例如向量组$\alpha_1=(1,0,0)^T$，$\alpha_2=(2,0,0)^T$，$\alpha_3=(0,1,0,)^T$线性相关，但α_3不能由α_1,α_2线性表示；

（3）正确。将A按列分块$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$，则$Ax=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_m\alpha_m=0$，

因为齐次线性方程组$Ax=0$只有零解，所以$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$线性无关；

若$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$线性无关，则$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_m\alpha_m=0$成立，有

$x_1=x_2=\cdots=x_m=0$，即齐次线性方程组$Ax=0$只有零解。

（4）正确。$\because x^Tx=a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2$，$\therefore x^Tx\ge 0$；

$x^Tx=0\Leftrightarrow a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2=0\Leftrightarrow a_1=a_2=\cdots=a_n=0\Leftrightarrow x=0$。

5．问λ取何值时，向量组$\alpha_1=(\lambda,-\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$，$\alpha_2=(-\frac{1}{2},\lambda,-\frac{1}{2})$，$\alpha_2=(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\lambda)$，线性相关？

解　$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性相关，则$\det(\alpha_1^T,\alpha_2^T,\alpha_3^T)=0$

即$\begin{vmatrix}\lambda&-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}&\lambda&-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&\lambda\end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda+\frac{1}{2})=0$，

$\therefore\lambda=1$或$\lambda=-\dfrac{1}{2}$。

6．设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$是一组维列向量，证明：向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性无关的充分必要条件是行列式：$D=\begin{vmatrix}\alpha_1^T\alpha_1&\alpha_1^T\alpha_2&\cdots&\alpha_1^T\alpha_n\\\alpha_2^T\alpha_1&\alpha_2^T\alpha_2&\cdots&\alpha_2^T\alpha_n\\\vdots&\vdots&&\vdots\\\alpha_n^T\alpha_1&\alpha_n^T\alpha_2&\cdots&\alpha_n^T\alpha_n\end{vmatrix}\neq 0$。

证明：设$A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$，　则向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性无关$\Leftrightarrow\det(A)\neq 0$，

$\Leftrightarrow D=\det(A^TA)=[\det(A)]^2\neq 0$.

7．判断下列向量组的线性相关性：

（1）$\alpha_1=(6,2,4,-9)^T$，$\alpha_2=(3,1,2,3)^T$，$\alpha_3=(15,3,2,0)^T$；

（2）$\alpha_1=(2,-1,3,2)^T$，$\alpha_2=(-1,-2,1,-1)^T$，$\alpha_3=(0,-1,1,0)^T$；

（3）$\alpha_1=(1,-a,1,1)^T$，$\alpha_2=(1,1,-a,1)^T$，$\alpha_3=(1,1,1,-a)^T$；

解　利用矩阵的秩判定向量组的线性相关与线性无关性。

（1）$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=\begin{bmatrix}6&3&15\\2&1&3\\4&2&2\\-9&3&0\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}6&3&15\\0&1&3\\0&0&2\\0&0&0\end{bmatrix}$,

$\because r(A)=3$，　$\therefore\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关；

（2）$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=\begin{bmatrix}2&-1&0\\-1&-2&-1\\3&1&1\\2&-1&0\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}0&-1&0\\0&-2&-1\\0&1&1\\0&-1&0\end{bmatrix}$,

$\because r(A)=2<3$， $\therefore \alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关；

（3） $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=\begin{bmatrix}1&1&1\\-a&1&1\\1&-a&1\\1&1&-a\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}1&1&1\\0&a+1&a+1\\0&-a-1&0\\0&0&-a-1\end{bmatrix}$，

当 $a=-1$ 时，$r(A)=2<3$， $\therefore \alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关；

当 $a\neq-1$ 时，$r(A)=3$， $\therefore \alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关。

8．试说出定理 4.2.3 的逆否命题。

解 向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性无关的充分必要条件是该向量组中每一个向量都不能由其余 *m*-1 个向量线性表示。

9．利用定理 4.2.2 证明：若 *r* 维向量组

$$\alpha_j=(a_{1j},a_{2j},\cdots,a_{rj})^T,\quad j=1,2,\cdots,s$$

线性无关，则对 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 中每个向量在相同位置上任意添加分量所得的 r+1 维向量组

$$\beta_j=(a_{1j},a_{2j},\cdots,a_{rj},a_{r+1,j})^T,\quad j=1,2,\cdots,s$$

也线性无关，并说出此命题的逆否命题。

证明：用反证法。设向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 线性相关，利用定理 4.2.2 知：

方程组 $[\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s]\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_s\end{pmatrix}=0$ 有非零解 $x=(a_1,a_2,\cdots,a_s)^T$，

而该非零解 $x=(a_1,a_2,\cdots,a_s)^T$ 也是方程组 $[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s]\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_s\end{pmatrix}=0$ 的非零解，

于是利用定理 4.2.2 知 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性线性相关，与已知矛盾，即结论成立。

逆否命题：若 r+1 维向量组

$$\beta_j=(a_{1j},a_{2j},\cdots,a_{rj},a_{r+1,j})^T,\quad j=1,2,\cdots,s$$

线性相关，则对 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 中每个向量去掉在相同位置上的分量所得的 r 维向量组

$$\alpha_j=(a_{1j},a_{2j},\cdots,a_{rj})^T,\quad j=1,2,\cdots,s$$

仍线性相关。

10．设向量 β 可向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性表示，但 β 不能由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{m-1}$ 线性表示，

证明：α_m 可以由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{m-1},\beta$ 线性表示。

证明：向量 β 可向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性表示知，有 *k* 个常数 $k_1,k_2,\cdots,k_m$，使得

$$\beta=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m$$

又 β 不能由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{m-1}$ 线性表示知 β $k_m\neq0$，（否则，β 能由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{m-1}$ 线性表示）

于是有 $$\alpha_m=\frac{1}{k_m}(\beta-k_1\alpha_1-k_2\alpha_2-\cdots-k_{m-1}\alpha_{m-1})$$

即 α_m 可以由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{m-1},\beta$ 线性表示

11．设向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关，而向量组 $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性无关，问

（1）α_1 能否由 α_2,α_3 线性表示，为什么？

（2）α_4 能否由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示，为什么？

解 （1）能。因为向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关，

所以存在不全为零的常数 k_1,k_2,k_3，使得 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3=0$；

又向量组 $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性无关知 α_2,α_3 线性无关，因此 $k_1\neq0$（否则 α_2,α_3 线性相关），

于是 $\alpha_1=-\dfrac{k_2}{k_1}\alpha_2-\dfrac{k_3}{k_1}\alpha_3$，即 α_1 能由 α_2,α_3 线性表示；

（2）不能。由（1）知 α_1 能由 α_2,α_3 线性表示，

假设 α_4 能由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示，则 α_4 能由 α_2,α_3 线性表示，即 $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性相关，与已知矛盾，即 α_4 不能由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示。

12．设向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m\ (m\geq3)$ 线性无关，证明：向量组 $\beta_1=\alpha_2+\alpha_3+\cdots+\alpha_m$，$\beta_2=\alpha_1+\alpha_3+\cdots+\alpha_m$，…，$\beta_m=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_{m-1}$ 线性无关。

证明：设存在一组数 $k_1,k_2,\cdots,k_m$，使得

$$\begin{aligned}0&=k_1\beta_1+k_2\beta_2+\cdots+k_m\beta_m\\&=(k_2+k_3+\cdots+k_m)\alpha_1+(k_1+k_3+\cdots+k_m)\alpha_2+\cdots+(k_1+k_2+\cdots+k_m)\alpha_m\end{aligned}$$

因为向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性无关, 所以上市成立的充分必要条件是系数全为零，即

$$\begin{cases}k_2+k_3+\cdots+k_m=0\\k_1+k_3+\cdots+k_m=0\\\qquad\cdots\\k_1+k_2+\cdots+k_{m-1}=0\end{cases},$$

上面以$k_1,k_2,\cdots,k_m$为未知数的方程组的系数行列式$D\neq 0$，所以该方程组有惟一的零解，即$k_1=k_2=\cdots=k_m=0$，因此向量组$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$线性无关。

13．设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_t$为齐次线性方程组$Ax=0$的$t$个线性无关的解向量，而向量$\beta$是非齐次线性方程组$Ax=b$的解，证明：$\beta,\alpha_1+\beta,\alpha_2+\beta,\cdots,\alpha_t+\beta$是方程组$Ax=b$的 t+1 个线性无关的解向量。

证明：因为$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_t$为齐次线性方程组$Ax=0$的$t$个线性无关的解向量，

所以 $A\alpha_i=0,\quad i=1,2,\cdots,t.$ ①

又向量β是非齐次线性方程组$Ax=b$的解，即

$$A\beta=b\text{，}\quad ②$$

将①②式相加得，$A(\beta+\alpha_i)=b,\quad i=1,2,\cdots,t.$

所以$\beta,\alpha_1+\beta,\alpha_2+\beta,\cdots,\alpha_t+\beta$是方程组$Ax=b$的 t+1 个解向量；

设存在一组数$k_1,k_2,\cdots,k_{t+1}$，使得

$$0=k_1(\alpha_1+\beta)+k_2(\alpha_2+\beta)+\cdots+k_t(\alpha_t+\beta)+k_{t+1}\beta$$

$$=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_t\alpha_t+(k_1+k_2+\cdots+k_{t+1})\beta\text{，}\quad ③$$

给③式两边左乘矩阵 A，再将①②代入得，$k_1+k_2+\cdots+k_{t+1}=0$

因为向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_t$线性无关，所以$k_1=k_2=\cdots=k_t=0$，

从而有$k_{t+1}=0$，于是向量组$\beta,\alpha_1+\beta,\alpha_2+\beta,\cdots,\alpha_t+\beta$线性无关；

综上得：$\beta,\alpha_1+\beta,\alpha_2+\beta,\cdots,\alpha_t+\beta$是方程组$Ax=b$的 t+1 个线性无关的解向量。

14．设向量β可向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$线性表示，证明：

表示式惟一$\Leftrightarrow$向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$线性无关。

证明： 向量β可向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$线性表示，即存在一组数$x_1,x_2,\cdots,x_m$，使得

$$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_m\alpha_m=\beta\text{，}\quad ①$$

表示式惟一$\Leftrightarrow$方程组①有惟一解；

$\Leftrightarrow r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m,\beta)=r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)=m$，

$\Leftrightarrow$向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$线性无关。

15．设向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$线性无关，而且向量$\beta$不能由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$线性表示，

证明：$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m,\beta$线性无关。

证明：设有一组数$k,k_1,k_2,\cdots,k_m$，使得

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m+k\beta=0\quad\text{，}①$$

因为向量β不能由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$线性表示，

所以$k=0$（否则向量β可以由由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$线性表示），

因为向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$线性无关，所以

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m=0\Leftrightarrow k_1=k_2=\cdots=k_m=0\text{，}$$

所以向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m,\beta$线性无关。

16．设向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$线性无关，向量组$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$可由向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$线性表示，写成矩阵的形式就是

$$[\beta_1\ \beta_2\cdots\beta_s]=[\alpha_1\ \alpha_2\cdots\alpha_r]B\quad\text{，}$$

其中矩阵$B=(b_{ij})_{r\times s}$，试证向量组$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$线性无关$\Leftrightarrow r(B)=s$，特别当$s=r$时有$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$线性无关$\Leftrightarrow\det(B)\neq 0$。

证明：必要性。因为向量组$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$线性无关，$\therefore r(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s)=s$，

又$[\beta_1\ \beta_2\cdots\beta_s]=[\alpha_1\ \alpha_2\cdots\alpha_r]B$，$\therefore s\leq r(B)\leq r(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s)=s$，即$r(B)=s$。

充分性。设有一组数$k_1,k_2,\cdots,k_s$，使得

$$k_1\beta_1+k_2\beta_2+\cdots+k_s\beta_s=0\text{，}\quad ①$$

由$[\beta_1\ \beta_2\cdots\beta_s]=[\alpha_1\ \alpha_2\cdots\alpha_r]B$知，

$$\beta_j=b_{1j}\alpha_1+b_{2j}\alpha_2+\cdots+b_{rj}\alpha_r,\quad j=1,2,\cdots,s.\ ②$$

将②代入①有

$$\begin{aligned}&(k_1b_{11}+k_2b_{12}+\cdots+k_sb_{1s})\alpha_1+(k_1b_{21}+k_2b_{22}+\cdots+k_sb_{2s})\alpha_2\\&+\cdots+(k_1b_{r1}+k_2b_{r2}+\cdots+k_sb_{rs})\alpha_r=0\end{aligned}\text{，}\quad ③$$

又向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$线性无关，所以③中系数全为零。

考察齐次线性方程组$Bx=0$，由于$r(B)=s=$未知数的个数，所以该方程组只有零解。

即$k_1=k_2=\cdots=k_s=0$，所以向量组$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$线性无关。

特别地，当$s=r$时，有$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$线性无关$\Leftrightarrow r(B)=s\Leftrightarrow\det(B)\neq 0$，从而结论成立。

17．设向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关，试利用上题的结论判别下列向量组的线性相关性。

（1）$\beta_1=\alpha_1+2\alpha_2$，$\beta_2=2\alpha_2+3\alpha_3$，$\beta_3=4\alpha_3-\alpha_1$；

（2）$\beta_1=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$，$\beta_2=2\alpha_1-3\alpha_2+22\alpha_3$，$\beta_3=3\alpha_1+5\alpha_2-5\alpha_3$；

解 （1）$\because [\beta_1\ \beta_2\ \beta_3]=[\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3]B$，其中 $B=\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\ 2 & 2 & 0\\ 0 & 3 & 4\end{bmatrix}$，

$\because \det(B)=2\neq 0$，且 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，$\therefore \beta_1,\beta_2,\beta_3$ 线性无关；

（2）$\because [\beta_1\ \beta_2\ \beta_3]=[\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3]C$，其中 $C=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & -3 & 5\\ 1 & 22 & 5\end{bmatrix}$，

$\because \det(C)=0$，$\therefore \beta_1,\beta_2,\beta_3$ 线性相关。

(B)

1．设 A 为 n 阶方阵，k 为正整数，α 为齐次线性方程组 $A^kx=0$ 的解向量，但 $A^{k-1}\alpha\neq 0$ 证明：向量组 $\alpha,A\alpha,\cdots,A^{k-1}\alpha$ 线性无关。

证明： 设有一组数 $x_1,x_2,\cdots,x_k$，使得

$$x_1\alpha+x_2A\alpha+\cdots+x_kA^{k-1}\alpha=0，①$$

因为 α 为齐次线性方程组 $A^kx=0$ 的解向量，所以

$$A^k\alpha=0\ ，\ A^{k+1}\alpha=0\ ，\ \ldots，\ A^{2k-2}\alpha=0，\ ②$$

给①式两边左乘 A^{k-1}，再②式将代入有 $x_1A^{k-1}\alpha=0$，由 $A^{k-1}\alpha\neq 0$ 知 $x_1=0$，

同理给①式两边分别左乘 A^{k-2}，A^{k-3}，… ，A，可得

$$x_2=0，\ x_3=0，\ \ldots\ ，\ x_k=0，$$

因此向量组 $\alpha,A\alpha,\cdots,A^{k-1}\alpha$ 线性无关。

2．设 $\alpha_i=(a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in})^T$，$(i=1,2,\cdots,r\,;r<n)$，已知向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性无关，且 $\beta=(b_1,b_2,\cdots,b_n)^T$ 是齐次线性方程组 $\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}x_j=0\,(i=1,2,\cdots,r)$ 的非零解向量，试判定向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r,\beta$ 的线性相关性。

解 设有一组数 $k,k_1,k_2,\cdots,k_r$，使得

$$k\beta+k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_r\alpha_r=0，①$$

因为 β 为齐次线性方程组 $\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}x_j=0\,(i=1,2,\cdots,r)$ 的非零解向量，所以

$$\beta^T\alpha_i=\sum_{j=1}^{n}b_ja_{ij}=0\quad ，\ \beta^T\beta\neq 0，\ ②$$

给①式两边左乘 β^T，再②式将代入有

$$\beta^T(k\beta+k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_r\alpha_r)=k\beta^T\beta=0$$

于是有 $k=0$，$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_r\alpha_r=0$，

又向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性无关，有 $k_1=k_2=\cdots=k_r=0$，

所以向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r,\beta$ 的线性无关。

习题 4.3 (A)

1．已知向量组 $(a,3,1)^T$，$(2,b,3)^T$，$(1,2,1)^T$，$(2,3,1)^T$ 的秩为 2，试求 a，b 的值。

解 因为 $(1,2,1)^T$，$(2,3,1)^T$ 的线性无关，且向量组的秩为 2，

所以向量组 $(a,3,1)^T$，$(1,2,1)^T$，$(2,3,1)^T$ 和 $(2,b,3)^T$，$(1,2,1)^T$，$(2,3,1)^T$ 皆线性相关，

于是有 $\begin{vmatrix}a & 1 & 2\\ 3 & 2 & 3\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}=-a+2=0$ 和 $\begin{vmatrix}2 & 1 & 2\\ b & 2 & 3\\ 3 & 1 & 1\end{vmatrix}=b-5=0$，即 $a=2,b=5$。

2．求下列向量组的一个极大无关组及向量组的秩，并用极大无关组线性表示该组中其他向量：

（1）$\alpha_1=(1,-1,2,4)^T$，$\alpha_2=(0,3,1,2)^T$，$\alpha_3=(3,0,7,14)^T$，$\alpha_4=(1,-2,2,0)^T$，$\alpha_5=(2,1,5,10)^T$；

（2）$\alpha_1=(1,1,1,1)^T$，$\alpha_2=(1,2,3,4)^T$，$\alpha_3=(0,-1,1,0)^T$，$\alpha_4=(1,3,7,13)^T$，$\alpha_5=(1,2,5,10)^T$；

解 （1）将 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5)$ 用初等变换化为阶梯形

$$A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 3 & 1 & 2\\ -1 & 3 & 0 & -2 & 1\\ 2 & 1 & 7 & -2 & 5\\ 4 & 2 & 14 & 0 & 10\end{bmatrix}\xrightarrow[r_4-4r_1]{\substack{r_2+r_1\\ r_3-2r_1}}\begin{bmatrix}1 & 0 & 3 & 1 & 2\\ 0 & 3 & 3 & -1 & 3\\ 0 & 1 & 1 & 4 & 1\\ 0 & 2 & 2 & 4 & 2\end{bmatrix},$$

$$\xrightarrow[r_4-2r_2]{\substack{r_2\leftrightarrow r_3\\ r_3-3r_2}}\begin{bmatrix}1 & 0 & 3 & 1 & 2\\ 0 & 1 & 1 & -4 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 11 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 12 & 0\end{bmatrix}\xrightarrow[r_4-r_3]{\substack{r_3\div 11\\ r_4\div 12}}\begin{bmatrix}1 & 0 & 3 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 1 & -4 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

所以极大无关组为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$，向量组的秩为 3，且

$$\alpha_3=3\alpha_1+\alpha_2，\ \alpha_5=2\alpha_1+\alpha_2。$$

（2）将 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5)$ 用初等变换化为阶梯形

$$A=\begin{bmatrix}1&1&1&1&1\\1&2&4&3&2\\1&3&9&7&5\\1&4&16&13&10\end{bmatrix}\xrightarrow[r_4-r_1]{\substack{r_2-r_1\\r_3-r_1}}\begin{bmatrix}1&1&1&1&1\\0&1&3&2&1\\0&2&8&6&4\\0&3&15&12&9\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_4-2r_3]{\substack{r_3\div 2-r_2\\r_4\div 3-r_2}}\begin{bmatrix}1&1&1&1&1\\0&1&3&2&1\\0&0&1&1&1\\0&0&0&0&0\end{bmatrix},$$

所以极大无关组为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$，向量组的秩为 3，且

$$\alpha_4=\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3，\ \alpha_5=2\alpha_1-2\alpha_2+\alpha_3。$$

3．设有向量组（I）：$\alpha_1=(1,1,1,3)^T$，$\alpha_2=(-1,-3,5,1)^T$，$\alpha_3=(3,2,-1,p+2)^T$，$\alpha_4=(-2,-6,10,p)^T$，

（1）p 取何值时，向量组（I）线性无关？并在此时将 $\alpha=(4,1,6,10)^T$ 用向量组（I）线性表出；

（2）p 取何值时，向量组（I）线性相关？并在此时求向量组（I）的秩及一个极大无关组。

解　记 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha)$，并将其用初等变换化为阶梯形

$$A=\begin{bmatrix}1&-1&3&-2&4\\1&-3&2&-6&1\\1&5&-1&10&6\\3&1&p+2&p-2&-8\end{bmatrix}\xrightarrow[r_4-3r_1]{\substack{r_2-r_1\\r_3-r_1}}\begin{bmatrix}1&-1&3&-2&4\\0&-2&-1&-4&-3\\0&6&-4&12&2\\0&4&p-7&p+6&-2\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_4-2r_2]{\substack{r_2(-1)\\r_3-3r_2}}\begin{bmatrix}1&-1&3&-2&4\\0&2&1&4&3\\0&0&-7&0&-7\\0&0&p-9&p-2&-8\end{bmatrix}\xrightarrow[r_4-(p-9)r_3]{r_3\div(-7)}\begin{bmatrix}1&-1&3&-2&4\\0&2&1&4&3\\0&0&1&0&1\\0&0&0&p-2&1-p\end{bmatrix},$$

所以（1）当 $p\neq 2$ 时向量组（I）线性无关，且由阶梯形可得

$$\alpha=2\alpha_1-\frac{3p-4}{p-2}\alpha_2+\alpha_3+\frac{1-p}{p-2}\alpha_4\ ；$$

（2）当 $p=2$ 时，向量组（I）线性相关，此时向量组（I）的秩为 3，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是一个极大无关组。

4．设 $\beta_1=\alpha_1+\alpha_2$，$\beta_2=\alpha_2+\alpha_3$，…，$\beta_m=\alpha_m+\alpha_1$，其中 m 为大于 2 的奇数，

证明：向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$ 与向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 有相同的秩。

证法 1：$\because \beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_m=2(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_m)$

$$=2\alpha_1+2(\alpha_2+\alpha_3)+\cdots+2(\alpha_{m-1}+\alpha_m)=2\alpha_1+2(\beta_2+\beta_4+\cdots+\beta_{m-1}),$$

$$\therefore \alpha_1=\frac{1}{2}(\beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_m)-(\beta_2+\beta_4+\cdots+\beta_{m-1}),$$

$\because \beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_m=2(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_m)$

$$=2\alpha_2+2(\alpha_3+\alpha_4)+\cdots+2(\alpha_m+\alpha_1)=2\alpha_2+2(\beta_3+\beta_5+\cdots+\beta_m),$$

$$\therefore \alpha_2=\frac{1}{2}(\beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_m)-(\beta_3+\beta_5+\cdots+\beta_m),$$

依次类推，有 $\because \beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_m=2(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_m)$

$$=2\alpha_1+2(\alpha_2+\alpha_3)+\cdots+2(\alpha_{m-1}+\alpha_m)=2\alpha_1+2(\beta_2+\beta_4+\cdots+\beta_{m-1}),$$

$$\therefore\ \alpha_m=\frac{1}{2}(\beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_m)-(\beta_1+\beta_3+\cdots+\beta_{m-2}),$$

即向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 可由向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$ 线性表出，

已知向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$ 可由向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性表出，所以向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$ 与向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 有相同的秩。

证法 2 记 $B=[\beta_1\ \beta_2\cdots\beta_m]'$，$A=[\alpha_1\ \alpha_2\cdots\alpha_m]'$，　$\beta\ \beta\ \beta\ \beta$

则 $B=AC$，其中

$$C=\begin{bmatrix}1&&&\\1&1&&\\&\ddots&\ddots&\\&&1&1\end{bmatrix}，$$

且 $\det(C)=1\neq 0$，

所以 $r(B)=r(A)$，于是向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$ 与向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 有相同的秩。

5．举例说明下面的命题是错误的：

若向量组（I）与向量组（II）有相同的秩，则（I）与（II）等价。

解　向量组（I）：$\alpha_1=(1,0)^T$，$\alpha_2=(0,1)^T$；

向量组（II）：$\beta_1=(1,0,0)^T$，$\beta_2=(0,1,0)^T$；

$r(\mathrm{I})=r(\mathrm{II})=2$，但是（I）与（II）不等价。

6．已知 3 维向量组（I）$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 与 3 维向量组（II）β_1,β_2,β_3 的秩都是 3，

证明：（I）与（II）等价。

证明：因为 3 维向量组（I）$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 与 3 维向量组（II）的秩是 3，所以向量组（I）线性无关，而 4 个 3 维 向量 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_i\ (i=1,2,3)$ 线性相关，因此 β_1,β_2,β_3 可由向量组

（I）线性表示；

同理，向量组（I）可由向量组（II）线性表示，所以（I）与（II）等价。

7．设向量组（I）$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是一个 n 维向量组，且 n 维基本单位向量组（II）$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 可由向量组（I）线性表示，证明：向量组（I）线性无关。

证明：因为基本单位向量组（II）可由向量组（I）线性表示，所以 $r(\mathrm{II})\le r(\mathrm{I})$，

又 $n=r(\mathrm{II})\le r(\mathrm{I})\le n$，$\therefore r(\mathrm{I})=n$，即向量组（I）线性无关。

8．证明：（1）向量组（II）可以由向量组（I）线性表示 $\Leftrightarrow r(\mathrm{I})=r(\mathrm{I},\mathrm{II})$；

（2）向量组（I）与向量组（II）等价 $\Leftrightarrow r(\mathrm{I})=r(\mathrm{II})=r(\mathrm{I},\mathrm{II})$；

（3）矩阵方程 $AX=B$ 有解 $\Leftrightarrow r(A)=r(A\vdots B)$，其中 A 为 $m\times n$ 矩阵，B 为 $m\times p$ 矩阵。

证明：（1）**必要性**。向量组（II）可以由向量组（I）线性表示，且向量组（I）可以由向量组（I）线性表示，即向量组（I，II）可以由向量组（I）线性表示，因此

$$r(\mathrm{I},\mathrm{II})\le r(\mathrm{I})，①$$

又向量组（I）也可以由向量组（I，II）线性表示，因此

$$r(\mathrm{I})\le r(\mathrm{I},\mathrm{II})，②$$

由①②知 $r(\mathrm{I})=r(\mathrm{I},\mathrm{II})$。

充分性。设 $r(\mathrm{I})=r(\mathrm{I},\mathrm{II})=r$，$(i):\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 是（I）的极大无关组，

对于向量组（II）中的任一向量 β，$r(\mathrm{I})=r(i)=r(\alpha_1\cdots\alpha_r\ \beta)=r$，

$\therefore \alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r,\beta$ 线性相关，

又 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性无关，所以 β 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性表示，

从而向量（II）可以由向量组（I）线性表示。

（2）**必要性**。向量组（I）与向量组（II）等价，即可以相互线性表示，利用（1）的结论有且向量组（I）可以由向量组（I）线性表示，即向量组（I，II）可以由向量组（I）线性表示，因此 $r(\mathrm{I})=r(\mathrm{I},\mathrm{II})$，且 $r(\mathrm{II})=r(\mathrm{I},\mathrm{II})$，即 $r(\mathrm{I})=r(\mathrm{II})=r(\mathrm{I},\mathrm{II})$。

充分性。$\because r(\mathrm{I})=r(\mathrm{I},\mathrm{II})$，$\therefore$ 向量组（II）可以由向量组（I）线性表示，

$\because r(\mathrm{II})=r(\mathrm{I},\mathrm{II})$，$\therefore$ 向量组（I）也可以由向量组（II）线性表示，

$\therefore$ 向量组（I）与向量组（II）等价。

（3）矩阵方程 $AX=B$ 有解 $\Leftrightarrow$ 矩阵 B 的列向量组（II）可以由矩阵 A 的列向量组（I）线性表示，利用（1）的结论有 $\Leftrightarrow r(\mathrm{I})=r(\mathrm{I},\mathrm{II})\Leftrightarrow r(A)=r(A\vdots B)$。

9．设向量组（I）与向量组（II）有相同的秩，且（I）可由（II）线性表示，证明：（I）与（II）等价。

证明：设 $r(\mathrm{I})=r(\mathrm{I},\mathrm{II})=r$，$(\mathrm{i}):\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 是向量组（I）的极大无关组，

$(\mathrm{ii}):\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r$ 向量组是（II）的极大无关组，则 $r(\mathrm{i})=r(\mathrm{ii})=r$，

已知（I）可由（II）线性表示，所以向量组 (i) 可以由向量组 (ii) 线性表示，①

$\therefore \alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r,\beta_1$ 可由向量组 (ii) 线性表示，于是 $r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r,\beta_1)\le r(\mathrm{ii})=r$，

$\therefore \alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r,\beta_1$ 线性相关，而 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性无关，

因此 β_1 可以由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性表示。

同理可证 $\beta_i\ (i=2,\cdots,r)$ 都可以由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性表示。

因此向量组 (ii) 可以由向量组 (i) 线性表示，②

由①②知向量组 (i) 与向量组 (ii) 等价，从而向量组（I）与向量组（II）等价。

(B)

1．设有矩阵 $A_{m\times n}$，$B_{n\times m}$ 且 $m>n$，证明：$\det(AB)=0$。

证法 1：$\because AB$ 是 m 阶方阵，且 $r(AB)\le r(A)\le n<m$，$\therefore \det(AB)=0$。

证法 2：$\because r(B)\le n<m$，$\therefore Bx=0$ 有非零解，$\therefore ABx=0$ 也有非零解，

$\therefore \det(AB)=0$.

2．设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是一组 n 维向量，证明：它们线性无关的充要条件是任一 n 维向量都可以由它们线性表示。

证明：必要性。设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性无关，则对于任一 n 维向量 β，由于

$r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n,\beta)\le n$，$\therefore \alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n,\beta$ 线性相关，

而 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性无关，因此 β 可以由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性表示。

充分性。设对于任一 n 维向量都可以由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性表示，

则 n 维基本单位向量组 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 也可以由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性表示，

又向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 也可以由 n 维基本单位向量组 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 线性表示，

所以向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 与 n 维基本单位向量组 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 等价，其秩相同，即

$r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=r(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)=n$，所以 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性无关。

3．设 A 为 $m\times n$ 矩阵，证明：（1）存在矩阵 $P_{n\times m}$，使 $AP=I_m\Leftrightarrow r(A)=m$；（2）存在矩阵 $Q_{n\times m}$，使得 $QA=I_n\Leftrightarrow r(A)=n$。（附注：称（1）中矩阵 P 为 A 的右逆，（1）也可以说成 A 存在右逆 $\Leftrightarrow$ A 的行向量组线性无关；称（2）中矩阵 Q 为 A 的左逆，（2）也可以说成 A 存在左逆 A 的列向量组线性无关。）

证明：（1）必要性。设 $AP=I_m$，则 $m=r(I_m)=r(AP)\le r(A)\le m$，即 $r(A)=m$；

充分性。设$r(A)=m$，将A按列分块，记$\alpha_j=(a_{j1},a_{j2},\cdots,a_{jm}),j=1,2,\cdots,n$，

则$A=[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n]$，由$r(A)=m$知向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$存在极大无关组，不妨设为$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$，于是对于任一$m$维向量都可以由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$线性表示，所以也可以由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性表示，从而$m$维基本单位向量$\varepsilon_j\,(j=1,2,,m)$也可以由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性表示，设线性系数为$p_{j1},p_{j2},\cdots,p_{jn},j=1,2,\cdots,m$，

则$p_{j1}\alpha_1+p_{j2}\alpha_2+\cdots+p_{jn}\alpha_n=\varepsilon_j,j=1,2,\cdots,m$，

即存在矩阵$P=(p_{ij})_{n\times m}$使得$AP=I_m$。

（2）必要性。设$QA=I_n$，则$n=r(I_n)=r(QA)\le r(A)\le n$，即$r(A)=n$；

充分性。设$r(A)=n$，将A^T按列分块，记$\alpha_j=(a_{j1},a_{j2},\cdots,a_{jn}),j=1,2,\cdots,m$，

则$A^T=[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m]$，由$r(A)=n$知向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$存在极大无关组，不妨设为$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$，于是对于任一$n$维向量都可以由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性表示，所以也都可以由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$线性表示，从而$n$维基本单位向量$\varepsilon_j\,(j=1,2,,n)$也可以由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$线性表示，设线性系数为$q_{j1},q_{j2},\cdots,q_{jm},j=1,2,\cdots,n$，

则$q_{j1}\alpha_1+q_{j2}\alpha_2+\cdots+q_{jm}\alpha_m=\varepsilon_j,j=1,2,\cdots,n$，

即存在矩阵$Q=(q_{ij})_{n\times m}$使得$A^TQ^T=I_n$，即$QA=I_n$。

注：对于（2）可以利用（1）的结论，对于A^T，存在$Q^T=(q_{ij})_{m\times n}$，使得$A^TQ^T=I_n\Leftrightarrow r(A^T)=n$，即$Q_{n\times m}$，使得$QA=I_n\Leftrightarrow r(A)=n$。

习题 4.4 (A)

1．证明：与基础解系等价的线性无关向量组也是基础解系。

证明：设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-r}$是齐次线性方程组$Ax=0$的基础解系，其中$r(A)=r$，向量组$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_{n-r}$与$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-r}$等价，则$\beta_i\ (i=1,2,\cdots,n-r)$可以由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-r}$线性表示，即存在一组数$k_{i1},k_{i2},\cdots,k_{i,n-r}$，使得

$$\beta_i=k_{i1}\alpha_1+k_{i2}\alpha_2+\cdots+k_{i,n-r}\alpha_{n-r},\quad i=1,2,\cdots,n-r.$$

又$\because A\alpha_j=0,\quad j=1,2,\cdots,n-r$

$\therefore A\beta_i=k_{i1}A\alpha_1+k_{i2}A\alpha_2+\cdots+k_{i,n-r}A\alpha_{n-r}=0,\quad i=1,2,\cdots,n-r.$

即$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_{n-r}$是齐次线性方程组$Ax=0$的解；①

由向量组$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_{n-r}$与$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-r}$等价知，$\alpha_i\ (i=1,2,\cdots,n-r)$也可以由$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_{n-r}$线性表示，即存在一组数$\beta$ $b_{i1},b_{i2},\cdots,b_{i,n-r}$，使得

$$\alpha_j=b_{i1}\beta_1+b_{i2}\beta_2+\cdots+b_{i,n-r}\beta_{n-r}=\sum_{i=1}^{n-r}b_{ij}\beta_j,\quad j=1,2,\cdots,n-r.$$

所以对于齐次线性方程组$Ax=0$的任一解

$$x=c_1\alpha_1+c_2\alpha_2+\cdots+c_{n-r}\alpha_{n-r}=\sum_{j=1}^{n-r}c_j\alpha_j=\sum_{j=1}^{n-r}c_j\left(\sum_{i=1}^{n-r}b_{ij}\beta_i\right)=\sum_{i=1}^{n-r}\left(\sum_{j=1}^{n-r}c_jb_{ij}\right)\beta_i,$$

即齐次线性方程组$Ax=0$的任一解都可以由$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_{n-r}$线性表示。②

因为向量组$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_{n-r}$与$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-r}$等价，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-r}$是方程组$Ax=0$的基础解系，所以$r(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_{n-r})=r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-r})=n-r$，

即$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_{n-r}$线性无关。③

综合①②③有，$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_{n-r}$也是齐次线性方程组$Ax=0$的基础解系。

2．求齐次线性方程组$Ax=0$的基础解系与结构解。其中系数矩阵A为：

（1）$\begin{bmatrix}3&2&1&3&5\\6&4&3&5&7\\9&6&5&7&9\\3&2&0&4&8\end{bmatrix}$；（2）$\begin{bmatrix}1&1&-2&3\\2&1&-6&4\\3&2&a&7\\1&-1&-6&-1\end{bmatrix}$；

（3）$\begin{bmatrix}1&1&2&-1\\2&1&1&-1\\2&2&1&2\\4&3&2&1\end{bmatrix}$；（4）$\begin{bmatrix}1&2&1&-1\\3&6&-1&-3\\5&10&1&-5\\7&14&3&-7\end{bmatrix}$.

解　（1）对方程组的系数矩阵A作初等行变换，

$$\begin{bmatrix}3&2&1&3&5\\6&4&3&5&7\\9&6&5&7&9\\3&2&0&4&8\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}3&2&0&4&8\\0&0&1&-1&-3\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix},$$

由方程组的自由未知量表示的通解为：

$$\begin{cases}x_1=-\dfrac{2}{3}x_2-\dfrac{4}{3}x_4-\dfrac{8}{3}x_5\\x_3=x_4+3x_5\end{cases}$$，（x_2,x_4,x_5为自由未知量）

由此可求出基础解系为$\xi_1=(-2,1,0,0,0)^T$，$\xi_2=(-4,0,3,3,0)^T$，$\xi_3=(-8,0,9,0,3)^T$，

于是得方程组的结构式通解为：

$x = c_1\xi_1 + c_2\xi_2 + c_3\xi_3$，（$c_1, c_2, c_3$ 为任意常数）。

（2）对方程组的系数矩阵 A 作初等行变换，

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -6 & 4 \\ 3 & 2 & a & 7 \\ 1 & -1 & -6 & -1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & a+8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

当 $a = -8$ 时，由方程组的自由未知量表示的通解为

$$\begin{cases} x_1 = 4x_3 - x_4, \\ x_2 = -2x_3 - 2x_4 \end{cases} \quad （x_3, x_4 \text{ 为自由未知量}）$$

由此可求出基础解系为 $\xi_1 = (4,-2,1,0)^T$， $\xi_2 = (-1,-2,0,1)^T$，

于是得方程组的结构式通解为:

$x = c_1\xi_1 + c_2\xi_2$，（c_1, c_2 为任意常数）。

当 $a \neq -8$ 时，由方程组的自由未知量表示的通解为

$$\begin{cases} x_1 = -x_4, \\ x_2 = -2x_4, \quad （x_4 \text{ 为自由未知量}） \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

由此可求出基础解系为， $\xi = (-1,-2,0,1)^T$，

于是得方程组的结构式通解为:

$x = c\xi$，（c 为任意常数）。

（3）对方程组的系数矩阵 A 作初等行变换，

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

由方程组的自由未知量表示的通解为

$$\begin{cases} x_1 = \frac{4}{3}x_4, \\ x_2 = -3x_4, \quad （x_4 \text{ 为自由未知量}） \\ x_3 = \frac{4}{3}x_4 \end{cases}$$

由此可求出基础解系为 $\xi = (\frac{4}{3},-3,\frac{4}{3},1)^T$，

于是得方程组的结构式通解为:

$x = c\xi$，（c 为任意常数）。

（4）对方程组的系数矩阵 A 作初等行变换，

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 3 & 6 & -1 & -3 \\ 5 & 10 & 1 & -5 \\ 7 & 14 & 3 & -7 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

由方程组的自由未知量表示的通解为

$$\begin{cases} x_1 = -2x_2 + x_4, \\ x_3 = 0 \end{cases} \quad （x_2, x_4 \text{ 为自由未知量}）$$

由此可求出基础解系为 $\xi_1 = (-2,1,0,0)^T$， $\xi_2 = (1,0,0,1)^T$，

于是得方程组的结构式通解为:

$x = c_1\xi_1 + c_2\xi_2$，（c_1, c_2 为任意常数）。

3．设矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & a & a \\ 1 & a & 0 & 1 \end{bmatrix}$，已知线性方程组 $Ax = 0$ 的基础解系含两个向量，求 a 的值，并求方程组 $Ax = 0$ 的结构解。

解 由线性方程组 $Ax = 0$ 的基础解系含两个向量知，$r(A) = 2$，

所以 A 中任一 3 阶子式均为零，即 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & a \\ 1 & a & 0 \end{vmatrix} = 2a - 1 - a^2 = 0$，$\therefore a = 1$。

对方程组的系数矩阵 A 作初等行变换，

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

由方程组的自由未知量表示的通解为

$$\begin{cases} x_1 = x_3 \\ x_2 = -x_3 + x_4 \end{cases}，（x_3, x_4 \text{ 为自由未知量}）$$

由此可求出基础解系为 $\xi_1 = (1,-1,1,0)^T$， $\xi_2 = (0,-1,0,1)^T$，

于是得方程组的结构式通解为:

$x = c_1\xi_1 + c_2\xi_2$，（c_1, c_2 为任意常数）。

4．求作一个齐次线性方程组 $Ax = 0$，使它的基础解系为 $\xi_1 = (0,1,2,3)^T$，$\xi_2 = (3,2,1,0)^T$。

解 已知ξ_1,ξ_2是齐次线性方程组$Ax=0$的解，

$\therefore A[\xi_1,\xi_2]=0$，转置得，$\begin{bmatrix}\xi_1^T\\ \xi_2^T\end{bmatrix}A^T=0$，

即A^T的列向量是齐次线性方程组$\begin{bmatrix}\xi_1^T\\ \xi_2^T\end{bmatrix}x=0$的解向量，

解齐次线性方程组$\begin{bmatrix}0&1&2&3\\3&2&1&0\end{bmatrix}x=0$得$\eta_1=(1,-2,1,0)^T$，$\eta_2=(2,-3,0,1)^T$，

所以可取$A=\begin{bmatrix}1&-2&1&0\\2&-3&0&1\end{bmatrix}$。

注：这里的A不惟一。

5．设$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$是齐次线性方程组$Ax=0$的基础解系，证明：向量组$\beta_1=\alpha_1+\alpha_2$，$\beta_2=\alpha_2+\alpha_3$，$\beta_3=\alpha_3+\alpha_1$也可以作为$Ax=0$的基础解系。

证明：（1）首先证明β_1,β_2,β_3是方程组$Ax=0$的解。

$\because \alpha_1,\alpha_2,\alpha$是齐次线性方程组$Ax=0$的基础解系，

$\therefore A\alpha_1=0, A\alpha_2=0, A\alpha_3=0$，

于是$A\beta_1=A\alpha_1+A\alpha_2=0$，$A\beta_2=A\alpha_2+A\alpha_3=0$，$A\beta_3=A\alpha_3+A\alpha_1=0$，

即β_1,β_2,β_3是齐次线性方程组$Ax=0$的解；

（2）其次证明β_1,β_2,β_3线性无关。

由已知有：$[\beta_1,\beta_2,\beta_3]=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]\begin{bmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{bmatrix}$；

$\because \begin{vmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{vmatrix}=2\neq 0$，$\therefore r(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=3$，

$\therefore \beta_1,\beta_2,\beta_3$线性无关；

齐次线性方程组$Ax=0$的基础解系的个数为3，而β_1,β_2,β_3是齐次线性方程组$Ax=0$的3个线性无关的解向量，因此可以作为齐次线性方程组$Ax=0$基础解系。

6．设矩阵$Q=\begin{bmatrix}1&2&3\\2&4&t\\3&6&9\end{bmatrix}$，3阶非零方阵$P$满足$PQ=O$，

证明：当$t\neq 6$时，必有$r(P)=1$。

证明：将矩阵Q按列分块为$Q=[\beta_1\quad \beta_2\quad \beta_3]$，

由$PQ=P[\beta_1\quad \beta_2\quad \beta_3]=[P\beta_1\quad P\beta_2\quad P\beta_3]=O$，得$P\beta_1=P\beta_2=P\beta_3=0$，

即矩阵Q的每个列向量都是方程组$Px=0$的解向量，因此，方程组$Px=0$的解集合中至少含有$r(Q)$个线性无关的解向量，故方程组$Px=0$的基础解系至少含有$r(Q)$个线性无关的解向量，而方程组$Px=0$的基础解系所含向量的个数为$3-r(P)$，于是得，

$3-r(P)\geq r(Q)$，即$r(P)+r(Q)\leq 3$，

当$t\neq 6$时，$r(Q)=2$，$\therefore r(P)\leq 1$，

又P是非零方阵得$r(P)\geq 1$，因此必有$r(P)=1$。

7．设齐次线性方程组$Ax=0$与$Bx=0$同解，证明：$r(A)=r(B)$。

证明：设n元齐次线性方程组$Ax=0$的系数矩阵A的秩为r，则$Ax=0$的基础解系的个数为$n-r$，

由齐次线性方程组$Ax=0$与$Bx=0$同解知，$Bx=0$的基础解系的个数为$n-r(B)=n-r$，即$r(B)=r$，$\therefore r(A)=r(B)$。

8．设有矩阵$A_{m\times n}$，$B_{n\times p}$，且$r(A)=n$，证明：$r(AB)=r(B)$。

证明：设$Bx=0$，则$ABx=(AB)x=0$，

即方程组$Bx=0$的解都是方程组$ABx=0$的解；

设$ABx=0$，则$(AB)x=A(Bx)=0$，由于$r(A)=n$，即A的列向量组线性无关，所以方程组$Ay=0$只有零解，于是$Bx=y=0$，

即方程组$ABx=0$的解都是方程组$Bx=0$的解；

于是齐次线性方程组$Bx=0$与$ABx=0$同解，利用题7的结论，有$r(AB)=r(B)$。

9．若n阶方阵A的各行元素之和均为零，且$r(A)=n-1$，证明：齐次线性方程组$Ax=0$的通解为$x=k(1,1,\cdots,1)^T$（k为任意常数）。

证明：因为n阶方阵A的各行元素之和均为零，即$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}=0, i=1,2,\cdots,n.$

所以$A(1,1,\cdots,1)^T=(\sum_{j=1}^{n}a_{1j},\sum_{j=1}^{n}a_{2j},\cdots,\sum_{j=1}^{n}a_{nj})^T=0$，

即$(1,1,\cdots,1)^T$是齐次线性方程组$Ax=0$的解，

又$r(A)=n-1$知齐次线性方程组$Ax=0$的基础解系的个数为$n-r(A)=1$，

因此齐次线性方程组$Ax=0$的通解为$x=k(1,1,\cdots,1)^T$（k为任意常数）。

10．求下列方程组的结构解：

（1）$\begin{cases} x_1+x_2-3x_3-x_4=1, \\ 3x_1-x_2-3x_3+4x_4=4, \\ x_1+5x_2-9x_3-8x_4=0; \end{cases}$ （2）$\begin{cases} 6x_1+4x_2+5x_3+2x_4+3x_5=1, \\ 3x_1+2x_2+4x_3+x_4+2x_2=3, \\ 3x_1+2x_2-2x_3+x_4 \qquad =1, \\ 9x_1+6x_2+x_3+3x_4+2x_5=-7; \end{cases}$

（3）$\begin{cases} 2x_1+x_2-x_3+x_4=1, \\ 4x_1+2x_2-2x_3+x_4=2, \\ 2x_1+\ x_2-\ x_3-x_4=1; \end{cases}$ （4）$\begin{cases} 2x_1-4x_2+3x_3-4x_4-11x_5=28, \\ x_1-2x_2+x_3-2x_4-5x_2=13, \\ -3x_3+x_4+\ 6x_5=-10, \\ 3x_1-6x_2+10x_3-8x_4-28x_5=61; \end{cases}$

解 （1）将方程组的增广矩阵 $\overline{A}$ 进行初等行变换，化为行阶梯形

$$\overline{A}=[A\vdots b]=\begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & -3 & 4 & 4 \\ 1 & 5 & -9 & -8 & 0 \end{bmatrix}\to\begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 & -1 & 1 \\ 0 & -4 & 6 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

由阶梯形矩阵知 $r(A)=r(\overline{A})=2<4$（未知数的个数），故方程组有无穷多解，于是由自由未知量表示的通解为

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{5}{4}+\dfrac{3}{2}x_3-\dfrac{3}{4}x_4, \\ x_2=-\dfrac{1}{4}+\dfrac{3}{2}x_3+\dfrac{7}{4}x_4 \end{cases}，（x_3,x_4 \text{ 为自由未知量}）$$

令 $x_3=x_4=0$ 得方程组的一个特解 $\eta^*=(\frac{5}{4},-\frac{1}{4},0,0)^T$，

由阶梯形矩阵知导出组 $Ax=0$ 的通解为

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{3}{2}x_3-\dfrac{3}{4}x_4, \\ x_2=\dfrac{3}{2}x_3+\dfrac{7}{4}x_4 \end{cases}，（x_3,x_4 \text{ 为自由未知量}）$$

由此可求出导出组的基础解系为 $\xi_1=(3,3,2,0)^T$，$\xi_2=(-3,7,0,4)^T$，

于是得方程组的结构式通解为：

$$x=\eta^*+c_1\xi_1+c_2\xi_2，（c_1,c_2 \text{ 为任意常数}）。$$

（2）将方程组的增广矩阵 $\overline{A}$ 进行初等行变换，化为行阶梯形

$$\overline{A}=[A\vdots b]=\begin{bmatrix} 6 & 4 & 5 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 4 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & -2 & 1 & 0 & -7 \\ 9 & 6 & 1 & 3 & 2 & 2 \end{bmatrix}\to\begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -34 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

由阶梯形矩阵知 $r(A)=r(\overline{A})=3<5$（未知数的个数），故方程组有无穷多解，于是由方程组的自由未知量表示的通解为

$$\begin{cases} x_3=13, \\ x_4=19-3x_1-2x_2, \\ x_5=-34 \end{cases}（x_1,x_2 \text{ 为自由未知量}）$$

令 $x_1=x_2=0$ 得方程组的一个特解 $\eta^*=(0,0,13,19,34)^T$，

由阶梯形矩阵知导出组 $Ax=0$ 的通解为

$$\begin{cases} x_3=0, \\ x_4=-3x_1-2x_2, \\ x_5=0 \end{cases}（x_1,x_2 \text{ 为自由未知量}）$$

由此可求出导出组的基础解系为 $\xi_1=(1,0,0,-3,0)^T$，$\xi_2=(0,1,0,-2,0)^T$，

于是得方程组的结构式通解为：

$$x=\eta^*+c_1\xi_1+c_2\xi_2 \quad，（c_1,c_2 \text{ 为任意常数}）。$$

（3）将方程组的增广矩阵 $\overline{A}$ 进行初等行变换，化为行阶梯形

$$\overline{A}=[A\vdots b]=\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & -2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}\to\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

由阶梯形矩阵知 $r(A)=r(\overline{A})=2<4$（未知数的个数），故方程组有无穷多解，于是由方程组的自由未知量表示的通解为

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}x_2+\dfrac{1}{2}x_3, \\ x_4=0 \end{cases}（x_2,x_3 \text{ 为自由未知量}）$$

令 $x_2=x_3=0$ 得方程组的一个特解 $\eta^*=(\frac{1}{2},0,0,0)^T$，

由阶梯形矩阵知导出组 $Ax=0$ 的通解为

$$\begin{cases} x_1=-\dfrac{1}{2}x_2+\dfrac{1}{2}x_3, \\ x_4=0 \end{cases}（x_2,x_3 \text{ 为自由未知量}）$$

由此可求出导出组的基础解系为 $\xi_1=(-\frac{1}{2},1,0,0)^T$，$\xi_2=(\frac{1}{2},0,1,0)^T$，

于是得方程组的结构式通解为：

$$x=\eta^*+c_1\xi_1+c_2\xi_2，（c_1,c_2 \text{ 为任意常数}）。$$

（4）将方程组的增广矩阵 $\overline{A}$ 进行初等行变换，化为行阶梯形

$$\overline{A}=[A\vdots b]=\begin{bmatrix}2&-4&3&-4&-11&28\\1&-2&1&-2&-5&13\\0&0&-3&1&6&-10\\3&-6&10&-8&-28&61\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&-2&1&-2&-5&13\\0&0&1&0&-1&2\\0&0&0&1&3&-4\\0&0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

由阶梯形矩阵知 $r(A)=r(\overline{A})=2<5$（未知数的个数），故方程组有无穷多解，于是由方程组的自由未知量表示的通解为

$$\begin{cases}x_1=3+2x_2-2x_5,\\x_3=2+x_5,\\x_4=-3x_5\end{cases}\qquad（x_2,x_5\text{为自由未知量}）$$

令 $x_2=x_5=0$ 得方程组的一个特解 $\eta^*=(3,0,2,-4,0)^T$，

由阶梯形矩阵知导出组 $Ax=0$ 的通解为

$$\begin{cases}x_1=2x_2-2x_5,\\x_3=x_5,\\x_4=-3x_5\end{cases}，（x_2,x_5\text{为自由未知量}）$$

由此可求出导出组的基础解系为 $\xi_1=(2,1,0,0,0)^T$，$\xi_2=(-2,0,1,-3,1)^T$，

于是得方程组的结构式通解为：

$$x=\eta^*+c_1\xi_1+c_2\xi_2，（c_1,c_2\text{为任意常数}）。$$

11．证明：方程组 $x_1-x_2=a_1,x_2-x_3=a_2,x_3-x_4=a_3,x_4-x_5=a_4,x_5-x_1=a_5$ 有解 $\Leftrightarrow a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=0$，并在有解时，求其通解。

证明：将方程组的增广矩阵 $\overline{A}$ 进行初等行变换，化为行阶梯形

$$\overline{A}=[A\vdots b]=\begin{bmatrix}1&-1&0&0&0&a_1\\0&1&-1&0&0&a_2\\0&0&1&-1&0&a_3\\0&0&0&1&-1&a_4\\-1&0&0&0&1&a_5\end{bmatrix}$$

$$\to\begin{bmatrix}1&-1&0&0&0&a_1\\0&1&-1&0&0&a_2\\0&0&1&-1&0&a_3\\0&0&0&1&-1&a_4\\0&0&0&0&0&a_1+a_2+a_3+a_4+a_5\end{bmatrix}$$

$\because r(A)=4$，$\therefore$ 方程组有解 $\Leftrightarrow r(A)=r(\overline{A})=4$

$\Leftrightarrow a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=0$；

当方程组有解时 $r(A)=r(\overline{A})=4<5$（未知数的个数），则由增广矩阵的阶梯形知方程组的通解为

$$\begin{cases}x_1=x_5+a_1+a_2+a_3+a_4,\\x_2=x_5+a_2+a_3+a_4,\\x_3=x_5+a_3+a_4,\\x_4=x_5+a_4.\end{cases}\qquad（x_5\text{为自由未知量}）。$$

12．a,b 取何值时，下列方程组有解，并在有解时求其通解：

（1）$\begin{cases}x_1+x_2-2x_3+3x_4=0,\\2x_1+x_2-6x_3+4x_4=-1,\\3x_1+2x_2+a\,x_3+7x_4=-1,\\x_1-x_2-6x_3-\ x_4=b;\end{cases}$ （2）$\begin{cases}ax_1+x_2+x_3=4,\\x_1+bx_2+x_3=3,\\x_1+2bx_2+x_3=4;\end{cases}$

解 （1）将方程组的增广矩阵 $\overline{A}$ 进行初等行变换，化为行阶梯形

$$\overline{A}=[A\vdots b]=\begin{bmatrix}1&1&-2&3&0\\2&1&-6&4&-1\\3&2&a&7&-1\\1&-1&-6&-1&b\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&-2&3&0\\0&1&2&2&1\\0&0&a+8&0&0\\0&0&0&0&b+2\end{bmatrix}$$

$\therefore$ 当 $b\neq-2$ 时，$r(A)\neq r(\overline{A})$，方程组无解；

当 $b=-2$ 且 $a\neq-8$ 时，$r(A)=r(\overline{A})=3<4$（未知数的个数），方程组有无穷多解，

取 x_4 为自由未知量，则方程组的通解为

$$\begin{cases}x_1=-1-x_4,\\x_2=1-2x_4,\\x_3=0.\end{cases}\quad\text{或 } x=(-1,1,0,0)^T+c(-1,-2,0,1)^T，（c\text{为任意常数}）。$$

当 $b=-2$ 且 $a=-8$ 时，$r(A)=r(\overline{A})=2<4$（未知数的个数），方程组有无穷多解，

取 x_3,x_4 为自由未知量，则方程组的通解为

$$\begin{cases}x_1=-1+4x_3-x_4,\\x_2=1-2x_3-2x_4\end{cases}$$

或 $x=(-1,1,0,0)^T+c_1(4,-2,1,0)^T+c_2(-1,-2,0,1)^T$，（$c_1,c_2$ 为任意常数）。

（2）将方程组的增广矩阵 $\overline{A}$ 进行初等行变换，化为行阶梯形

$$\overline{A}=[A\vdots b]=\begin{bmatrix}a&1&1&4\\1&b&1&3\\1&2b&1&4\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&b&1&3\\0&1&1-a&4-2a\\0&0&b(1-a)&4b-2ab-1\end{bmatrix},$$

$\therefore$ ①当 $a\neq 1$ 且 $b\neq 0$ 时，$Ar(A)=r(\overline{A})=3$（未知数的个数），方程组有惟一解，

$$x_1=\frac{1-2b}{b(1-a)},\ x_2=\frac{1}{b},\ x_3=\frac{4b-2ab-1}{b(1-a)};$$

当 $a=1$ 时，将方程组的增广矩阵 $\overline{A}$ 进行初等行变换，化为行阶梯形

$$\overline{A}=[A\vdots b]=\begin{bmatrix}1&1&1&4\\1&b&1&3\\1&2b&1&4\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&1&4\\0&b-1&0&-1\\0&2b-1&0&0\end{bmatrix},$$

$\therefore$ ②当 $a=1$ 且 $b\neq\frac{1}{2}$ 时，$r(A)\neq r(\overline{A})$，方程组无解；

③当 $a=1$ 且 $b=\frac{1}{2}$ 时，$r(A)=r(\overline{A})=2<3$，（未知数的个数），方程组有

无穷多解，取 x_3 为自由未知量，则方程组的通解为

$$\begin{cases}x_1=2-x_3,\\x_2=0\end{cases}\ \text{或}\ x=(2,0,0)^T+c(-1,0,1)^T,（c\text{为任意常数}）;$$

④当 $b=0$ 时，$r(A)\neq r(\overline{A})$，方程组无解；

注：由于方程组含 3 个未知数，3 个方程，所以也可以通过讨论系数行列式是否等于 0 来得到各种解的情况。

13．设有向量组（I）：$\alpha_1=(a,2,10)^T$，$\alpha_2=(-2,1,5)^T$，$\alpha_3=(-1,1,4)^T$，又向量 $\beta=(1,b,-1)^T$，问 a,b 取何值时：（1）向量 β 不能由向量组（I）线性表示；（2）β 能由向量组（I）线性表示且表示式惟一；（3）β 能由向量组（I）线性表示且表示式不惟一，并在此时求一般表示式。

解　设 $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3=\beta$，即 $Ax=\beta$，

将方程组的增广矩阵 $\overline{A}=[\alpha_1\quad\alpha_2\quad\alpha_3\quad\beta]$ 进行初等行变换，化为行阶梯形

$$\overline{A}=\begin{bmatrix}a&-2&-1&1\\2&1&1&b\\10&5&4&-1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}2&1&1&b\\0&-4-a&0&4ab+10b+a+4\\0&0&1&5b+1\end{bmatrix},$$

且 当 $a=-4$ 时，阶梯形为 $\overline{A}\to\begin{bmatrix}2&1&1&b\\0&0&0&b\\0&0&1&5b+1\end{bmatrix}$

$\therefore$ （1）当 $a=-4$ 且 $b\neq 0$ 时，$r(A)\neq r(\overline{A})$，方程组无解，即向量 β 不能由向量组（I）线性表示；

（2）当 $a\neq -4$ 时，$|A|\neq 0$，方程组有惟一解，即 β 能由向量组（I）线性表示且表示式惟一；

（3）当 $a=-4$ 且 $b=0$ 时，阶梯形为 $\overline{A}\to\begin{bmatrix}2&1&1&0\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}$，$r(A)=r(\overline{A})=2<3$，

（未知数的个数），方程组有无穷多解，其通解为

$$x_1=c,x_2=-1-2c,x_3=1,\quad（c\text{为任意常数}）;$$

即 β 能由向量组（I）线性表示且表示式不惟一，此时求一般表示式为

$$\beta=c\alpha_1+(-1-2c)\alpha_2+\alpha_3。$$

注：由于方程组含 3 个未知数，3 个方程，所以也可以通过讨论系数行列式是否等于 0 来得到各种解的情况，从而得到结论。

14．已知两个齐次线性方程组：

$$（\mathrm{I}）\begin{cases}x_1+2x_2+3x_3=0,\\2x_1+3x_2+5x_3=0,\\x_1+x_2+ax_3=0;\end{cases}\quad（\mathrm{II}）\begin{cases}x_1+bx_2+cx_3=0,\\2x_1+b^2x_2+(c+1)x_3=0;\end{cases}$$

如果（I）与（II）同解，求 a,b,c 的值。

解　方程组（II）中方程的个数小于未知数的个数，故必有非零解，则方程组（I）必有非零解。所以方程组（I）的系数行列式 $|A|=\begin{vmatrix}1&2&3\\2&3&5\\1&1&a\end{vmatrix}=0$，即 $a=2$；

将 $a=2$ 代入方程组（I），再将方程组（I）的系数矩阵进行初等行变换，化为阶梯形，

$$A=\begin{bmatrix}1&2&3\\2&3&5\\1&1&2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&2&3\\0&1&1\\0&0&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&0\end{bmatrix}$$

于是齐次线性方程组（I）的通解为：$x=c(1,1,-1)^T$，（ c 为任意常数）；c

将解 $(1,1,-1)^T$ 代入方程组（II）得 $b=0,c=1$ 或 $b=1,c=2$，但是当 $b=0,c=1$ 时，方程组（I）与（II）不同解，所以 $a=2$，$b=1,c=2$ 时，方程组（I）与（II）同解。

15．已知方程组（I）$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=0, \\ x_1+2x_2+ax_3=0, \\ x_1+4x_2+a^2x_3=0; \end{cases}$ 与方程（II）$x_1+2x_2+x_3=a-1$ 有公共解，求 a 的值及所有公共解。

解 方程组（I）与（II）有公共解，即将（I）与（II）联立所得方程组（III）有解，公共解就是方程组（III）的解，将方程组（III）得增广矩阵进行初等变换，化为阶梯形

$$\overline{A}=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & a & 0 \\ 1 & 4 & a^2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & a-1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & (a-1)(a-2) & 0 \\ 0 & 2 & 1-a & a-1 \end{bmatrix}$$

则 $a=1$ 或 $a=2$，方程组（III）有解；

当 $a=1$ 时，$\overline{A}\to\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$，$r(A)=r(\overline{A})=2<3$，方程组（I）与（II）有公共解即为方程组（III）的通解 $x=c(1,0,-1)^T$，（c 为任意常数）；

当 $a=2$ 时，$\overline{A}\to\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$，$r(A)=r(\overline{A})=3$，方程组（III）有唯一解，即方程组（I）与（II）有公共解 $x=(0,1,-1)^T$。

16．设 4 元非齐次线性方程组 $Ax=b$ 有解 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$，其中 $\alpha_1=(1,2,3,4)^T$，$\alpha_2+\alpha_3=(2,3,4,5)^T$，且 $r(A)=3$，求方程组 $Ax=b$ 的通解。

解 由方程组解的性质有 $2\alpha_1-(\alpha_2+\alpha_3)=(0,1,2,3)^T$ 是导出组 $Ax=0$ 的非零解，而 $Ax=0$ 得基础解系含 $4-r(A)=1$ 个解向量，所以 $(0,1,2,3)^T$ 可以作为 $Ax=0$ 的基础解系，于是方程组 $Ax=b$ 的通解为

$$x=(1,2,3,4)^T+c(0,1,2,3)^T，（c 为任意常数）。$$

17．设 η_0 是非齐次线性方程组 $Ax=b$ 的一个解，$\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_t$ 是其导出组 $Ax=0$ 的基础解系，令 $\eta_i=\eta_0+\xi_i\ (i=1,2,\cdots,t)$，证明：方程组 $Ax=b$ 的任一解 x 都可以表示成

$$x=\lambda_0\eta_0+\lambda_1\eta_1+\cdots+\lambda_t\eta_t$$

的形式，其中常数 $\lambda_0,\lambda_1,\cdots,\lambda_t$ 满足 $\lambda_0+\lambda_1+\cdots+\lambda_t=1$。

证明：由非齐次线性方程组解的结构定理知：方程组 $Ax=b$ 的通解为

$$x=\eta_0+\lambda_1\xi_1+\cdots+\lambda_t\xi_t，其中 \lambda_1,\cdots,\lambda_t 为任意常数，$$

由 $\eta_i=\eta_0+\xi_i\ (i=1,2,\cdots,t)$ 得：$\xi_i=\eta_i-\eta_0\ (i=1,2,\cdots,t)$，将其代入通解得，

$x=(1-\lambda_1-\cdots-\lambda_t)\eta_0+\lambda_1\eta_1+\cdots+\lambda_t\eta_t$，记 $\lambda_0=1-\lambda_1-\cdots-\lambda_t$，则方程组 $Ax=b$ 的通解为 $x=\lambda_0\eta_0+\lambda_1\eta_1+\cdots+\lambda_t\eta_t$，且 $\lambda_0+\lambda_1+\cdots+\lambda_t=1$，即结论成立。

18．设 A 为 $m\times n$ 矩阵，$r(A)=r$，证明：存在秩为 $n-r$ 的阶矩阵 B，使 $AB=O$。

证明：因为 A 为 $m\times n$ 矩阵，$r(A)=r$，所以齐次线性方程组 $Ax=0$ 的基础解系含有 $n-r$ 个 n 维解向量，设解向量为 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$，构造矩阵 $B=[\xi_1\ \xi_2\ \cdots\ \xi_{n-r}\ 0\cdots0]$，其中 B 的最后 r 列全为零向量，则 $AB=[A\xi_1\ A\xi_2\ \cdots\ A\xi_{n-r}\ 0\cdots0]=O$，而且 $r(B)=n-r$，即结论成立。

(B)

1．设 n 阶矩阵 $A=\begin{bmatrix} a_1+b & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2+b & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & a_3+b & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n+b \end{bmatrix}$

其中 $\sum_{i=1}^{n}a_i\neq0$，问常数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 和 b 满足何种关系时，齐次线性方程组 $Ax=0$ 存在非零解？并在 $Ax=0$ 有非零解时，求出其结构解。

解：因为 $|A|=\begin{vmatrix} b+\sum_{i=1}^{n}a_i & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ b+\sum_{i=1}^{n}a_i & a_2+b & a_3 & \cdots & a_n \\ b+\sum_{i=1}^{n}a_i & a_2 & a_3+b & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b+\sum_{i=1}^{n}a_i & a_2 & a_3 & \cdots & a_n+b \end{vmatrix}$

$$=(b+\sum_{i=1}^{n}a_i)\begin{vmatrix}1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n\\ 0 & b & a_3 & \cdots & a_n\\ 0 & 0 & b & \cdots & a_n\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b\end{vmatrix}=b^{n-1}(b+\sum_{i=1}^{n}a_i),$$

所以当$b\neq 0$且$b+\sum_{i=1}^{n}a_i\neq 0$时，方程组只有零解；

当$b=0$时，$r(A)=1$，方程组有非零解，不妨设$a_1\neq 0$，则取$x_2,\cdots,x_n$为自由未知量，方程组的通解为

$$x=c_1(-\frac{a_2}{a_1},1,0,\cdots,0)^T+c_2(-\frac{a_3}{a_1},0,1,\cdots,0)^T+c_{n-1}(-\frac{a_n}{a_1},0,0,\cdots,1)^T,$$

（$c_i(i=1,2,\cdots,n-1)$为任意常数）。

当$b+\sum_{i=1}^{n}a_i=0$且$b\neq 0$时，$r(A)=n-1$，齐次线性方程组$Ax=0$的基础解系所含向量的个数为$n-r(A)=1$，且$(1,1,\cdots,1)^T$是$Ax=0$的解，因此方程组的通解为

$$x=c(1,1,\cdots,1)^T,（c为任意常数）。$$

2. 设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$为齐次线性方程组$Ax=0$的基础解系，又$\beta_1=t_1\alpha_1+t_2\alpha_2$，$\beta_2=t_1\alpha_2+t_2\alpha_3$，…，$\beta_m=t_1\alpha_m+t_2\alpha_1$，其中$t_1,t_2$为实常数，问当$t_1,t_2$满足什么条件时，$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$也可以作为$Ax=0$的基础解系？

解 （1）$\because\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$为齐次线性方程组$Ax=0$的基础解系，

$\therefore A\alpha_i=0,(i=1,2,\cdots,m)$，

于是，$A\beta_i=A(t_1\alpha_i+t_2\alpha_{i+1})=0,\quad i=1,2,\cdots,m-1$，且$A\beta_m=A(t_1\alpha_m+t_2\alpha_1)=0$，

即 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$是$Ax=0$的解。

又$(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m)=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)P$，其中$P=\begin{bmatrix}t_1 & 0 & \cdots & t_2\\ t_2 & t_1 & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & 0\\ 0 & \cdots & t_2 & t_1\end{bmatrix}$，

$|P|=t_1t_1^{m-1}+t_2(-1)^{m+1}t_2^{m-1}=t_1^m+(-1)^{m+1}t_2^m$，所以当$|P|\neq 0$时，

$r(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m)=r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)=m$，即当$m$为奇数，$t_1\neq -t_2$时，当$m$为偶数，$t_1\neq t_2$时，$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$也可以作为$Ax=0$的基础解系。

3. 设A为$m\times n$实矩阵，证明：

（1）在实数范围内，方程组$Ax=0$与$A^TAx=0$同解；

（2）$r(A)=r(A^TA)=r(A^T)=r(AA^T)$。

证明 （1）设ξ方程组$Ax=0$的解，即$A\xi=0$；

所以$A^TA\xi=A^T(A\xi)=0$，即ξ是$A^TAx=0$的解；

设η方程组$A^TAx=0$的解，即$A^TA\eta=0$；

所以$\eta^T(A^TA\eta)=\|A\eta\|^2=0$，从而$A\eta=0$，即$\eta$是的$Ax=0$解；

因此，在实数范围内，方程组$Ax=0$与$A^TAx=0$同解；

（2）由（1）知方程组$Ax=0$与$A^TAx=0$同解，因此它们的基础解系所含解向量的个数相同，即$n-r(A)=n-r(A^TA)$，$\therefore r(A)=r(A^TA)$，同理可得$r(A^T)=r(AA^T)$，又$r(A)=r(A^T)$，$\therefore$ $r(A)=r(A^TA)=r(A^T)=r(AA^T)$。

4. 设矩阵$A=(a_{ij})_{n\times n}$的行列式$\det(A)=0$，其$(2,1)$元素的代数余子式$A_{21}\neq 0$（元素a_{ij}的代数余子式记为A_{ij} $i,j=1,2,\cdots,n$），证明：齐次线性方程组$Ax=0$的通解为

$x=k(A_{21},A_{22},\cdots,A_{2n})^T$,（$k$为任意常数）。

证明：$\because\det(A)=0,\ A_{21}\neq 0$，所以由矩阵秩的定义有：$r(A)=n-1$，从而齐次线性方程组$Ax=0$的基础解系所含解向量的个数为$n-r(A)=1.$

又$A(A_{21},A_{22},\cdots,A_{2n})^T=0$，且$A_{21}\neq 0$，所以$(A_{21},A_{22},\cdots,A_{2n})^T$是$Ax=0$的非零解。因此齐次线性方程组$Ax=0$的通解为

$x=k(A_{21},A_{22},\cdots,A_{2n})^T$,（$k$为任意常数）。

5. 设A为$n(n\geq 2)$阶方阵， A^*为A的伴随矩阵，证明：

$$r(A^*)=\begin{cases}n,\ 当r(A)=n,\\ 1,\ 当r(A)=n-1,\\ 0,\ 当r(A)\leq n-2.\end{cases}$$

证明 （1）当$r(A)=n$时，$|A|\neq 0$，由$AA^*=A^*A=|A|I$知，$|A^*|=|A|^{n-1}\neq 0$，

所以$r(A^*)=n$；

（2）当$r(A)=n-1$时，$|A|=0$，由$AA^*=A^*A=|A|I$知，$AA^*=O$，根据例 4.4.4 的结论有$r(A)+r(A^*)\leq n$，即$r(A^*)\leq 1$；

又当$r(A)=n-1$时，按照矩阵秩的定义知，矩阵A至少含有一个$n-1$阶子式不等于零，即矩阵A^*中至少有一个元素不为零，所以$r(A^*)\geq 1$，由此可得$r(A^*)=1$。

（3）当 $r(A)\le n-2$ 时，按照矩阵秩的定义知，矩阵 A 的所有 $n-1$ 阶子式都等于零，即矩阵 A^* 中元素全为零，即 $A^*=O$，所以 $r(A^*)=0$。

6. 设 $x_i=(x_{i1},x_{i2},\cdots,x_{in})^T$ 为 n 维实向量（$i=1,2,\cdots,r;r<n$），且 $x_1,x_2,\cdots x_r$ 线性无关。令矩阵 $A=[x_1x_2\cdots x_r]^T$，则 A 是秩为 r 的 $r\times n$ 矩阵，设齐次线性方程组 $Ax=0$ 的基础解系为实向量组 $x_{r+1},\cdots,x_n$，试证：向量组 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 线性无关（此题表明：从 R^n 中任何 $r(r<n)$ 个线性无关向量出发进行扩充，必可得到 R^n 中 n 个线性无关的向量）。

分析：

证明：用定义，设 $k_1x_1+k_2x_2+\cdots+k_rx_r+k_{r+1}x_{r+1}+\cdots+k_nx_n=0$，①

则 $(k_{r+1}x_{r+1}+\cdots+k_nx_n)^T(k_1x_1+k_2x_2+\cdots+k_nx_n)=0$，②

又齐次线性方程组 $Ax=0$ 的基础解系为实向量组 $x_{r+1},\cdots,x_n$，

所以 $Ax_i=0,i=r+1,\cdots,n$，即 $x_j^Tx_i=0,\ j=1,\cdots,r,i=r+1,\cdots,n$。

于是由②得

$(k_{r+1}x_{r+1}+\cdots+k_nx_n)^T(k_{r+1}x_{r+1}+\cdots+k_nx_n)=\|k_{r+1}x_{r+1}+\cdots+k_nx_n\|^2=0$，

所以 $k_{r+1}x_{r+1}+\cdots+k_nx_n=0$，

由 $x_{r+1},\cdots,x_n$ 是齐次线性方程组 $Ax=0$ 的基础解系知线性无关，所以

$k_{r+1}=\cdots=k_n=0$；

从而有 $k_1x_1+k_2x_2+\cdots+k_rx_r=0$，③

由③及 $x_1,x_2,\cdots x_r$ 线性无关知 $k_1=\cdots=k_r=0$，所以向量组 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 线性无关。

7. （1）设矩阵 $A_{n\times r}$ 的秩为 $r(r<n)$，由定理 2.5.2 知存在 n 阶可逆矩阵 P，使

$A=P^{-1}\begin{bmatrix}I_r\\O_{(n-r)\times r}\end{bmatrix}$，令矩阵 $B=P^{-1}\begin{bmatrix}O_{r\times(n-r)}\\I_{n-r}\end{bmatrix}$，证明：$n$ 阶方阵 $[A\ B]$ 的列向量组线性无关，并指出 B 与 P^{-1} 的列向量之间的关系。

（2）设 $x_1,x_2,\cdots,x_r\ (r<n)$ 是 F^n 中的线性无关向量组，证明：必可找到 F^n 中的 $n-r$ 个向量 $x_{r+1},\cdots,x_n$，使得向量组 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 线性无关（此题表明：从 F^n 中任何 $r(r<n)$ 个线性无关向量出发进行扩充，必可得到 F^n 中 n 个线性无关的向量）。

证明：（1）$\because [A\ B]=\left[P^{-1}\begin{bmatrix}I_r\\O_{(n-r)\times r}\end{bmatrix},P^{-1}\begin{bmatrix}O_{r\times(n-r)}\\I_{n-r}\end{bmatrix}\right]=P^{-1}\begin{bmatrix}I_r & O_{r\times(n-r)}\\O_{(n-r)\times r} & I_{n-r}\end{bmatrix}=P^{-1}$，

且 P^{-1} 是 n 阶可逆矩阵，即列满秩；所以 n 阶方阵 $[A\ B]$ 的列向量组线性无关，且 B 的列向量组是 P^{-1} 的后 $n-r$ 列向量。

（2）令 $A=[x_1,x_2,\cdots,x_r]$，由 $x_1,x_2,\cdots,x_r\ (r<n)$ 是 F^n 中的线性无关向量组知矩阵 $A_{n\times r}$ 的秩为 $r(r<n)$，则存在 n 阶可逆矩阵 P，使 $PA=\begin{bmatrix}I_r\\O_{(n-r)\times r}\end{bmatrix}$，即

$A=P^{-1}\begin{bmatrix}I_r\\O_{(n-r)\times r}\end{bmatrix}$，令矩阵 $B=P^{-1}\begin{bmatrix}O_{r\times(n-r)}\\I_{n-r}\end{bmatrix}$，利用（1）的结论有 $[A\ B]=P^{-1}$，即 $[A\ B]$ 的列向量组线性无关，且 $B=[x_{r+1},\cdots,x_n]$ 的列向量组是 P^{-1} 的后 $n-r$ 列向量，从而结论成立。

第 4 章习题

1. 填空题

（1）设矩阵 $A=\begin{bmatrix}1&2&-2\\2&1&2\\3&0&4\end{bmatrix}$，向量 $\alpha=(a,1,1)^{\mathrm{T}}$，已知 $A\alpha$ 与 α 线性相关，则 $a=$_____。

解 因为 $A\alpha$ 与 α 线性相关，所以存在数 k，使得 $A\alpha=k\alpha$，

即 $\begin{bmatrix}1&2&-2\\2&1&2\\3&0&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a\\2a+3\\3a+4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}ka\\k\\k\end{bmatrix}$，解之得 $a=-1$。

（2）设 4 阶矩阵 A 按列分块为 $A=[\alpha_1\quad\alpha_2\quad\alpha_3\quad\alpha_4]$，其中 $\alpha_1=(-3,5,2,1)^T$，

$\alpha_2=(4,-3,7,-1)^T$，若 A 行等价于 $B=\begin{bmatrix}1&0&2&1\\0&1&1&3\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$，则向量 $\alpha_3=$__________，

$a_4=$__________。

解 因为 A 行等价于 B，所以 A 经过一系列初等行变换化为 B，即 A，B 的列向量组的线性关系不变，因此 $\alpha_3=2\alpha_1+\alpha_2$，$\alpha_4=\alpha_1+3\alpha_2$。

（3）已知向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 的秩为 2，则向量组 $\beta_1=\alpha_1-\alpha_2$，$\beta_2=2\alpha_1+3\alpha_2+4\alpha_3$，$\beta_3=5\alpha_1+6\alpha_2+7\alpha_3$ 的秩=__________。

解 $\because\ (\beta_1,\beta_2,\beta_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)P$ 其中 $P=\begin{bmatrix}1&2&5\\-1&3&6\\0&4&7\end{bmatrix}$，$|P|=4\ne0,r(P)=3$，

$\therefore$ 在矩阵 $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ 右乘可逆矩阵，相当于对其进行初等列变换，其秩不改变，

即 $r(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=2$。

（4）已知向量 $(1,\lambda,2)^T$ 可由向量组 $(\lambda+1,1,1)^T$，$(1,\lambda+1,1)^T$，$(1,1,\lambda+1)^T$ 线性表出且表示式不唯一，则 $\lambda=$________。

解 由已知得下列非齐次线性方程组有无穷多解，

$$\begin{bmatrix}1&1&\lambda+1\\1&\lambda+1&1\\\lambda+1&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\\lambda\\2\end{bmatrix}$$

因为 $\overline{A}=\begin{bmatrix}1&1&\lambda+1&1\\1&\lambda+1&1&\lambda\\\lambda+1&1&1&2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&\lambda+1&1\\0&\lambda&-\lambda&\lambda+1\\0&0&-\lambda^2-3\lambda&0\end{bmatrix}$

当 $\lambda=0$ 时，方程组无解；当 $\lambda=-3$ 时方程组有无穷多解，即表示式不惟一。

（5）设 A 为 n 阶矩阵，已知非齐次线性方程组有不同解 η_1,η_2,η_3，且 $A^*\neq O$，则方程组 $Ax=0$ 的基础解系所含向量的个数为______。

解 由非齐次线性方程组有不同解 η_1,η_2,η_3 得：$A\eta_1=0,\ A\eta_2=0$，从而 $A(\eta_1-\eta_2)=0$，且 $\eta_1-\eta_2\neq0$，即方程组 $Ax=0$ 有非零解 $\eta_1-\eta_2$，于是 $r(A)<n$；

又 $A^*\neq O$，即 A 至少有一个 $n-1$ 阶子式不为零，所以 $r(A)\geq n-1$；

所以 $r(A)=n-1$，因此方程组 $Ax=0$ 的基础解系所含向量的个数为 1。

（6）设矩阵 $A=\begin{bmatrix}1&-1&1\\2&4&-2\\-3&-3&a\end{bmatrix}$，已知齐次线性方程组 $(2I-A)x=0$ 的基础解系含 2 个向量，则 $a=$______。

解 由齐次线性方程组 $(2I-A)x=0$ 的基础解系含 2 个向量知：$r(2I-A)=3-2=1$，

所以 $2I-A=\begin{bmatrix}1&1&-1\\-2&-2&2\\3&3&2-a\end{bmatrix}$ 的任一二阶子式为 0，即 $\begin{vmatrix}1&-1\\3&2-a\end{vmatrix}=0,\ \therefore a=5.$

（7）设 4 元非齐次线性方程组 $Ax=b$ 有解 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$，其中 $\alpha_1=(0,1,2,3)^T$，$2\alpha_2+\alpha_3=(3,6,9,12)^T$，且 $r(A)=3$，则 $Ax=b$ 的通解为 $x=$____________。

解 由 $r(A)=3$ 知 $Ax=0$ 的基础解系含向量的个数为 $4-r(A)=1$；

因为 4 元非齐次线性方程组 $Ax=b$ 有解 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$，即 $A\alpha_1=b,A\alpha_2=b,A\alpha_3=b$；

$\therefore A(2\alpha_2+\alpha_3-3\alpha_1)=2A\alpha_2+A\alpha_3-3A\alpha_1=0$，即个 $2\alpha_2+\alpha_3-3\alpha_1=(3,3,3,3)^T$ 是 $Ax=0$ 的非零解；

因此 $Ax=b$ 的通解为 $x=\alpha_1+k(2\alpha_2+\alpha_3-3\alpha_1)$， k 为任意常数，

或 $x=(0,1,2,3)^T+c(1,1,1,1)^T$， c 为任意常数。

（8）设矩阵 A 按列分块为 $A=[\alpha_1\quad\alpha_2\quad\alpha_3\quad\alpha_4]$，其中 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，$\alpha_4=-\alpha_1+2\alpha_2$，又向量 $\beta=\alpha_1+2\alpha_2+3\alpha_3+4\alpha_4$，则方程组 $Ax=\beta$ 的通解为 $x=$____________。

解 因为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，$\alpha_4=-\alpha_1+2\alpha_2$，所以 $r(A)=3$，$Ax=0$ 的基础解系所含向量的个数为 $4-r(A)=1$；

又由 $\alpha_4=-\alpha_1+2\alpha_2$ 得 $-\alpha_1+2\alpha_2+0\alpha_3-\alpha_4=0$，即 $(-1,2,0,-1)^T$ 是 $Ax=0$ 的非零解；

由 $\beta=\alpha_1+2\alpha_2+3\alpha_3+4\alpha_4$ 知 $A(1,2,3,4)^T=\beta$，

即 $(1,2,3,4)^T$ 是方程组 $Ax=\beta$ 的一个特解，

所以方程组 $Ax=\beta$ 的通解为 $x=(1,2,3,4)^T+c(-1,2,0,-1)^T$， c 为任意常数。

2. 单项选择题

（1）设有 n 维列向量组(I)：$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$， A 为 $m\times n$ 矩阵，向量组(II)为 $A\alpha_1,A\alpha_2,\cdots,A\alpha_s$，则下列结论正确的是【 A 】

（A）若(I)线性相关，则(II)线性相关；　　（B）若(I)线性相关，则(II)线性无关；

（C）若(I)线性无关，则(II)线性相关；　　（D）若(I)线性无关，则(II)线性无关。

解法 1 设 $B=[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s]$，则 $[A\alpha_1,A\alpha_2,\cdots,A\alpha_s]=AB$；

若(I)线性相关，则 $Bx=0$ 有非零解，从而是 $ABx=0$ 有非零解，则(II)线性相关，

因此选（A）.

解法 2 若(I)线性相关，则 $r(B)<s$，从而 $r(AB)\leq r(B)<s$ 所以(II)线性相关，

因此选（A）.

（2）设 A 为 $m\times n$ 矩阵，B 为 $n\times m$ 矩阵，已知 $AB=I_m$，则【 B 】

（A）$r(A)=m$，$r(B)=n$；　　（B）$r(A)=r(B)=m$；

（C）$r(A)=n$，$r(B)=m$；　　（D）$r(A)=r(B)=n$。

解 $m=r(I_m)=r(AB)\leq r(A)\leq m$，同理可得 $m=r(I_m)=r(AB)\leq r(B)\leq m$，

因此选（B）.

（3）设 A，B 为满足 $AB=O$ 的任意两个非零矩阵，则必有【 A 】

（A） A 的列向量组线性相关，B 的行向量组线性相关；

（B） A 的列向量组线性相关，B 的列向量组线性相关；

（C） A 的行向量组线性相关，B 的行向量组线性相关；

（D）A 的行向量组线性相关，B 的列向量组线性相关。

解 设 $B=[\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s]$，则 $A[\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s]=O$，

即 B 的列向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 是 $Ax=0$ 的解，从而是 $Ax=0$ 有非零解，

因此 A 的列向量组线性相关；

又由 $AB=O$ 得 $B^TA^T=O$，同理可得 B^T 的列向量组线性相关，

即 B 的行向量组线性相关，因此选（A）.

（4）设 $Ax=0$ 是非齐次线性方程组 $Ax=b$ 对应的齐次线性方程组，

下列结论正确的是【 D 】

（A）若 $Ax=0$ 有非零解，则 $Ax=b$ 有无穷多解；

（B）若 $Ax=0$ 仅有零解，则 $Ax=b$ 有惟一解；

（C）若 $Ax=b$ 有无穷多解，则 $Ax=0$ 仅有零解；

（D）若 $Ax=b$ 有无穷多解，则 $Ax=0$ 有非零解。

解 若 $Ax=b$ 有无穷多解，则 $r(A)=r(\overline{A})<$ 未知数的个数，所以 $Ax=0$ 有非零解；

若已知 $Ax=0$ 的解的情况，并不能判断 $Ax=b$ 的解的情况；因此选（D）.

（5）设 A 为 $m\times n$ 矩阵，B 为 $n\times m$ 矩阵，则线性方程组 $(AB)x=0$【 D 】

（A）当 $n>m$ 时仅有零解；（B）当 $n>m$ 时必有非零解；

（C）当 $m>n$ 时仅有零解；（D）当 $m>n$ 时必有非零解。

解 因为 $r(AB)\le\min\{r(A),r(B)\}$，因此

当 $m>n$ 时，$r(AB)\le n<m$，则线性方程组 $(AB)x=0$ 必有非零解；

当 $n>m$ 时，$r(AB)\le m$，不能判定 $(AB)x=0$ 仅有零解，还是必有非零解；

因此选（D）.

（6）设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 为方程组 $Ax=0$ 的基础解系，则下列向量组中可以作为 $Ax=0$ 的基础解系的是【 C 】

（A）$\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_1+2\alpha_2+\alpha_3$；

（B）$\alpha_1-\alpha_2,\alpha_2-\alpha_3,\alpha_3-\alpha_1$；

（C）$\alpha_1+2\alpha_2,2\alpha_1+3\alpha_2+4\alpha_3,\alpha_1+2\alpha_2+5\alpha_3$；

（D）$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,2\alpha_1-3\alpha_2+22\alpha_3,3\alpha_1+5\alpha_2-5\alpha_3$。

解 因为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 为方程组 $Ax=0$ 的基础解系，而 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 的线性组合都是方程组 $Ax=0$ 的解，因此只需判定各选项中的向量组是线性无关的即可；

由 $(\beta_1\ \beta_2\ \beta_3)=(\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3)P$，$|P|\ne0$ 可得向量组 β_1,β_2,β_3 线性无关；

其中选项（C）中 $P=\begin{bmatrix}1&2&1\\2&3&2\\0&4&5\end{bmatrix}$，$|P|\ne0$，从而选项（C）的向量组线性无关。

因此选（C）.

（7）设有齐次线性方程组 $Ax=0$ 和 $Bx=0$，其中 A，B 均为 $m\times n$ 矩阵，现有 4 个命题：①若 $Ax=0$ 的解均是 $Bx=0$ 的解，则 $r(A)\ge r(B)$；

②若 $r(A)\ge r(B)$，则 $Ax=0$ 的解均是 $Bx=0$ 的解；

③若 $Ax=0$ 与 $Bx=0$ 同解，则 $r(A)=r(B)$；

④若 $r(A)=r(B)$，则 $Ax=0$ 与 $Bx=0$ 同解；

以上命题正确的是【 B 】为

（A）①②；（B）①③；（C）②④；（D）③④。

解 若 $Ax=0$ 的解均是 $Bx=0$ 的解，则 $n-r(A)\le n-r(B)$，即 $r(A)\ge r(B)$；

若 $Ax=0$ 与 $Bx=0$ 同解，则 $n-r(A)=n-r(B)$ 即 $r(A)=r(B)$；

反之不一定正确，例如方程组 $x=0$，$z=0$ 和方程组 $x=0$，$y=0$ 是不同的解；

因此选（B）.

（8）设实向量 $\alpha_1=(a_1,a_2,a_3)^T$，$\alpha_2=(b_1,b_2,b_3)^T$，$\alpha_3=(c_1,c_2,c_3)^T$，则 Oxy 平面上 3 条 $a_ix+b_iy+c_i=0$，（其中 $a_i^2+b_i^2\ne0,i=1,2,3$）直线交于一点的充要条件是【 D 】

（A）$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关；（B）$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关；

（C）$r[\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3]=r[\alpha_1\ \alpha_2]$；（D）$\alpha_1,\alpha_2$ 线性无关，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关；

解 Oxy 平面上 3 条 $a_ix+b_iy+c_i=0$，（其中 $a_i^2+b_i^2\ne0,i=1,2,3$）直线交于一点的

充要条件是方程组 $\begin{cases}a_1x+b_1y=-c_1,\\a_2x+b_2y=-c_2,\\a_3x+b_3y=-c_3,\end{cases}$ 有惟一解，$\Leftrightarrow r[\alpha_1\ \alpha_2]=r[\alpha_1\ \alpha_2\ -\alpha_3]=2$，

即 α_1,α_2 线性无关，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关；因此选（D）.

3. 设向量组 $(\mathrm{I}):\alpha_1=(1,0,2)^T,\alpha_2=(1,1,3)^T,\alpha_3=(1,-1,a+2)^T$；

向量组 $(\mathrm{II}):\beta_1=(1,2,a+3)^T,\beta_2=(2,1,a+6)^T,\beta_3=(2,1,a+4)^T$，

（1）求 $r(\mathrm{II})$；（2）问 a 取何值时 (I) 与 (II) 等价，a 取何值时 (I) 与 (II) 不等价？

解 （1）$\because(\beta_1\ \beta_2\ \beta_3)=\begin{bmatrix}1&2&2\\2&1&1\\a+3&a+6&a+4\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&2&2\\0&-3&-3\\0&-a&-a-2\end{bmatrix}$

$\therefore r(\mathrm{II})=3$；

（2）$\because(\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3)=\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&-1\\2&3&a+2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&-1\\0&1&a\end{bmatrix}$，

因此当 $a\neq-1$ 时，$r(\mathrm{I})=r(\mathrm{II})=3$，$(\mathrm{I})$ 与 (II) 等价；

当 $a=-1$ 时，$r(\mathrm{I})=2,r(\mathrm{II})=3$，$(\mathrm{I})$ 与 (II) 不等价。

4. 设有向量组 (I)：$\alpha_1=(1+a,1,1,1)^T,\alpha_2=(2,2+a,2,2)^T,\alpha_3=(3,3,3+a,3)^T$，

$\alpha_4=(4,4,4,4+a)^T$；（1）问 a 取何值时 (I) 线性相关？（2）在 (I) 线性相关时，求其一个极大无关组并用极大无关组线性表示 (I) 的其他向量。

解 （1）$\because[\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3\ \alpha_4]=\begin{bmatrix}1+a&2&3&4\\1&2+a&3&4\\1&2&3+a&4\\1&2&3&4+a\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1+a&2&3&4\\-a&a&0&0\\-a&0&a&0\\-a&0&0&a\end{bmatrix}$

$$\to\begin{bmatrix}10+a&2&3&4\\0&a&0&0\\0&0&a&0\\0&0&0&a\end{bmatrix}$$

$\therefore|\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3\ \alpha_4|=a^3(10+a)$，所以当 $a=0$ 或 $a=-10$ 时，(I) 线性相关；

（2）若 $a=0$，向量组 (I) 线性相关，α_1 为一个极大无关组，且 $\alpha_k=k\alpha_1,k=2,3,4$；

若 $a=-10$ 时，向量组 (I) 线性相关，$r(\mathrm{I})=3$，且 $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性无关，是 (I) 的一个极大无关组，且 $\alpha_1=-\alpha_2-\alpha_3-\alpha_4$。

5. 设有向量组 $(\mathrm{I}):\alpha_1=(1,1,3,1)^T,\alpha_2=(1,3,-1,-5)^T,\alpha_3=(2,6,-a,-10)^T$，

$\alpha_4=(3,1,15,12)^T$，又向量 $\beta=(1,3,3,b)^T$. 问 a,b 取何值时，（1）β 能由 (I) 线性表示且表示式惟一；（2）β 不能由 (I) 线性表示；（3）β 能由 (I) 线性表示且表示式不惟一，并求出一般表达式。

解 记 $A=[\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3\ \alpha_4]$，则 β 是否能由 (I) 线性表示，即需要判定方程组 $Ax=\beta$ 是否有解；

$$[A\ \beta]=\begin{bmatrix}1&1&2&3&1\\1&3&6&1&3\\3&-1&-a&15&3\\1&-5&-10&12&b\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&2&3&1\\0&2&4&-2&2\\0&-4&-a-6&6&0\\0&-6&-12&9&b-1\end{bmatrix}$$

$$\to\begin{bmatrix}1&1&2&3&1\\0&2&4&-2&2\\0&0&-a+2&2&4\\0&0&0&3&b+5\end{bmatrix}$$

（1）β 能由 (I) 线性表示且表示式惟一，即方程组 $Ax=\beta$ 有惟一解；

所以当 $a\neq2$ 时 $r(A)=r(A\ \beta)=4$，β 能由 (I) 线性表示且表示式惟一；

（2）当 $a=2$ 时，$[A\ \beta]\to\begin{bmatrix}1&1&2&3&1\\0&2&4&-2&2\\0&0&0&1&2\\0&0&0&0&b-1\end{bmatrix}$，

所以当 $a=2$，$b\neq1$ 时，$r(A)=3,r(A\ \beta)=4$，β 不能由 (I) 线性表示；

（3）当 $a=2$ 且 $b=1$ 时，$[A\ \beta]\to\begin{bmatrix}1&1&2&3&1\\0&2&4&-2&2\\0&0&0&1&2\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$，$r(A)=r(A\ \beta)=3$，

β 能由 (I) 线性表示且表示式不惟一，且 $Ax=\beta$ 的通解为 $x=(-8,3-2c,c,2)^T$，

c 为任意常数。即 $\beta=Ax=[\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3\ \alpha_4]\begin{pmatrix}-8\\3-2c\\c\\2\end{pmatrix}=-8\alpha_1+(3-2c)\alpha_2+c\alpha_3+2\alpha_4$。

6. 解齐次线性方程组 $Ax=0$，其系数矩阵为 $A=\begin{bmatrix}1&2&3&-1\\2&5&1&-1\\-3&-8&a-1&1\\3&7&4&b-1\end{bmatrix}$。

解 $A\to\begin{bmatrix}1&2&3&-1\\0&1&-5&1\\0&-2&a+8&-2\\0&1&-5&b+2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&2&3&-1\\0&1&-5&1\\0&0&a-2&0\\0&0&0&b+1\end{bmatrix}$，

（1）当 $a\neq2$ 且 $b\neq-1$ 时，$r(A)=4$，方程组只有零解；

（2）当 $a=2$ 且 $b\neq-1$ 时，$A\to\begin{bmatrix}1&2&3&-1\\0&1&-5&1\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}$，$r(A)=3<4$，方程组的通解为

$x=c(-13,5,1,0)^T$，c 为任意常数；

（3）当 $a\neq 2$ 且 $b=-1$ 时，$A\to\begin{bmatrix}1&2&3&-1\\0&1&-5&1\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&0&-3\\0&1&0&1\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$，$r(A)=3<4$，

方程组的通解为 $x=c(3,-1,0,1)^T$，c 为任意常数；

（4）当 $a=2$ 且 $b=-1$ 时，$A\to\begin{bmatrix}1&2&3&-1\\0&1&-5&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&13&-3\\0&1&-5&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$，

$r(A)=2<4$，方程组的通解为 $x=c_1(-13,5,1,0)^T+c_2(3,-1,0,1)^T$，$c_1,c_2$ 为任意常数。

7. 已知方程组 $\begin{cases}x_1+x_2+x_3+x_4=-1\\4x_1+3x_2+5x_3-x_4=-1\\ax_1+x_2+3x_3+bx_4=1\end{cases}$ 有 3 个线性无关的解，

（1）证明该方程组的系数矩阵的秩为 2；

（2）求 a,b 的值及该方程组的通解。

证明：（1）记 $A=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\4&3&5&-1\\a&1&3&b\end{bmatrix}$，方程组的 3 个线性无关的解为 η_1,η_2,η_3，

则 $\eta_2-\eta_1$，$\eta_3-\eta_1$ 是 $Ax=0$ 的线性无关的解，所以 $4-r(A)\geq 2$，即 $r(A)\leq 2$；

又 A 的左上角的二阶子式不是零，即 $r(A)\geq 2$，所以该方程组的系数矩阵的秩为 2；

（2）$[A\,\beta]=\begin{bmatrix}1&1&1&1&-1\\4&3&5&-1&-1\\a&1&3&b&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&1&1&-1\\0&-1&1&-5&3\\0&1-a&3-a&b-a&1+a\end{bmatrix}$

$\to\begin{bmatrix}1&1&1&1&-1\\0&-1&1&-5&3\\0&0&4-2a&b+4a-5&4-2a\end{bmatrix}$

由（1）知 $r(A)=2$，所以 $a=2$，$b=-3$，于是

$[A\,\beta]\to\begin{bmatrix}1&1&1&1&-1\\0&-1&1&-5&3\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&2&-4&2\\0&1&-1&5&-3\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$，

因此方程组的基础解系为：$\xi_1=(4,-5,0,1)^T$，$\xi_2=(-2,1,1,0)^T$，

方程组的特解为：$\xi=(2,-3,0,0)^T$，

于是该方程组的通解为：$x=(2,-3,0,0)^T+c_1(4,-5,0,1)^T+c_2(-2,1,1,0)^T$，

c_1,c_2 为任意常数。

8. 设 A 为 $m\times n$ 矩阵，B 为 $n\times p$ 矩阵，矩阵 $C=AB$，

证明：（1）若 A，B 的列（行）向量组均是线性无关的，则 C 的列（行）向量组也是线性无关的；

（2）若 B 的列向量组是线性相关的，则 C 的列向量组也是线性相关的。

证明：（1）用反证法。假设矩阵 C 的列向量组线性相关，即 $r(C)<p$，

则 $Cx=0$ 有非零解，即 $ABx=0$ 有非零解；

又由 A 的列向量组线性无关知，$Bx=0$ 有非零解，所以 B 的列向量组是线性相关的，

与已知矛盾，因此 C 的列向量组是线性无关的；同理可证 C 的行向量组也是线性无关的。

（2）若 B 的列向量组是线性相关的，则 $Bx=0$ 有非零解，从而 $ABx=0$ 有非零解，

即 $Cx=0$ 有非零解，所以 C 的列向量组是线性相关的。

第 8 章

习题 8.1（A）

1、判断下列映射是否为线性映射：

（1）从 R^3 到 R^2 的映射：$T(x_1,x_2,x_3)^T=(2x_1+x_2,2x_2-3x_3)^T$；

（2）R^2 上的旋转变换：$\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$；

（3）从 V 到自身的映射：$T(\alpha)=\alpha+\alpha_0$，其中 α_0 是线性空间 V 中一固定的非零向量；

（4）从 R^n 到 R 的映射：$T(x)=x^TAx$，$\forall x\in R^n$，A 为一固定的 n 阶实方阵。

解：（1）从 R^3 到 R^2 的映射：$T(x_1,x_2,x_3)^T=(2x_1+x_2,2x_2-3x_3)^T$

$=\begin{pmatrix}2&1&0\\0&2&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$

是线性变换

（2）R^2 上的旋转变换：$\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$

是线性变换

（3）不是。

$T(\alpha+\beta)=\alpha+\beta+\alpha_0\neq T(\alpha)+T(\beta)=\alpha+\alpha_0+\beta+\alpha_0$。

（4）不是。$T(x+y)=(x+y)^TA(x+y)\neq T(x)+T(y)$。

2、设 W 是欧氏空间 V 的一个子空间，$\{e_1,\cdots,e_r\}$ 是 W 的一个标准正交基，设 $T:V\to W$ 为 $T(\alpha)=\mathrm{Proj}_W\alpha=\langle\alpha,e_1\rangle e_1+\cdots+\langle\alpha,e_r\rangle e_r$，$\forall\alpha\in R$，证明：$T$ 是线性变换（称 T 为 V 到 W 的正交射影）。

证明：$\forall\alpha,\beta\in V$，$k\in R$

$T(\alpha+\beta)=\mathbf{Proj}_W(\alpha+\beta)=\langle\alpha+\beta,e_1\rangle e_1+\cdots+\langle\alpha+\beta,e_r\rangle e_r$

$=(\langle\alpha,e_1\rangle e_1+\langle\beta,e_1\rangle e_1)+\cdots+(\langle\alpha,e_r\rangle e_r+\langle\beta,e_r\rangle e_r)$

$=\langle\alpha,e_1\rangle e_1+\cdots+\langle\alpha,e_r\rangle e_r+\langle\beta,e_1\rangle e_1+\cdots+\langle\beta,e_r\rangle e_r$

$=T(\alpha)+T(\beta)$

$T(k\alpha)=\mathbf{Proj}_W(k\alpha)=\langle k\alpha,e_1\rangle e_1+\cdots+\langle k\alpha,e_r\rangle e_r$

$=k\langle\alpha,e_1\rangle e_1+\cdots+k\langle\alpha,e_r\rangle e_r$

$=k(\langle\alpha,e_1\rangle e_1+\cdots+\langle\alpha,e_r\rangle e_r)$

$=kT(\alpha)$

所以，T 是 $V\to W$ 的一个线性变换。

3、设 $\alpha_0=(a_0,b_0,c_0)^T$ 为 R^3 中一固定向量，令 $T:R^3\to R^3$ 为 $T(\alpha)=\alpha_0\times\alpha$，$\forall\alpha=(a,b,c)\in R^3$，证明：$T$ 是 R^3 上的线性算子。

证明：$\forall\alpha,\beta\in R^3$，$k\in R$，$\alpha_0=(a_0,b_0,c_0)^T\in R^3$

$T(\alpha+\beta)=\alpha_0\times(\alpha+\beta)=\alpha_0\times\alpha+\alpha_0\times\beta=T(\alpha)+T(\beta)$

$T(k\alpha)=\alpha_0\times k\alpha=k(\alpha_0\times\alpha)=kT(\alpha)$

故，T 是 R^3 上的线性算子。

4、设 $e_1,\cdots,e_n$ 为线性空间 V 的基，$T\in L(V,W)$，证明：T 为零变换的充要条件是 $T(e_i)=0\,(i=1,\cdots,n)$。

证明：充分性：因为 $T(\alpha)$ 是零变换，

所以，$\forall\alpha\in V$，$T(\alpha)=0$，故有 $T(e_i)=0$（$i=1,2,\cdots,n$）。

必要性：因为 $e_1,e_2,\cdots,e_n$ 是线性空间 V 的基，所以 $\forall\alpha\in V$，

$\alpha=k_1e_1+k_2e_2+\cdots+k_ne_n$，

$T(\alpha)=T(k_1e_1+k_2e_2+\cdots+k_ne_n)=k_1T(e_1)+k_2T(e_2)+\cdots+k_nT(e_n)$

又 $\because T(e_i)=0$，$i=1,2,\cdots,n$

$\therefore T(\alpha)=0$，故 T 为零变换。

5、证明：$T\in L(R^n,R)$ 的充要条件是存在实常数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$，使得 $T(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T=a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n$，$\forall(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in R^n$。

证明：充分性：因为存在实常数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$，使得 $\forall(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in R^n$，有 $T(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T=a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n$

所以，$\forall(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$，$(y_1,y_2,\cdots,y_n)^T\in R^n$，$k\in R$，

$T[(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T+(y_1,y_2,\cdots,y_n)^T]$

$=a_1(x_1+y_1)+a_2(x_2+y_2)+\cdots+a_n(x_n+y_n)$

$=(a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n)+(a_1y_1+a_2y_2+\cdots+a_ny_n)$

$=T(x_1+x_2+\cdots+x_n)^T+T(y_1+y_2+\cdots+y_n)^T$

$T[k(x_1+x_2+\cdots+x_n)^T]=T(kx_1+kx_2+\cdots+kx_n)^T$

$=a_1kx_1+a_2kx_2+\cdots+a_nkx_n$

$=k(a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n)=kT(x_1+x_2+\cdots+x_n)^T$

故，$T\in L(R^n,R)$。

必要性：设 $T\in L(R^n,R)$，$e_1,e_2,\cdots,e_n$ 是 R^n 中的基本单位向量组，设 $T(e_i)=a_i$，$i=1,2,\cdots,n$，$a_i\in R$

则，$\forall\alpha=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T\in R^n$

$\alpha=x_1e_1+x_2e_2+\cdots+x_ne_n$

根据线性变换的定义有：

$T(\alpha)=T(x_1e_1+x_2e_2+\cdots+x_ne_n)$

$=x_1T(e_1)+x_2T(e_2)+\cdots+x_nT(e_n)$

$=a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n$。

6、设 e_1,e_2,e_3 是线性空间 V 的一个基，$T\in L(V,R^2)$，定义 $T(e_1)=(1,-1,2)^T$，$T(e_2)=(0,3,2)^T$，$T(e_3)=(-3,1,2)^T$，求 $T(2e_1-3e_2+4e_3)$。

解：$T(2e_1-3e_2+4e_3)=2T(e_1)-3T(e_2)+4T(e_3)$

$=2(1,-1,2)^T-3(0,3,,2)^T+4(-3,1,,2)^T$

$=(-10,-7,6)^T$。

7、设 T_1 是 R^2 上旋转 $\dfrac{\pi}{3}$ 的变换，T_2 是 R^2 上旋转 $\dfrac{\pi}{2}$ 的变换（关于 R^2 上的旋转变换见本习题 1（2）题），求 $T_1\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$，$T_2\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ 及 $T_2T_1\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$。

解：

$$T_1\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}x\cos\alpha-y\sin\alpha\\x\sin\alpha+y\cos\alpha\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}x-\frac{\sqrt{3}}{2}y\\\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{1}{2}y\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}x-\sqrt{3}y\\\sqrt{3}x+y\end{bmatrix}$$

$$T_2\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}0&-1\\1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-y\\x\end{bmatrix}$$

$$T_2T_1\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}0&-1\\1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&-\frac{\sqrt{3}}{2}\\\frac{\sqrt{3}}{2}&\frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}-\sqrt{3}x&-y\\x&-\sqrt{3}y\end{bmatrix}$$

8、设 $T\in L(R^4,R^3)$，定义

$T(x_1,x_2,x_3,x_4)^T=(4x_1+x_2-2x_3-3x_4,2x_1+x_2+x_3-4x_4,6x_1-9x_3+9x_4)^T$：

（1）判别下列向量中哪些是 $R(T)$ 中的向量：$\alpha_1=(6,8,6)^T$，$\alpha_2=(-1,3,4)^T$；

（2）判别下列向量中哪些是 $\ker(T)$ 中的向量：$\xi_1=(-3,8,-2,0)^T$，$\xi_1=(2,0,0,1)^T$；（3）求出 $\ker(T)$ 及 $R(T)$ 的基，指出 T 的零度及秩。

解：$T\in L\left(R^4,R^3\right)$，且

$$T\left(x_1,x_2,x_3,x_4\right)^T=\left(4x_1+x_2-2x_3-3x_4,2x_1+x_2+x_3-4x_4,6x_1-9x_3+9x_4\right)^T$$

$$=\begin{pmatrix}4&1&-2&-3\\2&1&1&-4\\6&0&-9&9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=Ax$$

（1）要判断 α_1,α_2 是否属于 $R(T)$，即判断 $Ax=\alpha_1$，$Ax=\alpha_2$ 这两个非齐次线性方程组是否有解，即判断是否有：$r(A)=r(A|\alpha_1)$，$r(A)=r(A|\alpha_2)$，经计算：$r(A)=r(A|\alpha_1)=3$，$r(A)=r(A|\alpha_2)=3$，故，$\alpha_1,\alpha_2\in R(T)$。

（2）要判断 ξ_1,ξ_2 是否属于 $\ker(T)$，即判断 ξ_1,ξ_2 是否为齐次线性方程组 $Ax=0$ 的解。

经计算得，$Ax=0$ 的基础解系为：$k(3,-8,2,0)^T$，$k\in R$

故，$\xi_1\in\ker(T)$，$\xi_2\notin\ker(T)$。

（3）$\ker(T)$ 即为 $Ax=0$ 的解空间，由（1）得，$\ker(T)$ 的基为：

$(3,-8,2,0)^T$，$\dim(\ker(T))=1$

$R(T)$ 即为矩阵 A 的列空间，所以，$R(T)$ 的基即为矩阵 A 的列向量组的极大线性无关组。

$$A=\begin{pmatrix}4&1&-2&-3\\2&1&1&-4\\6&0&-9&9\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{行变换}}\begin{pmatrix}1&0&-3/2&0\\0&1&4&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

由此得 $R(T)$ 的一个基为：$(4,2,6)^T$，$(1,1,0)^T$，$(-3,-4,9)^T$

$\dim(R(T))=3$。

9、设 $T\in L\left(R^3\right)$，定义为 $T(x)=Ax$，$\forall x\in R^3$，其中 $A=\begin{pmatrix}1&-1&3\\5&6&-4\\7&4&2\end{pmatrix}$；

（1）证明：几何上 $R(T)$ 代表过原点的平面，并求该平面的方程；

（2）证明：几何上 $\ker(T)$ 代表过原点的直线，并求该直线的方程。

证明：（1）$R(T)=A\alpha$，$\alpha=(x,y,z)^T\in R^3$

$$A\alpha=\begin{pmatrix}1&-1&3\\5&6&-4\\7&4&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x-y+3z\\5x+6y-4z\\7x+4y+2z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}X\\Y\\Z\end{pmatrix}\in R^3$$

经计算得：$-5X+Y=-7X+Z$，故：$2X+Y-Z=0$

即：$R(T)$ 为过原点的平面，平面方程为：$2X+Y-Z=0$。

（2）$\ker(T)=\left\{x\middle|Ax=0,x\in R^3\right\}$

$\ker(T)$ 即为齐次线性方程组 $Ax=0$ 的解空间。

$A=\begin{pmatrix}1&-1&3\\5&6&-4\\7&4&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&14/11\\0&1&-19/11\\0&0&0\end{pmatrix}$，可得，$\ker(T)$ 是：

过原点的直线：$\dfrac{x}{-14}=\dfrac{y}{19}=\dfrac{z}{11}$。

10、设 $T_1,T_2\in L\left(R^2\right)$，定义为 $T_1(x,y)^T=(y,z)^T$，$T_2(x,y)^T=(0,z)^T$，求 $T_1T_2(x,y)^T$ 及 $T_2T_1(x,y)^T$，问是否有 $T_1T_2=T_2T_1$？

解：

$$T_1T_2(x,y)^T=T_1\begin{pmatrix}0\\x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\0\end{pmatrix},T_2T_1(x,y)^T=T_2\begin{pmatrix}y\\x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\y\end{pmatrix},T_1T_2\neq T_2T_1。$$

11、设 $T:R^n\to R^m$ 是线性变换，定义为 $T(x)=Ax$，对下列各题中的矩阵 A，确定 T 是否为单射：（1）$A=\begin{pmatrix}1&-2\\2&-4\\-3&6\end{pmatrix}$；（2）$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&3&5\\2&-1&2\\-1&3&0\end{pmatrix}$。

解：$T:R^n\to R^m$. 由定理 8.1.4 知，要证明 T 是单射，只要证明 $\ker(T)=\{0\}$，$T(x)=Ax$，$\ker(T)$ 就是齐次线性方程组 $Ax=0$ 的解空间。

（1）$A=\begin{pmatrix}1&-2\\2&-4\\-3&6\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-2\\0&0\\0&0\end{pmatrix}$，$r(A)=1$，即 $Ax=0$ 的解空间维数为 1，所以，

$\ker(T)\neq\{0\}$，说明不是单射.

$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&3&5\\2&-1&2\\-1&3&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$，$r(A)=3$，即 $Ax=0$ 的解空间维数为 3，所以，$\ker(T)=\{0\}$，说明是单射.

12、证明：线性变换的和及数量乘积都是线性变换。

证明：线性变换的和：

设，$T_1,T_2\in L(V,W)$，$k\in F$

$(T_1+T_2)(\alpha+\beta)=T_1(\alpha+\beta)+T_2(\alpha+\beta)$

$=T_1(\alpha)+T_1(\beta)+T_2(\alpha)+T_2(\beta)$

$=\left[T_1(\alpha)+T_2(\alpha)\right]+\left[T_1(\beta)+T_2(\beta)\right]$

$=(T_1+T_2)(\alpha)+(T_1+T_2)(\beta)$

$(T_1+T_2)(k\alpha)=T_1(k\alpha)+T_2(k\alpha)=kT_1(\alpha)+kT_2(\alpha)$

$=k(T_1(\alpha)+T_2(\alpha))$

说明：两线性变换的和为线性变换。

$(kT)(\alpha+\beta)=k(T(\alpha+\beta))=k(T(\alpha)+T(\beta))=kT(\alpha)+kT(\beta)$

$=(kT)(\alpha)+(kT)(\beta)$

$(kT)(m\alpha)=k(T(m\alpha))=k(mT(\alpha))$

$=m(kT(\alpha))$

$=m(kT(\alpha))$

说明：数与线性变换的乘积为线性变换。

13、设，定义映射 $(T_1-T_2):V\to W$ 为 $(T_1-T_2)(\alpha)=T_1(\alpha)-T_2(\alpha)\quad\forall\alpha\in V$，证明：$T_1-T_2$ 为线性变换。

证明：$(T_1-T_2)(\alpha+\beta)=T_1(\alpha+\beta)-T_2(\alpha+\beta)\quad\forall\alpha,\beta\in V$，$k\in F$

$=T_1(\alpha)+T_1(\beta)-\left[T_2(\alpha)+T_2(\beta)\right]$

$=(T_1-T_2)(\alpha)+(T_1-T_2)(\beta)$

$(T_1-T_2)(k\alpha)=T_1(k\alpha)-T_2(k\alpha)=kT_1(\alpha)-kT_2(\alpha)$

$=k(T_1-T_2)(\alpha)$

因此，T_1-T_2 为线性变换。

14、设 $T_i\in L(V)\ (i=1,2,3)$，证明：（1）$(T_1+T_2)T_3=T_1T_3+T_2T_3$，（2）若 $T_1T_2=T_2T_1$，且 T_1 可逆，则 $T_1^{-1}T_2=T_2T_1^{-1}$。

证明：（1）设 $\alpha\in V$，$T_3(\alpha)=\beta\in V$

则：$\left[(T_1+T_2)T_3\right](\alpha)=(T_1+T_2)\left[T_3(\alpha)\right]=(T_1+T_2)(\beta)$

$=T_1(\beta)+T_2(\beta)$

$=T_1(T_3(\alpha))+T_2(T_3(\alpha))$

$=T_1T_3(\alpha)+T_2T_3(\alpha)$。

(2)因为，$T_1T_2=T_2T_1$，且T_1可逆，所以，$T_2=T_1^{-1}T_1T_2=T_1^{-1}T_2T_1$

故，$T_2T_1^{-1}=T_1^{-1}T_2T_1T_1^{-1}=T_1^{-1}T_2$。

（B）

1、设V_1,V_2,V_3都是有限维线性空间，$T_2\in L(V_1,V_2)$，$T_1\in L(V_2,V_3)$，证明 $rank(T_1T_2)\le\min|rank(T_1),rank(T_2)|$。

证法 1：**因为T_2不一定是满射，所以$T_2(V_1)\subset V_2, T_1(T_2(V_1))\subset T_1(V_2)$**

$rank(T_1T_2)=\dim[T_1T_2(V_1)]=\dim\{T_1(T_2(V_1))\}\le\dim\{T_1(V_2)\}$

$=rank(T_1)$

同理：**因为T_1不一定是单射.**

$rank(T_1T_2)=\dim\{(T_1T_2(V_1))\}=\dim\{T_1(T_2(V_1))\}\le\dim\{T_2(V_1)\}$

$=rank(T_2)$。

所以有$\operatorname{rank}(T_1T_2)\le\min\{\operatorname{rank}(T_1),\operatorname{rank}(T_2)\}$

证法 2：设$T_2\in L(V_1,V_2)$对应的矩阵为B，$rank(T_2)=r(B)$;

设$T_1\in L(V_2,V_3)$对应的矩阵为A，$rank(T_1)=r(A)$;

线性变换的乘积对应矩阵的乘积，$T_1T_2\in L(V_1,V_3)$对应的矩阵为AB.

$R(T_1T_2)$与AB的列空间同构. $rank(T_1T_2)=r(AB)$。

因为$r(AB)\le\min\{r(A),r(B)\}$。

所以有$\operatorname{rank}(T_1T_2)\le\min\{\operatorname{rank}(T_1),\operatorname{rank}(T_2)\}$

2、设V上的线性算子T满足$T^2=T$，证明：$V=\ker(T)\oplus R(T)$。

证明：$\forall\alpha\in V$，$\alpha=[\alpha-T(\alpha)]+T(\alpha)$

$T(\alpha-T(\alpha))=T(\alpha)-T^2(\alpha)=T(\alpha)-T(\alpha)=0$

所以，$\alpha-T(\alpha)\in\ker(T)$，又，$T(\alpha)\in R(T)$

$\therefore V=\ker(T)+R(T)$

$\forall\beta\in R(T)$，有$\alpha\in V$，使得$T(\alpha)=\beta$

$\therefore T(\beta)=T^2(\alpha)=T(\alpha)=\beta$，

若$\beta\ne0$，$T(\beta)\ne0$，$\therefore\beta\notin\ker(T)$。

由此有：$\ker(T)\cap R(T)=\{0\}$，

所以有$V=\ker(T)\oplus R(T)$

习题 8.2

（A）

1、设T为$F[x]_3$上的线性算子，定义$T(f(x))=f(x+1)-f(x)$，求T在基$1,x,x^2,x^3$下的矩阵。

解：$f_1(x)=1$，$T(f_1(x))=1-1=0=(1\quad x\quad x^2\quad x^3)\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$

$f_2(x)=x$，$T(f_2(x))=(x+1)-x=1=(1\quad x\quad x^2\quad x^3)\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$

同理得：$f_3(x)=x^2$，$T(f_3(x))=(1\quad x\quad x^2\quad x^3)\begin{pmatrix}1\\2\\0\\0\end{pmatrix}$

$f_4(x)=x^3$，$T(f_4(x))=(1\quad x\quad x^2\quad x^3)\begin{pmatrix}1\\3\\3\\0\end{pmatrix}$

故，T在基$1,x,x^2,x^3$的秩阵为$\begin{pmatrix}0&1&1&1\\0&0&2&3\\0&0&0&3\\0&0&0&0\end{pmatrix}$

2、证明：若$T\in L(R^n,R^m)$，则必存在实矩阵$A_{m\times n}$使得$\forall x\in R^n$，成立$T(x)=Ax$。

证明；因为$T\in L(R^n,R^m)$，设$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$是$R^n$中的基本单位向量组，并设：

$T(\varepsilon_i)=(a_{1i},a_{2i},\cdots,a_{mi})^T$ （$i=1,2,\cdots,n$），

$\forall x\in R^n$，$x=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^T=a_1\varepsilon_1+a_2\varepsilon_2+\cdots+a_n\varepsilon_n$

故，$T(x)=T(a_1\varepsilon_1+a_2\varepsilon_2+\cdots+a_n\varepsilon_n)$

$=a_1T(\varepsilon_1)+a_2T(\varepsilon_2)+\cdots+a_nT(\varepsilon_n)$

$=(T(\varepsilon_1)\quad T(\varepsilon_2)\quad\cdots\quad T(\varepsilon_n))(a_1\quad a_2\quad\cdots\quad a_n)^T$

$$=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}=Ax$$

[在此：必须选R^n中的基本单位向量组作为R^n的基]

3、设 $T:F[x]_2-F[x]_1$，是一线性变换，定义为 $T(a_0+a_1x+a_2x^2)=(a_0+a_1)-(2a_1+3a_2)x$；（1）求$T$在基$B$，$B'$下的矩阵，其中$B=|1,x,x^2|$，$B'=|1,x|$；（2）用（1）求出的矩阵对$F[x]_2$中任意向量$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2$验证公式（8.2.7）。

解：（1）由已知得：$T(1)=1=(1\quad x)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$

$T(x)=1-2x=(1\quad x)\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$

$T(x^2)=-3x=(1\quad x)\begin{pmatrix}0\\-3\end{pmatrix}$

故，T在基B，B'下的矩阵为$A=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&-2&-3\end{pmatrix}$。

（2）$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2$，$f(x)$在基B下的坐标为$(a_0,a_1,a_2)^T$

$T(f(x))=T(a_0+a_1x+a_2x^2)=(a_0+a_1)-(2a_1+3a_2)x$

$=(1\quad x)\begin{pmatrix}a_0+a_1\\-2a_1-3a_2\end{pmatrix}$

$T(f(x))$在基B'下的坐标为$(a_0+a_1,-2a_1-3a_2)^T$

显然有：$\begin{pmatrix}a_0+a_1\\-2a_1-3a_2\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}a_0\\a_1\\a_2\end{pmatrix}$，验证公式（8.2.7）。

4、设$T\in L(R^4,R^3)$，T在基$B=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4]$，$B'=[\beta_1,\beta_2,\beta_3]$下的矩阵为

$A=\begin{bmatrix}3&-2&1&0\\2&6&2&1\\-3&0&7&1\end{bmatrix}$，其中，$\alpha_1=(0,1,1,1)^T$，$\alpha_2=(2,1,-1,-1)^T$，$\alpha_3=(1,4,-1,2)^T$，$\alpha_4=(6,9,4,2)^T$，$\beta_1=(0,8,8)^T$，$\beta_2=(-7,8,1)^T$，$\beta_3=(-6,9,1)^T$，求$\alpha_1=(1,-2,1,-2)^T$在基$B$下的坐标，并求$T(\alpha)$。

解：设$\alpha=\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\alpha_3x_3+\alpha_4x_4$

即$(\alpha_1\quad\alpha_2\quad\alpha_3\quad\alpha_4)(x_1,x_2,x_3,x_4)^T=(1,-2,1,-2)^T$

解得，$x_1=1$，$x_2=1$，$x_3=-1$，$x_4=0$

由公式（8.2.7）得，$y=(y_1,y_2,y_3)^T=A(x_1,x_2,x_3,x_4)^T$

$=(2,5,-10)^T$

故，$T(\alpha)=2\beta_1+5\beta_2-10\beta_3=(25,-50,-5)^T$。

5、设$\dim(V)=n$，$\dim(W)=m$，$n>m$，$T\in L(V,W)$，问T是否为单射？

解法 1：由于$T\in L(V,W)$，且$\dim(V)=n$，$\dim(W)=m$，$n>m$

故，由定理 8.1.3 知，$nullity(T)+rank(T)=n$

而，$rank(T)\le m$

则，$nullity(T)\ge n-m>0$

说明：T不是单射。

解法 2：由于$T\in L(V,W)$，且 ，$\dim(V)=n$，$n>m$

所以，与T对应的矩阵$A_{m\times n}$满足$m<n$，故$r(A)<n$

则方程组$Ax=0$必存在非零解，故，T不是单射。

6、设$\alpha_1,\cdots,\alpha_n$是线性空间V的基，$T\in L(V)$，证明：T可逆的充要条件是$T(\alpha_2),\cdots,T(\alpha_n)$线性无关。

证法 1：由定理 8.1.9：T可逆$\Leftrightarrow rank(T)=n\Leftrightarrow T(\alpha_1),T(\alpha_2),\cdots,T(\alpha_n)$线性无关.

证法 2：T可逆$\Leftrightarrow$与T对应的矩阵$A_{n\times n}$可逆$\Leftrightarrow A$的列空间的秩为$n\Leftrightarrow A$的列向量组线性无关。

又$\because\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$是$V$的基，线性无关。

故，$T(\alpha_1),T(\alpha_2),\cdots,T(\alpha_n)$线性无关。

7、设T,S都是R^3上线性算子，定义为：$T(x_1,x_2,x_3)^T=(x_1,x_2,x_1+x_3)^T$；$S(x_1,x_2,x_3)^T=(x_1+x_2-x_3,0,x_3-x_1-x_2)^T$，求$TS$、$ST$、$T^2$、$T+S$、$2T$、$T^{-1}$。

解：由$T(x_1,x_2,x_3)^T=(x_1,x_2,x_1+x_3)^T$知，与$T$对应的矩阵$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$

$S(x_1,x_2,x_3)^T=(x_1+x_2-x_3,0,x_3-x_1-x_2)^T$知，

与S对应的矩阵$B=\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&0&0\\-1&-1&1\end{pmatrix}$

由定理 8.2.1 知

与TS对应的矩阵$AB=\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$，故$TS(x_1,x_2,x_3)^T=(AB)x$

与ST对应的矩阵$BA=\begin{pmatrix}0&1&-1\\0&0&0\\0&-1&1\end{pmatrix}$，故$ST(x)=BAx$

与T^2对应的矩阵$A^2=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\2&0&1\end{pmatrix}$，故$T^2(x)=A^2x$

与$T+S$对应的矩阵为$A+B=\begin{pmatrix}2&1&-1\\0&1&0\\0&-1&2\end{pmatrix}$，故$(T+S)(x)=(A+B)x$

与$2T$对应的矩阵为$2A=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&2&0\\2&0&2\end{bmatrix}$，故$2T(x)=2Ax$

与T^{-1}对应的矩阵为$A^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-1&0&1\end{pmatrix}$，故$T^{-1}(x)=A^{-1}x$。

8、设T是$F[x]_2$上的线性算子，T在基$|x^2,x,1|$下的矩阵$A=\begin{bmatrix}1&2&3\\-1&0&3\\2&1&5\end{bmatrix}$，求$T$在基$|x^2,x^2+x,x^2+x+1|$下的矩阵。

解：基$(x^2,x,1)$与基(x^2,x^2+x,x^2+x+1)之间的过渡矩阵$C=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$

即：$(x^2,x^2+x,x^2+x+1)=(x^2,x,1)C$

而，$T(x^2,x,1)=(x^2,x,1)A$

故，$T(x^2,x^2+x,x^2+x+1)=T(x^2,x,1)C$

$=(x^2,x,1)AC$

$=(x^2,x^2+x,x^2+x+1)C^{-1}AC$

则：T在基(x^2,x^2+x,x^2+x+1)下的矩阵为$C^{-1}AC=\begin{pmatrix}2&4&4\\-3&-4&-6\\2&3&8\end{pmatrix}$。

9、设$T\in L(R^3)$，$T(\alpha_1)=(-5,0,3)^T$，$T(\alpha_2)=(0,-1,6)^T$，$T(\alpha_3)=(-5,-1,9)^T$，其中$\alpha_1=(-1,0,2)^T$，$\alpha_2=(0,1,1)^T$，$\alpha_3=(3,-1,0)^T$，求T在基$\varepsilon_1=(1,0,1)^T$，$\varepsilon_2=(0,1,0)^T$，$\varepsilon_3=(0,0,1)^T$下的矩阵。

解：由已知得，$(T(\alpha_1),T(\alpha_2),T(\alpha_3))=\begin{pmatrix}-5&0&-5\\0&-1&-1\\3&6&9\end{pmatrix}=A=(\varepsilon_1\ \ \varepsilon_2\ \ \varepsilon_3)A$

$(\alpha_1\ \ \alpha_2\ \ \alpha_3)=(\varepsilon_1\ \ \varepsilon_2\ \ \varepsilon_3)\begin{pmatrix}-1&0&3\\0&1&-1\\2&1&0\end{pmatrix}=(\varepsilon_1\ \ \varepsilon_2\ \ \varepsilon_3)B$

$(\varepsilon_1\ \ \varepsilon_2\ \ \varepsilon_3)=(\alpha_1\ \ \alpha_2\ \ \alpha_3)B^{-1}$

故，$T(\varepsilon_1\ \ \varepsilon_2\ \ \varepsilon_3)=(T(\varepsilon_1)\ \ T(\varepsilon_2)\ \ T(\varepsilon_3))=(T(\alpha_1)\ \ T(\alpha_2)\ \ T(\alpha_3))B^{-1}$

$=(\varepsilon_1\ \ \varepsilon_2\ \ \varepsilon_3)AB^{-1}$

则，T在基$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$下的矩阵为$AB^{-1}=\frac{1}{7}\begin{pmatrix}-5&20&-20\\-4&-5&-2\\27&18&24\end{pmatrix}$。

10、设$T\in L(V)$，T在V的基e_1,e_2,e_3下的矩阵为$A=\begin{bmatrix}15&-11&5\\20&-15&8\\8&-7&6\end{bmatrix}$，求$T$在基$\beta_1=2e_1+3e_2+e_3$，$\beta_2=3e_1+4e_2+e_3$，$\beta_3=e_1+2e_2+2e_3$下的矩阵。

解：e_1,e_2,e_3到基β_1,β_2,β_3之间的过渡矩阵$C=\begin{pmatrix}2&3&1\\3&4&2\\1&1&2\end{pmatrix}$

即：$(\beta_1\ \ \beta_2\ \ \beta_3)=(e_1\ \ e_2\ \ e_3)C$

又因为：$T(e_1\ \ e_2\ \ e_3)=(e_1\ \ e_2\ \ e_3)A$

故，T在基β_1,β_2,β_3下的矩阵为$C^{-1}AC=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}$。

（B）

1、设$T\in L(V)$，证明：如果T在V的任一基下的矩阵都相同，则T是数乘变换。

证明：设A是线性变换T在某个基下的矩阵，则A对于任意可逆矩阵C，有$C^{-1}AC$也是线性变换T在另外一个基下的矩阵，由题意有，$C^{-1}AC=A$，即$AC=CA$，特别取$C=E_{ij}$，其中：$1\le i<j\le n$，i行j列处元素为 1，其余元素为零的矩阵。则由$AE_{ij}=E_{ij}A$，得，A为数量矩阵。

2、设V为复数域C上的线性空间$T\in L(V)$，若存在数$\lambda_0\in C$及V中非零向量α，使得$T(\alpha)=\lambda_0\alpha$，则称$\lambda_0$为$T$的一个特征值，称$\alpha$为$T$的对应于特征值$\lambda_0$的特征向量，设$T$在$V$的基$e_1,e_2,\cdots,e_n$下的矩阵为$A$，证明：$\lambda_0$为$T$的特征值且$\alpha$为对应的特征向量$\Leftrightarrow\lambda_0$为$A$的特征值且$x$为对应的特征向量，其中$x$为$\alpha$在基$e_1,e_2,\cdots,e_n$下的坐标向量。

证明：设$\alpha=x_1e_1+x_2e_2+\cdots+x_ne_n=(e_1,e_2,\cdots,e_n)x$

其中：$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$

则，$T(\alpha)=T(e_1,e_2,\cdots,e_n)x=(T(e_1),T(e_2),\cdots,T(e_n))x$

$=(e_1,e_2,\cdots,e_n)Ax$

$\lambda_0\alpha=\lambda_0(e_1,e_2,\cdots,e_n)x=(e_1,e_2,\cdots,e_n)\lambda_0 x$

故，$T(\alpha)=\lambda_0\alpha \Leftrightarrow (e_1,e_2,\cdots,e_n)Ax=(e_1,e_2,\cdots,e_n)\lambda_0 x$

$\Leftrightarrow (e_1,e_2,\cdots,e_n)(Ax-\lambda_0 x)=0$

由于$e_1,e_2,\cdots,e_n$线性无关$\Leftrightarrow Ax=\lambda_0 x$

$\alpha\in\forall$非零向量，$x\in C^n$亦非零向量。

故得证。

3、设$T\in L(V)$,，T在V的基$B=|\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n|$下的矩阵为$A$，证明：$T$在$V$的某基$B'=[\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n]$下的矩阵为对角矩阵$D\Leftrightarrow A$相似于对角矩阵$D$，并在$A$可相似对角化时，求出及$B'$。

"$\Rightarrow$" $T\in L(V)$, T在V的基$B=\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\}$下的矩阵为$A$，$T$在$V$的某基$B'=[\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n]$下的矩阵为对角矩阵$D$，则由定理知$A$与$D$相似，说明$A$可对角化。

"$\Leftarrow$" 设A相似于对角矩阵D，即存在可逆矩阵C，满足$C^{-1}AC=D$，由于$B=\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\}$为$V$的基，$T$在$V$的基$B$下的矩阵为$A$，故，$B'=BC=\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\}C$也为$V$的基。且，

$T(B')=T[\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\}]C=\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\}AC=B'\cdot C^{-1}AC=B'D$

故得知，T在V的基B'下的矩阵为$C^{-1}AC=D$，且为对角矩阵；

且有$B'=BC=\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\}C$为$V$的另一个基

4、设V上的线性算子T在V的基$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$下的矩阵为$A$，对下列矩阵$A$。问是否存在$V$的基$\beta_1,\beta_2,\beta_3$，使得$T$在这个基下的矩阵为对角矩阵？若是，求出这个基及对应的对角矩阵。（1）$A=\begin{bmatrix}-1&3&-1\\-3&5&-1\\-3&3&1\end{bmatrix}$；（2）$A=\begin{bmatrix}6&-5&-3\\3&-2&-2\\2&-2&0\end{bmatrix}$。

解：由上题的结论可进行求解。

（1）$A=\begin{bmatrix}-1&3&-1\\-3&5&-1\\-3&3&1\end{bmatrix}$，$|\lambda E-A|=0$，得$\lambda_1=1$，$\lambda_2=\lambda_3=2$，

$\lambda_1=1$对应的特征向量为$(1,1,1)^T$，

$\lambda_2=\lambda_3=2$对应的特征向量为$(1,1,0)^T$，$(0,1,3)^T$。

则A可对角化，且$C=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&1&1\\1&0&3\end{pmatrix}$，$C^{-1}AC=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}$

并且存在V的基$B'=(\alpha_1\quad\alpha_2\quad\alpha_3)C$

线性变换T在基B'下的矩阵为$diag(1,2,2)$。

（2）$A=\begin{bmatrix}6&-5&-3\\3&-2&-2\\2&-2&0\end{bmatrix}$，$|\lambda E-A|=0$，得$\lambda_1=\lambda_2=1$，$\lambda_3=2$，

$\lambda_1=\lambda_2=1$对应的特征向量为$(1,1,0)^T$，

因此，A不可对角化，故不存在V的基。

5、设T是n维欧氏空间V上的线性算子，如果$\forall\alpha,\ \beta\in V$，都有$\langle T(\alpha),T(\beta)\rangle=\langle\alpha,\beta\rangle$，则称$T$为正交变换，设$T\in L(V)$，证明下列各命题是相互等价的。(1) T是正交变换；(2) T是保长度的，即$\forall\alpha\in V$，都有$\|T(\alpha)\|=\|\alpha\|$；（3）如果$e_1,e_2,\cdots,e_n$是V的标准正交基，则$T(e_1),T(e_2),\cdots,T(e_n)$也是$V$的标准正交基；（4）$T$在任一标准正交基下的矩阵为正交矩阵。

证明：（1）$\Rightarrow$（2）若T是正交变换，则有$\forall\alpha$，$\beta\in V$，$\langle T(\alpha),T(\beta)\rangle=\langle\alpha,\beta\rangle$，

故，$\langle T(\alpha),T(\alpha)\rangle=\langle\alpha,\alpha\rangle$

$\|T(\alpha)\|^2=\|\alpha\|^2$，即，$\|T(\alpha)\|=\|\alpha\|$.

(2)$\Rightarrow$(1) 若$\forall\alpha\in V$，都有，$\|T(\alpha)\|=\|\alpha\|$，两边平方得，

$\|T(\alpha)\|^2=\|\alpha\|^2$，即，$\langle T(\alpha),T(\alpha)\rangle=\langle\alpha,\alpha\rangle$，$\langle T(\beta),T(\beta)\rangle=\langle\beta,\beta\rangle$

故，$\langle T(\alpha+\beta),T(\alpha+\beta)\rangle=\langle\alpha+\beta,\alpha+\beta\rangle$。

$2\langle T(\alpha),T(\beta)\rangle+\langle T(\alpha),T(\alpha)\rangle+\langle T(\beta),T(\beta)\rangle=2\langle\alpha,\beta\rangle+\langle\alpha,\alpha\rangle+\langle\beta,\beta\rangle$

则，$\langle T(\alpha),T(\beta)\rangle=\langle\alpha,\beta\rangle$

（1）$\Rightarrow$（3）若$e_1,e_2,\cdots,e_n$是V一组标准正交基，则$\langle e_i,e_j\rangle=\begin{cases}1 & i=j\\0 & i\neq j\end{cases}$

若T是正交变换，则有：$\langle T(e_i),T(e_j)\rangle=\langle e_i,e_j\rangle=\begin{cases}1 & i=j\\0 & i\neq j\end{cases}$

即，也是$T(e_1),T(e_2),\cdots,T(e_n)$也是$V$一组标准正交基。

(3)$\Rightarrow$(1) 若$e_1,e_2,\cdots,e_n$是V的标准正交基，$T\in L(V)$，

$T(e_1),T(e_2),\cdots,T(e_n)$也是$V$的标准正交基。

设$\alpha=x_1e_1+x_2e_2+\cdots+x_ne_n$，$\beta=y_1e_1+y_2e_2+\cdots+y_ne_n$

$T(\alpha)=x_1T(e_1)+x_2T(e_2)+\cdots+x_nT(e_n)$

$T(\beta)=y_1T(e_1)+y_2T(e_2)+\cdots+y_nT(e_n)$，由标准正交基性质得，

$\langle\alpha,\beta\rangle=x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n$，$\langle T(\alpha),T(\beta)\rangle=x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n$

故得，$\langle\alpha,\beta\rangle=\langle T(\alpha),T(\beta)\rangle$，$T$是正交变换。

（3）$\Rightarrow$（4），设$e_1,e_2,\cdots,e_n$为V的标准正交基，T在该基下的矩阵为A，则，

$T(e_1,e_2,\cdots,e_n)=(T(e_1),T(e_2),\cdots,T(e_n))=(e_1,e_2,\cdots,e_n)A$

若$T(e_1),T(e_2),\cdots,T(e_n)$也是$V$的标准正交基，则矩阵$A$相当于欧氏空间$V$的两组标准正交基间的过渡矩阵，则$A$一定是正交矩阵。

(4)$\Rightarrow$(3)，设$e_1,e_2,\cdots,e_n$为V的标准正交基，T在该基下的矩阵为A，且A是正交矩阵，则，

$T(e_1,e_2,\cdots,e_n)=(T(e_1),T(e_2),\cdots,T(e_n))=(e_1,e_2,\cdots,e_n)A$

由第五章的习题结论可知，$T(e_1),T(e_2),\cdots,T(e_n)$也是$V$的标准正交基。

第 8 章习题

1、设有R^2得即$B:\varepsilon_1=(1,0)^T$，$\varepsilon_2=(0,1)^T$；R^3的基B': $\alpha_1=(1,1,0)^T$，$\alpha_2=(1,0,1)^T$，$\alpha_3=(0,1,1)^T$，$T\in L(R^2,R^3)$，定义为$T(x)=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+(x_1+x_2)\alpha_3$，$\forall x=(x_1,x_2)^T\in R^2$。（1）求$T$的值域与秩、核与零度；（2）$T$是否为单射？（3）求$T$在基$B,B'$下的矩阵。

解：由定义$T(x)=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+(x_1+x_2)\alpha_3$，

得，$T(x)=x_1(\alpha_1+\alpha_3)+x_2(\alpha_2+\alpha_3)=x_1(1,2,1)^T+x_2(1,1,2)^T$

（1）故，$R(T)=span((1,2,1)^T,(1,1,2)^T)$，所以，$rank(T)=2$。

（2）令，$T(x)=0$，即得$x_1(1,2,1)^T+x_2(1,1,2)^T=(0,0,0)^T$

可知，$x_1=0$，$x_2=0$，即$x=(0,0)^T$

故，$\ker(T)=\{0\}$，$nuuity(T)=0$，

由定理知，T是单射。

因为，$rank(T)=2<3$，所以，T不是满射。

（3）$T(\varepsilon_1,\varepsilon_2)=(T(\varepsilon_1),T(\varepsilon_2))=(\alpha_1\quad\alpha_2\quad\alpha_3)A$

即，$\begin{pmatrix}1&1\\2&1\\1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&0&1\\0&1&1\end{pmatrix}A$

故，$A=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&0&1\\0&1&1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1&1\\2&1\\1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\1&1\end{pmatrix}$。

2、设$T\in L(R[x])$，定义为$T(f(x))=xf'(x)+f''(x)$，$\forall f(x)\in R[x]_2$（1）求T在基$|1,\ x,x^2|$下的矩阵A；（2）求T在基$|1,\ x,1+x^2|$下的矩阵B；（3）求

矩阵 S，使得 $B=S^{-1}AS$；(4)若 $f(x)=a_0+a_1x+a_2(1+x^2)$，求 $T^n(f(x))(n=2,3,\cdots)$。

解，（1）因为，$T(f(x))=xf'(x)+f''(x)$

$f_1(x)=1$，$T(f_1(x))=0=(1,x,x^2)(0,0,0)^T$

$f_2(x)=1$，$T(f_2(x))=x=(1,x,x^2)(0,1,0)^T$

$f_3(x)=1$，$T(f_3(x))=2x^2+2=(1,x,x^2)(2,0,2)^T$

故 $T(1,x,x^2)=(T(1),T(x),T(x^2))=(1,x,x^2)\begin{pmatrix}0&0&2\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}=(1,x,x^2)A$。

（2）同理求得，

$$T(1,x,1+x^2)=(T(1),T(x),T(1+x^2))=(1,x,1+x^2)\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}=(1,x,1+x^2)B$$

（3）$(1,x,1+x^2)=(1,x,x^2)\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=(1,x,x^2)S$

得，$B=S^{-1}AS$。

（4）$f(x)=a_0+a_1x+a_2(1+x^2)=(1,x,1+x^2)(a_0,a_1,a_2)^T$

故，$T^n(f(x))=T^n((1,x,1+x^2)(a_0,a_1,a_2)^T)$

$=T^{n-1}(T(1,x,1+x^2)(a_0,a_1,a_2)^T)$

$=T^{n-1}((1,x,1+x^2)B\cdot(a_0,a_1,a_2)^T)$

…

$=(1,x,1+x^2)B^n(a_0,a_1,a_2)^T$

$=(1,x,1+x^2)(a_0,a_1,2^na_2)^T$

$=a_1x+2^na_2(1+x^2)$

3、已知 $T\in L(R^3)$，T 在基 $B:\alpha_1=(-1,1,1)^T$，$\alpha_2=(1,0,-1)^T$，$\alpha_3=(0,0,1)^T$ 下的矩阵为 $A=\begin{bmatrix}1&0&1\\1&1&0\\-1&2&1\end{bmatrix}$，（1）求 T 在基 $B':\varepsilon_1=(1,0,0)^T$，$\varepsilon_2=(0,1,0)^T$，$\varepsilon_3=(0,0,1)^T$ 下的矩阵；（2）求 $T(1,2,-5)^T$。

解：（1）由题设知，由 B' 到 B 的过渡矩阵为 $C=\begin{pmatrix}-1&1&0\\1&0&1\\1&-1&1\end{pmatrix}$，

则，由 B 到 B' 的过渡矩阵为 $C^{-1}=\begin{pmatrix}-1&1&-1\\0&1&-1\\1&0&1\end{pmatrix}$，

故，$T\in L(R^3)$ 在基 B' 下的矩阵为 $D=C^{-1}AC=\begin{pmatrix}-1&1&-2\\2&2&0\\3&0&2\end{pmatrix}$。

（2）$T(1,2,-5)^T=T((\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)(1,2,-5)^T)$

$=D(1,2,-5)^T=(11,6,-7)^T$

4、设 $T\in L(V)$，T 在 V 的基 e_1,e_2,e_3 下的矩阵为 $A=\begin{bmatrix}5&0&0\\-4&3&-2\\-4&-2&3\end{bmatrix}$。（1）$T$ 是否可逆?，若 T 可逆，求 T^{-1}；（2）试求 V 的另一基，使得 T 在该基下的矩阵为对角矩阵。

解：（1）$|A|=25\neq0$，故，A 可逆，所以，T 可逆，

又因为 $A^{-1}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}1&0&0\\4&3&2\\4&2&3\end{pmatrix}$，

则，$T^{-1}=(e_1\quad e_2\quad e_3)\frac{1}{5}\begin{pmatrix}1&0&0\\4&3&2\\4&2&3\end{pmatrix}$

（2）将居住 A 对角化，$|\lambda E-A|=0$，得 $\lambda_1=1$，$\lambda_2=\lambda_3=5$，对应的特征向量分别为：$\alpha_1=(0,1,1)^T$，$\alpha_2=(1,-2,0)^T$，$\alpha_3=(1,0,-2)^T$，

故，有基为：e_2+e_3，e_1-2e_2，e_1-2e_3，

T 在这一组基下的矩阵为 $diag(1,5,5)$。

5、设 $T\in L(V)$，T 在 V 的基 $B:e_1,e_2,e_3$ 下的矩阵为 $A=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&-1&-1\\0&2&2\end{bmatrix}$。（1）证明 $T^2=T$；(2)求 $R(T)$ 和 $\ker(T)$ 的基，并证明将它们合在一起可构成 V 的基 B'；(3)求 T 在 B' 下的矩阵；(4)证明 $\forall\alpha\in R(T)$，恒有 $T(\alpha)\in R(T)$，$\forall\beta\in\ker(T)$，恒有 $T(\beta)\in\ker(T)$。

解：（1）线性变换相乘等于对应的矩阵相乘，故，要证明 $T^2=T$，只要证明 $A^2=A$ 就可以了。

因为 $A^2=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&-1&-1\\0&2&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&-1&-1\\0&2&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&-1&-1\\0&2&2\end{bmatrix}A$，故，$T^2=T$。

（2）$R(T)=(e_1\quad e_2\quad e_3)A=span(e_1,-e_2+2e_3)$，$Ax=0$ 的解为 $\ker(T)$ 中的元素，在基 e_1,e_2,e_3 下的坐标，故，$\ker(T)=span(e_2-e_3)$。

又因为，$(e_1,-e_2+2e_3,e_2-e_3)=(e_1\quad e_2\quad e_3)\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&1\\0&2&-1\end{pmatrix}$

$\det\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&1\\0&2&-1\end{pmatrix}=-1\neq0$，

所以，$R(T)$，$\ker(T)$ 的基合在一起构成 V 的一个基 B'，

其中，$R(T)$ 的基为：$e_1,-e_2+e_3$，

$\ker(T)$ 的基为：e_2-e_3。

（3）T 在基 B' 下的矩阵为

$$D=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&1\\0&2&-1\end{pmatrix}^{-1}A\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&1\\0&2&-1\end{pmatrix}=diag(1,1,0)$$

（4）由（1）知，T 是可逆线性变换，

$\forall\alpha\in R(T)$，$\exists\beta\in V$，使得，$T(\beta)=\alpha$

故，$T(\alpha)=T(T(\beta))=T^2(\beta)=T(\beta)=\alpha\in R(T)$

所以，$T(\alpha)\in R(T)$。

$\forall\beta\in\ker(T)$，得，$T(\beta)=0$，

$T(0)=0=T^2(\beta)=T(\beta)=0$

所以，$T(\beta)\in\ker(T)$。

6、设 $T\in L(V,W)$，V 为有限维空间，已知 $T(e_1),\cdots,T(e_r)$ 为 $R(T)$ 的基（其中 $e_i=V,i=1,\cdots,r$），又知 $\beta_1,\cdots,\beta_s$ 为 $\ker(T)$ 的基，试证明向量组 $(I):e_1,\cdots,e_r,\beta_1,\cdots\beta_s$ 是 V 的基.

证明：已知 $T(e_1),\cdots,T(e_r)$ 为 $R(T)$ 的基（其中 $e_i=V,i=1,\cdots,r$），

$\beta_1,\cdots,\beta_s$ 为 $\ker(T)$ 的基，

设存在一组常数 $k_1,k_2,\cdots,k_r,l_1,l_2,\cdots l_s$ 满足

$k_1e_1+k_2e_2+\cdots+k_re_r+l_1\beta_1+l_2\beta_2+\cdots+l_s\beta_s=0 \quad (1)$

$T(k_1e_1+k_2e_2+\cdots+k_re_r+l_1\beta_1+l_2\beta_2+\cdots+l_s\beta_s)=T(0)=0$

$k_1T(e_1)+k_2T(e_2)+\cdots+k_rT(e_r)=0\Rightarrow k_1=k_2=\cdots=k_r=0$

将 $k_1=k_2=\cdots=k_r=0$ 代入（1）得 $l_1=l_2=\cdots=l_s=0$

所以，$e_1,e_2,\cdots,e_r,\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 线性无关.

再证明 V 中任一向量 α 都可由 $e_1,e_2,\cdots,e_r,\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 线性表示.

设 $T(\alpha)=a_1T(e_1)+a_2T(e_2)+\cdots+a_rT(e_r)$.

记向量$\alpha_0=\alpha-(a_1e_1+a_2e_2+\cdots+a_re_r)$

$T(\alpha_0)=T(\alpha-(a_1e_1+a_2e_2+\cdots+a_re_r))=T(\alpha)-a_1T(e_1)-a_2T(e_2)-\cdots-a_rT(e_r))=0$

$\alpha_0\in\ker(\mathrm{T})$

α_0可由$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 线性表示.

即$\alpha_0=b_1\beta_1+b_2\beta_2+\cdots+b_s\beta_s$.

故$\alpha=\alpha=a_1e_1+a_2e_2+\cdots+a_re_r+b_1\beta_1+b_2\beta_2+\cdots+b_s\beta_s$

因此，$e_1,e_2,\cdots,e_r,\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 是V的基.