例1 设$AB=O$. 证明下列结论成立：

(1)若A的列向量组线性无关,则$B=O$.

(2)若B的行向量组线性无关,则$A=O$.

(3)若$B\neq O$, 则A的列向量组线性相关.

(4)若$A\neq O$, 则B的行向量组线性相关.

解（1） 设$B=(B_1,B_2,\ldots,B_m)$, $AB=0\Rightarrow AB_i=0$.

A的列向量组线性无关$\Rightarrow AX=0$只有零解

$\Rightarrow B_i=0$, $i=1,\ldots,m\Rightarrow B=O$.

解（2） $B^T A^T=O$，由（1）知$A^T=O$，从而$A=O$.

其余情况可以类似得到.

例2 设三阶矩阵$B\neq O$，且B的每一列均为方程组

$$\begin{cases} x_1+2x_2-2x_3=0 \\ 2x_1-x_2+\lambda x_3=0 \\ 3x_1+x_2-x_3=0 \end{cases}$$ 的解，

（1）求λ.

（2）证明$|B|=0$.

解（1） 由题意，方程组有非零的解，

$$\Rightarrow D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & \lambda \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & \lambda-1 \\ 0 & -5 & 5 \end{vmatrix}=0 \qquad \therefore \lambda=1.$$

（2）当$\lambda=1$时，方程组的系数矩阵为

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ 所以$R(A)=2$

$|B|=0$

$\Uparrow$

则线性方程组基础解系所含向量的个数为1，$\therefore r(B)\leq 1$

例2　设三阶矩阵$B\neq O$，且B的每一列均为方程组

$$\begin{cases}x_1+2x_2-2x_3=0\\2x_1-x_2+\lambda x_3=0\\3x_1+x_2-x_3=0\end{cases}$$ 的解，

（1）求 λ.

（2）证明$|B|=0$.

另解（2）$A=\begin{pmatrix}1&2&-2\\2&-1&1\\3&1&-1\end{pmatrix}$，　记$B=[b_1\ b_2\ b_3]$，

由题意 $Ab_1=0$，$Ab_2=0$，$Ab_3=0$，即 $AB=O$.

若$|B|\neq 0$，即B可逆，　则 $A=O$，矛盾.

故$|B|=0$.

例3　设两向量组$(\mathrm{I}):\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$与$(\mathrm{II}):\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m,\beta$的秩相等，证明两向量组等价

证　(I)能由(II)线性表示，只须证β能由(I)线表即可.

法1　不妨设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$是(I)的一个极大无关组，

由$r(\mathrm{II})=r(\mathrm{I})=r$知，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$也是(II)的极大无关组，

因此β可由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$线性表出. 故(I)与(II)等价.

法2　$r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)=r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m,\beta)$

$\Longrightarrow$ 线性方程组$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_m\alpha_m=\beta$有解

因此β可由向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$线性表出

故向量组(I)与(II)等价.

例4 设向量组（I）与向量组（II）有相同的秩,且（I）可由（II）线性表示,证明（I）与（II）等价.

证: 设 $r(\mathrm{I})=r(\mathrm{II})=r$

(I') : $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_r$ 为 (I) 的极大无关组;

(II') : $\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_r$ 为 (II) 的极大无关组.

因为 (I) 能由 (II) 线性表示, 所以 (I') 能由 (II') 线性表示,

又 β_1 可由 (II') 线性表示. 所以 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_r$， β_1 可由 (II') 线性表示;故 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_r,\beta_1$ 线性相关.

又 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_r$ 线性无关， 故 β_1 可由 (I') 线性表示.

同理可证 $\beta_2,\ \ldots,\ \beta_r$ 可由 (I') 线性表示.

所以 (II') 能由 (I') 线性表示, 故（I）与（II）等价.

例5 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性相关,证明:存在不全为零的数 $t_1,t_2,\cdots,t_r$,使对任何向量 β 都有

$\alpha_1+t_1\beta,\alpha_2+t_2\beta,\cdots,\alpha_r+t_r\beta\ (r\geq 2)$ 线性相关 .

证 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$ 线性相关,故 $\exists$ 不全为零的数 $k_1,\cdots,k_r$,使

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_r\alpha_r=0$$

考虑线性方程 $k_1x_1+k_2x_2+\cdots+k_rx_r=0$,

因为 $r\geq 2$,它必有非零解 ,设 $(t_1,t_2,\cdots,t_r)$ 为任一非零解,则对任意向量 β,都有

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_r\alpha_r+(k_1t_1+k_2t_2+\cdots+k_rt_r)\beta=0$$

即 $k_1(\alpha_1+t_1\beta)+k_2(\alpha_2+t_2\beta)+\cdots+k_r(\alpha_r+t_r\beta)=0$

故 $\alpha_1+t_1\beta,\alpha_2+t_2\beta,\cdots,\alpha_r+t_r\beta$ 线性相关.

例 6 设 A 为 n 阶矩阵，证明

$$r(A+E)+r(A-E)\ge n.$$

$r(A+B)$
$\le r(A)+r(B)$

证明 因 $(A+E)+(E-A)=2E$,

有 $r(A+E)+r(E-A)\ge r(2E)=n$,

而 $r(E-A)=r(A-E)$,

所以 $r(A+E)+r(A-E)\ge n$. **证毕**

例 7 (习题4.4, 7)

设齐次线性方程组 $Ax=0$与$Bx=0$同解，证明$r(A)=r(B)$.

证： $Ax=0$与$Bx=0$同解 $\Rightarrow$ 有相同的基础解系

$\Rightarrow$ 基础解系所含向量的个 数相同

即$n-r(A)=n-r(B)\Rightarrow r(A)=r(B)$

例 8 证明:

(1)向量组(II)可由向量组(I)线性表示 $\Leftrightarrow r(I)=r(I,II)$

(2)向量组(I)与向量组(II)等价 $\Leftrightarrow r(I)=r(II)=r(I,II)$

(3)矩阵方程$A_{m\times n}X=B_{n\times p}$有解 $\Leftrightarrow r(A)=r(A\vdots B)$

证（1） $\Rightarrow$

(II)可由(I)线性表示,
(I)可由(I)线性表示, $\Rightarrow$ (I,II)可由(I)线性表示

又(I)可由(I,II)线性表示,$\therefore (I)$与(I,II)等价,$r(I)=r(I,II)$

$\Leftarrow$ 若$r(I)=r(I,II)$,

则(I)的极大无关组也是(I,II)的极大取关组,

故(II)可由该极大无关组线性表示,从而可由(I)线性表示.

例8 证明:

(1)向量组(II)可由向量组(I)线性表示 $\Leftrightarrow r(I)=r(I,II)$

(2)向量组(I)与向量组(II)等价 $\Leftrightarrow r(I)=r(II)=r(I,II)$

(3)矩阵方程$A_{m\times n}X=B_{n\times p}$有解 $\Leftrightarrow r(A)=r(A\vdots B)$

证（2）

$$(I)\text{与}(II)\text{等价}\Leftrightarrow\begin{cases}(II)\text{可由}(I)\text{线性表示}\Leftrightarrow r(I)=r(I,II)\\(I)\text{可由}(II)\text{线性表示}\Leftrightarrow r(II)=r(I,II)\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow r(I)=r(II)=r(I,II)$$

（3）

$AX=B$有解 $\Leftrightarrow$ B的列向量组可由A的列向量组表示

记A的列向量组为(I)，B的列向量组为(II),

由(1)知，B的列向量组可由A的列向量组表示

$$\Leftrightarrow r(I)=r(I,II),\ \text{即}\ r(A)=r(A\vdots B)$$

例 9 (习题4.4, 8)

设有矩阵$A_{m\times n}$，$B_{n\times p}$,且$r(A)=n$,证明：$r(AB)=r(B)$.

(对一个矩阵, 左乘一个列满秩矩阵, 其秩不变.)

证1: 若x是$Bx=0$的解，即$Bx=0$，两端左乘A,有$ABx=0$.

若x是$ABx=0$的解，则$y=Bx$是$Ay=0$的解，

$\because$ A列满秩，$\therefore Ay=0$只有零解，即Bx=0.

所以 方程$ABx=0$与$Bx=0$同解，故有$r(AB)=r(B)$.

证2 因 $r(A)=n$，知 A 的行最简形矩阵为 $\begin{pmatrix}E_n\\O\end{pmatrix}_{m\times n}$，

并有 m 阶可逆矩阵 P，使 $PA=\begin{pmatrix}E_n\\O\end{pmatrix}_{m\times n}$.

$$\Longrightarrow PAB=\begin{pmatrix}E_n\\O\end{pmatrix}B=\begin{pmatrix}B\\O\end{pmatrix}.$$

故 $r(AB)=r(PAB)=r\begin{pmatrix}B\\O\end{pmatrix}=r(B)$. **证毕**

例10 设向量组 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$ 线性无关，向量组 $\beta_1,\cdots,\beta_s$ 可由 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$ 线性表示，即存在矩阵 $B_{r\times s}$,满足

$$[\beta_1,\cdots\beta_s]=[\alpha_1,\cdots,\alpha_r]B,$$

试证：$\beta_1,\cdots\beta_s$ 线性无关 $\Leftrightarrow r(B)=s$

证 记 $[\beta_1\ \beta_2\ \cdots\ \beta_s]=A$，$[\alpha_1\ \alpha_2\ \cdots\ \alpha_r]=P$，

$\beta_1,\cdots,\beta_s$ 线性无关 $\Leftrightarrow r(A)=s$

由 $A=PB$，P 为列满秩矩阵 $\Longrightarrow r(A)=r(B)$

因此，$r(A)=s\Rightarrow r(B)=s$; $r(B)=s\Rightarrow r(A)=s$

$\Longrightarrow r(A)=s\Leftrightarrow r(B)=s$

故 $\beta_1,\cdots,\beta_s$ 线性无关 $\Leftrightarrow r(A)=s\Leftrightarrow r(B)=s$

例11 设 $\beta_1=\alpha_1+\alpha_2,\beta_2=\alpha_2+\alpha_3,\cdots,\beta_m=\alpha_m+\alpha_1$，其中 m 为大于2的奇数，证明向量组 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 与向量组 $\beta_1,\cdots\beta_m$ 有相同的秩. **(习题4.3, 4)**

证： 向量组 $\beta_1\ \cdots\ \beta_m$ 可由 $\alpha_1\ \cdots\ \alpha_m$ 线性表示.

$$[\beta_1\ \beta_2\ \cdots\ \beta_m]=[\alpha_1\ \alpha_2\cdots\alpha_m]B,$$

其中 $B=\begin{pmatrix}1&0&\cdots&0&1\\1&1&\cdots&0&0\\0&1&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&1&0\\0&0&0&1&1\end{pmatrix}$

$\because |B|=2,\therefore B$ 可逆.

法1 $r[\beta_1\ \beta_2\ \cdots\ \beta_m]=r[\alpha_1\ \alpha_2\cdots\alpha_m]$

对一个矩阵乘可逆矩阵秩不变

法2 $\Rightarrow[\beta_1\ \beta_2\ \cdots\ \beta_m]B^{-1}=[\alpha_1\ \alpha_2\cdots\alpha_m]$

即向量组 $\alpha_1\ \alpha_2\cdots\alpha_m$ 可由 $\beta_1\ \beta_2\ \cdots\ \beta_m$ 线性表示.

故两个向量组等价，有相同的秩.

例12 设$\alpha_1,\cdots,\alpha_m$是$Ax=0$的基础解系,又$\beta_1=t_1\alpha_1+t_2\alpha_2$,$\beta_2=t_1\alpha_2+t_2\alpha_3,\cdots,\beta_m=t_1\alpha_m+t_2\alpha_1$,问实常数$t_1,t_2$满足什么条件时,$\beta_1,\cdots\beta_m$也可作为$Ax=0$的基础解系.

(习题4.5(B)2

证: $\beta_1\ \beta_2\ \cdots\ \beta_m$可由$\alpha_1\ \alpha_2\cdots\alpha_m$线性表示,即

$$[\beta_1\ \beta_2\ \cdots\ \beta_m]=[\alpha_1\ \alpha_2\cdots\alpha_m]B$$

$$\text{其中}B_{m\times m}=\begin{pmatrix} t_1 & 0 & \cdots & 0 & t_2 \\ t_2 & t_1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & t_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & t_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t_2 & t_1 \end{pmatrix}$$

若B可逆,

即$|B|=t_1^m+(-1)^{m+1}t_2^m\neq 0$时

则$\alpha_1,\cdots,\alpha_m$也可由$\beta_1,\cdots,\beta_m$线性表示.

从而$\alpha_1,\cdots,\alpha_m$与$\beta_1,\cdots,\beta_m$等价, 此时$\beta_1,\cdots,\beta_m$也可作为$Ax=0$的基础解系. 若B不可逆,则$Bx=0$有非零解,

$\Rightarrow[\beta_1\ \beta_2\ \cdots\ \beta_m]=0$有非零解 $\Rightarrow\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$线性相关,

$\Rightarrow\beta_1,\cdots,\beta_m$不是基础解系.

例13 设$\alpha_i=(a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in})^T\in R^n(i=1,\cdots,r;r<n)$,已知向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$线性无关,且$\beta=(b_1,\cdots,b_n)^T$是齐次方程组$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j=0\ (i=1,\cdots,r)$的非零解向量。

(习题4.2(B), 2)

试判断向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$, β的线性相关性.

解: 设$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_r\alpha_r+x_{r+1}\beta=0$ (1)

由题意$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}b_j=0\ (i=1,\cdots,r)\Leftrightarrow\beta^T\alpha_i=0\ (i=1,\cdots,r)$

由(1)得$\beta^T(x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_r\alpha_r+x_{r+1}\beta)=0$

$$\Rightarrow x_{r+1}\beta^T\beta=0,\ \text{又}\because\beta^T\beta>0,\text{故}x_{r+1}=0.$$

$$\Rightarrow x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_r\alpha_r=0\Rightarrow x_1=x_2=\cdots x_r=0$$

因此$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,x_r,\beta$线性无关.