第 4 章 向量与线性方程组

几个重要知识点

1、线性方程组有解判定定理

2、线性方程组解的结构

3、求线性方程组的结构解

3、向量组的线性相关性（无关性）判定

4、求向量组的极大无关组并把其余向量用极大无关组线表

5、两个向量组等价

1. 设 $Ax=0$ 是非齐次方程组 $Ax=b$ 对应的齐次方程组, 则 【 **D** 】

(A) 若 $Ax=0$ 只有零解, 则 $Ax=b$ 有唯一解;

(B) 若 $Ax=0$ 有非零解, 则 $Ax=b$ 有无穷多解;

(C) 若 $Ax=b$ 有无穷多解, 则 $Ax=0$ 只有零解;

(D) 若 $Ax=b$ 有无穷多解, 则 $Ax=0$ 有非零解.

2. 设 n 维向量组 β_1,β_2,β_3 可由 α_1,α_2 线性表出, 则 【 **D** 】

(A) 仅当 α_1,α_2 线性无关时，β_1,β_2,β_3 线性无关;

(B) 仅当 α_1,α_2 线性相关时，β_1,β_2,β_3 线性相关;

(C) β_1,β_2,β_3 线性无关;

(D) β_1,β_2,β_3 线性相关.

3．设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵，则齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=0$ 仅有零解的充要条件是

【 **A** 】

(A) $\boldsymbol{A}$ 的列向量组线性无关. **(B)** $\boldsymbol{A}$ 的列向量组线性相关.

(C) $\boldsymbol{A}$ 的行向量组线性无关. **(D)** $\boldsymbol{A}$ 的行向量组线性相关.

4．设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系，则该方程组的基础解系还有 【A 】

(A) $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_1+\alpha_3$. **(B)** $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3-\alpha_1$.

(C) $\alpha_1-\alpha_2,\alpha_2-\alpha_3,\alpha_3-\alpha_1$. **(D)** $\alpha_1+2\alpha_2,2\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3-\alpha_1$.

5. 设 $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -2\\ 4 & t & 3\\ 3 & -1 & 1\end{pmatrix}$, B 为3阶非零矩阵, 且 $AB=0$, 则 $t=$__________. -3

6．设 **3** 元非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的两个解向量 η_1,η_2 满足

$$\eta_1+2\eta_2=(1,0,1)^{\mathrm{T}}，\quad \eta_2+\eta_1=(2,-2,1)^{\mathrm{T}}$$

且 $r(A)=2$．则该方程组的通解是____________. $k(-4,6,-1)^T+(3,-4,1)^T,k$任意

7. 设$\boldsymbol{A}=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$,其中列向量$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$线性无关，$\alpha_3=2\alpha_1-\alpha_2+\alpha_4$.
则齐次线性方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$的一个基础解系为__________.

答$(2,-1,-1,1)^T$

8. 设向量组$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$,$\alpha_2=\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}$， $\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\k\\-1\end{pmatrix}$线性相关，则$k$=________. 0

9. 设向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关,如果$\alpha_1+\alpha_2, k\alpha_2-\alpha_3, \alpha_3-\alpha_1$ 线性相关，k=-1
则$k=$________

10. 设$A=(\alpha_1\ \ \alpha_2)$为2阶方阵，A^*为A的伴随矩阵，若$(1,1)^{\mathrm{T}}$是线性方程组$Ax=0$的基础解系，则$A^*x=0$的基础解系可为________________. α_1或α_2

11（8分） 求向量组$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\-2\\-1\\3\end{pmatrix}$， $\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\4\end{pmatrix}$， $\alpha_3=\begin{pmatrix}2\\-3\\0\\7\end{pmatrix}$， $\alpha_4=\begin{pmatrix}-2\\1\\-3\\-9\end{pmatrix}$， $\alpha_5=\begin{pmatrix}1\\-4\\-7\\1\end{pmatrix}$的极大线性无关组，并将其余的向量用所求得的极大无关组线性表示.

解 $[\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3\ \alpha_4\ \alpha_5]\to\begin{pmatrix}1&1&2&-2&1\\0&1&1&-3&-2\\0&0&0&1&-2\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1&0&5\\0&1&1&0&-8\\0&0&0&1&-2\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$

一个极大无关组为$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$, 4分 $\alpha_3=\alpha_1+\alpha_2$, 6分 $\alpha_5=5\alpha_1-8\alpha_2-2\alpha_4$

12 已知空间直角坐标系中三平面的方程分别为：
π_1: $x+y+2z=1$, $\pi_2: x+\lambda y+z=2$, $\pi_3:\lambda x+y+z=1+\lambda$.

(1)当λ取何值时,这三个平面交于一点？交于一条直线？没有公共交点？
(2)当它们交于一直线时,求直线的方程.

联立三平面方程，得方程组$\begin{cases}x+y+2z=1\\x+\lambda y+z=2\\\lambda x+y+z=1+\lambda\end{cases}$ **(1)**

$$\bar{A}=\begin{pmatrix}1&1&2&1\\1&\lambda&1&2\\\lambda&1&1&1+\lambda\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&2&1\\0&\lambda-1&-1&1\\0&0&-2\lambda&2\end{pmatrix}$$

当$\lambda\neq 0$且$\lambda\neq 1$时，$r(A)=r(\bar{A})=3$,方程组有唯一解，从而三平面交于一点.

当$\lambda=0$时，$r(A)\neq r(\bar{A})$, 方程组无解，从而三平面无交点.

当$\lambda=1$时，$r(A)=r(\bar{A})=2$,三平面交于一条直线.

此时 $\bar{A}\to\begin{pmatrix}1&1&0&3\\0&0&1&-1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$,方程组(1)的通解为$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=k\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3\\0\\-1\end{pmatrix}$，此为交线的参数方程。或

$\frac{x-3}{1}=\frac{y}{-1}=\frac{z+1}{0}$ （对称式方程），或 $\begin{cases}x+y+2z=1\\ x+y+z=2\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x+y=3\\ z=-1\end{cases}$

13. 设 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\\a\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}0\\1\\b\end{pmatrix};\beta_1=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix},\beta_2=\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix},\beta_3=\begin{pmatrix}1\\1\\c\end{pmatrix}$. 已知向量组 α_1,α_2 与向量组 β_1,β_2,β_3 等价.

(1) 求向量组 β_1,β_2,β_3 的秩以及一个极大无关组，并求 a,b,c.

(2) 令矩阵 $A=(\alpha_1,\alpha_2),B=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$. 求满足 $AX=B$ 的矩阵 X.

解：由 α_1,α_2 与 β_1,β_2,β_3 等价，及 α_1,α_2 线性无关，知 $r(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=2$.

从而 $\det(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=0$，得 $c=0$. 又 β_1,β_2 线性无关，所以是一个极大无关组。4 分

因此 α_1,α_2 与 β_1,β_2 等价, 故有 $r(\alpha_1,\alpha_2)=r(\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2)$

又 $(\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2,\beta_3)=\begin{pmatrix}1&0&1&-1&1\\0&1&2&1&1\\a&b&1&2&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1&-1&1\\0&1&2&1&1\\0&0&1-a-2b&2+a-b&-a-b\end{pmatrix}$,

有 $1-a-2b=0,2+a-b=0,-a-b=0$, 解得 $a=-1,b=1$. 8 分

且有 $\beta_1=\alpha_1+2\alpha_2,\beta_2=-\alpha_1+\alpha_2,\beta_3=\alpha_1+\alpha_2$. 即 $(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=(\alpha_1,\alpha_2)\begin{pmatrix}1&-1&1\\2&1&1\end{pmatrix}$；

故所求矩阵 $X=\begin{pmatrix}1&-1&1\\2&1&1\end{pmatrix}$.

难题:

1. 设 A 是 n 阶矩阵, b 是 n 维列向量, 且 $r\begin{pmatrix}A&b\\b^T&0\end{pmatrix}=r(A)$, 则 ( ). **B**

(A) $Ax=b$ 有无穷多个解; **(B)** $\begin{pmatrix}A&b\\b^T&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=0$ 有非零解;

(C) $Ax=b$ 有唯一解; **(D)** $\begin{pmatrix}A&b\\b^T&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=0$ 仅有零解.

2. 设 A 为 5 阶方阵, 且 $A^2=0$, 则 $r(A^*)=$ __________. 0；（因 $A^2=0$，r(A)+r(A）<=5, 故 r(A)<=2)

3. 设 A 是 n 阶方阵, $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是 n 维列向量, 且 $\alpha_1\neq 0, A\alpha_1=2\alpha_1, A\alpha_2=\alpha_1+2\alpha_2, A\alpha_3=\alpha_2+2\alpha_3$, 证明: $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关.

证: 由 $A\alpha_1=2\alpha_1, A\alpha_2=\alpha_1+2\alpha_2, A\alpha_3=\alpha_2+2\alpha_3$ 可得

$(A-2I)\alpha_1=0,(A-2I)\alpha_2=\alpha_1,(A-2I)\alpha_3=\alpha_2$.

令

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3 = 0, \qquad (1)$$

用$(A-2I)$乘以(1)式, 可得

$$(A-2I)(k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3) = 0，即 k_2\alpha_1 + k_3\alpha_2 = 0， \qquad (2)$$

用$(A-2I)$乘以(2)式, 可得

$$(A-2I)(k_2\alpha_1 + k_3\alpha_2) = 0，即 k_3\alpha_1 = 0， \qquad (3)$$

由$\alpha_1 \neq 0$可得$k_3 = 0$，将$k_3 = 0$代入(2)式可得$k_2 = 0$，将$k_2 = k_3 = 0$代入(1)可得

$k_1 = k_2 = k_3 = 0$， (3 分） 因而$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$线性无关.

九、(4 分) 设$\boldsymbol{A}$为$\boldsymbol{m} \times \boldsymbol{n}$实矩阵，证明：$\mathbf{r}(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}) = \mathbf{r}(\mathbf{A})$.

证 若$\boldsymbol{Ax} = \mathbf{0}$，则$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ax} = \mathbf{0}$． 反之，若$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ax} = \mathbf{0}$，则有$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ax} = 0$，即$(\boldsymbol{Ax})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ax} = 0$，从而$\boldsymbol{Ax} = \mathbf{0}$．这表明，齐次线性方程组$\boldsymbol{Ax} = \mathbf{0}$与$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ax} = \mathbf{0}$同解，故它们的基础解系所含的线性无关解向量的个数相同，即$n - \mathrm{r}(\boldsymbol{A}) = n - \mathrm{r}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})$

故$\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) = \mathrm{r}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})$.