

例 1、计算行列式 (基础三角阵题型)

$$D = \begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+a_2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+a_3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+a_4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1+a_5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1+a_6 \end{vmatrix}$$

(将第一行的-1倍加至下面每一行)

$$= \begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ -a_1 & a_2 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_1 & & a_3 & 0 & 1 \\ -a_1 & & & a_4 & 1 \\ -a_1 & & & & a_5 & 1 \\ -a_1 & 0 & \cdots & & & a_6 \end{vmatrix} \quad (\text{将每列的 } \frac{a_1}{a_n} \text{ 加至第一列})$$

$$= \begin{vmatrix} 1+a_1 + \frac{a_1}{a_2} + \cdots + \frac{a_1}{a_n} & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a_2 & 0 & & & 1 \\ 0 & & a_3 & 0 & & 1 \\ 0 & & & a_4 & 0 & 1 \\ 0 & & & & a_5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_6 \end{vmatrix}$$

$$= (1 + \sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i}) a_2 a_3 \cdots a_n$$

例 2、计算行列式 $D_5 = \begin{vmatrix} -a & a & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1-a & a & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1-a & a & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1-a & a \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1-a \end{vmatrix}$

设 D_5 左上角的 K 阶子式为 D_K , 由于 D_5, D_4, D_3 的形式相似
故先将 2-5 行加到第一行再按第一行展开

$$\text{原式} = \begin{vmatrix} -a & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1-a & a & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1-a & a & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1-a & a \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1-a \end{vmatrix} = -a \times (-1)^{1+1} D_4 + (-1)^{1+5} \begin{vmatrix} -1 & 1-a & a & 0 \\ 0 & -1 & 1-a & a \\ 0 & 0 & -1 & 1-a \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

$= -D_4 + 1$ (逐次利用递推公式得)

$$= 1 - a + a^2 - a^3 + a^4 - a^5$$

例 3、证明 $D_{2n} = \begin{vmatrix} a_n & & & & b_n \\ & & & & \\ & & a_1 & b_1 & \\ & & c_1 & d_1 & \\ & & & & \\ c_n & & & & d_n \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^n (a_i d_i - b_i c_i)$

证明: 出现无穷个数, 且行列式有规律, 则可以采用数学归纳法

当 $n=2$ 时 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{vmatrix} = a_1 d_1 - c_1 b_1 \dots$

设当 n 为 $2n$ 时等式成立,

$$D_{2n+1} = \begin{vmatrix} a_{n+1} & & & & & & b_{n+1} \\ & a_n & & & & & b_n \\ & & \ddots & & & & \\ & & & a_1 & b_1 & & \\ & & & c_1 & d_1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & c_n & & & & & d_n \\ c_{n+1} & & & & & & d_{n+1} \end{vmatrix} \quad (\text{按第一行展开})$$

$$= a_{n+1} d_{n+1} D_{2n} - b_{n+1} c_{n+1} d_{2n}$$

$$= D_{2n} (a_{n+1} d_{n+1} - b_{n+1} c_{n+1})$$

$$= \prod_{i=1}^{n+1} (a_i d_i - b_i c_i)$$

例 4、计算 n 阶行列式 D_n 中各个元素 a_{ij} , 其 $a_{ij} = |i-j|$

解: 由 D_n 的定义知 $D_n = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & \dots & n-2 & n-1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & n-3 & n-2 \\ 2 & 1 & 0 & \dots & n-4 & n-3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ n-2 & n-3 & n-4 & \dots & 0 & 1 \\ n-1 & n-2 & n-3 & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix}$ (相邻两行差为一)

通过行列加减变换尽量让一列、一行出现相同数字或字符

$$= \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & \dots & n-2 & n-1 \\ 1 & -1 & -1 & \dots & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & \dots & -1 & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

观察到列之间可以通过加法相消, 同时最后一列最规则

故每一列都加上最后一列, 恰好形成三角行列式

$$= \begin{vmatrix} n-1 & 1 & 2 & \dots & n-2 & n-1 \\ 0 & -2 & -2 & \dots & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & \dots & -2 & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{n-1} (2n) \cdot 2^{-(n-2)}$$

例 5、计算 n 阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} x & a & \dots & a \\ a & x & \dots & a \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a & a & \dots & x \end{vmatrix} = [x+(n-1)a] \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ a & x & \dots & a \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a & a & \dots & x \end{vmatrix} = [x+(n-1)a] \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & x-a & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & x-a \end{vmatrix}$$

$$= [x+(n-1)a] (x-a)^{n-1}$$

注: 观察到该行列式各列元素之和相等, 将各行加至第一行, 提出 $[x+(n-1)a]$, 再将第一行的 $(-a)$ 倍加至其余各行, 变成上三角行列式。

例 6、计算 n 阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} \alpha + \beta & \alpha\beta & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & \alpha + \beta & \alpha\beta & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha + \beta & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha + \beta & \alpha\beta \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \alpha + \beta \end{vmatrix}$$

解：当行列式中出现规律性多元，且在一个行列式内无法加减，可考虑拆分为两个行列式
将 D_n 按第一列分成两个行列式，得

$$D_n = \begin{vmatrix} \alpha & \alpha\beta & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & \alpha + \beta & \alpha\beta & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha + \beta & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha + \beta & \alpha\beta \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \alpha + \beta \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \beta & \alpha\beta & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & \alpha + \beta & \alpha\beta & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha + \beta & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha + \beta & \alpha\beta \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \alpha + \beta \end{vmatrix}$$

$$= \alpha D_{n-1} + \beta^n$$

$$D_n = \begin{vmatrix} \beta & \alpha\beta & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & \alpha + \beta & \alpha\beta & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha + \beta & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha + \beta & \alpha\beta \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \alpha + \beta \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha & \alpha\beta & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & \alpha + \beta & \alpha\beta & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha + \beta & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha + \beta & \alpha\beta \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \alpha + \beta \end{vmatrix}$$

$$= \beta D_{n-1} + \alpha^n$$

$$\text{两式联立解得 } D_n = \frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta} (\alpha \neq \beta)$$

$$\alpha = \beta \text{ 时, 易解得 } D_n = (n+1) \alpha^n$$

例 7、计算行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n & 1 \\ 3 & 4 & 5 & \cdots & 1 & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ n-1 & n & 1 & \cdots & n-3 & n-2 \\ n & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \end{vmatrix}$$

观察到各行元素之和为 $\frac{n(n+1)}{2}$, 将各列元素加到第一列, 提出公因子 $\frac{n(n+1)}{2}$

并从最后一行起, 依次减第一行, 共做 n-1 次, 得

$$D_n = \frac{n(n+1)}{2} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1-n \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1-n & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & 1-n & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 1-n & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

按第一列展开, 得

$$D_n = \frac{n(n+1)}{2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1-n \\ 1 & 1 & \cdots & 1-n & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1-n & \cdots & 1 & 1 \\ 1-n & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

各行依次减第一行，得

$$D_n = \frac{n(n+1)}{2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1-n \\ 0 & 0 & \cdots & -n & n \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & -n & \cdots & 0 & n \\ -n & 0 & \cdots & 0 & n \end{vmatrix}$$

将各行的 $\frac{1}{n}$ 倍加到第一行，得

$$D_n = \frac{n(n+1)}{2} \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \cdots & -n & n \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & -n & \cdots & 0 & n \\ -n & 0 & \cdots & 0 & n \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{\frac{(n)(n-1)}{2}} \cdot \left(\frac{n(n+1)}{2}\right) \cdot (n^{n-2})$$

例 8、计算行列式 $\begin{vmatrix} 3 & -3 & 7 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & -5 & 10 & 3 \\ 2 & -4 & 5 & 2 \end{vmatrix}$

除了化为普通的三角式，还可以用降阶法，即使某一列或某一行只有一个非零数
降阶法的优势在于减少行列变换的步骤，简化计算

$$D = \begin{vmatrix} 3 & -3 & 7 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & -5 & 10 & 3 \\ 2 & -4 & 5 & 2 \end{vmatrix} = \begin{cases} C2 + C1 \\ r4 - 2r3 \\ \text{按第二列展开} \end{cases} = (-1) * (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 3 & 7 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 6 & -15 & -4 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{cases} C1 - C3 \\ C2 - 3 * C3 \\ \text{按第二行展开} \end{cases} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} = -2$$

例 1、设 A,B,C,D 均为 n 阶矩阵，且 A 可逆，证明：

$$(1) \begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = |A| |D - CA^{-1}B|$$

$$(2) \text{当 } AC=CA \text{ 时，有 } \begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = |AD - CB|$$

证明： (1) 由于分块上三角方阵的行列式易求

据拉普拉斯展开定理可得 $\begin{vmatrix} P & R \\ 0 & Q \end{vmatrix} = |P||Q|$ 。其中 P,Q 均为方阵。

我们设法将矩阵 $\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$ 中的矩阵 c 化为零块——配凑出 $(-CA^{-1})$

$$\text{我们用 } \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ -CA^{-1} & I_n \end{bmatrix} \text{ 乘 } \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \text{ 得 } \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & D - CA^{-1}B \end{bmatrix}$$

$$\text{两边取行列式，得 } \begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = |A| |D - CA^{-1}B|$$

(2)当 $AC=CA$ 时, 由 (1) 得:

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = |A||D - CA^{-1}B| = |AD - ACA^{-1}B| = |AD - CAA^{-1}B| = |AD - CB|$$

例 2、基本定理证明

设 A 为 n 阶 ($n \geq 2$) 可逆矩阵, 证明:

(1) $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$ (2) $(AT)^* = (A^*)^T$ (3) $(kA^*) = k^{n-1}A^*$ (k 为非 0 常数)

证明: 利用 $A^{-1} = |A^{-1}|A^*$ 及 $A^* = |A|A^{-1}$

(1) $(A^*)^{-1} = (|A|A^{-1})^{-1} = \frac{1}{|A|}A = |A^{-1}|A = (A^{-1})^*$

(2) $(A^*)^T = (|A|A^{-1})^T = |A|(A^{-1})^T = |A|(AT)^{-1} = |A^T|(AT)^{-1} = (AT)^*$

(3) $(kA^*) = |kA|A^{-1} = k^n|A|A^{-1} = k^{n-1}|A|A^{-1} = k^{n-1}A^*$

注: 需指出 (2) (3) 的结论当 A 不可逆时也成立, 这需要用伴随矩阵的定义来证明。

例 3、

设线性方程组, $Ax=b$ 的增广阵为 $\bar{A} = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 1 & | & \lambda \\ 1 & \lambda & 1 & | & \lambda \\ 1 & 1 & \lambda & | & \lambda^2 \end{bmatrix}$, 求 $R(A)$, $R(\bar{A})$

解: 当矩阵中出现参数时, 需要对它进行分类讨论 $\bar{A} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & \lambda & | & \lambda^2 \\ 1 & \lambda & 1 & | & \lambda \\ \lambda & 1 & 1 & | & 1 \end{bmatrix} \rightarrow$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \lambda & | & \lambda^2 \\ 0 & \lambda - 1 & 1 - \lambda & | & \lambda - \lambda^2 \\ 0 & 1 - \lambda & 1 - \lambda^2 & | & 1 - \lambda^3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & \lambda & | & \lambda^2 \\ 0 & \lambda - 1 & 1 - \lambda & | & 2 - \lambda^2 \\ 0 & 0 & 2 - \lambda - \lambda^2 & | & 1 + \lambda - \lambda^2 - \lambda^3 \end{bmatrix}$$

①若 $2 - \lambda - \lambda^2 = 0$, 即 $(\lambda - 1)(\lambda + 2) = 0$, $\lambda = 1$ 或 $\lambda = 2$.

$\lambda = 1$ 时, $R(A) = 1$, $R(\bar{A}) = 1$

$\lambda = 2$ 时, $R(A) = 2$, $R(\bar{A}) = 3$

②若 $2 - \lambda - \lambda^2 \neq 0$, 即 $\lambda \neq 1$ 或 $\lambda \neq 2$ 时, $R(A) = 3$, $R(\bar{A}) = 3$

例 3、设矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, 求 A^n ($n=2,3,\dots$)

当出现无穷阶时, 用数学归纳法证明

猜想: $A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $A^3 = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$A^n = \begin{bmatrix} 1 & n & \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 下面用数学归纳法证明

①当 $n=2$ 时显然成立

$$\textcircled{2} A^{k+1} = A^k A = \begin{bmatrix} 1 & n & \frac{k(k-1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & k+1 & \frac{k(k+1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ 得证}$$

数学归纳法: 先用 $n=2, n=3$ 得出大致规律, 再设 $n=k+1$ 如上计算符合规律。

例 4、已知 A 为 3 阶矩阵, B 为 4 阶矩阵, $|A|=12, |B|=-6$

求 $D = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2}A \\ -B & C \end{bmatrix}$ 的行列式的值

$$|D| = (-1)^{21} \frac{1}{2} |A| \cdot |-B| = \left(\frac{1}{2}\right)^3 |A| \times [(-1)^4 |B|] = -9$$

方法: 复合矩阵 $|C| = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} |x_1 A| |x_2 B|$

例 5、设 A, B 均为 2 阶矩阵, 若 $\det(A) = 2, \det(B) = 3$

则分块矩阵 $\begin{bmatrix} O & A \\ B & O \end{bmatrix}$ 的伴随矩阵为: _____

注意逆矩阵变换时, 各矩阵的位置与顺序

解: 原矩阵的逆矩阵为 $\begin{vmatrix} O & B^{-1} \\ A^{-1} & O \end{vmatrix}$

$$\begin{bmatrix} O & A \\ B & O \end{bmatrix}^* = \begin{bmatrix} O & A \\ B & O \end{bmatrix}^{-1} \det(A) \det(B)$$

$$= \begin{vmatrix} O & B^{-1} \\ A^{-1} & O \end{vmatrix} \det(A) \det(B)$$

$$= \begin{vmatrix} O & 2B^* \\ 3A^* & O \end{vmatrix}$$

例 6、证明: 若 A 为 3 阶方阵—推论

$$r(A)=3 \text{ 则 } r(A^*) = 3$$

$$r(A)=2 \text{ 则 } r(A^*) = 1$$

$$r(A)=1 \text{ 则 } r(A^*) = 0$$

当证明有关任意矩阵的推论, 可设矩阵使之变换为单位矩阵

但是要注意变换时 P, Q 的秩

证明: 若 $r(A)=3$, 则存在满秩方阵 P, Q , 使得 $PAQ = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix}, A = P^{-1} \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix} Q^{-1}$

$$A^* = (P^{-1} \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix} Q^{-1})^*, \text{ 而 } (P^{-1})^* \text{ 与 } (Q^{-1})^* \text{ 均为满秩方阵, } r(A^*) = r \left(\begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix} \right)^* = 3$$

若 $r(A)=2$, 则存在满秩方阵 P, Q , 使得 $PAQ = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 0 \end{bmatrix}, A = P^{-1} \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 0 \end{bmatrix} Q^{-1}$

$$A^* = (P^{-1} \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 0 \end{bmatrix} Q^{-1})^*, \text{ 而 } (P^{-1})^* \text{ 与 } (Q^{-1})^* \text{ 均为满秩方阵, } r(A^*) = r \left(\begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 0 \end{bmatrix} \right)^* = 1$$

若 $r(A)=1$, 则存在满秩方阵 P, Q , 使得 $PAQ = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{bmatrix}$, $A = P^{-1} \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{bmatrix} Q^{-1}$

$$A^* = (P^{-1} \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{bmatrix} Q^{-1})^*, \text{ 而 } (P^{-1})^* \text{ 与 } (Q^{-1})^* \text{ 均为满秩方阵, } r(A^*) = r \left(\begin{bmatrix} 1 & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{bmatrix} \right)^* = 0$$

例 7、设 A 是三阶非零实矩阵, 其元素 a_{ij} 与 A 的代数余子式 A_{ij} 相等, 求 $|A|$

当 A 为三阶非零实矩阵时, 若 $A_{ij} = a_{ij}$ 时, $|A|=1$ 可以记忆

A 是三阶非零矩阵且 $a_{ij} = A_{ij}$, 求 $|A|$

解: $a_{ij} = A_{ij}, \therefore A^* = A^T,$

$$AA^T = AA^* = |A| E_3$$

hxzhu66
经济数学

$$|A|^2 = |A| |A^T| = |AA^T| = ||A| E_3| = |A|^3$$

$$\therefore |A| = 0 \text{ 或 } 1$$

又 A 非零, a_{ij} 不全为 0

$$AA^T = \begin{pmatrix} a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{13}^2 & & \\ & a_{21}^2 + a_{22}^2 + a_{23}^2 & \\ & & a_{31}^2 + a_{32}^2 + a_{33}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |A| & & \\ & |A| & \\ & & |A| \end{pmatrix}$$

所以 $|A| \neq 0, \therefore |A| = 1$

例 8、 α 为 3 维列向量, $\alpha\alpha^T = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & -4 & 6 \\ 3 & -6 & 9 \end{bmatrix}$, 求 $\alpha^T\alpha$

所求矩阵内未知元素较少时, 可采用待定系数法求解

解: 设 $\alpha = (x, y, z)^T, \alpha^T = (x, y, z)$

$$\text{则 } \alpha^T\alpha = \begin{bmatrix} x^2 & xy & xz \\ yx & y^2 & yz \\ zx & zy & z^2 \end{bmatrix}$$

通过观察, 所求矩阵内式子恰好与原矩阵内式子形式相同, 不需求解系数

$$\alpha^T\alpha = x^2 + y^2 + z^2 = 1 + 4 + 9 = 14$$

例 1、若 $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{c} \times \mathbf{d}$, $\mathbf{a} \times \mathbf{c} = \mathbf{b} \times \mathbf{d}$, 证明 $\mathbf{a} - \mathbf{d} = \mathbf{b} - \mathbf{c}$ 共线

证明:

证明共线时, 考虑向量的叉乘

两式相等得:

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} - \mathbf{c}) = (\mathbf{c} - \mathbf{b}) \times \mathbf{a} = \mathbf{d} \times (\mathbf{b} - \mathbf{c})$$

$$\therefore (\mathbf{a} - \mathbf{d}) \times (\mathbf{b} - \mathbf{c}) = \mathbf{0}$$

$\therefore \mathbf{a} - \mathbf{d}$ 与 $\mathbf{b} - \mathbf{c}$ 共线

例 2、若 $\mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{b} \times \mathbf{c} + \mathbf{c} \times \mathbf{a} = \mathbf{0}$, 证明 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 共面

巧妙利用混合积化简

证明: 等式两边乘 \mathbf{a} 得

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \times \mathbf{c} = 0$$

\therefore 命题得证

例 3、求以 $A(3, 3, 0)$ $B(0, 3, 0)$ $C(10, 0, 2)$ $D(4, 5, 6)$ 为顶点的四面体的体积

利用混合积的几何定义求解

$$\text{解: } V = \frac{1}{6} |[\mathbf{AB} \ \mathbf{AC} \ \mathbf{AD}]|$$

向量部分的题目以书上的例题为主即可, 向量的题目题型几乎没有变化