目 录

《线性代数》

2022-2023 学年第一学期期中考试 A 卷

一、单项选择题（1-7 题，每题 4 分，共 28 分）

1、设 n 阶行列式 D 的值为 2，且 D 的每行元素之和均为 a，则 D 的第 2 列元素的代数余子式之和 $A_{12}+A_{22}+\cdots+A_{n2}=$（ ）

（A）$\frac{a}{2}$　　B、$\frac{2}{a}$　　C、$-\frac{a}{2}$　　D、$-\frac{2}{a}$

2、设 n 阶矩阵 A 可逆，且 A 的所有元素均为整数，则 A^{-1} 的所有元素均为整数的充分必要条件是（ ）

（A）$|A|=4$　　（B）$|A|=3$　　（C）$|A|=2$　　（D）$|A|=\pm 1$

3、设 A，B 都是 n 阶方阵，下列命题成立的是（ ）

（A）若 A，B 皆不可逆，则 $A+B$ 也不可逆

（B）若 AB 可逆，则 A，B 都可逆

（C）若 AB 不可逆，则 A，B 都不可逆

（D）若 A 可逆，则 kA 可逆（k 是数）

4、设 A 是 n 阶对称矩形，B 是 n 阶反对称矩阵，则（ ）

（A）AB 是对称矩阵　　（B）AB 的反对称矩阵

（C）$AB+BA$ 是对称矩阵　　（D）$AB+BA$ 是反对称矩阵

5、设线性方程组 $\begin{cases} x_1+x_2-x_3=1 \\ 2x_1+3x_2+ax_3=3 \\ x_1+ax_2+3x_3=2 \end{cases}$ 有唯一解，则 a 的取值是（ ）

（A）$a\neq -3$ 且 $a\neq 2$　　（B）$a\neq -2$　　（C）$a\neq 2$　　（D）$a\neq -3$

6、直线 $L:\frac{x+3}{-2}=\frac{y+4}{-7}=\frac{z}{3}$ 与平面 $\pi:4x-2y-2z=3$（ ）

（A）平行但 L 不在 π 上　　（B）L 在 π 上

（C）垂直　　（D）相交但不垂直

7、过点 $(1,0,-2)$ 且与直线 $\begin{cases} 2x-3y+z-6=0 \\ 4x-2y+3z+9=0 \end{cases}$ 平行的直线方程为（ ）

（A）$\frac{x-1}{-7}=\frac{y}{2}=\frac{z+2}{8}$　　（B）$\frac{x-1}{2}=\frac{y}{-3}=\frac{z+2}{1}$

（C）$\frac{x-1}{7}=\frac{y}{2}=\frac{z+2}{-8}$　　（D）$\frac{x-1}{4}=\frac{y}{-2}=\frac{z+2}{3}$

二、填空题（8-15 题，每题 4 分，共 32 分）

8、$\begin{vmatrix}1&1&0&0\\3&4&0&0\\0&0&4&5\\0&0&2&3\end{vmatrix}=$________

9、方程$\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&2&3&x\\1&4&9&x^2\\1&8&27&x^3\end{vmatrix}=0$的全部根是________

10、$\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}^{2022}\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}^{2023}=$________

11、$\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&1&1&0\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}^{-1}=$________

12、设A为3阶矩阵，且$|A|=2$，则$|4A-(A^*)^*|=$________

13、设矩阵$A=\begin{pmatrix}1&\lambda&-1&2\\2&-1&\lambda&5\\1&10&-6&1\end{pmatrix}$的秩为2，则$\lambda=$________

14、以$A(1,1,1),B(2,0,1),C(0,0,1),D(1,3,2)$为顶点的四面体的体积为________

15、点$(1,2,3)$到平面$2x-y-z=0$的距离是________

三、解答题（16-19题，每题13分，共52分）

16、计算n阶行列式$D=\begin{vmatrix}1&1&\cdots&1&-n\\1&1&\cdots&-n&1\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\1&-n&\cdots&1&1\\-n&1&\cdots&1&1\end{vmatrix}$。

17、已知 n 阶矩阵 A，B 满足 $AB=A+2B$

（1）问 $B-I$ 是否可逆？若可逆，求出其逆矩阵；（2）证明 $AB=BA$。

18、求过三个平面 $2x+y-z-2=0$，$x-3y+z+1=0$ 和 $x+y+z-3=0$ 的交点，且平行于 $x+y+2z=0$ 的平面方程。

19、n 阶矩阵 $A=(a_{ij})$ 的主对角元之和称为矩阵 A 的迹，记作 $tr(A)$，即 $tr(A)=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}$。证明 (1) 若 A 是 $m\times n$ 矩阵，B 是 $n\times m$ 矩阵，则 $tr(AB)=tr(BA)$。（2）对任意的两个 n 阶矩阵 A，B，都有 $AB-BA\neq I$。

2022-2023 学年第一学期期中考试 A 卷参考答案

一、选择题

1、【正解】B

【解析】将每一列的各元素（除去第一列）加到第一列上来，则第一列全为 a，提取 a 出来，则第一列全为 1。记此时的行列式为 E，则 $2=|E|\cdot a$。因为行列式等于对应于它的任意一列各元素与其代数余子式的乘积之和。所以 $|E|=\dfrac{2}{a}$

【考点延伸】知识点 1：行列式的概念及其性质

2、【正解】D

【解析】必要性：因为 A，A^{-1} 的元素均为整数，由 $A\cdot A^{-1}=I$ 以及 $|A|$ 与 $|A^{-1}|$ 都是整数，即得所证

充分性：因为 A 的元素均为整数，$|A|=\pm 1$，由 $A^{-1}=\dfrac{1}{|A|}A^*$（A^* 是 A 的伴随矩阵），可证 A^{-1} 的元素均是整数

【考点延伸】知识点 5：矩阵的逆

3、【正解】B

【解析】A,B 可逆，则 $|AB|\neq 0\Rightarrow |A|\neq 0$ 且 $|B|\neq 0$，所以 A,B 都可逆

【考点延伸】知识点 5：矩阵的逆

4、【正解】D

【解析】$(AB+BA)'=B'A'+A'B'=-BA-AB=-(AB+BA)$

$\Rightarrow AB+BA$ 是反对称矩阵

【考点延伸】知识点 4：矩阵的概念和基本运算

5、【正解】A

【解析】$\begin{pmatrix}1&1&-1&\vdots&1\\2&3&a&\vdots&3\\1&a&3&\vdots&2\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&1&-1&1\\0&1&a+2&1\\0&a-1&4&1\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&1&-1&1\\0&1&a+2&1\\0&0&(a+3)(2-a)&2-a\end{pmatrix}$

①当 $a=-3$ 时，线性方程组无解

②当 $a=2$ 时，线性方程组有无穷多解

③当 $a\neq -3$ 且 $a\neq 2$ 时，线性方程组有唯一解

【考点延伸】知识点 17：非齐次线性方程组

6、【正解】A

【解析】直线 $L:\dfrac{x+3}{-2}=\dfrac{y+4}{-7}=\dfrac{z}{3}$ 过点 $(-3,-4,0)$ 且方向向量 $\vec{m}=(-2,-7,3)$

平面π: $4x-2y-2z=3$法向量为$\vec{n}=(4,-2,-2)$

$\because \vec{m}\cdot\vec{n}=-8+14-6=0$即$\vec{m}\perp\vec{n}$

$\therefore$直线$L//\pi$或L在π上（两种情况都要考虑）

又$4\times(-3)-2\times(-4)-2\times0\neq3$

即$(-3,-4,0)$不在$4x-2y-2z=3$上

$\therefore$直线L不在平面π上，即$L//\pi$

【考点延伸】知识点15：向量空间

7、【正解】C

【解析】$2x-3y+z-6=0$的法向量为$\vec{n}_1=(2,-3,1)$

$4x-2y+3z+9=0$的法向量为$\vec{n}_2=(4,-2,3)$

则直线$\begin{cases}2x-3y+z-6=0\\4x-2y+3z+9=0\end{cases}$的方向向量为2个法向量的向量积

即$\vec{s}=\begin{pmatrix}i&j&k\\2&-3&1\\4&-2&3\end{pmatrix}=-7i-2j+8k=(-7,-2,8)$

故所求直线方程为$\dfrac{x-1}{7}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z+2}{-8}$

【考点延伸】知识点15：向量空间

二、填空题

8、【正解】2

【解析】$\begin{vmatrix}A&0\\0&B\end{vmatrix}=|A|\cdot|B|$，即$\begin{vmatrix}1&1&0&0\\3&4&0&0\\0&0&4&5\\0&0&2&3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1\\3&4\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}4&5\\2&3\end{vmatrix}=1\times2=2$

【考点延伸】知识点3：几种特殊的行列式

9、【正解】$x_1=1$ $x_2=2$ $x_3=3$

【解析】$\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&2&3&x\\1&4&9&x^2\\1&8&27&x^3\end{vmatrix}=0$，即

$$(2-1)\times(9x^3-27\cdot x^2)+(4-1)(3x^3-27x)+(8-1)(3x^2-9x)$$
$$+(4-2)\times(x^3-27)-(8-2)(x^2-9)+(8-4)\times(x-3)$$

$=2x^3-12x^2+22x-12=0$

即$2(x^3-6x^2+11x-6)=0$

$2(x-1)(x^2-5x+6)=0$

解得$x_1=1\ \ x_2=2\ \ x_3=3$

【考点延伸】知识点 4：矩阵的概念和基本运算

10、【正解】$\begin{pmatrix}1&3&2\\4&6&5\\7&9&8\end{pmatrix}$

【解析】初等矩阵在左侧，相当于初等行变换，做偶数个行变换，相当于没变。初等矩阵在右侧，相当于做初等列变换，做奇数个列变换，相当于做一次列变换

【考点延伸】知识点 8：初等矩阵

11、【正解】$\begin{pmatrix}1&-1&1&-1\\0&1&-1&1\\0&0&1&-1\\0&0&0&1\end{pmatrix}$

【解析】$\begin{pmatrix}1&1&0&0&1&0&0&0\\0&1&1&0&0&1&0&0\\0&0&1&1&0&0&1&0\\0&0&0&1&0&0&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&0&\vdots&1&-1&1&-1\\0&1&0&0&\vdots&0&1&-1&1\\0&0&1&0&\vdots&0&0&1&-1\\0&0&0&1&\vdots&0&0&0&1\end{pmatrix}$.

【考点延伸】知识点 4：矩阵的概念和基本运算

12、【正解】16

【解析】$(A^*)^*=|A|^{n-2}A=|A|\cdot A=2A$

$$|4A-(A^*)^*|=|4A-2A|=|2A|=2^3\cdot|A|=8\times2=16$$

【考点延伸】知识点 1：行列式的概念及其性质

13、【正解】$\lambda=3$

【解析】$\begin{pmatrix}1&\lambda&-1&2\\2&-1&\lambda&5\\1&10&-6&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&\lambda&-1&2\\0&-1-2\lambda&\lambda+2&1\\0&10-\lambda&-5&-1\end{pmatrix}$.

由于$r(A)=2\Rightarrow1+2\lambda=10-\lambda$且$\lambda+2=5\Rightarrow\lambda=3$

【考点延伸】知识点 19：特征值与特征向量

14、【正解】$\dfrac{1}{3}$

【解析】显然 A，B，C 三点在平面 Z=1 上，且构成一个等腰直角三角形，易得其面积为 1，又

D 点到平面 Z=1 的距离为 1，则四面体 ABCD 的体积为 $\frac{1}{3}$

【考点延伸】知识点 15：向量空间

15、【正解】 $\frac{\sqrt{6}}{2}$

【解析】$d=\frac{|Ax_1+By_1+Cz_1+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$（点到平面的距离公式）

有题可知，点的坐标$(1,2,3)$

所以$x_1=1,y_1=2,z_1=3$

又$2x-y-z=0\Rightarrow A=2\quad B=-1\quad C=-1\quad D=0$

所以$d=\frac{|1\times2-1\times2-1\times3|}{\sqrt{4+1+1}}=\frac{3}{\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{6}}{2}$

【考点延伸】知识点 15：向量空间

三、计算题

16、【解析】

$$D=\begin{vmatrix}1&1&\cdots&1&-n\\1&1&\cdots&-n&1\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\1&-n&\cdots&1&1\\-n&1&\cdots&1&1\end{vmatrix}\xlongequal[\text{至第一行}]{\text{所有行加}}\begin{vmatrix}-1&-1&-1&\cdots&-1&-1\\1&1&\cdots&\cdots&-n&1\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\1&-n&\cdots&\cdots&1&1\\-n&1&\cdots&\cdots&1&1\end{vmatrix}$$

$$=-1\begin{vmatrix}1&1&\cdots&1&1\\1&1&\cdots&-n&1\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\1&-n&\cdots&1&1\\-n&1&\cdots&1&1\end{vmatrix}=-1\begin{vmatrix}1&1&\cdots&1&1\\0&0&\cdots&-n-1&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&-1-n&\cdots&0&0\\-1-n&0&\cdots&0&0\end{vmatrix}$$

$$=-1\cdot(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}[-(n+1)]^{n-1}=(-1)^{n-1}(n+1)^{n-1}$$

即$D=(-1)^{n-1}(n+1)^{n-1}$

【考点延伸】知识点 1：行列式的概念及其性质

17、【解析】证明：由于$AB=A+2B$有

$$AB-A-2B+2E=2E$$

$$A(B-E)-(B-E)=2E$$

$$(A-E)(B-E)=2E$$

$\Rightarrow B-E$ 可逆，且逆矩阵为 $\frac{1}{2}(A-E)$

（2）由 $AB=A+2B$ 得 $(A-2E)(B-E)=2E\Rightarrow(B-E)^{-1}=\frac{1}{2}(A-2E)$

所以有 $(B-E)(A-2E)=2E$ 整理有 $BA=A+2B$

再由已知 $AB=BA$

【考点延伸】知识点 5：矩阵的逆

18、【解析】过三个平面交点的面束为

$$(2x+y-z-2)+\lambda(x-3y+z+1)+u(x+y+z-3)=0$$

即 $(2+\lambda+u)x+(1-3\lambda+u)y+(-1+\lambda+u)z+(-2+\lambda-3u)=0$ ①

为使的平面平行于平面 $x+y+2z=0$

则两个平面的法平面平行

从而：$\frac{2+\lambda+u}{1}=\frac{1-3\lambda+u}{1}=\frac{-1+\lambda+u}{2}$

求解即得 $\lambda=\frac{1}{19}$ $u=-\frac{4}{19}$

将 λ 和 u 的值代入①可得 $x+y+2z-2=0$

因此所求平面为 $x+y+2z-2=0$

【考点延伸】知识点 15：向量空间

19、【解析】（1）由于 AB 与 BA 的非零特征值相同

而特征值之和即为迹，所以 $tr(AB)=tr(BA)$

（2）由于 $tr(AB)=tr(BA)$，做差后的矩阵的迹为 0

而 I 不满足，所以不可能等于 I

【考点延伸】知识点 4：矩阵的概念和基本运算

2019-2020 学年第一学期期中考试试卷

一、选择题

1、设x,y,z为两两互不相同的数，则行列式$\begin{vmatrix} x+y & z & z^2 \\ y+z & x & x^2 \\ z+x & y & y^2 \end{vmatrix}=0$的充要条件是(　)

$A.xyz=0$　$B.x+y+z=0$　$C.x=-y,z=0$　$D.y=-z,x=0$

2、设A为n阶方阵$(n\geqslant 3)$，若$A^3=0$,则下式中未必成立的是（　）

$A.A=0$　$B.(A^T)^3=0$　$C.A^4=0$　$D.|A|=0$

3、设A为n阶可逆矩阵$(n\geqslant 2)$，I为n阶单位矩阵，则$((A^*)^*)^{-1}=$(　)

$A.|A|^{n-1}I$　$B.|A|^{1-n}I$　$C.|A|^{n-1}A^*$　$D.|A|^{1-n}A^*$

4、$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{2018}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{2019}=$（　）

$A.\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$　$B.\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 6 & 5 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$　$C.\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 6 & 5 & 4 \\ 9 & 8 & 7 \end{bmatrix}$　$D.\begin{bmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

4、设$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$均为非零向量且$\vec{a}=\vec{b}\times\vec{c},\vec{b}=\vec{c}\times\vec{a},\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}$,则$\|\vec{a}\|+\|\vec{b}\|+\|\vec{c}\|=$（　）

A.　0　　B.　1　　C.　2　　D.3

二、填空题

1、已知x_1,x_2,x_3为方程$x^3+px+q=0$的三个根$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_3 & x_1 \\ x_3 & x_1 & x_2 \end{vmatrix}=$________

2、设$\alpha=(1,2,3),\beta=(1,-1,1)$，则$(\alpha^T\beta)^{2020}=$________

3、设A为3阶方阵，且$|A|=2$,则$\left|\left(\frac{1}{2}A^*\right)^{-1}-3A\right|=$________

4、设有直线L_1:$\frac{x-1}{9}=\frac{y-2}{8}=\frac{z-3}{5}$,$L_2$:$\frac{x+2}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z}{1}$则过直线$L_1$且与$L_2$平行的平面方程为________________

5、以$A(1,1,1),B(2,0,1),C(0,0,1),D(1,3,2)$为顶点的四面体的体积为________

三、解答题

1、设有 n 元线性方程组 $AX=\vec{b}$.其中 A 为三对角矩阵，且

$$A=\begin{bmatrix} 2a & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ a^2 & 2a & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 & 2a & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a^2 & 2a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a^2 & 2a \end{bmatrix}, \quad X=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \vec{b}=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

（1） 证明 $|A|=(n+1)a^n$；（2）a 为何值时，该方程组有唯一解，并在此时求 x_1 和 x_n

2、设 A 为 n 阶实矩阵，I 为单位阵，满足 $AA^T=I$,此时称 A 为正交矩阵，若已知 $|A|<0$,求

$|A|$ 及 $|A+I|$

3、设有两条直线 L_1:$\begin{cases} x-y=3 \\ 3x-y+z=1 \end{cases}$ 和 L_2:$x+1=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z}{2}$，点 $M(1,0,-1)$

(1) 求 L_1 的对称式方程；（2）求点 M 到 L_1 的距离；（3）研究 L_1 和 L_2 的位置关系

4、设矩阵$B=\begin{bmatrix}1 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$,$C=\begin{bmatrix}2 & 1 & 3 & 4\\ 0 & 2 & 1 & 3\\ 0 & 0 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 2\end{bmatrix}$,$I$为单位阵.矩阵$A$满足$A(I-C^{-1}B)^{T}C^{T}=I$,

求A。

5、设矩阵$A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & -2 & -1 & -2\\ 4 & 1 & 2 & 1\\ 2 & 5 & \mu & \lambda\end{bmatrix}$,讨论矩阵$A$的秩

6、设$A=(a_{ij})_{3\times 3}$为非零实矩阵，A_{ij}为a_{ij}的代数余子式，且$a_{ij}+A_{ij}=0,(i,j=1,2,3)$

（1） 求$|A|$；（2）证明A为正交矩阵（正交矩阵的定义参看第 2 题）

2019-2020 学年第一学期期中考试试卷参考答案

一、 选择题

1、【正解】B

【解析】先将第 2 列加到第一列，得

$$\begin{vmatrix} x+y & z & z^2 \\ y+z & x & x^2 \\ z+x & y & y^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x+y+z & z & z^2 \\ x+y+z & x & x^2 \\ x+y+z & y & y^2 \end{vmatrix} = (x+y+z)\begin{vmatrix} 1 & z & z^2 \\ 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \end{vmatrix} = (x+y+z)(x-z)(y-z)(y-x)$$

由于x，y，z互不相同所以$\begin{vmatrix} x+y & z & z^2 \\ y+z & x & x^2 \\ z+x & y & y^2 \end{vmatrix} = 0 \Longleftrightarrow x+y+z=0$

【考点延伸】《考试宝典》知识点 3 几种特殊的行列式

2、【正解】A

【解析】反例$A=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

【考点延伸】《考试宝典》知识点 4 矩阵的概念和基本运算

3、【正解】D

【解析】$(A^*)^*A^*=|A^*|E \Longrightarrow (A^*)^*=|A|^{n-1}(A^*)^{-1} \Longrightarrow ((A^*)^*)^{-1}=|A|^{1-n}A^*$

【考点延伸】《考试宝典》知识点 4 矩阵的概念和基本运算

4、【正解】C

【解析】$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{2018}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{2019} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 6 & 5 & 4 \\ 9 & 8 & 7 \end{bmatrix}$

【考点延伸】《考试宝典》知识点 8 初等矩阵

5、【正解】D

【解析】由于$\vec{a}=\vec{b}\times\vec{c},\vec{b}=\vec{c}\times\vec{a},\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b} \Longrightarrow \vec{a},\vec{b},\vec{c}$两两垂直

所以$\|\vec{a}\|=\|\vec{b}\|\|\vec{c}\|,\|\vec{b}\|=\|\vec{a}\|\|\vec{c}\|,\|\vec{c}\|=\|\vec{a}\|\|\vec{b}\|$,解得$\|\vec{a}\|=\|\vec{b}\|=\|\vec{c}\|=1 \Longrightarrow \|\vec{a}\|+\|\vec{b}\|+\|\vec{c}\|=3$

【考点延伸】《高等数学下考试宝典》专题七 2.2 两个向量的向量积

二、 填空题

1、【正解】0

【解析】由韦达定理，$x_1+x_2+x_3=0$，将行列式第 2、3 行加到第 1 行，

得$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_3 & x_1 \\ x_3 & x_1 & x_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ x_2 & x_3 & x_1 \\ x_3 & x_1 & x_2 \end{vmatrix} = 0$

【考点延伸】《考试宝典》知识点 1 行列式的概念及其性质

2、【正解】$2^{2019}\begin{bmatrix}1&-1&1\\2&-2&2\\3&-3&3\end{bmatrix}$

【解析】$\beta\alpha^T=2$，$(\alpha^T\beta)^{2020}=\alpha^T\beta\alpha^T\beta\cdots\alpha^T\beta=\alpha^T\cdot(2)^{2019}\cdot\beta=2^{2019}\begin{bmatrix}1&-1&1\\2&-2&2\\3&-3&3\end{bmatrix}$

【考点延伸】《考试宝典》知识点 4 矩阵的概念和基本运算

3、【正解】-16

【解析】$\left|\left(\frac{1}{2}A^*\right)^{-1}-3A\right|=\left|\frac{2}{|A|}A-3A\right|=|-2A|=-8|A|=-16$

【考点延伸】《考试宝典》知识点 5 矩阵的逆

4、【正解】$3x+y-7z+16=0$

【解析】所求平面的法向量为$\vec{n}=\vec{s}\times\vec{n}_1=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\9&8&5\\2&1&1\end{vmatrix}=3\vec{i}+\vec{j}-7\vec{k}$，又平面过点$(1,2,3)$

所以平面方程为$3(x-1)+(y-2)-7(z-3)=0\Longrightarrow 3x+y-7z+16=0$

【考点延伸】《高等数学下考试宝典》专题七 3.2 平面的一般方程

5、【正解】$\frac{1}{3}$

【解析】$\overrightarrow{AB}=(1,-1,0),\overrightarrow{AC}=(-1,-1,0),\overrightarrow{AD}=(0,2,1)$,

$V=\frac{1}{6}\left|[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}]\right|=\frac{1}{6}\left|\begin{vmatrix}1&-1&0\\-1&-1&2\\0&0&1\end{vmatrix}\right|=\frac{1}{3}$（混合积的绝对值）

【考点延伸】《高等数学下考试宝典》专题七 2.3 两个向量的混合积

三、　解答题

1、【解析】（1）$|A_n|$按第一列展开，得$|A_n|=2a|A_{n-1}|+a^2(-1)^{2+1}|A_{n-2}|=2a|A_{n-1}|-a^2|A_{n-2}|$

则$|A_n|-a|A_{n-1}|=a(|A_{n-1}|-a|A_{n-2}|)=\cdots=a^{n-2}(|A_2|-a|A_1|)=a^n$

$\therefore|A_n|=a^n+a|A_{n-1}|=a^n+a(a^{n-1}+a|A_{n-2}|)=2a^n+a^2|A_{n-2}|=\cdots=(n-1)a^n+a^{n-1}|A_1|$

$=(n+1)a^n$。（也可以使用数学归纳法推导证明）

（2）　由 cramer 法则知，当$D=|A_n|\neq0$时，即$a\neq0$时方程组有唯一解

且$x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{na^{n-1}}{(n+1)a^n}=\frac{n}{(n+1)a},x_n=\frac{D_n}{D}=\frac{(-1)^{n+1}(a^2)^{n-1}}{(n+1)a^n}=(-1)^{n+1}\frac{a^{n-2}}{n+1}$

【考点延伸】《考试宝典》知识点 2 行列式的展开、知识点 6 克拉默法则

2、【解析】$\because 1=|I|=|AA^T|=|A^2|$，而已知$|A|<0$，$\therefore |A|=-1$；

$$|A+I|=|A+AA^T|=|A(I+A^T)|=|A||I+A^T|=-|(I+A)^T|=-|I+A| \Longrightarrow |I+A|=0$$

【考点延伸】《考试宝典》知识点 4 矩阵的概念和基本运算

3、【解析】(1) L_1的方向向量可取作$\vec{\alpha}_1=(1,-1,0)\times(3,-1,1)=(-1,-1,2)$，

易得L_1上一点$P_1(0,-3,-2)$，则L_1对称式方程为：$\dfrac{x}{-1}=\dfrac{y+3}{-1}=\dfrac{z+2}{2}$

(2) $d=\dfrac{\|P_1M\times\vec{\alpha}_1\|}{\|\vec{\alpha}_1\|}=\dfrac{\sqrt{93}}{3}$

(3) L_2过点$P_2(-1,1,0)$，其方向向量$\vec{\alpha}_2=(1,-2,2)$，而$\left|\overrightarrow{P_1P_2},\overrightarrow{\alpha_1},\overrightarrow{\alpha_2}\right|=\begin{vmatrix}-1&4&2\\-1&-1&2\\1&-2&2\end{vmatrix}=20\neq 0$

所以L_1,L_2异面

【考点延伸】《高等数学下考试宝典》专题七 第四部分 空间直线及其方程 【易错考点】【4-2】直线平面间的位置关系

4、【解析】$\because I=A[C(E-C^{-1}B)]^T=A(C-B)^T$，$\therefore A=[(C-B)^T]^{-1}=[(C-B)^{-1}]^T$

而$C-B=\begin{bmatrix}1&2&3&4\\0&1&2&3\\0&0&1&2\\0&0&0&1\end{bmatrix}$，求$(C-B)^{-1}$的方法有多种如（1）初等行变换（2）伴随矩阵

得$(C-B)^{-1}=\begin{bmatrix}1&-2&1&0\\0&1&-2&1\\0&0&1&-2\\0&0&0&1\end{bmatrix}$，$\therefore A=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\-2&1&0&0\\1&-2&1&0\\0&1&-2&1\end{bmatrix}$

【考点延伸】《考试宝典》知识点 5 矩阵的逆

5、【解析】对矩阵进行初等行变换

$$A\xrightarrow[\substack{r_3-4r_1\\r_4-2r_1}]{r_2-r_1}\begin{bmatrix}1&1&1&1\\0&-3&-2&-3\\0&-3&-2&-3\\0&3&\mu-2&\lambda-2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&1&1\\0&-3&-2&-3\\0&0&\mu-4&\lambda-5\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

当$\mu=4$且$\lambda=5$时，$r(A)=2$；当$\mu\neq 4$或$\lambda\neq 5$时，$r(A)=3$

【考点延伸】《考试宝典》知识点 9 矩阵的秩和矩阵等价

6、【解析】证明：由题意知道$A^*=-A^T \Rightarrow |A^*|=(-1)^3|A| \Rightarrow |A|^2=-|A| \Rightarrow |A|=0$或$-1$

而A为非零实矩阵，不妨设$a_{11}\neq 0$，则$|A|=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}=-a_{11}{}^2-a_{12}{}^2-a_{13}{}^2<0$

故$|A|=-1$

(2)由（1）知$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^{*}=-A^{*}=A^{T}$,故$A$为正交矩阵

【考点延伸】《考试宝典》知识点 2 行列式的展开 知识点 4 矩阵的概念和基本运算

2018-2019 学年第一学期期中考试 A 卷

一、选择题（15 分，每题 3 分，共 5 题）

1、若n阶行列式$D=0$，则（　　）.

A、D中必有一行（列）元素全为零；

B、D中必有两行（列）元素对应成比例；

C、以D为系数行列式的非齐次线性方程组必有唯一解；

D、以D为系数行列式的齐次线性方程组必有非零解

2、设A,B都是n阶方阵且等价，则必有（　　）.

A、当$|A|=a(a\neq 0)$时，$|B|=a$；　　B、当$|A|=a(a\neq 0)$时，$|B|=-a$；

C、当$|A|\neq 0$时，$|B|=0$；　　D、当$|A|=0$时，$|B|=0$

3、设A为3阶矩阵，将A的第二行加到第一行得B，再将B的第一列的-1倍加到第二列得C。记

$P=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，则$C=$（　　）.

A、$C=P^{-1}AP$；　　B、$C=PAP^{-1}$；　　C、$C=P^{T}AP$；　　D、$C=PAP^{T}$

4、设四阶矩阵$A=(\alpha,\gamma_2,\gamma_3,\gamma_4)$，$B=(\beta,\gamma_2,\gamma_3,\gamma_4)$，其中$\alpha,\beta,\gamma_2,\gamma_3,\gamma_4$均为四维列向量，且已知

$|A|=4,|B|=1$，则$|A+B|=$（　　）.

A、5　　B、10　　C、40　　D、20

5、设单位向量$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$满足$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=0$，则$\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{a}=$（　　）.

A、$-\dfrac{3}{2}$　　B、-3　　C、0　　D、3

二、填空题（15 分，每题 3 分，共 5 题）

6、已知n阶行列式D的值为$a\neq 0$，且D的每行元素之和都等于常数b，则D的j列$(1\leqslant j\leqslant n)$元素的代数余子式之和$A_{1j}+A_{2j}+\cdots+A_{nj}=$__________.

7、设$D=\begin{vmatrix}2&2&2\\a&b&c\\a^2&b^2&c^2\end{vmatrix}$，则$D=$________.

8、设$A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，$I$为3阶单位矩阵，则$(A+3I)^{-1}(A^2-9I)=$________.

9、过点$P_1(1,-2,4)$,$P_2(3,5,7)$的对称式直线方程为________.

10、以$A(5,1,-1)$,$B(0,-4,3)$,$C(1,-3,7)$为顶点的三角形的面积为________.

三、计算题（70分）

11、（10分）计算行列式$D=\begin{vmatrix}0&1&2&3&4\\1&0&1&2&3\\2&1&0&1&2\\3&2&1&0&1\\4&3&2&1&0\end{vmatrix}$.

12、（12分）设$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$均为3维列向量，方阵$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，$B=(\alpha_1+2\alpha_2,2\alpha_2+3\alpha_3,3\alpha_3+\alpha_1)$

已知$\det(A)=a$，求$\det(B)$.

13、（12分）设4阶矩阵B满足$\left[\left(\frac{1}{2}A\right)^*\right]^{-1}BA^{-1}=2AB+12I$，其中$A=\begin{pmatrix}1&2&0&0\\1&3&0&0\\0&0&0&2\\0&0&-1&0\end{pmatrix}$，

求矩阵B.

14、（12 分）设矩阵$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1\\ 0 & -1 & a-3 & -2 & b\\ 3 & 2 & 1 & a & -1\end{pmatrix}$，试讨论矩阵$A$的秩.

15、（12 分）证明直线L_1：$\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z+1}{1}$与$L_2$：$x-4=\dfrac{y+5}{-3}=\dfrac{z-4}{2}$位于同一平面，并求这两条直线的交点坐标及所在平面的方程.

16、（12 分）已知 n 阶矩阵$A=\begin{pmatrix}2 & 2 & 2 & \cdots & 2 & 2\\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1\\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1\end{pmatrix}$，（1）求$A^{-1}$；（2）求$A$中所有元素代数余子式的和.

2018-2019 学年第一学期期中考试 A 卷参考答案

一、选择题（15 分，每题 3 分，共 5 题）

1、【正解】D

【解析】行列式的值为零，即$R<n$，意味着该行列式对应的齐次线性方程组必有非零解，而对应的非齐次线性方程组可能无解，可能存在多解。选项AB均为可能，非必须。故选D。

【考点延伸】《考试宝典》知识点 16——齐次线性方程组；

知识点 17——非齐次线性方程组.

2、【正解】D

【解析】当$|A|=0$时， 行列式A的秩必定要比行列的阶数小，即$r(A)<n$，又A与B等价，所以A的秩等于B的秩，故$r(B)<n$，即$|B|=0$，故选D。

【考点延伸】《考试宝典》知识点 9——矩阵的秩和矩阵等价.

3、【正解】B

【解析】由题设知$B=PA$，$C=BQ$，其中初等矩阵$Q=\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，于是有

不难验证$PQ=E$，即$Q=P^{-1}$，从而$C=PAP^{-1}$，即选项B正确。

【考点延伸】《考试宝典》知识点 8——初等矩阵.

4、【正解】C

【解析】

$$
\begin{aligned}
A+B&=(\alpha+\beta,2\gamma_2,2\gamma_3,2\gamma_4)\\
&=(\alpha,2\gamma_2,2\gamma_3,2\gamma_4)+(\beta,2\gamma_2,2\gamma_3,2\gamma_4)\\
|A+B|&=|\alpha,2\gamma_2,2\gamma_3,2\gamma_4|+|\beta,2\gamma_2,2\gamma_3,2\gamma_4|\\
&=8|A|+8|B|\\
&=8\times4+8\times1=40
\end{aligned}
$$

【考点延伸】《考试宝典》知识点 2——行列式的展开.

5、【正解】A

【解析】因$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=0$，所以$0=\left(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right)^2$

即$\left|\vec{a}\right|^2+\left|\vec{b}\right|^2+\left|\vec{c}\right|^2+2\left(\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{a}\right)=0$

又$\because\ \vec{a},\vec{b},\vec{c}$都是单位向量，$\left|\vec{a}\right|^2=\left|\vec{b}\right|^2=\left|\vec{c}\right|^2=1$

$\therefore\ \vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{a}=-\dfrac{3}{2}$，故答案选$A$.

【考点延伸】《高等数学下考试宝典》专题七 1.2——向量的线性运算.

二、填空题（15 分，每题 3 分，共 5 题）

6、【正解】$\dfrac{a}{b}$

【解析】将其他列全部加到第j列，并提取公因数得

$$
b\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&1&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&1&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&\cdots&\vdots&\cdots&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&1&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}=a
$$

即$b(A_{1j}+A_{2j}+\cdots+A_{nj})=a\Rightarrow A_{1j}+A_{2j}+\cdots+A_{nj}=\frac{a}{b}$

【考点延伸】《考试宝典》知识点 2——行列式的展开.

7、【正解】$2(b-a)(c-a)(c-b)$

【解析】$D=2\begin{vmatrix}1&1&1\\a&b&c\\a^2&b^2&c^2\end{vmatrix}=2(b-a)(c-a)(c-b)$

【考点延伸】《考试宝典》知识点 3——几种特殊的行列式.

8、【正解】$\begin{pmatrix}-2&0&1\\0&-1&0\\0&0&-2\end{pmatrix}$

【解析】原式$=(A+3I)^{-1}(A+3I)(A-3I)$

$$=(A-3I)=\begin{pmatrix}-2&0&1\\0&-1&0\\0&0&-2\end{pmatrix}$$

【考点延伸】《考试宝典》知识点 4，5——矩阵的概念和基本运算，矩阵的逆.

9、【正解】$\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{7}=\frac{z-4}{3}$

【解析】设直线上任意一点为(x,y,z),则$\frac{x-1}{3-1}=\frac{y-(-2)}{5-(-2)}=\frac{z-4}{7-4}$

即$\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{7}=\frac{z-4}{3}$

【考点延伸】《高等数学下考试宝典》专题七 4.2——空间直线的对称式方程与参数型方程.

10、【正解】$12\sqrt{2}$

【解析】$\overrightarrow{AB}=(-5,-5,4)$，$\overrightarrow{BC}=(1,1,4)$

$$S=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{BC}\right|=\frac{1}{2}|(-5,-5,4)\times(1,1,4)|=12\sqrt{2}$$

【考点延伸】《高等数学下考试宝典》专题七 2.2——两个向量的向量积.

三、计算题（70 分）

11、【解析】$D\xlongequal[\substack{r_5-r_4\\r_4-r_3\\r_3-r_2\\r_2-r_1}]{}\begin{vmatrix}0&1&2&3&4\\1&-1&-1&-1&-1\\1&1&-1&-1&-1\\1&1&1&-1&-1\\1&1&1&1&-1\end{vmatrix}\xlongequal[\substack{r_2-r_3\\r_3-r_4\\r_4-r_5}]{}\begin{vmatrix}0&1&2&3&4\\0&-2&0&0&0\\0&0&-2&0&0\\0&0&0&-2&0\\1&1&1&1&-1\end{vmatrix}=(-1)^{5+1}\begin{vmatrix}1&2&3&4\\-2&0&0&0\\0&-2&0&0\\0&0&-2&0\end{vmatrix}$

$$=4\times(-1)^{4+1}\begin{vmatrix}-2&0&0\\0&-2&0\\0&0&-2\end{vmatrix}=-4\times(-8)=32$$

【考点延伸】《考试宝典》知识点 1——行列式的概念及其性质；
知识点 2——行列式的展开.

12、【解析】$B=(\alpha_1+2\alpha_2,2\alpha_2+3\alpha_3,3\alpha_3+\alpha_1)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}1&0&1\\2&2&0\\0&3&3\end{pmatrix}=AP$

又$|P|=12$

所以$\det(B)=\det(A)\det(P)=12a$

【考点延伸】《考试宝典》知识点 2——行列式的展开.

13、【解析】$|A|=2$

$$\left[\left(\frac{1}{2}A\right)^*\right]^{-1}=\left(\frac{1}{8}A^*\right)^{-1}=8(A^*)^{-1}$$

$$=8\times\frac{1}{|A|}A=4A$$

故原式可化为$4ABA^{-1}=2AB+12I$

$$2AB(2A^{-1}-E)=12I$$

$$AB(2A^{-1}-E)=6I$$

$$B=6A^{-1}(2A^{-1}-I)^{-1}$$

$$=6(2I-A)^{-1}$$

$$2I-A=\begin{pmatrix}1&-2&0&0\\-1&-1&0&0\\0&0&2&-2\\0&0&1&2\end{pmatrix},\ (2I-A)^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}&-\frac{2}{3}&0&0\\-\frac{1}{3}&-\frac{1}{3}&0&0\\0&0&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\\0&0&-\frac{1}{6}&\frac{1}{3}\end{pmatrix}$$

$$故B=\begin{pmatrix}2&-4&0&0\\-2&-2&0&0\\0&0&2&2\\0&0&-1&2\end{pmatrix}$$

【考点延伸】《考试宝典》知识点 5——矩阵的逆.

14、【解析】$A=\begin{pmatrix}1&1&1&1&0\\0&1&2&2&1\\0&-1&a-3&-2&b\\3&2&1&a&-1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&1&1&0\\0&1&2&2&1\\0&-1&a-3&-2&b\\0&-1&-2&a-3&-1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&1&1&0\\0&1&2&2&1\\0&0&a-1&0&b+1\\0&0&0&a-1&0\end{pmatrix}$

当$a\neq1$时，$r(A)=4$；

当$a=1$且$b\neq-1$时，$r(A)=3$；

当$a=1$且$b=-1$时，$r(A)=2$。

【考点延伸】《考试宝典》知识点 9——矩阵的秩.

15、【解析】$\vec{l_1}=(3,2,1)$，$\vec{l_2}=(1,-3,2)$，$M_1(-1,-1,-1)$，$M_2(4,-5,4)$，$\overrightarrow{M_1M_2}=(5,-4,5)$

因为$\begin{vmatrix}5&-4&5\\3&2&1\\1&-3&2\end{vmatrix}=0$，所以两直线共面，得$\begin{cases}x=3t-1\\y=2t-1\\z=t-1\end{cases}$，代入$L_2$式中

得$3t-5=\dfrac{2t+4}{-3}=\dfrac{t-5}{2}$，得$t=1$，所以交点坐标为$(2,1,0)$

L_1,L_2所在平面的法向量$\vec{n}=\vec{l_1}\times\vec{l_2}=(7,-5,-11)$

所以平面方程为$7(x-2)+(-5)(y-1)-11z=0$，即$7x-5y-11z=9$

【考点延伸】《高等数学下考试宝典》专题七第三部分——平面及其方程；第四部分——空间直

线及其方程.

16、【解析】(1) $(A|E)=\left(\begin{array}{cccccc|cccccc}2&2&2&\cdots&2&2&1&0&0&\cdots&0&0\\0&1&1&\cdots&1&1&0&1&0&\cdots&0&0\\0&0&1&\cdots&1&1&0&0&1&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&1&1&0&0&0&\cdots&1&0\\0&0&0&\cdots&0&1&0&0&0&\cdots&0&1\end{array}\right)$

$$\to\left(\begin{array}{cccccc|cccccc}2&0&0&\cdots&0&0&1&-2&0&\cdots&0&0\\0&1&0&\cdots&0&0&0&1&-1&\cdots&0&0\\0&0&1&\cdots&0&0&0&0&1&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&1&0&0&0&0&\cdots&1&-1\\0&0&0&\cdots&0&1&0&0&0&\cdots&0&1\end{array}\right)$$

$$\to\left(\begin{array}{cccccc|cccccc}1&0&0&\cdots&0&0&1/2&-1&0&\cdots&0&0\\0&1&0&\cdots&0&0&0&1&-1&\cdots&0&0\\0&0&1&\cdots&0&0&0&0&1&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&1&0&0&0&0&\cdots&1&-1\\0&0&0&\cdots&0&1&0&0&0&\cdots&0&1\end{array}\right)$$

得 $A^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&-1&0&\cdots&0&0\\0&1&-1&\cdots&0&0\\0&0&1&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&1&-1\\0&0&0&\cdots&0&1\end{pmatrix}$

(2) 由 $|A|=2$，得 $A^*=|A|A^{-1}=\begin{pmatrix}1&-2&0&\cdots&0&0\\0&2&-2&\cdots&0&0\\0&0&2&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&2&-2\\0&0&0&\cdots&0&2\end{pmatrix}$

A 中所有元素代数余子式的和即 A^* 所有元素和

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}A_{ij}=1+2(n-1)-2(n-1)=1$$

【考点延伸】《考试宝典》知识点 5——矩阵的逆.

2017-2018 学年第一学期期中考试 A 卷

一、选择题（15 分，每题 3 分，共 5 题）

1、设A是2阶方阵，B是3阶方阵，且$|A|=2$，$|B|=-2$，则$|-|A|B|=$（　　）.

A、4　　B、-4　　C、16　　D、-16

2、设A，B都是n阶方阵，如果A和B的秩分别为r和n，则$r(AB)-r(A)=$（　　）.

A、0　　B、r　　C、n　　D、$m-r$

3、设A，B均为2阶方阵，A^*，B^*分别为A，B的伴随矩阵，若$|A|=1$，$|B|=2$则分块矩阵$\begin{bmatrix} O & A \\ B & O \end{bmatrix}$的伴随矩阵为（　　）.

A、$\begin{bmatrix} O & A^* \\ 2B^* & O \end{bmatrix}$；　　B、$\begin{bmatrix} O & 2A^* \\ B^* & O \end{bmatrix}$；

C、$\begin{bmatrix} O & 2B^* \\ A^* & O \end{bmatrix}$；　　D、$\begin{bmatrix} O & B^* \\ 2A^* & O \end{bmatrix}$

4、已知$P=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$，$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$，若$P^mAP^n=A$，则下列选项中正确的是（　　）.

A、$m=5$; $n=4$；　　B、$m=5$; $n=5$；

C、$m=4$; $n=5$；　　D、$m=4$; $n=4$

5、设有直线l: $\begin{cases} x+3y+2z+1=0 \\ 2x-y-10z+3=0 \end{cases}$及平面$\pi$: $4x-2y+z-2=0$，则直线l（　　）.

A、平行于π；　　B、垂直于π；

C、在π上；　　D、与π斜交

二、填空题（15 分，每题 3 分，共 5 题）

6、若$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ x & 3 & 1 \\ 4 & x & 5 \end{vmatrix}$中$(1,2)$元的代数余子式$A_{12}=-1$，则$A_{21}=$__________.

7、设矩阵A满足$A^2+A=4I$，其中I为单位矩阵，则$(A-I)^{-1}=$__________.

8、设$\alpha=(1,0,-1)^T$，矩阵$A=\alpha\alpha^T$，n为正整数，则$A^n=$__________.

9、已知$||a||=1$，$||b||=2$，$(a,b)=\dfrac{\pi}{3}$，则$||2a-b||=$______.

10、若4点$A(1,0,-2)$，$B(7,x,0)$，$C(-8,6,1)$，$D(-2,6,1)$共面，则$x=$______.

三、解答题（70分）

11、（10分）计算行列式$D=\begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 0 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \end{vmatrix}$.

12、（12分）已知矩阵A伴随矩阵$A^*=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 8 \end{bmatrix}$，矩阵$B$满足方程$ABA^{-1}=BA^{-1}+3I$，求$B$.

13、（12分）设矩阵$A=\begin{bmatrix} a & -1 & -1 \\ -1 & a & -1 \\ -1 & -1 & a \end{bmatrix}$与矩阵$B=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$等价，求常数$a$.

14、（12分）讨论n阶方阵$A=\begin{bmatrix} a & b & \cdots & b \\ b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & \cdots & a \end{bmatrix}$$(n\geqslant 2)$的秩.

15、（12分）直线L过点$P_0(1,0,-2)$，与平面π: $3x-y+2z+1=0$平行，与直线L_1: $\dfrac{x-1}{4}=\dfrac{y-3}{-2}=z$相交，求$L$的对称式方程.

16、（12分）设平面π与π_1: $x-2y+z-1=0$垂直，且与π_1的交线落在yOz平面上，求π的方程.

2017-2018 学年第一学期期中考试 A 卷参考答案

一、选择题（15 分，每题 3 分，共 5 题）

1、【正解】C

【解析】$|-|A|B|=|-2B|=(-2)^3|B|=-8\times(-2)=16$

【考点延伸】《考试宝典》知识点 1——行列式的概念及其性质.

2、【正解】A

【解析】$r(A)+r(B)-n\le r(AB)\le \min\{r(A),r(B)\}$

又$\because r\le n$，$\therefore r\le r(AB)\le r$，得：$r(AB)=r$

故$r(AB)-r(A)=0$

【考点延伸】《考试宝典》知识点 4-9——矩阵的秩.

3、【正解】D

【解析】设$C=\begin{bmatrix} O & A \\ B & O\end{bmatrix}$，由$CC^*=C^*C=|C|I$，分别将四选项与$\begin{bmatrix} O & A \\ B & O\end{bmatrix}$相乘验证

A、$\begin{bmatrix} O & A^* \\ 2B^* & O\end{bmatrix}\begin{bmatrix} O & A \\ B & O\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} A^*B & \\ & 2AB^*\end{bmatrix}$，不符；

B、$\begin{bmatrix} O & 2A^* \\ B^* & O\end{bmatrix}\begin{bmatrix} O & A \\ B & O\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2A^*B & \\ & AB^*\end{bmatrix}$，不符；

C、$\begin{bmatrix} O & 2B^* \\ A^* & O\end{bmatrix}\begin{bmatrix} O & A \\ B & O\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2BB^* & \\ & AA^*\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 4I & \\ & I\end{bmatrix}$，不符；

D、$\begin{bmatrix} O & B^* \\ 2A^* & O\end{bmatrix}\begin{bmatrix} O & A \\ B & O\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} BB^* & \\ & 2AA^*\end{bmatrix}=2\begin{bmatrix} I & \\ & I\end{bmatrix}$，符合题意，故选$D$。

【考点延伸】《考试宝典》知识点 4-9——伴随矩阵的计算.

4、【正解】D

【解析】P为初等矩阵，P^mAP^n表示对矩阵A进行初等变换

又$P=\begin{bmatrix} & & 1 \\ & 1 & \\ 1 & & \end{bmatrix}$

$\therefore P^mAP^n$相当于将矩阵A的 1，3 行交换m次，再将A的 1，3 列交换n次，

又$\because P^mAP^n=A$，即A初等变换后仍为原矩阵

$\therefore m,n$均为偶数，

D符合题意。

【考点延伸】《考试宝典》知识点 4-9——初等变换与初等矩阵.

5、【正解】B

【解析】直线l方向向量$(1,3,2)\times(2,-1,-10)=(-28,14,-7)=(4,-2,1)$

又$\because$平面π法向量$(4,-2,1)$，故l垂直于平面π

【考点延伸】《高数下考试宝典》专题七——直线与平面的位置关系.

二、填空题（15 分，每题 3 分，共 5 题）

6、【正解】2

【解析】$A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} x & 1 \\ 4 & 5\end{vmatrix}=-(5x-4)=-1$，得$x=1$

$$A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}0&2\\x&5\end{vmatrix}=2x=2$$

【考点延伸】《考试宝典》知识点2——行列式的展开.

7、【正解】$\frac{1}{2}(A+2I)$

【解析】$A^2+A-4I=0$，$(A-I)(A+2I)=2I$

两侧左乘$(A-I)^{-1}$，得：$(A+2I)=2(A-I)^{-1}$，即$(A-I)^{-1}=\frac{1}{2}(A+2I)$

【考点延伸】《考试宝典》知识点4-9——求抽象矩阵的逆矩阵.

8、【正解】$2^{n-1}\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&0&0\\-1&0&1\end{pmatrix}$

【解析】$A^n=\underbrace{(\alpha\alpha^T)(\alpha\alpha^T)\cdots(\alpha\alpha^T)}_{n个}=\alpha\underbrace{(\alpha^T\alpha)(\alpha^T\alpha)\cdots(\alpha^T\alpha)}_{n-1个}\alpha^T$

又$\alpha^T\alpha=(1,0,-1)\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}=2$

$$\therefore A^n=\alpha 2^{n-1}\alpha^T=2^{n-1}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}(1,0,-1)=2^{n-1}\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&0&0\\-1&0&1\end{pmatrix}$$

【考点延伸】《考试宝典》知识点10——向量的概念与运算.

9、【正解】2

【解析】$||2a-b||^2=||2a||^2+||b||^2-4\cdot||a||\cdot||b||\cdot\cos(a,b)=4$

故$||2a-b||=2$

【考点延伸】范数的计算.

10、【正解】4

【解析】设$O(0,0,0)$，由共面得$\overrightarrow{OB}=a\overrightarrow{OA}+c\overrightarrow{OC}+d\overrightarrow{OD}$，且$a+c+d=1$

即$\begin{cases}a-8c-2d=7\\6c+6d=x\\-2a+c+d=0\end{cases}$，解得$x=4$

【考点延伸】《高数下考试宝典》专题七——点与平面的位置关系.

三、解答题（70分）

11、【解析】解法一：第1行乘以-1分别加到第2,3,4,5行，再把第$k(k=2,3,4,5)$列的$\frac{1}{k}$倍加到第1列,得

$$D=\begin{vmatrix}0&2&3&4&5\\1&-2&0&0&0\\1&0&-3&0&0\\1&0&0&-4&0\\1&0&0&0&-5\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}4&2&3&4&5\\0&-2&0&0&0\\0&0&-3&0&0\\0&0&0&-4&0\\0&0&0&0&-5\end{vmatrix}=480$$

解法二：$D=5!\begin{vmatrix}0&1&1&1&1\\1&0&1&1&1\\1&1&0&1&1\\1&1&1&0&1\\1&1&1&1&0\end{vmatrix}=5!4\begin{vmatrix}1&1&1&1&1\\0&-1&0&0&0\\0&0&-1&0&0\\0&0&0&-1&0\\0&0&0&0&-1\end{vmatrix}=480$

【考点延伸】《考试宝典》知识点 2——行列式的展开.

12、【解析】等式$ABA^{-1}=BA^{-1}+3I$两端左乘A^{*}，右乘A，得$|A|B=A^{*}B+3|A|I$，

由$|A^{*}|=8$，知$|A|=2$，代入上式，得$(2I-A^{*})B=6I$，故

$$B=6(2I-A^{*})^{-1}=6\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\-1&0&1&0\\0&3&0&-6\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}6&0&0&0\\0&6&0&0\\6&0&6&0\\0&3&0&-1\end{bmatrix}$$

【考点延伸】《考试宝典》知识点 4-9——矩阵的运算和矩阵行列式的计算.

13、【解析】因为两个同型矩阵等价的充要条件为秩相等，故$r(A)=r(B)$，易知$r(B)=2$

故$r(A)=2$，从而$\det(A)=\det\begin{bmatrix}a&-1&-1\\-1&a&-1\\-1&-1&a\end{bmatrix}=(a-2)(a+1)^2=0$

当$a=-1$时，$r(A)=1$；当$a=2$时，$r(A)=2$

所以当$a=2$时，两个矩阵等价。

【考点延伸】《考试宝典》知识点 4-9——矩阵等价.

14、【解析】$A\to\begin{bmatrix}a+(n-1)b&b&\cdots&b\\a+(n-1)b&a&\cdots&b\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a+(n-1)b&b&\cdots&a\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}a+(n-1)b&b&\cdots&b\\0&a-b&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&a-b\end{bmatrix}$

当$a\neq b$且$a\neq(1-n)b$时，$r(A)=n$；

当$a=b=0$时，$r(A)=0$；

当$a=b\neq 0$时，$r(A)=1$；

当$a\neq b$且$a=(1-n)b$时，$r(A)=n-1$。

【考点延伸】《考试宝典》知识点 4-9——矩阵的秩.

15、【解析】解法一：设直线L的方向向量为$a=(l,m,n)$，因为直线L与平面π：$3x-y+2z+1=0$平行，故直线L的方向向量a与平面π的法向量$n=(3,-1,2)$垂直，

即有 $a\cdot n=3l-m+2n=0$ (1)

又直线L过点P_0，并且与直线L_1相交，所以三向量$\overrightarrow{P_0P_1},a_1,a$共面，其中$a_1=(4,-2,1)$是$L_1$的方向向量，$P_1(1,3,0)$为$L_1$上的点，$\overrightarrow{P_0P_1}=(0,3,2)$

故有 $\left[\overrightarrow{P_0P_1},a_1,a\right]=\begin{vmatrix}0&3&2\\4&-2&1\\l&m&n\end{vmatrix}=0$ (2)

由(1)、(2)解得$m=-\dfrac{25}{2}l$, $n=-\dfrac{31}{4}l$，取$l=4$，得直线L的方向向量

$a=(4,-50,-31)$，故所求直线的对称式方程为$\dfrac{x-1}{4}=\dfrac{y}{-50}=\dfrac{z+2}{-31}$

解法二：令$\dfrac{x-1}{4}=\dfrac{y-3}{-2}=z=t$，则$x=1+4t$, $y=3-2t$, $z=t$

可知直线L_1与直线L的交点可取做$P_1(1+4t,3-2t,t)$，故直线L的方向向量可取做$\overrightarrow{P_0P_1}=(4t,3-2t,t+2)$，$\overrightarrow{P_0P_1}$与平面$3x-y+2z+1=0$的方向向量垂直，即$(4t,3-2t,t+2)(3,-1,2)=0$，解得$t=-\dfrac{1}{16}$，故点$P_1$的坐标为$\left(\dfrac{3}{4},\dfrac{25}{8},-\dfrac{1}{16}\right)$

故直线L的方向向量为$\overrightarrow{P_0P_1}=\left(-\dfrac{1}{4},\dfrac{25}{8},\dfrac{31}{16}\right)$，$L$的对称式方程为

$$\frac{x-1}{\frac{-1}{4}}=\frac{y-0}{\frac{25}{8}}=\frac{z+2}{\frac{31}{16}}，即\frac{x-1}{-4}=\frac{y-0}{50}=\frac{z+2}{31}$$

解法三：容易验证P_0在平面π上，设直线L_1与平面π的交点为P_1，则连接P_0P_1的直线

为所求直线L，将$x=1+4t$, $y=3-2t$, $z=t$代入平面方程，解得$t=-\dfrac{1}{16}$，故点P_1的坐标为$\left(\dfrac{3}{4},\dfrac{25}{8},-\dfrac{1}{16}\right)$，故直线$L$的方向向量为$\overrightarrow{P_0P_1}=\left(-\dfrac{1}{4},\dfrac{25}{8},\dfrac{31}{16}\right)$，同解法二，得直线$L$的方程为$\dfrac{x-1}{-4}=\dfrac{y-0}{50}=\dfrac{z+2}{31}$

【考点延伸】《高数下考试宝典》专题七——直线与平面的位置关系，直线与直线的位置关系.

16、【解析】交线为：$\begin{cases}x-2y+z-1=0\\x=0\end{cases}$，过此交线的平面束方程为$x-2y+z-1+\lambda x=0$，

其法向量为$\vec{n}=(\lambda+1,-2,1)$，由$\vec{n}\cdot(1,-2,1)=\lambda+1+4+1=0$，得$\lambda=-6$

故所求平面π的方程为$x-2y+z-1-6x=0\Longrightarrow -5x-2y+z-1=0$

【考点延伸】《高数下考试宝典》专题七——平面与平面的位置关系.

2016-2017学年第一学期期中考试试卷

一、填空题（每小题3分，共15分）

1、关于x的代数方程$\begin{vmatrix} x+1 & -4 & 2 \\ 3 & x-4 & 0 \\ 3 & -1 & x-3 \end{vmatrix}=0$的全部根为________

2、设A的伴随矩阵$A^*=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 8 \end{bmatrix}$，则$A^{-1}=$________

3、设向量$\vec{a}=(1,1,1),\vec{b}=(1,2,-3),\vec{c}=(0,-2,\lambda)$共面，则λ=________

4、设有向量$\vec{a}=(1,1,1),\vec{b}=(1,3,-3)$，则向量$\vec{b}$在向量$\vec{a}$上的正交射影向量$Proj_{\vec{a}}\vec{b}=$______

5、点$P(1,0,-1)$到直线$L:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+2}{0}=\dfrac{z-4}{1}$的距离d=________

二、单项选择题（每小题3分，共15分）

6、已知四阶行列式D，其第3列元素分别为1，3，-2，2，它们对应的余子式分别为3，-2，1，1，则行列式D=（）

A.-5　B.5　C.-3　D.3

7、设A是m×n矩阵，$r(A)=r$，则A中（）

A、必有不等于0的r阶子式，所有r+1阶子式均为0

B、必有等于0的r阶子式，没有不等于0的r+1即子式

C、没有等于0 的r阶子式，任何r+1阶子式均为0

D、至少有一个r阶子式不为0，没有等于0的r-1阶子式

8、设A,B为同阶可逆方阵，则下列结论正确的是（）

A、$|A+B|=|A|+|B|$　　B、$(AB)^T=A^TB^T$

C、$(AB)^{-1}=A^{-1}B^{-1}$　　D、$|AB|=|A||B|$

9、设三阶方阵A的行列式$|A|=2$，则$\left|\dfrac{1}{4}(2A)^*\right|=$（）（$A^*$是$A$的伴随矩阵）

A、$\dfrac{1}{2}$　　B、4　　C、16　　D、32

10、设$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=2$，则$\left[(\vec{a}+\vec{b})\times(\vec{b}+\vec{c})\right]\cdot\vec{c}=$（）

A、1　　B、2　　C、4　　D、8

二、计算与证明题（每小题 10 分，共 70 分）

11、计算 n 阶行列式$D_n=\begin{vmatrix} x & a & a & \cdots & a \\ a & x & a & \cdots & a \\ a & a & x & \cdots & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ a & a & a & \cdots & x \end{vmatrix}$

12、求矩阵$A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & b \\ 2 & 3 & a & 4 \\ 3 & 5 & 1 & 7 \end{bmatrix}$的秩，其中$a,b$为参数

13、设矩阵$A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

（1）试求A^2及A^{-1}

（2）若方阵 B 满足$A^2+AB-A^{-1}=I$（其中I为 4 阶单位阵），求矩阵 B

14、求过原点且直线L_1:$\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z-1}{1}$及直线$L_2$:$\begin{cases} x=1 \\ y=-1+t \\ z=1+t \end{cases}$都平行的平面方程

15、求过点$(1,1,1)$且与直线L_1:$\dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z}{3}$,$L_2$:$\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z-3}{4}$都相交的直线方程

16、设 A 为 n 阶非零实方阵，且$A^*=A^T$（A^*是A的伴随矩阵），证明 A 可逆

17、设矩阵$A=\begin{bmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & -1 \\ 0 & 1 & a \end{bmatrix}$，且$A^3=0$

（1）求a的值

（2）若矩阵X满足$X-XA^2-AX+AXA^2=I$，其中I为 3 阶单位阵，求X

2016-2017 学年第一学期期中考试试卷参考答案

一、填空题（每小题 2 分，共 15 分）

1、【正解】1，2，3

【解析】

$$\begin{vmatrix} x+1 & -4 & 2 \\ 3 & x-4 & 0 \\ 3 & -1 & x-3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} x+1 & -4 & 2 \\ 0 & x-3 & 3-x \\ 3 & -1 & x-3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} x+1 & -4 & -2 \\ 0 & x-3 & 0 \\ 3 & -1 & x-4 \end{vmatrix}=(x-3)(x-1)(x-2)=0$$

得 $x=1$，2，3

【考点延伸】《考试宝典》知识点 1 行列式的概念及其性质

2、【正解】 $\frac{1}{2}A^{*}=\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{3}{2} & 0 & 4 \end{bmatrix}$

【解析】 $|A^{*}|=|A|^{3}=8\Longrightarrow|A|=2$

$$A^{-1}=\frac{A^{*}}{|A|}=\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{3}{2} & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

【考点延伸】《考试宝典》知识点 5 矩阵的逆

3、【正解】 $\lambda=8$

【解析】三个向量共面，及三个向量线性相关 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \\ 1 & -3 & \lambda \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -4 & \lambda \end{vmatrix}=\lambda-8=0\Longrightarrow\lambda=8$

【考点延伸】《考试宝典》知识点 11 向量组的线性相关和线性表示

4、【正解】 $\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$

【解析】 $Proj_{\vec{a}}\vec{b}=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\vec{a}=\frac{1}{3}\vec{a}=\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$

【考点延伸】《高等数学下考试宝典》专题七 【知识清单】1.5 向量的模、方向角、投影

5、【正解】$d=2\sqrt{6}$

【解析】$d=\dfrac{|(0,-2,5)\times(2,0,1)|}{\sqrt{4+1}}=\dfrac{|(-2,10,4)|}{\sqrt{5}}=2\sqrt{6}$

【考点延伸】《高等数学下考试宝典》专题七 【知识清单】第四部分 空间直线及其方程

二、 单项选择题（每小题 3 分，共 15 分）

6、【正解】B

【解析】$D=3+6-2-2=5$

【考点延伸】《考试宝典》知识点 2 行列式的展开

7、【正解】A

【解析】由矩阵秩的定义，A 选项符合

【考点延伸】《考试宝典》知识点 9 矩阵的秩和矩阵等价

8、【正解】D

【解析】由方阵的性质及其行列式的性质得 D

【考点延伸】《考试宝典》知识点 4 矩阵的概念和基本运算

9、【正解】B

【解析】$\left|\dfrac{1}{4}(2A)^*\right|=\dfrac{1}{4^3}|(2A)^*|=\dfrac{1}{4^3}|2A|^2=\dfrac{1}{4^3}\times 2^6\times|A|^2=4$

【考点延伸】《考试宝典》知识点 4-9 【重要题型】题型 1 矩阵的运算和矩阵行列式的计算

10、【正解】B

【解析】$\left[(\vec{a}+\vec{b})\times(\vec{b}+\vec{c})\right]\cdot\vec{c}=(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}+(\vec{a}\times\vec{c})\cdot\vec{c}+(\vec{b}\times\vec{c})\cdot\vec{c}=(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=2$

【考点延伸】《高等数学下考试宝典》专题七 【知识清单】2.3 向量的混合积

三、 计算与证明题（每小题 10 分，共 70 分）

11、【解析】

$$D_n=[x+(n-1)a]\begin{vmatrix}1 & a & a & \cdots & a\\ 1 & x & a & \cdots & a\\ 1 & a & x & \cdots & a\\ \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots\\ 1 & a & a & \cdots & x\end{vmatrix}$$

$$=[x+(n-1)a]\begin{vmatrix}1 & a & a & \cdots & a\\ 0 & x-a & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & x-a & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x-a\end{vmatrix}=[x+(n-1)a](x-a)^{n-1}$$

【考点延伸】《考试宝典》知识点 1-3 【重要题型】题型 2 加边法和爪形行列式

12、【解析】

$$A\to\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & -1 & 2\\ 0 & 0 & a-1 & b-2\\ 0 & 0 & 0 & b-2\end{bmatrix}\Longrightarrow\begin{cases}a=1,b=2,r(A)=2\\ a\neq 1,b=2,r(A)=3\\ a=1,b\neq 2,r(A)=3\\ a\neq 1,b\neq 2.r(A)=4\end{cases}$$

【考点延伸】《考试宝典》知识点 9 矩阵的秩和矩阵等价

13、【解析】(1) $A^2=\begin{bmatrix}4&0&0&0\\0&4&0&0\\0&0&4&0\\0&0&0&4\end{bmatrix}=4I\Longrightarrow A^{-1}=\frac{1}{4}A=\begin{bmatrix}\frac{1}{4}&\frac{1}{4}&\frac{1}{4}&\frac{1}{4}\\\frac{1}{4}&\frac{1}{4}&-\frac{1}{4}&-\frac{1}{4}\\\frac{1}{4}&-\frac{1}{4}&\frac{1}{4}&-\frac{1}{4}\\\frac{1}{4}&-\frac{1}{4}&-\frac{1}{4}&\frac{1}{4}\end{bmatrix}$

(2)$4I+AB-\frac{1}{4}A=I\Longrightarrow A\left(\frac{1}{4}I-B\right)=3I\Longrightarrow B=\frac{1}{4}I-3A^{-1}=\frac{1}{4}(I-3A)$

$$B=\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}&-\frac{3}{4}&-\frac{3}{4}&-\frac{3}{4}\\-\frac{3}{4}&-\frac{1}{2}&\frac{3}{4}&\frac{3}{4}\\-\frac{3}{4}&\frac{3}{4}&-\frac{1}{2}&\frac{3}{4}\\-\frac{3}{4}&\frac{3}{4}&\frac{3}{4}&-\frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

【考点延伸】《考试宝典》知识点 5 矩阵的逆

14、【解析】$\vec{n}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\1&2&1\\0&1&1\end{vmatrix}=(1,-1,1)$，平面方程：$x-y+z=0$

【考点延伸】《高等数学下考试宝典》专题七【知识清单】3.2 平面的一般方程

15、【解析】设所求直线 L 的方向向量为$\vec{S}=(l,m,n)$，点$(1,1,1)$为A点，过L_1的点$M(0,0,0)$，那么$\overrightarrow{AM}=(-1,-1,-1)$，由于$L$与$L_1$相交$\Longrightarrow L$与$L_1$共面$\Longrightarrow \overrightarrow{AM},\vec{S_1},\vec{S}$共面

$\Longrightarrow\begin{vmatrix}-1&-1&-1\\1&2&3\\l&m&n\end{vmatrix}=0$，同理由$L$与$L_2$相交得$\begin{vmatrix}0&-1&-2\\2&1&4\\l&m&n\end{vmatrix}=0$

解得$l=0,n=2m$所以令$\vec{S}=(0,1,2)$,所求直线方程为$\frac{x-1}{0}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-1}{2}$

【考点延伸】《高等数学下考试宝典》专题七 【知识清单】4.2 空间直线的对称式方程与参数型方程

16、【解析】$A^*=A^T\Longrightarrow a_{ij}=A_{ij}(1\leqslant i\leqslant n,1\leqslant j\leqslant n)$

$|A|=a_{i1}A_{i1}+\cdots+a_{in}A_{in}=a_{i1}{}^2+a_{i2}{}^2+\cdots+a_{in}{}^2(1\leqslant i\leqslant n)$

因为 A 为非零矩阵，A 中至少有一个元素不为零，不妨设$a_{i1}\neq 0$则$|A|\neq 0$，所以 A 可逆

【考点延伸】《考试宝典》知识点 2 行列式的展开

17、【解析】（1） $A^3=\begin{bmatrix} a^3+3a & 3a^2 & -3a \\ 3a^2 & a^3 & -3a^2 \\ 3a & 3a^2 & a^3-3a \end{bmatrix}=0 \Longrightarrow a=0, A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

（2） $X-XA^2-AX+AXA^2=I \Longrightarrow (I-A)X(I-A^2)=I$

$$(I-A)^{-1}=\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix},(I-A^2)^{-1}=\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$X=(I-A)^{-1}(I-A^2)^{-1}=\begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

【考点延伸】《考试宝典》知识点 5 矩阵的逆

2015-2016 学年第一学期期中考试 A 卷

一、填空题

1. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \\ 1 & 8 & 27 & 64 \end{vmatrix}=$______.

2、设M_{ij}为行列式$\begin{vmatrix} 5 & 8 & 2 & 9 \\ 3 & 6 & 4 & 7 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \end{vmatrix}$的$(i,j)$元素的余子式，则$2M_{42}+4M_{44}=$______.

3、三个向量$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$共面的充要条件为______.

4、设向量$\vec{a}=(3,2,1)$，$\vec{b}=(7,5,0)$，则$\vec{b}$在$\vec{a}$上的射影$\left(\vec{b}\right)_{\vec{a}}=$______.

5、过点$(2,-1,3)$且与直线$\dfrac{x+3}{7}=\dfrac{y}{0}=\dfrac{z+6}{2}$平行的直线方程为______.

6、设A为$m\times n$矩阵，P为m阶可逆方阵，且$PA=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$，则$r(A)=$______.

7、设A,B分别为m阶，n阶可逆方阵，则$\begin{bmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{bmatrix}^{-1}=$______.

8、设A为 3 阶矩阵，$|A|=2$，则$|-3A^*|=$______.

9、$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 6 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}=$______.

10. 设 3 个向量$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$满足$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\bullet\vec{c}=2$，则$\left[\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\times\left(\vec{b}+\vec{c}\right)\right]\bullet\left(\vec{c}+\vec{a}\right)=$______

11. 已知矩阵$A=\left(a_{ij}\right)_{3\times3}$的第一行元素为$a_{11}=1,a_{12}=2,a_{13}=-1$，$A$ 的伴随矩阵为$A^*=\begin{bmatrix} -7 & -4 & 9 \\ 5 & 3 & -7 \\ 4 & 2 & -5 \end{bmatrix}$，则$A=$______

12. 设 $\alpha_j(j=1,2,3)$ 均为 3 维列向量，方阵 $A=\begin{bmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}\alpha_1+2\alpha_2 & 2\alpha_2+3\alpha_3 & -\alpha_3\end{bmatrix}$，已知$|A|=a$，则$|B|=$______

二、选择题

1. 如果齐次线性方程组$\begin{cases}\lambda x_1+x_2+x_3=0\\ x_1+\lambda x_2+x_3=0\\ 3x_1-x_2+x_3=0\end{cases}$有非零解，则$\lambda$的值为（　　）

a. $\lambda\neq1$　　b. $\lambda=1$；　　c. $\lambda\neq3$；　　d. $\lambda=3$

2. 设A,B为同阶方阵，下列等式正确的是（　　）

a. $(AB)^T=A^TB^T$；　　b. $(AB)^*=A^*B^*$；

c. $A^2-B^2=(A+B)(A-B)$；　　d. $|AB|=|A||B|$.

3. 设A为n阶可逆矩阵，下列等式不正确的是（　　）

a、$|A^*|=|A|^{n-1}$　　b、$A^*=|A|A^{-1}$　　c、$A=\frac{1}{|A|}(A^*)^{-1}$　　d、$(A^*)^{-1}=\frac{1}{|A|}A$

4. 设有两点$A(2,1,3)$，$B(1,3,2)$，则向量$\overline{AB}$与y轴正向的夹角是（　　）.

a、$\arccos\frac{\sqrt6}{6}$　　b、$\arccos\frac{\sqrt6}{3}$　　c、$\arccos\left(-\frac{\sqrt6}{6}\right)$　　d、$\arccos\left(-\frac{\sqrt6}{3}\right)$

5. 两条直线$L_1:x+1=\frac{y-1}{2}=\frac{z}{2}$，$L_2:x+1=y+4=\frac{z}{2}$，则$L_1$与$L_2$的位置关系是（　　）.

a、异面　　b、相交　　c、平行不重合　　d、重合

三、计算题

1. 计算行列式$\begin{vmatrix}a_1+b & a_2 & a_3 & \cdots & a_n\\ a_1 & a_2+b & a_3 & \cdots & a_n\\ a_1 & a_2 & a_3+b & \cdots & a_n\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n+b\end{vmatrix}$的值

2、设3阶矩阵A,B满足$2A^{-1}B=B-4I$，其中I是3阶单位矩阵

(1) 证明：$A-2I$可逆；

(2) 若$B=\begin{bmatrix}1 & -2 & 0\\ 1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}$，求矩阵$A$

3. 设$B=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}$，$P=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & -1 & 0\\ 2 & 1 & 1\end{bmatrix}$，矩阵$A$满足$AP=PB$，求$A$及$A^5$

4. 设四阶矩阵$A=\begin{bmatrix}1 & a & a & a\\ a & 1 & a & a\\ a & a & 1 & a\\ a & a & a & 1\end{bmatrix}$的秩为3，试求常数$a$的值

5. 求过点$P_1(-1,0,2),P_2(1,1,1)$且与平面$x+y+z+1=0$垂直的平面方程

6. 求点$P(1,2,3)$到直线$\begin{cases}x+y-z-1=0\\2x+z-3=0\end{cases}$的距离

四. 证明题

1. 设α是n维非零列向量，$A=I-\alpha\alpha^T$，其中I为n阶单位矩阵，证明：$A^2=A\Longleftrightarrow\alpha^T\alpha=1$；

2. 设A,B均为n阶方阵，且满足$A^2=I,\ B^2=I,\ |A|+|B|=0$，证明：$|A+B|=0$

2015-2016 学年第一学期期中考试 A 卷参考答案

一、填空题

1、【正解】12

【解析】$\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\1 & 2 & 3 & 4\\1 & 4 & 9 & 16\\1 & 8 & 27 & 64\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\0 & 1 & 2 & 3\\0 & 3 & 8 & 15\\0 & 7 & 26 & 63\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\0 & 2 & 6\\0 & 12 & 42\end{vmatrix}=84-12\times6=12$

【考点延伸】《考试宝典》知识点2——行列式的展开

2、【正解】-140

【解析】行列式按第四行展开，得$|A|=2M_{42}+4M_{44}$，即$2M_{42}+4M_{44}=|A|$

$$|A|=\begin{vmatrix}5 & 8 & 2 & 9\\3 & 6 & 4 & 7\\0 & 3 & 0 & 1\\0 & 2 & 0 & 4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3 & 8 & 2 & -7\\-1 & 6 & 4 & -5\\0 & 3 & 0 & -5\\0 & 2 & 0 & 0\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}3 & 2 & -7\\-1 & 4 & -5\\0 & 0 & -5\end{vmatrix}=-10\begin{vmatrix}3 & 2\\-1 & 4\end{vmatrix}=-140$$

【考点延伸】《考试宝典》知识点2——行列式的展开

3、【正解】$\exists$不全为零的常数k_1，k_2，k_3，满足$k_1\vec{a}+k_2\vec{b}+k_3\vec{c}=0$

【解析】三个向量共面的充要条件为其中一个向量可以由另外两个向量线性表示，即$\exists$不全为零的常数k_1，k_2，k_3，满足$k_1\vec{a}+k_2\vec{b}+k_3\vec{c}=0$

【考点延伸】《考试宝典》高等数学专题七 2.3——向量的混合积

4、【正解】$\dfrac{31}{\sqrt{14}}$

【解析】不妨设这两个向量的起点都在原点的位置，两向量间夹角的余弦值为

$\cos\alpha=\dfrac{|\vec{a}\cdot\vec{b}|}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\dfrac{31}{\sqrt{14\times74}}$，故射影$(\vec{b})_{\vec{a}}=|\vec{b}|\cos\alpha=$

$\sqrt{49+25}\times\dfrac{31}{\sqrt{14\times74}}=\dfrac{31}{\sqrt{14}}$

【考点延伸】《考试宝典》高等数学专题七 2.1——两个向量的数量积

5、【正解】$\dfrac{x-2}{7}=\dfrac{y+1}{0}=\dfrac{z-3}{2}$

【解析】与直线$\dfrac{x+3}{7}=\dfrac{y}{0}=\dfrac{z+6}{2}$平行的直线的方向向量为(7,0,2)

又由于所求直线过点(2，−1，3)，故所求直线方程为$\dfrac{x-2}{7}=\dfrac{y+1}{0}=\dfrac{z-3}{2}$

【考点延伸】《考试宝典》高等数学专题七 4.3——两个直线的夹角

6、【正解】2

【解析】依题意PA为$m\times n$阶矩阵，而$PA=\begin{bmatrix}1&2&3\\0&0&5\\0&0&0\end{bmatrix}$，故$m=n=3$，

P为可逆矩阵，故$r(P)=3$，而$r(PA)=2$，$2=r(PA)\leqslant\min\{r(P),\ r(A)\}=r(A)$

$2=r(PA)\geqslant r(A)+r(P)-3=r(A)$，故$2\leqslant r(A)\leqslant 2$，$r(A)=2$

【考点延伸】《考试宝典》知识点 9——矩阵的秩和矩阵等价

7、【正解】$\begin{pmatrix}0&B^{-1}\\A^{-1}&0\end{pmatrix}$

【解析】设$\begin{pmatrix}0&A\\B&0\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}X_1&X_2\\X_3&X_4\end{pmatrix}$，则有$\begin{pmatrix}0&A\\B&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X_1&X_2\\X_3&X_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}E&0\\0&E\end{pmatrix}$，故$AX_3=E$，$AX_4=0$

$BX_1=0$，$BX_2=E$，解得$X_1=0$，$X_2=B^{-1}$，$X_3=A^{-1}$，$X_4=0$

所以$\begin{pmatrix}0&A\\B&0\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}X_1&X_2\\X_3&X_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&B^{-1}\\A^{-1}&0\end{pmatrix}$

【考点延伸】《考试宝典》知识点 7——分块矩阵

8、【正解】−108

【解析】$|-3A^*|=(-3)^3|A^*|=-27|A|^{3-1}=-27\times 2^2=-108$

【考点延伸】《考试宝典》知识点 4——矩阵的概念和基本运算

9、【正解】$\begin{pmatrix}3&0&18\\-1&1&0\\3&2&12\end{pmatrix}$

【解析】依题意，可以看出矩阵$\begin{pmatrix}1&2&6\\-1&1&0\\3&2&4\end{pmatrix}$左边的矩阵是一个初等矩阵，

它的初等行变换是第一行减去两倍的第二行，

矩阵$\begin{pmatrix}1&2&6\\-1&1&0\\3&2&4\end{pmatrix}$的右边也是一个初等矩阵，它的初等列变换是第三行自身变成三倍

故，对矩阵$\begin{pmatrix}1&2&6\\-1&1&0\\3&2&4\end{pmatrix}$进行相应的初等行列变换可得变换后的矩阵为$\begin{pmatrix}3&0&18\\-1&1&0\\3&2&12\end{pmatrix}$

【考点延伸】《考试宝典》知识点 8——初等矩阵

10、【正解】4

【解析】原式$=\left(\vec a\times\vec b+\vec a\times\vec c+\vec b\times\vec b+\vec b\times\vec c\right)\cdot\left(\vec c+\vec a\right)$

$$=\left(\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c}\right)\cdot\left(\vec{c}+\vec{a}\right)$$
$$=\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}+\left(\vec{a}\times\vec{c}\right)\cdot\vec{c}+\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)\cdot\vec{c}+\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{a}+\left(\vec{a}\times\vec{c}\right)\cdot\vec{a}+\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)\cdot\vec{a}$$
$$=\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}+\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)\cdot\vec{a}=4$$

【考点延伸】《考试宝典》高等数学专题七 2.3——向量的混合积

11、【正解】$\begin{pmatrix}1&2&-1\\3&1&4\\2&2&1\end{pmatrix}$

【解析】$A^*=|A|A^{-1}$，$|A|=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}=-1$，$A^{-1}=-A^*=\begin{pmatrix}7&4&-9\\-5&-3&7\\-4&-2&5\end{pmatrix}$

$$(A^{-1}|E)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}7&4&-9&1&0&0\\-5&-3&7&0&1&0\\-4&-2&5&0&0&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}2&1&-2&1&1&0\\-1&-1&2&0&1&-1\\-4&-2&5&0&0&1\end{array}\right)$$
$$\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&2&-1\\-1&-1&2&0&1&-1\\0&0&1&2&2&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&2&-1\\0&1&0&3&1&4\\0&0&1&2&2&1\end{array}\right)=(E|A)$$

故$A=\begin{pmatrix}1&2&-1\\3&1&4\\2&2&1\end{pmatrix}$

【考点延伸】《考试宝典》知识点 5——矩阵的逆

12、【正解】$-2a$

【解析】$B=(\alpha_1+2\alpha_2\ \ 2\alpha_2+3\alpha_3\ \ -\alpha_3)=(\alpha_1\ \ \alpha_2\ \ \alpha_3)\begin{pmatrix}1&0&0\\2&2&0\\0&3&-1\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}1&0&0\\2&2&0\\0&3&-1\end{pmatrix}$

$$|B|=|A|\begin{vmatrix}1&0&0\\2&2&0\\0&3&-1\end{vmatrix}=-2|A|=-2a$$

【考点延伸】《考试宝典》知识点 8——初等矩阵

二、选择题

1、【正解】b

【解析】齐次线性方程组有非零解，则其系数矩阵的秩小于 3，即$r\begin{pmatrix}\lambda&1&1\\1&\lambda&1\\3&-1&1\end{pmatrix}<3$

$$\begin{pmatrix}\lambda&1&1\\1&\lambda&1\\3&-1&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}0&1-\lambda^2&1-\lambda\\1&\lambda&1\\0&-1-3\lambda&-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&\lambda&1\\0&-1-3\lambda&-2\\0&1-\lambda^2&1-\lambda\end{pmatrix},$$

当$\lambda=1$时，$r\begin{pmatrix}\lambda&1&1\\1&\lambda&1\\3&-1&1\end{pmatrix}=2<3$，此时，齐次线性方程组有非零解

【考点延伸】集《考试宝典》知识点 16——齐次线性方程组

2、【正解】d

【解析】由方阵的行列式的性质可知$|AB|=|A||B|$

【考点延伸】《考试宝典》知识点 1——行列式的概念及其性质

3、【正解】c

【解析】对于选项c：$A^*=|A|A^{-1}$，$(A^*)^{-1}=(|A|A^{-1})^{-1}=\frac{1}{|A|}A$，$A=|A|(A^*)^{-1}$

【考点延伸】《考试宝典》知识点 5——矩阵的逆

4、【正解】b

【解析】向量$\overrightarrow{AB}=(-1,\ 2,\ -1)$，$y$ 轴正方向表示的单位向量为$\vec{n}=(0,1,0)$

故向量与y 轴正方向的夹角的余弦为$\cos\varphi=\dfrac{|2|}{\sqrt{1+4+1}\times\sqrt{1}}=\dfrac{2}{\sqrt{6}}$

故夹角为$\varphi=\arccos\dfrac{\sqrt{6}}{3}$

【考点延伸】《考试宝典》高等数学专题七 4.3——两个直线的夹角

5、【正解】b

【解析】两条直线的方向向量为$\vec{l_1}=(1,2,2)$，$\vec{l_2}=(1,1,2)$，可以看出两条直线不平行

直线L_1的参数方程为$\begin{cases}x=t-1\\y=2t+1\\z=2t\end{cases}$将此参数方程代入直线$L_2$的方程中

解得，$t=-5$，故两直线相交于点$(-6,\ -9,\ -10)$，故这两条直线相交

【考点延伸】《考试宝典》高等数学专题七 4.2——空间直线的对称式方程与参数型方程

三、计算题

1、【解析】原式$\xlongequal[\text{加到第一列（5分）}]{\text{第}2,3,\dots,n\text{列乘}1}\left(b+\sum_{i=1}^{n}a_i\right)\begin{vmatrix}1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n\\1 & a_2+b & a_3 & \cdots & a_n\\1 & a_2 & a_3+b & \cdots & a_n\\\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n+b\end{vmatrix}$

$\xlongequal[\text{到其它各行（4分）}]{\text{第1行乘}(-1)\text{加}}\left(b+\sum_{i=1}^{n}a_i\right)b^{n-1}$

【考点延伸】《考试宝典》知识点 4——矩阵的概念和基本运算

2、【解析】(1) 证明：由$2A^{-1}B=B-4I\xRightarrow{3\text{分}}2B=AB-4A\xRightarrow{2\text{分}}(A-2I)(B-4I)=8I$

得$(A-2I)^{-1}=\frac{1}{8}(B-4I)$

(2) 由 (1) 得，$A=2I+8(B-4I)^{-1}=\begin{bmatrix}0 & 2 & 0\\-1 & -1 & 0\\0 & 0 & -2\end{bmatrix}$ （2 分）

$$(B-4I)^{-1}=\begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ -\frac{1}{8} & -\frac{3}{8} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$ （2 分）

【考点延伸】《考试宝典》知识点 5——矩阵的逆

3、【解析】$|P|=-1$，$P^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ -4 & 1 & 1 \end{bmatrix}$（3 分）得 $A=PBP^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 6 & -1 & -1 \end{bmatrix}$（3 分）

$$A^5=PB^5P^{-1}=PBP^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 6 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$ （3 分）

【考点延伸】《考试宝典》知识点 5——矩阵的逆

4、【解析】由于 $r(A)=3$　$\therefore |A|=0$　$|A|=(3a+1)(1-a)^3$ 得 $a=1$ 或 $a=-\frac{1}{3}$（5 分）

若 $a=1$ 得 $r(A)=1$，若 $a=-\frac{1}{3}$，A 的左上角的 3 阶子式等于 $\frac{16}{27}\neq 0$（4 分）

所以 $a=-\frac{1}{3}$

【考点延伸】《考试宝典》知识点 9——矩阵的秩和矩阵等价

5、【解析】$\overrightarrow{P_1P_2}=(2,1,-1)$，平面 $x+y+z+1=0$ 的法向量 $\vec{n}_1=(1,1,1)$

所求平面的法向量 $\vec{n}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=(2,-3,1)$　（5 分）

所求平面方程 $2(x+1)+(-3)(y-0)+(z-2)=0$ 即 $2x-3y+z=0$（4 分）

【考点延伸】《考试宝典》高等数学专题七 3.2——平面的一般方程

6、【解析】直线 $\begin{cases} x+y-z-1=0 \\ 2x+z-3=0 \end{cases}$ 过点 $P_0(0,4,3)$，$\vec{a}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}=(1,-3,-2)$（5 分）

点到直线的距离 $d=\dfrac{\|\overrightarrow{P_0P}\times\vec{a}\|}{\|\vec{a}\|}=\dfrac{\|-4i-2j+k\|}{\sqrt{14}}=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$（4 分）

【考点延伸】《考试宝典》高等数学专题七易错考点 4-2——直线平面间的位置关系

四、证明题

1、【解析】“$\Longrightarrow$”：$A^2=(I-\alpha\alpha^T)(I-\alpha\alpha^T)=I-2\alpha\alpha^T+(\alpha\alpha^T)\alpha\alpha^T=I-\alpha\alpha^T$

$(I-\alpha\alpha^T)\alpha\alpha^T=0$

由于 α 是 n 维非零列向量，$\alpha\alpha^T$ 不是零矩阵

所以 $1-\alpha^T\alpha=0$，$\alpha^T\alpha=1$

“$\Longleftarrow$”：$A^2=I-2\alpha\alpha^T+(\alpha\alpha^T)\alpha\alpha^T=I-\alpha\alpha^T=A$

【考点延伸】《考试宝典》知识点 4——矩阵的概念和基本运算

2、【解析】由题意可得：$|A||A+B|=|A^2+AB|=|I+AB|=|B^2+AB|=|B||A+B|$

$|A|+|B|=0, |A|^2=1, |B|^2=1, |A|=-|B|\neq 0$，$|A||A+B|$

$=-|B||A+B|=|B||A+B|$

故 $|A+B|=0$

【考点延伸】《考试宝典》知识点 4——矩阵的概念和基本运算

2014-2015 学年第一学期期中考试 A 卷

一、计算行列式的值

（1）$|D|=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 6 \end{vmatrix}$

（2）已知 A 是 3 阶矩阵，B 是 4 阶矩阵，且 $|A|=12$，$|B|=-6$，求矩阵

$D=\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}A \\ -B & C \end{pmatrix}$ 的行列式 $|D|$ 的值.

二、

已知 $|\vec{a}+\vec{b}|=4$，$|\vec{a}-\vec{b}|=18$，求 $|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2$ 与 $\vec{a}\cdot\vec{b}$.

三、

（1）已知 3 阶矩阵 A 满足：$A^3+A+E=0$，证明 $A+2E$ 可逆，并求出 $(A+2E)^{-1}$.

（2） 3 阶矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$，求 $(A^*)^{-1}$.

四、已知直角坐标系中的 4 个点 $A(3,-1,0)$，$B(3,-1,0)$，$C\left(5,-\frac{5}{2},-1\right)$

问这四个点是否在同一平面上？若是，请求出此平面方程；若不是，请说明理由

五、设矩阵 $A=(a_{ij})_{3\times 3}$，满足条件 $a_{33}=-1$ 及 $a_{ij}=A_{ij}, i,j=1,2,3$.

其中 A_{ij} 是元素 a_{ij} 的代数余子式.

（1）求 $|A|$. （2）解线性方程组 $Ax=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

2014-2015 学年第一学期期中考试 A 卷参考答案

一、计算该行列式的值

【解析】(1) $|D|=\begin{vmatrix}2&1&1&1&1\\1&3&1&1&1\\1&1&4&1&1\\1&1&1&5&1\\1&1&1&1&6\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2&1&1&1&1\\-1&2&0&0&0\\-1&0&3&0&0\\-1&0&0&4&0\\-1&0&0&0&5\end{vmatrix}$

$$=\begin{vmatrix}2+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}&1&1&1&1\\0&2&0&0&0\\0&0&3&0&0\\0&0&0&4&0\\0&0&0&0&5\end{vmatrix}=\left(2+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right)\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5$$

$=394$

(2) 经过 12 次列变换后可化为分块下三角矩阵$\begin{pmatrix}\frac{1}{2}A&0\\C&-B\end{pmatrix}$

$$|D|=(-1)^{12}\left|\frac{1}{2}A\right||-B|=\left(\frac{1}{2}\right)^{3}|A|\cdot(-1)^{4}|B|=-9$$

【考点延伸】《考试宝典》知识点 2——行列式的展开

二、【解析】$\left|\vec{a}+\vec{b}\right|^{2}=|\vec{a}|^{2}+\left|\vec{b}\right|^{2}+2\vec{a}\cdot\vec{b}=4^{2}=16$

$\left|\vec{a}-\vec{b}\right|^{2}=|\vec{a}|^{2}+\left|\vec{b}\right|^{2}-2\vec{a}\cdot\vec{b}=18^{2}=324$

两式相加得：$2\left(|\vec{a}|^{2}+\left|\vec{b}\right|^{2}\right)=340$，第一个式子减第二个式子得：$4\vec{a}\cdot\vec{b}=-308$

$\therefore |\vec{a}|^{2}+\left|\vec{b}\right|^{2}=170,\ \vec{a}\cdot\vec{b}=-77$

【考点延伸】《考试宝典》高等数学专题七 1.2——向量的线性运算

三、【解析】(1) $(A+2E)(A^{2}-2A+5E)=A^{3}+A+10E=9E$

$(A+2E)^{-1}=\frac{1}{9}(A^{2}-2A+5E)$，故可逆，值为$\frac{1}{9}(A^{2}-2A+5E)$

(2) $(A^{*})^{-1}=|(A^{-1}|A|)|^{-1}=\frac{(A^{-1})^{-1}}{|A|}=\frac{A}{|A|}$

$|A|=2\times5\times1=10\qquad \therefore (A^{*})^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{1}{10}&0&0\\\frac{1}{5}&\frac{1}{5}&0\\\frac{3}{10}&\frac{2}{5}&\frac{1}{2}\end{bmatrix}$

【考点延伸】《考试宝典》知识点 5——矩阵的逆

四、【解析】$\overrightarrow{AB}=(-4,0,1)\ \overrightarrow{AC}=(0,3,1)\ \overrightarrow{AD}=\left(2,-\frac{3}{2},-1\right)$

$\left|\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right|=\begin{vmatrix}-4&0&1\\0&3&1\\2&-\frac{3}{2}&-1\end{vmatrix}=0\qquad \therefore \overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}$ 共面

$\therefore A,B,C,D$ 四点共面

该平面法向量(i,j,k)为$\begin{vmatrix} i & j & k \\ -4 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = (-3,4,-12) \parallel (3,-4,12)$

该平面为：$3x-4y+12z-13=0$

【考点延伸】《考试宝典》高等数学专题七 3.2——平面的一般方程

五、【解析】(1) 由题意知：$A^*=A^T$，故有$AA^T=AA^*=|A|AA^{-1}=|A|E$

$\therefore |A|^2=|A|^3$ ($|AA^T|=|A|^2, ||A|E|=|A|^3$)

$\therefore |A|=0$或1

又$\because |A|=a_{31}{}^2+a_{32}{}^2+a_{33}{}^2=1+a_{32}{}^2+a_{31}{}^2>0$ $\qquad \therefore |A|=1$

(2) $Ax=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \Longrightarrow A^TAx=A^T\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}x=A^T\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

而$|A|=1+a_{32}{}^2+a_{31}{}^2=1$，$a_{31}=a_{32}=0$

$A^T=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{21}&0\\a_{12}&a_{22}&0\\a_{13}&a_{23}&-1\end{bmatrix}$，故$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}x=\begin{bmatrix}0\\0\\-1\end{bmatrix}$ $\quad \therefore x=\begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix}$

【考点延伸】《考试宝典》知识点 5——矩阵的逆

2013-2014 学年第一学期期中考试 A 卷

一、计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2+3\cos x_1 & 2+3\cos x_2 & 2+3\cos x_3 \\ 4\cos x_1+5\cos^2 x_1 & 4\cos x_2+5\cos^2 x_2 & 4\cos x_3+5\cos^2 x_3 \end{vmatrix}$$

二、

设n阶矩阵A与B均非单位阵I，且$AB=A+B-I$，求行列式$|A-I|$和$|B-I|$的值。

三、

设A与B均为n阶正交矩阵（即$A^{-1}=A^T$，且为实矩阵），满足$|A|+|B|=0$，

求行列式$|A+B|$的值。

四、(10 分)

在线性方程组$Ax=b$中，$A=(a_{ij})_{n\times n}$，$b=(b_1,b_2,\dots,b_n)^T$，A_{ij}是a_{ij}的代数余子式。已知

$\sum\limits_{k=1}^{n}a_{nk}A_{nk}=-1$，$\sum\limits_{k=1}^{n}b_kA_{kn}=3$，求$x$的第$n$个分量$x_n$的值。

五、(15 分)

设$A=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix}$，试用两种方法求$A^{-1}$

六、(15 分)

设有直线L_1: $\frac{x+3}{2}=\frac{y+2}{3}=\frac{z-6}{-4}$和$L_2$: $\begin{cases} x-z=9 \\ y+4z=-17 \end{cases}$，试判断这两条直线的位置关系。若共面，求它们所确定的平面方程；若还相交，求交点。

七、(15分)

设n阶矩阵A满足$A^3=2I$，$B=A^2-2A+2I$，证明B可逆并求B^{-1}。

八、

设A是n阶矩阵，$r(A)=r$，证明：必存在n阶可逆矩阵B及秩为r的n阶矩阵C满足$C^2=C$，使$A=BC$。

2013-2014 学年第一学期期中考试 A 卷参考答案

一、【解析】$D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2+3\cos x_1 & 2+3\cos x_2 & 2+3\cos x_3 \\ 4\cos x_1+5\cos^2 x_1 & 4\cos x_2+5\cos^2 x_2 & 4\cos x_3+5\cos^2 x_3 \end{vmatrix}$

$$\xlongequal[r_3-\frac{4}{3}r_2]{r_2-2r_1} 15\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \cos x_1 & \cos x_2 & \cos x_3 \\ \cos^2 x_1 & \cos^2 x_2 & \cos^2 x_3 \end{vmatrix}$$

$=15(\cos x_2-\cos x_1)(\cos x_3-\cos x_1)(\cos x_3-\cos x_2)$（范德蒙德行列式）

【考点延伸】《考试宝典》知识点 3——几种特殊的行列式

二、【解析】由$AB=A+B-I$可得：$(A-I)(B-I)=0$

则$|A-I|=0$或$|B-I|=0$，若$|A-I|\neq 0$，则有$A-I$可逆

于是$B-I=0(A-I)^{-1}=0$，即$B=I$，矛盾。所以$|A-I|=0$

同理$|B-I|=0$

【考点延伸】《考试宝典》知识点 4——矩阵的概念和基本运算

三、【解析】$A^TA=A^{-1}A=I$, $|A|^2=|A||A^T|=|AA^T|=1$

由$|A|+|B|=0$得$|A||B|=-|A|^2=-1$

所以$|A+B|=|A(I+A^{-1}B)|=|A(B^{-1}+A^{-1})B|=|A||A^T+B^T||B|$

$=|A||B||A+B|=-|A+B|$

于是$|A+B|=0$

【考点延伸】《考试宝典》知识点 5——矩阵的逆

四、【解析】$|A|=\sum_{k=1}^{n}a_{nk}A_{nk}=-1$故$A$为可逆矩阵，$Ax=b$，$x=A^{-1}b$，$A^{-1}=\frac{A^*}{|A|}$

故$x=\frac{A^*b}{|A|}$，而向量的最后一项对应的是A^*b的最后一项，即$A_{1n}b_1+\cdots+A_{nn}b_n$

故$x_n=\frac{A_{1n}b_1+\cdots+A_{nn}b_n}{|A|}=\frac{\sum_{k=1}^{n}b_kA_{kn}}{|A|}=\frac{3}{-1}=-3$

【考点延伸】《考试宝典》知识点 17——非齐次线性方程组

五、【解析】

方法一：$[A\mid I]=\left(\begin{array}{ccc|ccc}2&1&1&1&0&0\\1&2&1&0&1&0\\1&1&2&0&0&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&1&\frac{1}{4}&\frac{1}{4}&\frac{1}{4}\\1&2&1&0&1&0\\1&1&2&0&0&1\end{array}\right)$

$$\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&1&\frac{1}{4}&\frac{1}{4}&\frac{1}{4}\\0&1&0&-\frac{1}{4}&\frac{3}{4}&-\frac{1}{4}\\0&0&1&-\frac{1}{4}&-\frac{1}{4}&\frac{3}{4}\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&\frac{3}{4}&-\frac{1}{4}&-\frac{1}{4}\\0&1&0&-\frac{1}{4}&\frac{3}{4}&-\frac{1}{4}\\0&0&1&-\frac{1}{4}&-\frac{1}{4}&\frac{3}{4}\end{array}\right)=[I\mid A^{-1}]$$

故$A^{-1}=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}3&-1&-1\\-1&3&-1\\-1&-1&3\end{bmatrix}$

方法二：设$\alpha=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$，$\alpha^T\alpha=3$

则$A^2=(I+\alpha\alpha^T)^2=I+2\alpha\alpha^T+\alpha\alpha^T\alpha\alpha^T=I+5\alpha\alpha^T=I+5(A-I)$

整理得：$A(A-5I)=-4I$

所以$A^{-1}=-\frac{1}{4}(A-5I)=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}3&-1&-1\\-1&3&-1\\-1&-1&3\end{bmatrix}$

【考点延伸】《考试宝典》知识点5——矩阵的逆

六、【解析】直线L_1的方向向量为$\vec{l_1}=(2,\ 3,\ -4)$，

直线L_2的方向向量为$\vec{l_2}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\1&0&-1\\0&1&4\end{vmatrix}=(1,\ -4,\ 1)$

易得，这两条直线不平行，故若这两天直线有交点则共面，无交点则异面

直线L_1的参数方程为$\begin{cases}x=2t-3\\y=3t-2\\z=-4t+6\end{cases}$ 将其代入直线L_2的方程中，解得$t=3$

故两直线共面，且交点为$(3,7,\ -6)$

这两条直线所在平面的法向量为$\vec{n}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\2&3&-4\\1&-4&1\end{vmatrix}=(-13,\ -6,\ -11)$

所以，平面的方程为$-13(x-3)-6(y-7)-11(z+6)=-13x-6y-11z+15=0$

即$13x+6y+11z-15=0$，交点为$(3,7,-6)$

【考点延伸】《考试宝典》高等数学专题七3.2——平面的一般方程

七、【解析】因为$A\frac{A^2}{2}=I$，所以$A^{-1}=\frac{A^2}{2}$

因为$A^3+8I=10I$，所以$(A+2I)^{-1}=\frac{A^2-2A+4I}{10}$

同理，$(A-I)^{-1}=A^2+A+I$

于是$B=A^2-2A+2I=A^2-2A+A^3=A(A+2I)(A-I)$

$$B^{-1}=(A-I)^{-1}(A+2I)^{-1}A^{-1}=\frac{1}{10}(A^2+3A+4I)$$

【考点延伸】《考试宝典》知识点5——矩阵的逆

八、【解析】由秩标准型有关定理，必存在n阶可逆矩阵P,Q，使得

$$A=P\begin{bmatrix}I_r & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}Q=PQQ^{-1}\begin{bmatrix}I_r & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}Q$$

令$B=PQ$，$C=Q^{-1}\begin{bmatrix}I_r & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}Q$，即为所求

【考点延伸】《考试宝典》知识点9——矩阵的逆和矩阵等价