线性代数模拟试卷

一． 单选题（共 5 题, 每题 3 分）

1. 已知 n 阶行列式 D 的值为 a(a≠ 0), 且 D 每行元素之和都是 b, 则 D 第一列元素的代数余子式之和$\sum_{i=1}^{n} A_{i1}$ =___D__.

（分析，将 D 每一列加到第一列，则第一列所有元素为 b, 提出 b，并按第一列打开得到 $b\sum_{i=1}^{n} A_{i1} = a$,a≠ 0, 则 b≠ 0,所以 D）

A. $\frac{b}{a}$　　B. 0　　C. a　　D. $\frac{a}{b}$

2. 设矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}$可逆, 则直线$l_1$:$\frac{x-a_1}{a_2} = \frac{y-b_1}{b_2} = \frac{z-c_1}{c_2}$和直线$l_2$:$\frac{x-a_2}{a_3} = \frac{y-b_2}{b_3} = \frac{z-c_2}{c_3}$的位置关系是____D_.

（取点（a_1,b_1,c_1）,(a_2,b_2,c_2)构成的向量，与两个方向向量做混合积，显然为矩阵 A 故异面 ）

A. 相交　　B. 重合　　C. 平行　　D. 异面

3. α 为 3 维列向量，$\alpha\alpha^T = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 4 & -6 \\ 3 & -6 & 9 \end{bmatrix}$，则$\alpha^T\alpha$为__B

（不难知道$\alpha\alpha^T$迹为$\alpha^T\alpha$，则为 14）

A. 0　　B. 14　　C. 16　　D. -16

4. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m \times n$ 矩阵, 若 $r(\boldsymbol{A}) = r < m < n$, 则下列说法正确的是___D__.

（由题意，A 降秩，则 D 对，由定义则存在至少一个 r 阶子式不为 0，A 错，任意的 r+1 阶子式为 0，B 错，C 只是行变换不行要加上列变换）

A. $\boldsymbol{A}$ 的所有 r 阶子式都不为 0.　　B. $\boldsymbol{A}$ 的所有 $r-1$ 阶子式都不为 0.

C. $\boldsymbol{A}$ 经初等行变换可以化为$\begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \end{bmatrix}$.　　D. $\boldsymbol{A}$ 不可能是满秩矩阵.

5. 设 $\boldsymbol{A}$,$\boldsymbol{B}$ 为 3 阶矩阵，且 $\det \boldsymbol{A} = 3, \det \boldsymbol{B} = 2, \det(\boldsymbol{A}^{-1} + \boldsymbol{B}) = 2$，则 $\det((6(\boldsymbol{A}^*)^{-1} + \boldsymbol{B}^*)^{-1})$ =___C

（用公式$(\boldsymbol{A}^*)^{-1} = \frac{\boldsymbol{A}}{\boldsymbol{detA}}$,和$B^* = det(B)B^{-1}$, 则$(6(\boldsymbol{A}^*)^{-1} + \boldsymbol{B}^*)^{-1}$=（2（A+$B^{-1}$）） $^{-1}$=$\frac{1}{2}$(A

（A-1（$\boldsymbol{6(A^*)^{-1} = 2A}$，$\boldsymbol{B^* = 2B^{-1}}$，则$\boldsymbol{(6(A^*)^{-1} + B^*)^{-1} = \frac{1}{2}}$（**A+B**$^{\boldsymbol{-1}}$） $^{\boldsymbol{-1}}$=$\boldsymbol{\frac{1}{2}(A(A^{-1} +}$ $\boldsymbol{B)B^{-1}}$） $^{\boldsymbol{-1}}$取行列式则有 C

A. $\frac{1}{6}$　　B. 12　　C. $\frac{1}{24}$　　D. 4

二．　填空题（共 5 题, 每题 3 分）

6. 设 3 个三维向量 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$,$\boldsymbol{c}$ 满足 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=4$, 则$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})\cdot(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a})=$___8__.

（打开不难发现等于 2 倍的 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$）

7. 行列式$\begin{vmatrix} 1 & x_1+1 & x_1^2+x_1 & \cdots & x_1^{n-1}+x_1^{n-2} \\ 1 & x_2+1 & x_2^2+x_2 & \cdots & x_2^{n-1}+x_2^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n+1 & x_n^2+x_n & \cdots & x_n^{n-1}+x_n^{n-2} \end{vmatrix}$的值为___$\prod\limits_{1\le j<i\le n} x_i-x_j$___.

（按列一直拆开，会发现其余都有重复列，值为 0，最终是范德蒙德带公式）

8. 已知三个平面π_1:$x_1+ax_2+x_3=2$,π_2:$x_1+x_2+2x_3=3$,π_3:$x_1+x_2-ax_3=0$ 过同一条直线, 则 $a=$_1____.

（三个面交于一条直线，则系数矩阵的行列式$\begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -a \end{vmatrix}=0$,且增广矩阵有解，解的 $a=1,or\ -2,-2$ 时候无解则为 1）

9. 已知矩阵$\boldsymbol{D}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$,$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$,$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{D}\boldsymbol{P}$, 多项式$f(x)=x^4-2x-1$, 则 $\det f(\boldsymbol{A})=$_____-44_.

（$f(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{P}^{-1}$（$\boldsymbol{D}^4-2\boldsymbol{D}-\boldsymbol{I}$）$\boldsymbol{P}$）

10. 当 $a=$__-2___时, 直线$\begin{cases} x+ay-z=0 \\ x-2y=a-1 \end{cases}$与直线$\frac{x+1}{2}=\frac{y+2}{1}=\frac{z+3}{0}$平行.

（第一个叉乘得到方向向量（2，1，2+a），平行则 $a=2$）

三．　解答题（共 6 题）

11（6 分），设 A 是三阶非零实矩阵, 其元素a_{ij}与 A 的代数余子式A_{ij}相等, 求 det(A)

由题意，显然A^T=A^*，两边左乘 A，则由 AA^*=det(A)I,可得 AA^T =det(A)I,两边再取行列式则有，$(\det(A))^2$=det(A),则 det(A)=0,or1.,又因为 A 非零矩阵，则 A 元素中至少一个不为 0，那么 AA^T 主对角线一行至少一个数字不是 0，则由 AA^T =det(A)I，可知 det(A)≠0，综上 det(A)=1

12（14 分）计算以下表达式的值.

(1) 已知$\alpha=(1,2,3)^T$,$\beta=(3,2,1)$,$\boldsymbol{P}=\alpha\beta$, 求$\boldsymbol{P}^{2019}$

利用结合律容易得到

$10^{2018}\alpha\beta$

(2) 计算行列式$D_n = \begin{vmatrix} x & a & \cdots & a \\ a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & \cdots & x \end{vmatrix}$

$D_n=\begin{vmatrix} x & a & \cdots & a \\ a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & \cdots & x \end{vmatrix}=[x+(n-1)a]\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & \cdots & x \end{vmatrix}=[x+(n-1)a]\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & x-a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x-a \end{vmatrix}$

$=[x+(n-1)a][(x-a)^{n-1}]$

13 (10 分) 求过原点, 且与直线$\begin{cases} x=t \\ y=-1+t \\ z=1+t \end{cases}$和直线 $x+1=\frac{y+2}{2}=\frac{z+3}{3}$都平行的平面的方程.

第一个方向向量（1, 1, 1）第二个（1, 2, 3）叉乘得到所求平面方向向量（1，-2, 1）则为

x-2y+z=0

14 (14 分) 设线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的增广矩阵为$\overline{\boldsymbol{A}}=\begin{bmatrix} \lambda & 1 & 1 & \lambda \\ 1 & \lambda & 1 & \lambda \\ 1 & 1 & \lambda & \lambda^2 \end{bmatrix}$, 试讨论此方程组解的个数.

$\bar{A} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & \lambda & | & \lambda^2 \\ 1 & \lambda & 1 & | & \lambda \\ \lambda & 1 & 1 & | & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & \lambda & | & \lambda^2 \\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda & | & \lambda-\lambda^2 \\ 0 & 1-\lambda & 1-\lambda^2 & | & 1-\lambda^3 \end{bmatrix} \to$

$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \lambda & | & \lambda^2 \\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda & | & \lambda(1-\lambda) \\ 0 & 0 & 2-\lambda-\lambda^2 & | & \lambda(1-\lambda)(2+\lambda) \end{bmatrix}$

① 若 $2-\lambda-\lambda^2=0$，即（$\lambda-1$）（$\lambda+2$）=0，$\lambda=1$ 或$\lambda=-2$.

λ=1 时，R（A）=1，R（$\bar{A}$）=1，有无数解

λ=-2 时，R（A）=2，R（$\bar{A}$）=2，R(A)=R（$\bar{A}$）无数解

② 若 $2-\lambda-\lambda^2 \neq 0$，即$\lambda \neq 1$ 或$\lambda \neq 2$ 时，R（A）=3，R（$\bar{A}$）=3，此时有唯一解

综上所述：$\lambda=1 or -2$ 有无数解，否则有唯一解

15 (12 分) 已知平面π_1:$x+y-z=0$,π_2:$x+2y+z=0$.

(1) 求过 $P(1,2,1)$且与π_1,π_2交线平行的直线 L 的对称式方程.

(2) 求过π_1，π_2交线且与$\frac{x+1}{0}=\frac{y-1}{1}=\frac{z+2}{-1}$平行的平面的方程.

平面π_1和π_2 的法向量分别为：n_1 (1,1, -1), n_2(1,2,1),所求直线方向向量 s 与平面 n_1 和 n_2的交线平行，故

$S=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}=$（3，-2,1）

过点 P(1,2,1) 的直线方程为: $\frac{x-1}{3}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z-1}{1}$

设所求平面π_3方程为:(x+y-z) +λ(x+2y+z) =0

则法向量: $\mathbf{n}_\lambda$(1+λ, $1+2\lambda$, $-1+\lambda$)

直线 L 的方向向量为 $\boldsymbol{s_1}$ =(0,1, -1),由$\mathbf{n}_\lambda \perp \boldsymbol{s_1}$得$\lambda=-2$ 所求的平面方程为: x+3y+3z=0

16(14 分)设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 满足 $2\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}-3\boldsymbol{I}_n$, 其中$\boldsymbol{I}_n$是 n 阶单位矩阵.

(1)证明:矩阵 A-2I 可逆.

(2)若 $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&2&0\\2&2&0\\0&0&4\end{bmatrix}$, 求矩阵 $\boldsymbol{A}$.

由条件移项左乘 A 有，再右乘A^{-1}则有，(A-2I)(BA^{-1})=3I，所以可逆

变形有 A=2B$(B-3I)^{-1}=\begin{vmatrix}5&6&0\\6&8&0\\0&0&8\end{vmatrix}$

四． 附加题（共 1 题, 不计入总分, 供有兴趣的同学可以尝试）

11. 证明以下结论.

(1)已知$\boldsymbol{I}_k$是 k 阶单位矩阵, $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵, $\boldsymbol{B}$ 是 $n\times m$ 矩阵, 矩阵$\boldsymbol{I}_m-\boldsymbol{AB}$ 可逆, 证明矩阵 $\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{BA}$ 可逆, 并求$(\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{BA})^{-1}$(用含 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 的式子表示).

(2)若 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}=\left(a_{ij}\right)_n$的秩为 1, 且$\sum_{i=1}^{n}a_{ii}=0$, 证明:矩阵$\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{A}$ 可逆

解

(1)考虑矩阵$\begin{bmatrix}\boldsymbol{I}_n&\boldsymbol{A}\\\boldsymbol{B}&\boldsymbol{I}_m\end{bmatrix}$. 由

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{I}_n&\boldsymbol{A}\\\boldsymbol{B}&\boldsymbol{I}_m\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}\boldsymbol{I}_n&\boldsymbol{A}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{I}_m-\boldsymbol{AB}\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}\boldsymbol{I}_n&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{I}_m-\boldsymbol{AB}\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{I}_n&\boldsymbol{A}\\\boldsymbol{B}&\boldsymbol{I}_m\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{BA}&\boldsymbol{A}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{I}_m\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{BA}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{I}_m\end{bmatrix}$$

将所用的初等变换写为矩阵形式可知

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{I}_n&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{I}_m-\boldsymbol{AB}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{I}_n&-\boldsymbol{A}(\boldsymbol{I}_m-\boldsymbol{AB})^{-1}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{I}_m\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{I}_n&\boldsymbol{O}\\-\boldsymbol{B}&\boldsymbol{I}_m\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{I}_n&\boldsymbol{A}\\\boldsymbol{B}&\boldsymbol{I}_m\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\boldsymbol{I}_n&-\boldsymbol{A}(\boldsymbol{I}_m-\boldsymbol{AB})^{-1}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{I}_m\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{I}_n&\boldsymbol{O}\\-\boldsymbol{B}&\boldsymbol{I}_m\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{I}_n&-\boldsymbol{A}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{I}_m\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{BA}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{I}_m\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{I}_n&\boldsymbol{O}\\-\boldsymbol{B}&\boldsymbol{I}_m\end{bmatrix}$$

故

$$\begin{bmatrix} I_n - BA & O \\ O & I_m \end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} I_n & -A(I_m - AB)^{-1} \\ O & I_m \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_n & O \\ -B & I_m \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_n & -A \\ O & I_m \end{bmatrix}\right)^{-1}\begin{bmatrix} I_n & O \\ O & I_m - AB \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_n & O \\ -B & I_m \end{bmatrix}^{-1}$$

因此$\begin{bmatrix} I_n - BA & O \\ O & I_m \end{bmatrix}$可逆, 所以$I_n - BA$ 可逆. 且

$$\begin{aligned}
&\begin{bmatrix} (I_n - BA)^{-1} & O \\ O & I_m \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} I_n & O \\ -B & I_m \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_n & O \\ O & (I_m - AB)^{-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_n & -A(I_m - AB)^{-1} \\ O & I_m \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_n & O \\ -B & I_m \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_n & -A \\ O & I_m \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} I_n - B(I_m - AB)^{-1}A & O \\ O & I_m \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

所以$(I_n - BA)^{-1} = I_n - B(I_m - AB)^{-1}A.$

(2) 作等价分解 $A = P\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0 \end{bmatrix}Q$, 其中 P,Q 可逆. 于是

$$A = P\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0 \end{bmatrix}Q = P\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}(1,0,\dots,0)Q = \alpha\beta^T$$

其中$\alpha = P\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$,$\beta = Q^T\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$. 又

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ii} = \beta^T\alpha \neq 0$$

于是 $1 - \alpha^T\beta \neq 0$, 由(1)知$I_n - A = I_n - \alpha\beta^T$可逆.