共形映射

复变函数复习资料

2024 级人工智能学组[1]

西安交通大学

[1]我们的网站：https://xjtu-ai.github.io/

目录

前言

PART

I

在面向大类工科的《复变函数》的教学计划中，通常不对共形映射这一章节进行深入学习或纳入考核范围，致使难以寻获系统性的辅助资料。与此同时，本章内容在理论体系和解题思路上与课程前五章存在显著差异，其学习难度相对较高。因此，我们专门编制了这份资料，为同学们提供一份复习参考。

本资料的主要参考教材是华中科技大学数学系编写的《复变函数与积分变换》（第五版）和对应的习题解析册。建议使用者在复习过程中，将本资料内容与教材进行对照学习，以免遗漏细碎知识点，也能起到巩固的作用。

本复习资料的内容涵盖了共形映射章节的核心要素，主要包括知识点梳理与对应例题解析和重点题型及其解法。

本章的考核重点和难点主要围绕区域间的映射关系展开。除了对基本概念的精确理解外，核心要求是熟练运用分式线性映射及其他基本函数映射来解决具体问题。复习时应着重关注以下两类典型问题：**一是求取给定区域经过特定映射后所得到的新区域**；**二是构造能够将某一给定区域映射为另一指定区域的共形映射**。

本资料比较重要的部分是Section 5. 主要问题的解题方法，如果时间紧张可以优先食用，涉及到不了解的知识点再针对性地学一下。此外，页边注释给出了一些建议供参考。

祝同学们复习和考试顺利。

共形映射

本章的知识点和例题，以及主要问题的解题方法

PART

II

1 共形映射的概念

1.1 导函数的几何概念

对于复平面上的光滑曲线 C，我们直接给出伸缩率和旋转角的定义[1]：

Definition 1.1. 对复平面上的光滑曲线 C，设 z_0 为 C 上一点，当点 z 沿 C 趋近于 z_0 时，若极限

$$\lim_{z \to z_0 (z \in C)} \frac{|f(z) - f(z_0)|}{|z - z_0|}$$

存在，则称此极限为曲线 C 经函数 $f(z)$ 映射后在 z_0 处的**伸缩率**。

Definition 1.2. 对复平面上的光滑曲线 C，设 z_0 为 C 上一点，当点 z 沿 C 趋近于 z_0 时，若极限

$$\lim_{z \to z_0 (z \in C)} \arg \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

存在，则称此极限为曲线 C 经函数 $f(z)$ 映射后在 z_0 处的**旋转角**。

为了统一，我们将第一个定义转化一下：

$$\lim_{z \to z_0 (z \in C)} \frac{|f(z) - f(z_0)|}{|z - z_0|} = \lim_{z \to z_0 (z \in C)} \left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \right|$$

根据模的运算法则，这是很显然的。那么伸缩率就是 z 沿曲线 C 趋向 z_0 时差商函数

$$\frac{\Delta f}{\Delta z} = \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

模的极限，而旋转角就是差商函数幅角的极限。

那么这两个玩意和导函数是什么关系呢？对区域 D 内的解析函数 $f(z)$，设有 $z_0 \in D$，由于函数解析，故处处可导，z_0 处导数存在，即

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta z}$$

存在，于是

$$|f'(z_0)| = \left| \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta z} \right| = \lim_{\Delta z \to 0} \left| \frac{\Delta f}{\Delta z} \right| = \lim_{z \to z_0 (z \in C)} \left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \right|$$

第二个等号是因为极限存在，进而模的极限等于极限的模；第三个等号是因为极限存在要求任意方式趋近极限都存在且相等。

[1] 这两个定义对于解题不太重要，不理解也没关系，我们有很简单的记忆方法。

根据我们上面的讨论，最右边的式子就是 z_0 处的伸缩率了。那么，我们神奇地发现，**导函数在某点处的模长就是那点处的伸缩率，而且和曲线没有关系！**

> **Definition 1.3.** 对经过 z_0 的任意曲线 C，经映射 $w=f(z)$ 后总在 z_0 处有相同的伸缩率，则称映射 f 具有**伸缩率不变性**。

同理，我们对旋转角也有类似的性质

$$\arg f'(z_0)=\lim_{z\to z_0(z\in C)}\arg\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$$

注意这里要求 $f'(z_0)\neq 0$，否则 $\arg f'(z_0)$ 就没有意义了。

> **Definition 1.4.** 对经过 z_0 的任意曲线 C，经过映射 $w=f(z)$ 后总在 z_0 处有相同的旋转角，则称映射 f 具有**旋转角不变性**。

实际上，若 $f(z)$ 在区域 D 内解析，区域 D 内有经过 z_0 的两条曲线 C_1 和 C_2，经过映射 $w=f(z)$ 后分别得到曲线 Γ_1 和 Γ_2，C_1 和 C_2 在 z_0 处的切线倾斜角为 θ_1 和 θ_2，Γ_1 和 Γ_2 在 w_0 处的切线倾斜角为 φ_1 和 φ_2，则根据旋转角不变性，有

$$\varphi_1-\theta_1=\varphi_2-\theta_2=\arg f'(z_0)$$

于是

$$\varphi_1-\varphi_2=\theta_1-\theta_2$$

也就是映射 f 保持了两条曲线交角的大小和方向不变，故也称旋转角不变性为**保角性**。

总结一下，对解析函数，z_0 处的伸缩率就是 $|f'(z_0)|$，这个性质称为伸缩率不变性；若导函数在 z_0 处不为 0，则 z_0 处的旋转角就是 $\arg f'(z_0)$，这个性质称为旋转角不变性或保角性，下面我们统一称为保角性。

> **Example 1.** 求函数 $w=f(z)=z^3$ 在 $z_1=i$ 和 $z_2=0$ 处的导数值，并说明其几何意义。

解 函数 $w=f(z)=z^3$ 是解析函数，其导函数为 $f'(z)=3z^2$。

1. $\mathbf{z_1=i}$ 处

导数值为:

$$f'(i)=3(i)^2=3(-1)=-3$$

几何意义分析: 伸缩率为 $|f'(i)|=|-3|=3$。这意味着经过 $f(z)$ 映射后, 在 $z_1=i$ 处的微小线段长度被放大为原来的 3 倍。函数在该点是保角的。旋转角为 $\arg f'(i)=\arg(-3)=\pi$。这意味着在 $z_1=i$ 处的微小曲线被逆时针旋转了 π 弧度。

2. $\mathbf{z_2=0}$ 处

导数值为:

$$f'(0)=3(0)^2=0$$

几何意义分析：伸缩率为 $|f'(0)|=|0|=0$。这意味着映射在 $z_2=0$ 处不保角，微小线段被压缩为零。旋转角 $\arg f'(0)$ 是**未定义**的。因为 $f'(0)=0$，函数在该点不保角，旋转角失去明确的意义。

1.2 共形映射的概念

讨论了伸缩率不变性和保角性，我们下面给出两类保角映射的定义[2]：

[2] 这里我们只关心第一类保角映射，第二类保角映射的概念了解即可

Definition 1.5. 定义了伸缩率不变性和保角性对于定义在区域 D 内的映射 $w = f(z)$，若它在 D 内任意一点具有保角性和伸缩率不变性，则称 $w = f(z)$ 是**第一类保角映射**；若它在 D 内任意一点保持曲线的交角的大小不变但方向相反和伸缩率不变，则称 $w = f(z)$ 是**第二类保角映射**。

我们在上一小节中讨论过，对于解析函数，如果导数不为 0，则伸缩率不变性和保角性自动成立，再结合第一类保角映射的定义，我们有：

Theorem 1.1. 设函数 $f(z)$ 在区域 D 内解析，且 $f'(z) \neq 0$，则它所构成的映射是第一类保角映射。

Definition 1.6. 设 $w = f(z)$ 是区域 D 内的第一类保角映射。若当 $z_1 \neq z_2$ 时，有 $f(z_1) \neq f(z_2)$，则称 $f(z)$ 为**共形映射**。

这里实际上是说，共形映射是对第一类保角映射增加了单射，也就是双方单值[3]要求而得到的。

[3] 根据教材，共形映射的特点是双方单值，并同时在区域内每一点保持保角性和伸缩率不变性。在数学上，双方单值等同于双射（即单射且满射）。然而，在讨论共形映射 $f : D \to W$ 时，我们通常将映射 $f(D)$ 得到的区域 D' 定义为值域（同时也是共域），即 $W = D'$。因此，满射性（覆盖整个共域）在这个语境下是自动成立的。我们只需要函数满足单射（一对一）的条件，即可确保它是双射，从而实现了教材中双方单值的要求。

Example 2. 考察函数 $w = e^z$ 构成的映射。

解 由于 $w = e^z$ 在复平面上解析且 $(e^z)' = e^z \neq 0$，因此它在任何区域内均构成第一类保角映射。但它不一定构成共形映射。

例如：在区域 $0 < \operatorname{Im} z < 4\pi$ 内，取 $z_1 = \frac{\pi}{2}i$，$z_2 = (2\pi + \frac{\pi}{2})i$。

$$
\begin{aligned}
e^{z_1} &= e^{\frac{\pi}{2}i} = i \\
e^{z_2} &= e^{(2\pi+\frac{\pi}{2})i} = e^{2\pi i} \cdot e^{\frac{\pi}{2}i} = 1 \cdot i = i
\end{aligned}
$$

因 $z_1 \neq z_2$，却有 $e^{z_1} = e^{z_2} = i$，故 $w = e^z$ 不构成共形映射 (不满足单射性)。

而在区域 $0 < \operatorname{Im} z < 2\pi$ 内，$w = e^z$ 是共形映射 (在此区域内 e^z 是单射)。

2 共形映射的基本问题

这一节涉及的都是很理论的问题，对我们解题实际上用处不大，可以略作了解或酌情跳过。

2.1 共形映射的基本问题

对于共形映射，我们主要研究两个方面的问题：

问题一 对于给定的区域 D 和定义在 D 上的解析函数 $w = f(z)$，求像集 $G = f(D)$，并讨论 $f(z)$ 是否将 D 共形地映射为 G。

问题二 给定两个区域 D 和 G，求一解析函数 $w = f(z)$，使得 $f(z)$ 将 D 共形地映射为 G。

其中问题二被称为共形映射的**基本问题**。对于问题二，我们只需考虑能否把一般的区域 D 变为单位圆内部即可，因为如果能存在函数 $f(z)$ 和 $g(z)$ 分别将 D 和 G 变为单位圆内部，只需要考虑 $f(z)$ 与 $g^{-1}(z)$ 的复合 $f(g^{-1}(z))$ 即可。见教材图 6.4。

2.2 三个定理

这一小节中我们会给出关于问题一的两个定理和关于问题二的黎曼存在唯一性定理，其中边界对应原理是比较有用的。

Theorem 2.1 (保域性定理). 设函数 $f(z)$ 在区域 D 内解析，且不恒为常数，则像集合 $G = f(D)$ 是区域。

Theorem 2.2 (边界对应原理). 设区域 D 的边界为简单闭曲线 C，函数 $w = f(z)$ 在 $\overline{D} = D \cup C$ 上解析，且将 C 双方单值地映射成简单闭曲线 Γ。当 z 沿 C 的正向绕行时，相应的 w 的绕行方向定为 Γ 的正向，并令 G 是以 Γ 为边界的区域，则 $w = f(z)$ 将 D 共形映射成 G。

这个定理的价值在于极大地简化了求像集 G 的步骤。它指出，我们无需考虑区域 D 内部的所有点，只需要两步：

1. 求出区域 D 的边界 C 经过映射 $f(z)$ 得到的新边界 Γ；
2. 则以 Γ 为边界的区域 G 即为所求的像集 $f(D)$。

需要注意的是这里 G 不一定是 Γ 内部的区域，如何判断是内部还是外部呢？只需要在 C 上按逆时针方向选取三个点，并求出对应的三个像点，如果三个像点也是逆时针排列的，则像区域为 Γ 的内部，反之为外部。

当然也有更简单的方法，只需要在区域内部取一个点 z_0 求出其像点 w_0，由于 w_0 肯定是在像区域内部的，所以包含 w_0 的那部分就是我们要找的像区域了！

接下来我们讨论问题二。根据上面的讨论，我们已经把问题转化成了：如何找到将一般区域映射为单位圆内部的共形映射。

这样的共形映射一定存在吗？是不一定的，至少扩充复平面和扩充复平面除去任意一点都不能共形地映射为单位圆内部[4]。

这样的共形映射是唯一的吗？是不一定的，考虑将单位圆内部映为单位圆内部的共形映射 $w = ze^{i\theta}$，对于任意 θ，该映射都满足条件，存在无穷多个，不唯一。

黎曼存在唯一性定理给出了两个区域间存在唯一共形映射的条件，也称为共形映射基本定理：

Theorem 2.3 (黎曼存在唯一性定理). 设区域 D 与 G 是任意给定的两个单连通区域，它们各自的边界都至少包含两点，则一定存在解析函数 $w = f(z)$ 把 D 共形地映射为 G。如果在 D 和 G 内再分别任意指定一点 z_0 和 w_0，并任给一实数 θ_0 $(-\pi < \theta_0 \le \pi)$，要求函数 $w = f(z)$ 满足 $f(z_0) = w_0$ 且 $\arg f'(z_0) = \theta_0$，那么映射 $w = f(z)$ 是唯一的。

强大的黎曼存在唯一性定理保证对于本章接下来要讨论的区域我们要找的共形映射总是存在的，如果再给出 $f(z_0) = w_0$ 和 $\arg f'(z_0) = \theta_0$ 两个条件，要找的共形映射就被唯一确定了。因此，我们看到很多题目都会给出这两个条件，对分式线性映射，我们的一般方法是先根据 $f(z_0) = w_0$ 找到带一个未知参数的 $f(z)$，然后根据 $\arg f'(z_0) = \theta_0$ 求出未知参数，得到题目指定的共形映射。

好，到这里，本章所有枯燥的理论知识都结束了，后面两节都对实践或者说做题帮助很大，务必熟练掌握。

[4] 对扩充复平面，假设存在这样的 $f(z)$，则其一定在整个复平面上解析，又 f 将扩充复平面映射为单位圆内部，有 $|f(z)| < 1$，即 $f(z)$ 有界，根据刘维尔定理（全平面解析的有界函数是常函数），$f(z)$ 为常函数，显然是矛盾的，故不存在这样的 $f(z)$。对于扩充复平面除去一个点，也有类似的证明方法，读者可以自行尝试，或见教材 *p123*。

3 分式线性映射

本节将介绍分式线性映射的若干性质和由此引出的做题方法。

3.1 分式线性映射

在讨论分式线性映射之前，我们先讨论四种简单的映射。

1. 平移映射 $w = z + c$

   就像向量加减法一样，将 z 沿 c 方向平移。

2. 旋转映射 $w = z\mathrm{e}^{i\theta}$

   将点 z 绕原点旋转角度 θ，复数乘法的几何意义。

3. 相似映射 $w = rz \quad (r > 0)$

   这里 r 是正实数，将 z 的模长变为 r 倍，幅角不变，复数乘法的几何意义。

4. 反演映射 $w = \dfrac{1}{z}$

   如果令 $z = r\mathrm{e}^{i\theta}$，则有 $w = \dfrac{1}{r}\mathrm{e}^{-i\theta}$，所以该映射实际上是将模长变为原来的倒数，幅角变为原来的相反数。

可以证明，这四种映射在扩充复平面（即加上无穷远点的复平面）上都是共形映射[5]。下面我们给出分式线性映射的定义：

[5] 具体证明见教材 *p127*

Definition 3.1. 由分式线性函数
$$w = \frac{az+b}{cz+d}$$
构成的映射，称为分式线性映射。这里规定 $ad - bc \neq 0$ 且 $c \neq 0$，因为 $ad - bc \neq 0$ 或 $c \neq 0$ 时函数退化为常函数或线性函数，讨论意义不大。

可以证明分式线性映射的逆映射也是分式线性映射。

考虑到
$$w = \frac{az+b}{cz+d} = \frac{a}{c} + \frac{b - \frac{ad}{c}}{cz+d} = \frac{a}{c} + (\frac{b}{c} - \frac{ad}{c^2})\frac{1}{z + \frac{d}{c}}$$

所以分式线性映射实际上可以分解为若干线性映射和反演映射的复合，由于线性映射和反演映射都是共形映射，所以有

Theorem 3.1. 分式线性映射在扩充复平面上是共形映射。

这个定理也没什么用，意思是下次题目让你找共形映射的时候你可以使用分式线性映射。

3.2 对应点公式

介绍完定义，我们跳过一些不是那么有用的定理，直接来看本章做题的关键。考虑到分式线性映射是个比值式，上下同除 c 后只有三个参数了，所以只需要三个方程就可以唯一确定一个分式线性映射：

Theorem 3.2. 在 z 平面上任给三个不同的点 z_1, z_2, z_3，在 w 平面上也任给三个不同的点 w_1, w_2, w_3，则存在唯一的的分式线性映射，把 z_1, z_2, z_3 分别依次地映射为 w_1, w_2, w_3。

也就是下面的方程组就可以将对应的分式线性映射唯一确定

$$\begin{cases} w_1 = \dfrac{az_1+b}{cz_1+d} \\ w_2 = \dfrac{az_2+b}{cz_2+d} \\ w_3 = \dfrac{az_3+b}{cz_3+d} \end{cases}$$

略去计算过程，我们直接给出最终的化简结果，也称为**对应点公式**：

$$\frac{w-w_1}{w-w_2} : \frac{w_3-w_1}{w_3-w_2} = \frac{z-z_1}{z-z_2} : \frac{z_3-z_1}{z_3-z_2}$$

对应点公式非常强大，你只需要给出三组对应点，就可以直接代入求出需要的映射。上面这种形式较为对称，很方便记忆，但也可以换成另一种形式

$$\frac{w-w_1}{w-w_2} = k\frac{z-z_1}{z-z_2}$$

这样只需要有两个点就可以了，参数 k 可以利用题目的其他条件求出来。

需要注意的是，如果某点为 ∞（$w_k = \infty$ 或 $z_k = \infty$），则交比公式中所有涉及该点的差项（例如 $w - w_k$ 和 $z_j - z_k$ 均替换为 1。假设对应点中有 $w_2 = \infty$，代入公式就会是这样：

$$\frac{w-w_1}{1} : \frac{w_3-w_1}{1} = \frac{z-z_1}{z-z_2} : \frac{z_3-z_1}{z_3-z_2}$$

原理也很好理解，简单的讲，含 ∞ 的项总是出现在同一分式上下，作比自然是 1 了。

3.3 保圆性

接下来是本章第二重要的定理：

Theorem 3.3. 分式线性映射在扩充复平面上把圆变成圆。

证明从略，我们将这个性质称为分式线性映射的**保圆性**。

一般的圆是好理解的，但在这里我们还将直线视作半径无穷大的圆。由于半径有限的圆不可能经过无穷远点，所以如果区域边界上存在一点映射后为无穷远点，像区域的边界就一定是直线。现在不理解没关系，我们会在例题中逐渐掌握这一定理的。

有了上面这两个定理，就可以解决本章 80% 的问题了[6]，快来试一试吧！

[6] 并非。

Example 3. 已知区域 $D = \{z : |z| < 1, \operatorname{Im} z > 0\}$，求一个分式线性映射，将区域 D 映射为第一象限。

解 原区域是上半单位圆，边界是上半圆弧和从 -1 到 1 的直线段。先尝试一下，我们可

以考虑将直线段映为实正半轴，设映射将 -1，0，1 分别映为 0，1，∞，代入对应点公式

$$\frac{w-0}{w-1}=\frac{z+1}{z-0}:\frac{1+1}{1-0}$$

化简一下得到

$$w=\frac{-z-1}{z-1}$$

检验一下，由于 -1 和 1 也是在上半圆弧上的，映射后的上半圆弧也会经过 0 和 ∞，所以是射线[7]无疑了，只需要检验是不是虚正半轴就行了，可以将 i 代入，发现确实将上半圆弧映射成了虚正半轴，所以这就是我们要找的分式线性映射。

[7] 因为是不完整的圆弧，所以映射后是射线

你可能说这是运气好恰好选中了满足条件的映射，实际上这里对应点的选取是有讲究的，一方面，需要保证两段边界的交点中的一个映射为 ∞，因为如果不是交点的点被映射为 ∞，一定会导致某段边界被映射为圆弧，而像区域是第一象限，不能有圆弧边界。另一方面，需要保证另一个交点被映射为 0，前面我们通过指定一个交点被映为无穷远点，我们保证了映射后的边界都为射线，如果被映射为 0 的点不是交点，势必导致映射后射线的端点不在原点，这同样会使像区域不是第一象限。

说了一大堆，其实如果我们将无穷远点视作第一象限两段边界的另一个交点，上面的讨论就可以总结为一句话：指定对应点时至少要保证边界的交点仍然是交点。

所以在这道题里，符合上述必要条件的分式线性映射其实有两种通式[8]：

[8] 将 -1 和 1 与 0 和 ∞ 分别作为对应点代入对应点公式，将所有常数项归到一起作为新的常数即可得到这两种通式

$$w-0=k\frac{z+1}{z-1}$$

或者

$$w-0=k\frac{z-1}{z+1}$$

经过这两种映射得到的区域的边界都是以原点为端点的两条垂直射线，要使得映射后恰好为第一象限，可以像课本上那样，先随意选取一个 k，再通过旋转映射得到所求的第一象限。

观察细致的你一定发现了，不管怎么映射，最终边界在交点（非无穷远点）处的夹角都是直角，这是保角性决定的。

基于这个性质，我们给出一类常用的分式线性变换，可以在二角形区域[9]和角形域[10]之间变换。

[9] 以两段圆弧或一段圆弧一段线段为边界的区域

[10] 以两条射线为边界的区域

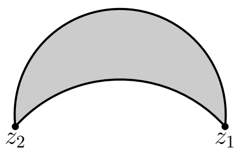

图 1. 二角形区域

如上图所示，如果你想将 z_1 和 z_2 分别映射到 w_1 和 w_2，则考虑映射

$$\frac{w-w_1}{w-w_2}=k\frac{z-z_1}{z-z_2}$$

此处 $k \neq 1$，否则会得到一个线性映射。

当然这个没什么鸟用，题目很少会让你在两个二角形区域间变来变去，有用的通常是将二角形区域变为角形域的变换，因为后面我们会学到通过幂函数映射将角形域转化为半圆域的方法，进而可以转化为上半平面和单位圆域。

我们通常将角形域的端点放在原点，即有 $w_1 = 0$ 和 $w_2 = \infty$，此时映射就是

$$w = k\frac{z - z_1}{z - z_2}$$

这里的 k 是未知参数，通常根据题目要求确定，如果要使得变换后的区域为 $0 < \arg z < \theta$ 的角形域，则只需在上方的圆弧上取一点，指定它实正半轴的对应点即可。

线性分式映射的保圆性对直线和圆都是成立的，所以不只适用于以两段圆弧作为边界的二角形区域，以一段圆弧和一段线段作为边界的同样适用，就像上面的例题。

当然这个公式不止适用于二角形区域，从形式中我们也可以看出，z_2 是映射后为 ∞ 的点，称为**极点**；z_1 是映射后为 0 的点，称为**零点**。只要知道了映射的极点和零点，就可以通过这个公式直接写出映射的形式。

3.4 保对称点性

这是一个比较重要的性质，它可以告诉我们题目条件中隐藏的对应点。

首先我们来定义对称点：

Definition 3.2. 设圆 C 的半径为 R，若从圆心 O 出发的射线上的两点 A 和 B，满足 $|OA|\,|OB| = R^2$，则称 A 与 B 关于圆 C 对称。规定圆心与无穷远点关于圆对称。

若将直线视作半径无穷大的圆，则结合一般的两点关于直线对称的定义，扩充复平面上任意两点关于圆的对称性都被良好地定义了。

接下来我们直接给出保对称点定理[11]：

[11] 证明请看教材 *p130*

Theorem 3.4. 设 z_1 和 z_2 关于广义圆 C 对称，分式线性映射 $w = f(z)$ 将 C 映射为 Γ，则 z_1 和 z_2 的像 w_1 和 w_2 关于 Γ 对称。

这个定理具有双重意义：其一，一旦题目给出了一对不在边界上的对应点，我们便可知晓它们的对称点也构成另一对映射对应点；其二，它能指导我们发现和构建更具普遍性的映射关系，例如：

Example 4. 求一分式线性映射将上半平面 $\operatorname{Im} z > 0$ 映射为单位圆内部 $|w| < 1$。

解 我们当然可以在实轴上指定三点，并在单位圆上指定三点作为它们的对应点，求出一个解，但是有时候题目会给出一些限制条件如 $\arg f'(z_0) = \theta_0$，这个时候你的解可能就不太管用了，当然可以待定实轴上三点来解决这个问题，但我们这里介绍另一种方法。

思考一下，能够将上半平面映射为单位圆内部的分式线性映射满足什么条件?

考虑保对称点性，映射为圆心的点和映射为无穷远点的点是关于实轴对称的，可以考虑设 $f(z_0) = 0$，就有 $f(\overline{z}_0) = \infty$，因为区域内的点才能映射到区域内，其中 $\operatorname{Im} z_0 > 0$。这样我们就可以利用对应点公式了，我们需求的映射就是

$$w = k\frac{z - z_0}{z - \overline{z}_0}$$

对于实轴上的 z，总有 $\overline{z-z_0}=z-\overline{z}_0$，进而二者模长相等，要使得实轴被映射为单位圆，应有

$$\forall z\in\mathbb{R},\quad |w|=\left|k\frac{z-z_0}{z-\overline{z}_0}\right|=|k|\left|\frac{z-z_0}{z-\overline{z}_0}\right|=|k|=1$$

所以

$$k=\mathrm{e}^{i\theta}$$

因此我们要找的一般形式映射就是

$$w=\mathrm{e}^{i\theta}\frac{z-z_0}{z-\overline{z}_0}\quad(\mathrm{Im}\,z_0>0)$$

这就是我们要找的能将上半平面映射为单位圆内部的线性分式映射的一般形式，应该记住。对于有特定要求的题目可以用这个公式来求，如果只是单纯的需要把上半平面映射为单位圆内部，随意地取一个

$$w=\frac{z-i}{z+i}$$

即可。

然后是另一类一般形式的映射：

Example 5. 求一线性分式映射，把单位圆内部 $|z|<1$ 映射为单位圆内部 $|w|<1$。

解 同样是考虑保对称点性，映射为圆心的点和映射为无穷远点的点是关于单位圆对称的，如果设 $f(z_0)=0$，则有[12]$f(\frac{1}{\overline{z}_0})=\infty$，代入对应点公式

$$w=k\frac{z-z_0}{z-\frac{1}{\overline{z}_0}}=(k\overline{z}_0)\frac{z-z_0}{\overline{z}_0z-1}=k'\frac{z-z_0}{\overline{z}_0z-1}$$

有兴趣的读者可以尝试通过 $\left(\frac{z-z_0}{\overline{z}_0z-1}\right)\overline{\left(\frac{z-z_0}{\overline{z}_0z-1}\right)}=1$ 来证明单位圆上的点 z 总会使 $\left|\frac{z-z_0}{\overline{z}_0z-1}\right|=1$，这里就不证明了，根据这个结论，要使得单位圆边界被映射为单位圆边界，应有

$$|w|=\left|k'\frac{z-z_0}{\overline{z}_0z-1}\right|=|k'|\left|\frac{z-z_0}{\overline{z}_0z-1}\right|=|k'|=1$$

于是

$$k'=\mathrm{e}^{i\theta}$$

综上所述

$$w=\mathrm{e}^{i\theta}\frac{z-z_0}{\overline{z}_0z-1}\quad(|z_0|<1)$$

为了与课本上的形式统一，我们将分母的负号包含进 $\mathrm{e}^{i\theta}$，即

$$w=\mathrm{e}^{i\theta}\frac{z-z_0}{1-\overline{z}_0z}\quad(|z_0|<1)$$

这就是我们要找的将单位圆内部映射为单位圆内部的分式线性映射的一般形式。

3.5 总结

到这里分式线性映射的内容就结束了，我们在这里汇总一下对做题有帮助的公式或映射，以及他们的具体特点。

[12] 令 $z_0=r\mathrm{e}^{i\theta}$，则 $\frac{1}{\overline{z}_0}=\frac{1}{r\mathrm{e}^{-i\theta}}=\frac{1}{r}\mathrm{e}^{i\theta}$，即保持幅角不变的同时将模长变为倒数，与 z 关于单位圆对称。

1. 旋转映射 $w = z\mathrm{e}^{i\theta}$

   作用就是将区域绕原点旋转。

2. 平移映射 $w = z + c$

   作用是将区域向 c 的方向平移 $|c|$ 长度。平移映射和旋转映射虽然简单，但也很常用，千万不要忘记哦。

3. 对应点公式 $\dfrac{w-w_1}{w-w_2} : \dfrac{w_3-w_1}{w_3-w_2} = \dfrac{z-z_1}{z-z_2} : \dfrac{z_3-z_1}{z_3-z_2}$

   指定三组对应点后求出对应的唯一分式线性映射。

4. 带一个参数的对应点公式 $\dfrac{w-w_1}{w-w_2} = k\dfrac{z-z_1}{z-z_2}$

   将二角形区域转化为二角形区域，或者在题目指定条件时求出对应的分式线性映射。

5. 已知极点和零点的对应点公式 $w = k\dfrac{z-z_1}{z-z_2}$

   将二角形区域转化为角形域，或者在已知极点和零点时求出对应的分式线性映射。

6. 将上半单位圆映射为第一象限的映射 $w = \dfrac{-z-1}{z-1}$

   将上半单位圆内部映射为第一象限。

7. 将上半平面映射为单位圆内部的一般映射 $w = \mathrm{e}^{i\theta}\dfrac{z-z_0}{z-\overline{z}_0} \quad (\mathrm{Im\,z_0} > 0)$

   求出满足条件的将上半平面映射为单位圆内部的分式线性映射。其逆映射可以将单位圆内部映射为上半平面。

8. 将 i 映射为圆心的将上半平面映射为单位圆内部的分式线性映射 $w = \dfrac{z-i}{z+i}$

   上面映射的特殊形式，只是为了方便，你也可以取别的 z_0。

9. 将单位圆内部映射为单位圆内部的一般映射 $w = \mathrm{e}^{i\theta}\dfrac{z-z_0}{1-\overline{z}_0 z} \quad (|z_0| < 1)$

   求出满足条件的将单位圆内部映射为单位圆内部的分式线性映射。

熟练掌握上述公式或映射对于做题帮助很大，但是分式线性映射还不足以解决我们碰到的全部问题，需要与下一节中介绍的初等函数映射联合使用。

4 初等函数映射

本章会介绍几种由初等函数构成的共形映射，以辅助分式线性映射。

4.1 幂函数

幂函数包括两部分，一部分是正整数幂函数，即形如

$$w = z^n \quad (n \in \mathbb{N}, \quad n \geq 2)$$

的函数，要保证其为共形映射，一是其在原点处的导数为 0，所以作用的区域不能包含原点；二是要保证其在作用的区域上是单射。

因为这些特点，我们一般将其作用在形如

$$\{0 < \arg z < \theta_0\} \quad (0 < \theta_0 \leq \frac{2\pi}{n})$$

的角形域上，这样的区域一方面保证了映射是共形映射；另一方面，这样的映射使得像区域能简单确定为

$$\{0<\arg z<n\theta_0\}$$

当然也可以作用在扇形域上，对形式为

$$\{0<|z|<r,\quad 0<\arg z<\theta_0\}\quad (r>0,\quad 0<\theta_0\leq\frac{2\pi}{n})$$

的扇形域，不同于角形域的是，模长要相应地扩大，映射后的像区域应为

$$\{0<|z|<r^n,\quad 0<\arg z<n\theta_0\}$$

幂函数的另一部分是根式幂函数，即形如 $w=\sqrt[n]{z}\quad(n\in\mathbb{N},\quad n\geq 2)$ 的函数，其作用是缩小模长和幅角，和 n 取值相同的正整数幂函数互为逆映射。

4.2 指数函数

这里特指以 e 为底的指数函数[13] $w=\mathrm{e}^z$。

解析函数 $w=\mathrm{e}^z$ 在全平面上不为 0，所以构成第一类保角映射。但要成为共形映射，还要满足单射的条件，由于它以 $2\pi i$ 为周期，所以我们一般将其作用于形如

$$\{0<\operatorname{Im}z<h\}\quad (h\leq 2\pi)$$

的带形域，当然平移之后的区域也是可以的，但上述形式的区域的像区域更容易确定，性质也更好，即

$$\{0<\arg z<h\}$$

这样的角形域。

限定虚部的范围实际上是限制映射后幅角的范围，当然也可以限定实部的范围，就能限定模长的范围，如

$$\{a<\operatorname{Re}z<b,\quad 0<\operatorname{Im}z<h\}$$

其中 a 和 b 可以取 $\pm\infty$，映射后的像区域就是

$$\left\{\mathrm{e}^a<|z|<\mathrm{e}^b,\quad 0<\arg z<h\right\}$$

这样扇形区域。

作为指数函数的逆映射，对数函数 $w=\ln z$ 的作用就是将角形域变为带形域。

值得注意的是，本教材规定的主幅角 $\arg z$ 范围是 $(-\pi,\pi]$，对数函数定义为 $\ln z=\ln|z|+i\arg z$，如此 $w=\ln z$ 应将角形域 $\{0<\arg z<h\}$ 映射为 $\{-\pi<\operatorname{Im}z<h-\pi\}$，但教材 p138 认为是 $\{0<\operatorname{Im}z<h\}$。

4.3 总结

也为这一节写个总结，总结本节学习的几种映射和作用特点。

1. 正整数幂函数 $\quad w=z^n\quad(n\in\mathbb{N},\quad n\geq 2)$

   扩大角形域或扇形域。

[13] 大概没有人会考虑其他底的指数函数吧。

2. 根式幂函数　$w = \sqrt[n]{z} \quad (n \in \mathbb{N}, \quad n \geq 2)$

   缩小角形域或扇形域。

3. 指数函数　$w = \mathrm{e}^z$

   将带形域转化为角形域。

4. 对数函数　$w = \ln z$

   将角形域转化为带形域。

5　主要问题的解题方法

到这里，我们已经学完了本章的所有内容，接下来我会讲述几类主要题型的解题方法。先看一道单纯的求指定分式线性映射的题目。

> **Example 6.** 求出将圆 $|z-4i|<2$ 映成半平面 $v>u$ 的分式线性映射，并将圆心映到 -4，而圆周上的点 $2i$ 映到 $w=0$。

解　由于映射将圆心 $4i$ 映射到了 -4，根据保对称点性，圆心关于圆的对称点 ∞ 会被映射到 -4 关于映射后的圆的对称点，也就是关于直线 $y=x$ 的对称点 $-4i$，这样我们就有三组对应点了：

z	$4i$	∞	2i
w	-4	$-4i$	0

将它们代入对应点公式，记得含 ∞ 的项都要写为 1。

$$\frac{w+4}{w+4i} : \frac{0+4}{0+4i} = \frac{z-4i}{1} : \frac{2i-4i}{1}$$

即

$$w = \frac{-4iz-8}{z-2-4i}$$

> **Example 7.** 求分式线性映射 $w=f(z)$, 它把 $|z|<1$ 映射为 $|w|<1$, 且使得 $f(\frac{1}{2})=0$, $f'(\frac{1}{2})>0$。

解　通式

$$w = \mathrm{e}^{i\theta}\frac{z-z_0}{1-\overline{z}_0 z} \quad (|z_0|<1)$$

就是为了解决这种问题诞生的，这里的 z_0 就是圆心了，代入 $z_0=\dfrac{1}{2}$ 得

$$w = f(z) = \mathrm{e}^{i\theta}\frac{z-\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}z}$$

前面的旋转因子是常数，所以

$$f'(z) = \mathrm{e}^{i\theta}\frac{1-\frac{1}{2}z+\frac{1}{2}(z-\frac{1}{2})}{(1-\frac{1}{2}z)^2} = \mathrm{e}^{i\theta}\frac{\frac{3}{4}}{(1-\frac{1}{2}z)^2}$$

要让 $f'(\frac{1}{2})=\frac{4}{3}\mathrm{e}^{i\theta}>0$，只需取 $\theta=0$，则

$$w=\frac{z-\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}z}=\frac{2z-1}{-z+2}$$

再看一道不一样点的。

> **Example 8.** 求分式线性映射 $w=f(z)$，它把 $|z-2|<1$ 映射为 $|w-2i|<2$，且使得 $f(2)=i$，$\arg f'(2)=0$。

解 这题不是单位圆映射到单位圆，所以不能用通式，但保对称点性还是成立的，$f(2)=i$，由于 2 关于圆周的对称点是 ∞，所以 ∞ 会被映射为 i 关于像边界的对称点，即 $-2i$，代入对应点公式

$$\frac{w-i}{w+2i}:\frac{w_3-i}{w_3+2i}=\frac{z-2}{1}:\frac{z_3-2}{1}$$

即

$$\frac{w-i}{w+2i}=k(z-2)$$

整理一下得到

$$w=f(z)=\frac{-2kiz+(4k-1)i}{kz-2k-1}$$

求导

$$f'(z)=\frac{3ki}{(kz-2k-1)^2}$$

要使 $\arg f'(2)=0$，可取 $k=r\mathrm{e}^{\frac{3\pi i}{2}}=-ri\quad(r>0)$，则有

$$w=\frac{-2rz+4r-i}{-riz+2ri-1}$$

这个时候就面临一个问题，r 没有确定，但根据黎曼存在唯一定理，这样的映射是唯一的，怎么回事呢？实际上，你可以任取原边界上一点代入，比如这里取 $z=1$，则

$$f(1)=\frac{2r-i}{-1+ri}$$

根据边界对应原理，其应该在像边界上，即满足 $|w-2i|=2$，即有

$$\left|\frac{2r-i}{-1+ri}-2i\right|=\left|\frac{4r+i}{ri-1}\right|=\frac{\sqrt{16r^2+1}}{\sqrt{r^2+1}}=2$$

解得 $r=\frac{1}{2}$，所以

$$w=\frac{2z-4+2i}{iz+2-2i}$$

总结一下，这类题目的一般套路就是：

1. 利用题目中已有的对应点和通过保对称点性得到的对应点写出带参数的映射；
2. 利用题目条件求出参数，回代得到所求映射。

所以对于这类题型，最重要的知识点是：对应点公式、保对称点性、常见区域间的通式映射，务必掌握。

接下来我们看一些计算量少一些的题目。

> **Example 9.** 求把角形域 $\left\{z:-\dfrac{\pi}{6}<\arg z<\dfrac{\pi}{6}\right\}$ 映射为单位圆域的共形映射。

解 这种题目的解题路径基本是固定的，你只需要了解各种映射的特点即可很简单的解题。

我们首先通过旋转映射使得角形域的一个边界和实正半轴重合

$$w_1 = z\mathrm{e}^{\frac{\pi i}{6}}$$

映射后的区域是这样的：

$$\left\{z:0<\arg z<\frac{\pi}{3}\right\}$$

然后使用正整数幂映射将区域变为上半平面

$$w_2 = w_1^3$$

映射后的区域是这样的角形域：

$$\{z:0<\arg z<\pi\}$$

也就是上半平面，而上半平面转化为单位圆域的映射是我们熟知的

$$w_3 = \frac{w_2 - i}{w_2 + i}$$

最后把所有映射复合起来得到答案：

$$w = \frac{(z\mathrm{e}^{\frac{\pi i}{6}})^3 - i}{(z\mathrm{e}^{\frac{\pi i}{6}})^3 + i} = \frac{z^3 - 1}{z^3 + 1}$$

很轻松吧。再来看一题。

> **Example 10.** 求把第一象限内的 $\dfrac{1}{4}$ 圆域 $\left\{z:|z|<1,\quad 0<\arg z<\dfrac{\pi}{2}\right\}$ 映射为单位圆域的共形映射。

解 这个题目还是很有迷惑性的，很可能上来就是一个正整数幂映射

$$w = z^4$$

就以为自己解决了问题。要是能被你一个映射就解决，那出题人水平也够低的。实际上，经过这样的映射得到的区域是：

$$\{z:|z|<1,\quad 0<\arg z<2\pi\}$$

也就是扣去了原点和实正半轴的单位圆域，并不是我们想要的。实际上，还是应该按照上面那题的路径，首先通过正整数幂函数映射为上半单位圆

$$w_1 = z^2$$

然后通过我们熟知的那个映射将上半单位圆映射为第一象限

$$w_2 = \frac{-w_1 - 1}{w_1 - 1}$$

然后再通过同样的正整数幂函数映射为上半平面

$$w_3 = w_2^2$$

最后将上半平面映射为单位圆域

$$w_4 = \frac{w_3 - i}{w_3 + i}$$

最后将所有映射复合为一个映射

$$w = \frac{\left(\dfrac{-z^2-1}{z^2-1}\right)^2 - i}{\left(\dfrac{-z^2-1}{z^2-1}\right)^2 + i} = \frac{(z^2+1)^2 - i(z^2-1)^2}{(z^2+1)^2 + i(z^2-1)^2}$$

也没有那么难对吧，因为其实你每一步能选择的映射是相当有限的。再看一道稍难一点的题目。

Example 11. 求 $\{z : |z| < 2, \quad |z-1| > 1\}$ 映射为单位圆域的共形映射。

解 这道题的难点在于原区域的形式不太常规，可能会有人想找到一个分式线性映射一步将其映射为单位圆域，但这是不可能的，两条边界注定会被映射为两条不同形式的边界，你不能指望它们映射完再神奇地拼接成一个单位圆。

先分析一下，由于原区域不是我们谈论过的适合初等函数作用的区域，所以第一步绝对是分式线性映射。那么是什么样的分式线性映射呢?

首先，边界上会有极点[14]，因为如果没有极点，两条边界都被映射为圆，本质上对原区域没什么改变。

[14] 被映射为 ∞ 的点。

那么极点应该在哪呢？如果只在其中一条边界上，最终映射的结果会是一个圆和它的一条切线，没有很好的处理办法；但是如果是两个边界的交点 $z = 2$，就能将两条边界都映射为直线，而且因为线性分式映射是单射，所以一定是互相平行的[15]，于是区域被映射为带形域，可以用指数函数进一步转化。

[15] 不平行会导致交点处的原像有两个。

好，上述分析过程放在脑子里就行了，纸面上我们直接写出分式线性映射的形式：

$$w = \frac{az + b}{z - 2}$$

这里使用了已知零点和极点的分式线性映射形式。a 与 b 取值没什么讲究，因为你总可以通过旋转、平移和相似映射将其转化为你想要的带形域，你可以先随意取一个，在草稿上算一算，再在答题卡上写出最终的形式。这里给一个直接将原区域映射为

$$\{z : 0 < \operatorname{Im} z < \pi\}$$

的映射：

$$w_1 = \frac{2\pi i z}{z - 2}$$

接下来就是套路化的操作了，通过指数函数将带形域映射为角形域

$$w_2 = \mathrm{e}^{w_1}$$

幅角的范围是 $0 < \operatorname{Im} z < \pi$，故该角形域也就是上半平面，于是用熟知的映射

$$w_3 = \frac{w_2 - i}{w_2 + i}$$

就可以将其映射为单位圆内部。最后将所有映射复合即可[16]

$$w = \frac{\exp\left\{\dfrac{2\pi i z}{z-2}\right\} - i}{\exp\left\{\dfrac{2\pi i z}{z-2}\right\} + i}$$

[16] 为了排版美观，这里的指数函数被替换为 exp() 函数。

接下来是个较难的问题。

Example 12. 设区域 $D = \left\{ z : \operatorname{Im} z > 0, \quad \left| z - \frac{1}{2} \right| \geq \frac{1}{2}, \quad \left| z + \frac{1}{2} \right| \geq \frac{1}{2} \right\}$，求一共形映射，将 D 映射为上半平面。

解 本题的第一个难点是区域比较难想象，可以画个图，先将所有边界都画出来，再根据不等关系判断具体是哪一部分。

和上一题类似，第一步应该是分式线性映射，面对这样复杂的圆和直线边界的组合，只有分式线性映射能将其转化为我们能处理的区域。极点同样应该在边界上[17]，否则还会出现圆弧边界，这不是我们所期望的，最合适的点是原点。所以映射的形式应当是

[17] 这里的边界应该理解为完整的圆或直线，即极点在补全后的边界上。

$$w_1 = \frac{az + b}{z}$$

然后是同样的操作，先随意取 a 和 b，再在草稿纸上找到心仪的映射，这里取

$$w_1 = \frac{\pi i}{2} \cdot \frac{z - 1}{z}$$

映射后的区域是

$$\{z : \operatorname{Re} z < 0, \quad 0 < \operatorname{Im} z < \pi\}$$

再通过指数函数映射为上半单位圆域

$$w_2 = \mathrm{e}^{w_1}$$

用熟知的映射将上半单位圆域映射为第一象限

$$w_3 = \frac{-w_2 - 1}{w_2 - 1}$$

最后用正整数幂函数扩大角形域范围，映射为上半平面

$$w_4 = w_3^2$$

复合起来

$$w=\left(\frac{-\exp\left\{\frac{\pi i}{2}\cdot\frac{z-1}{z}\right\}-1}{\exp\left\{\frac{\pi i}{2}\cdot\frac{z-1}{z}\right\}-1}\right)^2$$

最后给一个比较有意思的题目。

> **Example 13.** 求一共形映射，将单位圆的外部区域 $|z|>1$ 映射为全平面去掉 $\{-1\leq \operatorname{Re} z\leq 1,\quad \operatorname{Im} z=0\}$ 得到的区域

解 可以通过一个反演映射

$$w_1=\frac{1}{z}$$

直接得到单位圆域，如果想不到也没关系，还可以通过我们的老办法，根据保对称点性寻找映射，可以假设单位圆内一点 z_0 映射到 ∞，就有 $\frac{1}{\overline{z}_0}$ 映射到圆心，按照类似Example 5.的方法得到通式

$$w=\mathrm{e}^{i\theta}\frac{1-\overline{z}_0 z}{z-z_0}\quad(|z_0|<1)$$

这里就取 $w_1=\dfrac{1}{z}$，接着用我们熟知的映射

$$w=\frac{z-i}{z+i}$$

的逆映射

$$w_2=\frac{-iw_1-i}{w_1-1}$$

将单位圆映射为上半平面，再用正整数幂函数 $w_3=w_2^2$ 映射为

$$\{z:0<\arg z<2\pi\}$$

最后是本题巧妙的地方，即用

$$w_4=\frac{w_3-1}{w_3+1}$$

将区域转化成题目要求的像区域，最终的复合映射就不写了。

总结一下这类题型的解题方法，由于最终一般是要得到单位圆域，我们倒着从单位圆域开始。

为了得到单位圆域，可以肯定地说，唯一的办法是对半平面使用线性分式映射，而且往往是上半平面，使用的分式线性映射是

$$w=\frac{w-i}{w+i}$$

如何得到上半平面的呢？一是对带形域 $\{z:0<\operatorname{Im} z<\pi\}$ 使用指数函数

$$w=e^z$$

二是对角形域使用正整数幂函数

$$w = z^n$$

带形域可以由角形域取对数得到，但角形域可以一步映射为上半平面，所以常常是通过对某些特殊区域使用线性分式映射得到，如上面的例题。

角形域也一般是通过对二角形区域线性分式映射得到的。

所以，题目为了考察你的综合能力，往往是先给出一个由若干圆和直线边界组成的区域，需要先对其使用恰当的线性分式映射才能进行下一步转化，一旦找到了那个线性分式映射，后续的步骤就套路化了。

最后需要注意的是，同时考虑线性分式映射和初等函数构成的映射时，一道题目可能会有多种形式不同的解答，和答案不同不一定是错误的，只要能够在题目条件下正确完成题目的任务，都是好的解答。

有些题目还会给出 $f(z_0) = w_0$，$\arg f'(z_0) = \theta_0$ 之类的条件，也就是将我们上面所讲的两类题型糅合起来，我觉得这样就有些难了，但可以考虑上面讲的带参数映射或者寻找能将原区域映射到原区域的映射（如单位圆域、第一象限[18]等等）。

[18] 教材习题解析册 *p224* 的例 *23*。

我本来的计划是将所有主要题型都给出若干例题以及对应的解题方法，但由于时间原因不能面面俱到了，所以只挑选了两类题型，一是在给定条件下求区域间映射，二是不带条件的求取给定区域间的映射。

未能涉及到的题型主要是求取给定映射下给定区域的像区域，这里简单讲一下。对于初等函数构成的映射，这样的问题是简单的，对于分式线性映射，主要方法是对边界的各段分别取包括端点的三点，分别求取它们的像，根据保圆性即可找出像的边界，再在内部取任意一点，求其像，根据其一定是在像区域内部的判断像区域具体是哪一部分。

还有少部分题目根据上述方法不能解决的，就要考虑参数方程的办法了，具体例题可见教材习题解析册 p216 的例 14。