2020 年离散数学期末考试题

一、单项选择题.

1. 设 $\mathbb{X} = \{a, \{b\}, \{\{c\}\}\}$,则下列命题正确的是 ( )

   A. $\{a\} \subset 2^{\mathbb{X}}$　　B. $\{\{b\}\} \subseteq \mathbb{X}$　　C. $\{\{c\}\} \in 2^{\mathbb{X}}$　　D. $\{\varnothing\} \in 2^{\mathbb{X}}$

2. 如果 $\mathbb{X} \setminus \mathbb{Y} \neq \varnothing$,则下列结论正确的是 ( )

   A. $\mathbb{X} = \mathbb{Y}$　　B. $\mathbb{X} = \varnothing$　　C. $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{Y}$　　D. $(\mathbb{X} \cap \mathbb{Y}) \subset \mathbb{X}$

3. 设 $\mathbb{X} = \{1, 2, 3, 4\}$,$\Pi = \{\{1, 3\}, \{2\}, \{4\}\}$,由 Π 产生的等价关系 $\mathbb{R}$ 是 ( )

   A. $\{(1, 3), (3, 1), (2, 2), (4, 4)\}$　　B. $I_X \cup \{(1, 3), (3, 1)\}$

   C. $\{(1, 3), (3, 1), (2, 4), (4, 2)\}$　　D. $\{(1, 3), (3, 1), (1, 1), (3, 3)\}$

4. 集合 $\mathbb{A} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 12, 15\}$,$\mathbb{R}$ 是 $\mathbb{A}$ 上的整除关系,$\mathbb{A}$ 的子集 $\mathbb{B} = \{2, 3, 5, 6\}$,则下列结论不正确的是 ( )

   A. 集合 B 的上确界是 15　　B. 集合 B 的下确界是 1

   C. 集合 B 的极大元是 5 和 6　　D. 集合 B 没有最小元

5. 设 $\mathbb{R}$ 是实数集合,f, g 是从 $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ 到 $\mathbb{R}$ 的函数,$f(x, y) = x^y$,$g(x, y) = (x - y)/2$,那么下列结论正确的是 ( )

   A. f 是单射的, 而非满射的　　B. f, g 是满, 射的

   C. f, g 是双射的　　D. f, g 既不是单射的, 也不是满射的

6. $\mathbb{A} = \{x, y\}$,$\mathbb{B} = \{a, b\}$,$f : 2^{\mathbb{A}} \to \mathbb{B}$,这样的函数 f 有多少个 ( )

   A. 4　　B. 10　　C. 16　　D. 25

7. 设 $\langle \mathbb{G}, * \rangle$ 是有限群,$a \in \mathbb{G}$,a 的阶等于 2,这种元素的个数一定是 ( )

   A. 素数　　B. 奇数　　C. 偶数　　D. 不确定

8. 设 $\langle \mathbb{B}, \leqslant, *, \oplus, ', 0, 1 \rangle$ 是布尔代数,$|\mathbb{B}| > 3$,那么该格一定不是 ( )

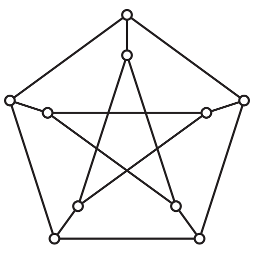
   A. 全序格　　B. 分配格　　C. 有界格　　D. 有补格

9. 下列选项中的数值表示一个简单无向图中各结点的度数,能画出二分图的是 ( )

   A. $(1, 2, 2, 3, 4, 5)$　　B. $(1, 2, 3, 4, 5, 5)$　　C. $(2, 3, 3, 4, 5, 6)$　　D. $(1, 1, 1, 2, 2, 3)$

10. 设 G 是 Peterson 图, 则 G 增加几条边可以成为 Euler 图 ( )

    A. 3　　B. 4　　C. 5　　D. 6

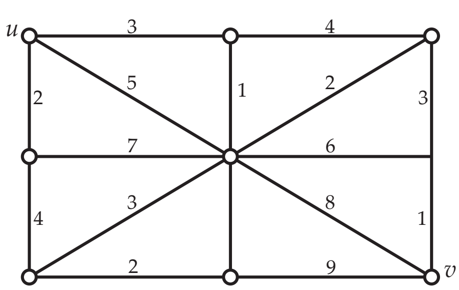


一、10 题图

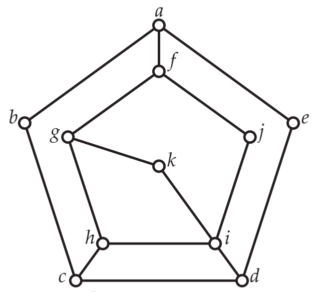
二、填空题.

1. 设 $\mathbb{A}, \mathbb{B}, \mathbb{C}$ 是任意集合,$\mathbb{A} \cup \mathbb{B} = \mathbb{A} \cup \mathbb{C}$,$\mathbb{A}' \cup \mathbb{B} = \mathbb{A}' \cup \mathbb{C}$,则 $\mathbb{B}$ ______ $\mathbb{C}$.
2. 设 $\mathbb{A}, \mathbb{B}$ 是任意集合,则 $2^{\mathbb{A}} \oplus 2^{\mathbb{B}}$ ______ $2^{\mathbb{A} \oplus \mathbb{B}}$ 成立.

3. 设 $\mathbb{A}=\{1,2,3,4\}$,$\mathbb{R}\subseteq\mathbb{A}\times\mathbb{A}$,$\mathbb{R}=\{(1,2),(2,4),(1,4)\}$,则 $\mathbb{R}$ 的传递闭包 $\mathbb{R}^{+}$= ______.
4. 每个全序集必为半序集,并且 ______半序集必为全序集.
5. 设 $\mathbb{X}=\mathbb{Q}\setminus\{1\}$,其中 $\mathbb{Q}$ 是有理数集合,$\mathbb{X}$ 上的二元运算 $*$ 定义为:$\forall a,b\in\mathbb{X}, a*b=a-b-a\cdot b$,则在代数系统 $\langle\mathbb{X},*\rangle$ 中,幺元是 ______.
6. 在同构意义下,5 阶有补格 ______个.
7. 设图 G 如图所示,利用 Dijkstra 算法,图 G 中从 u 到 v 的最短路长是 ______.

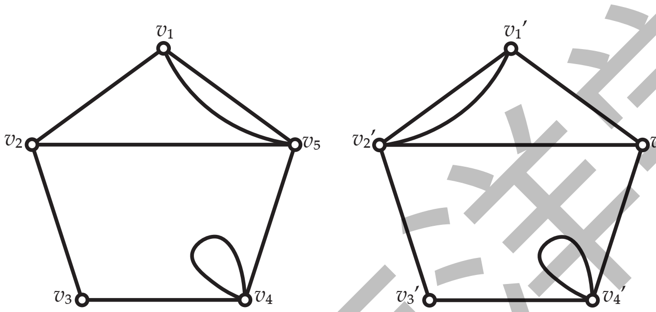


二、7 题图

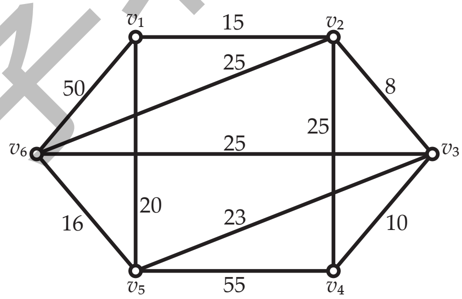


二、8 题图

8. 设图 G 如图所示,则该图 ______Hamilton 图.
9. 设图 G_1, G_2 如图所示,则两个图 ______同构的.



二、9 题图

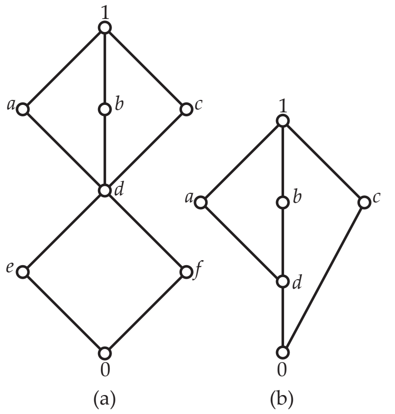


二、10 题图

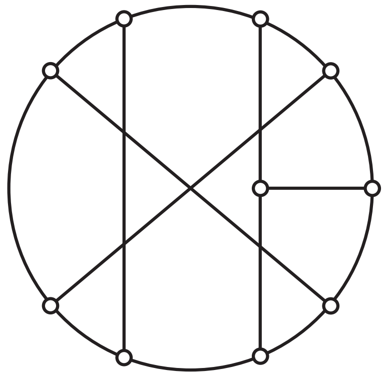
10. 设带权图 G 如图所示,则它的最小生成树是 ______(给出最小生成树的图示).

三、请判断下述命题的正确性.

1. 设 $\mathbb{A},\mathbb{B},\mathbb{C}$ 是非空集合,则 $(\mathbb{A}\cup\mathbb{B})\times\mathbb{C}=(\mathbb{A}\times\mathbb{C})\cup(\mathbb{B}\times\mathbb{C})$.
2. 如果 R_1 是 A 上的反对称关系,那么 $R_1\circ R_1$ 一定是 A 上的反对称关系.
3. 设 $\preccurlyeq$ 是非空集合 $\mathbb{A}$ 上的良序关系,在此关系中,每个元素的直接后继是唯一的.
4. 设 f 是从 $\mathbb{X}$ 到 $\mathbb{Y}$ 的函数,g 是从 $\mathbb{Y}$ 到 $\mathbb{Z}$ 的函数,如果 $g\circ f$ 是满射函数并且 f 是单射函数,那么 g 一定是满射函数.
5. 设 $\mathbb{A}$ 是不可数集合,$\mathbb{B}$ 是可数集合,则 $\mathbb{A}\times\mathbb{B}$ 一定是不可数集合.
6. 设 $\langle\mathbb{N}_m,+_m,\times_m\rangle$ 是环,当 $m=15$ 时,$\langle\mathbb{N}_m,+_m,\times_m\rangle$ 是域.
7. 设 $\mathbb{S}_n=\{x|x\in\mathbb{N}^{+}\wedge x\text{是}n\text{的因子}\}$,$n\in\mathbb{N}^{+}$,其中 $\mathbb{N}$ 是自然数集合,$|$ 是 $\mathbb{S}_n$ 上的整除关系,则 $\langle\mathbb{S}_{50},|\rangle$ 是布尔代数.
8. 设格 L_1, L_2 如图 (a),(b) 所示,则 L_2 是 L_1 的子格.



三、8 题图



三、10 题图

9. 设 $G = (V, E)$ 是一个简单无向图, $|V| = 9$, 如果 $m = 29$, 那么 G 一定是连通图.

10. 设图 G 如图所示, 则 G 不是平面图.

四、设 $\langle \mathbb{G}, * \rangle$ 是群, $\langle \mathbb{H}, * \rangle$ 是 $\langle \mathbb{G}, * \rangle$ 的子群, 建立 $\mathbb{G}$ 上的关系 $\mathbb{R}$ 如下:

$$\mathbb{R} = \{(x, y) | x, y \in \mathbb{G} \wedge (\exists h \in \mathbb{H})(x = y * h)\}$$

1. 证明: $\mathbb{R}$ 是 $\mathbb{G}$ 上的等价关系.
2. 设 $\langle \mathbb{G}, * \rangle$ 的运算表如下, $\mathbb{H} = \{e, a\}$, 求 $\mathbb{R}$ 的所有等价类.

*	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	e	a
c	c	b	a	e

四、2 题表

五、已知 $\langle \mathbb{N}_{12}, +_{12}, \times_{12} \rangle$ 是一个环, $\mathbb{N}_{12} = \{[0], [1], \cdots, [11]\}$(集合元素 $[x]_{12}$) 简化表示为 $[x]$, 其中 $[2], [4] \in \mathbb{N}_{12}$, 设 $\mathbb{S} = \{u | u \in \mathbb{N}_{12} \wedge u \times_{12} [2] = u \times_{12} [4]\}$, 那么

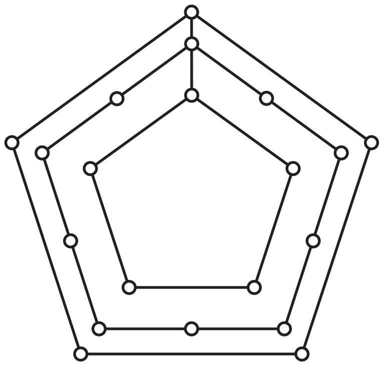
1. 证明: $\langle \mathbb{S}, +_{12}, \times_{12} \rangle$ 是 $\langle \mathbb{N}_{12}, +_{12}, \times_{12} \rangle$ 的一个子环.
2. 求 $\mathbb{S} =$?
3. $\langle \mathbb{S}, +_{12}, \times_{12} \rangle$ 是无零因子环吗? 请阐述理由.

六、设 $G = (V, E)$ 是一个简单无向图, $|V| = 10$.

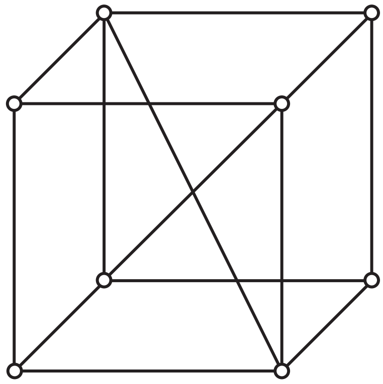
1. 如果 $m = 37$, 那么 G 一定是哈密顿图吗? 请阐述理由.
2. 如果 $m = 22$, 那么 G 一定是二分图吗? 请阐述理由.
3. 如果 $m = 25$, 那么 G 一定是平面图吗? 请阐述理由.
4. 如果 $\deg(v_i)$ $(i = 1\sim 10)$ 均是偶数, 并且 $m = 37$, 那么 G 一定是欧拉图吗? 请阐述理由.

七、补充 2022 年最后一题.

1. 判断是否为欧拉图、H-图。



七、1 题图



七、2 题图

2. 判断是否为二分图、平面图。