

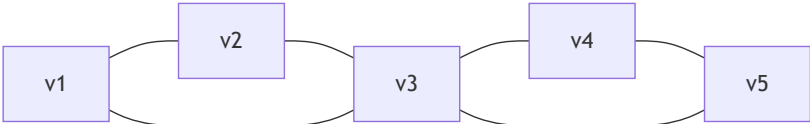
2025 春 计算机科学与人工智能的数学基础（I） 期末回忆版试题参考答案

一，填空

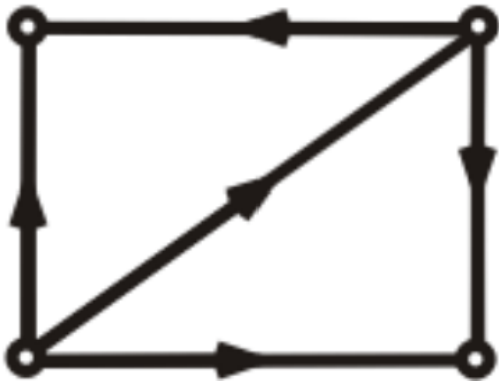
- 1. 重言
- 2. $m_0 \vee m_6 \vee m_7$
- 3. $\{\{\Phi\}, \{0\}, \{0, \Phi\}\}$
- 4. 4
 本题可通过邻接矩阵的三次方来计算。
- 5. 不一定是，比如 $K_{3,3}$
- 6. 0 图着色就是点着色。一定要区分清楚 图着色和面着色。
 - 1 易知
 - 0 $H = A(A^T A)^{-1} A^T$ ，为对称矩阵

二，举例

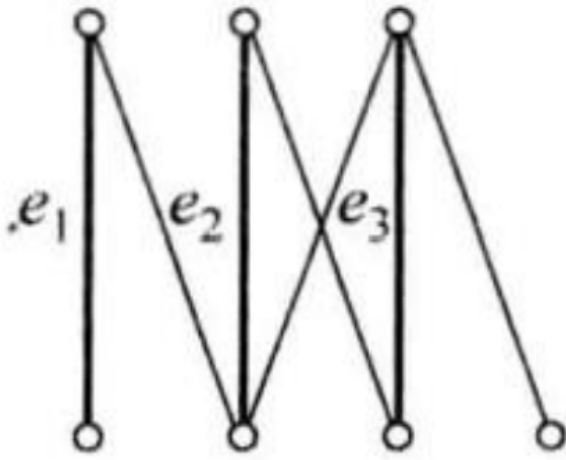
- 1. $\{e_2, e_4, e_5, e_9\}, \{e_1, e_3, e_5, e_6\}, \{e_1, e_4, e_5, e_9\}, \{e_2, e_3, e_5, e_6\}, \{e_3, e_4, e_6, e_9\}$
- 2. 经典蝴蝶图



- 3. 如图所示



- 4. 如图所示



三，计算与证明

1. 用等值演算判断 $((p \rightarrow q) \wedge p) \rightarrow q$ 的类型

$$\begin{aligned}
 ((p \rightarrow q) \wedge p) \rightarrow q &\equiv ((\neg p \vee q) \wedge p) \rightarrow q && \text{(蕴涵等值式)} \\
 &\equiv ((\neg p \wedge p) \vee (q \wedge p)) \rightarrow q && \text{(分配律)} \\
 &\equiv (F \vee (p \wedge q)) \rightarrow q && \text{(矛盾律)} \\
 &\equiv (p \wedge q) \rightarrow q && \text{(同一律)} \\
 &\equiv \neg(p \wedge q) \vee q && \text{(蕴涵等值式)} \\
 &\equiv (\neg p \vee \neg q) \vee q && \text{(德·摩根律)} \\
 &\equiv \neg p \vee (\neg q \vee q) && \text{(结合律)} \\
 &\equiv \neg p \vee T && \text{(排中律)} \\
 &\equiv T && \text{(支配律)}
 \end{aligned}$$

2. 将“相等的两个角不都是对顶角”用谓词逻辑符号化

- $P(x)$: x 是角
- $Q(x, y)$: x 和 y 相等
- $R(x, y)$: x 和 y 是对顶角

形式一：基于“存在...不...”

$$\exists x \exists y (P(x) \wedge P(y) \wedge Q(x, y) \wedge \neg R(x, y))$$

字面含义：存在 x 和 y ，它们都是角，且它们相等，并且它们不是对顶角。

形式二：基于“并非全都是”

$$\neg \forall x \forall y ((P(x) \wedge P(y) \wedge Q(x, y)) \rightarrow R(x, y))$$

字面含义：并非“只要 x 和 y 是相等的角，它们就一定是对顶角”。

3. 求前束范式 $\exists x F(x, y) \rightarrow (H(x) \rightarrow \neg \forall y G(y))$

求前束范式的核心步骤是：**先换名（消除变量冲突）** $\rightarrow$ **再移量词（利用量词否定和收缩律将量词提到最前面）**。

1. 换名律（消除变量冲突）

为了避免量词外提时引起变量捕捉，将约束变量 x 换名为 u ，将约束变量 y 换名为 v ：

$$\exists u F(u, y) \rightarrow (H(x) \rightarrow \neg \forall v G(v))$$

2. 量词否定转换

将紧跟在量词前的否定词 $\neg$ 内移：

$$\exists u F(u, y) \rightarrow (H(x) \rightarrow \exists v \neg G(v))$$

3. 量词外提

为了清晰且不易出错，我们可以利用蕴涵等值式 $A \rightarrow B \equiv \neg A \vee B$ 将公式展开：

$$H(x) \rightarrow \exists v \neg G(v) \equiv \neg H(x) \vee \exists v \neg G(v) \equiv \exists v (\neg H(x) \vee \neg G(v))$$

$$\begin{aligned} & \exists u F(u, y) \rightarrow \exists v (\neg H(x) \vee \neg G(v)) \\ & \equiv \neg (\exists u F(u, y)) \vee \exists v (\neg H(x) \vee \neg G(v)) \\ & \equiv \forall u \neg F(u, y) \vee \exists v (\neg H(x) \vee \neg G(v)) \end{aligned}$$

4. 将量词统一提到最前面（此时 $\forall u$ 和 $\exists v$ 互不干扰，先后顺序均可）：

$$\forall u \exists v (\neg F(u, y) \vee \neg H(x) \vee \neg G(v))$$

最终结果

将式子恢复为蕴涵形式（更易读），该公式的前束范式为：

$$\forall u \exists v (F(u, y) \rightarrow (H(x) \rightarrow \neg G(v)))$$

(注：前缀写成 $\exists v \forall u$ 同样正确)

4. 24 个人，13 个人会英语，10 个人会德语，9 个人会法语，5 个人会日语，4 个人又会英语又会法语，4 个人又会英语又会德语，4 个人又会德语又会法语，3 个人又会日语又会英语，会日语的人不会法语和德语，求会三门语言的人数。

首先默认没有什么都不会的人，由于会日语总共 5 人，且会日语的人不会法语和德语，故会日语的人只有“只会日语”和“会英语和日语”两类。那么此时我们就可以把“只会日语的人”(2 人) 去掉，那么剩下的 22 个人就变成了一个简单的三元容斥问题，直接套公式即可。

$$22 = 13 + 10 + 9 - 4 - 4 - 4 + x$$

$$22 = 20 + x \implies x = 2$$

5. n 个人，每个人有 3 个朋友，分析 n 的奇偶性

偶数。图 G 中有 n 个三度顶点，然后即总度数为 $3n$ 。由握手定理，总度数为 $2|E|$ 。所以 n 必为偶数

6. 建立 $[0, 1]$ 和 $(-2, 3)$ 的一一对应关系

思路：两区间内有理数由于是**可列无穷** $\aleph_0$ ，可一一对应。对于无理数，则可以通过 $y=5x-2$ 这一映射关系进行一一对应。

构造性证明：

第一步：在 $[0, 1]$ 中挑出一个永远不漏掉的有理数序列 S 我们可以把端点 0, 1 和区间内部的一部分有理数排成一个严格的序列：

$$S = \{0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{n}, \dots\}$$

为了方便表述，记 $s_1 = 0, s_2 = 1$ ，对于 $n \geq 3$ ，记 $s_n = \frac{1}{n-2}$ 。第二步：利用线性映射 $y = 5x - 2$ 进行“错位”映射我们定义一个分段函数 $f: [0, 1] \rightarrow (-2, 3)$ ：

$$f(x) = \begin{cases} 5s_{n+2} - 2 & \text{if } x = s_n \in S \\ 5x - 2 & \text{if } x \notin S \end{cases}$$

7. 给出解释 I，使下面两个公式为假，从而证明不是逻辑有效式

$$(1) \quad \forall x (F(x) \vee G(x)) \rightarrow (\forall x F(x) \vee \forall x G(x))$$

$$(2) \quad \exists x (F(x) \wedge G(x)) \rightarrow (\exists x F(x) \wedge \exists x G(x))$$

(1)

论域 $D: \{1, 2\}$

谓词设定: $F(x)$ 表示“ x 是奇数”, $G(x)$ 表示“ x 是偶数”。

真值分析: 前半部分: 对论域里所有的数, 要么是奇数要么是偶数 (1是奇数, 2是偶数), 完全正确, 为真 (T)。后半部分: “所有数都是奇数”为假, “所有数都是偶数”也为假, 假 $\vee$ 假, 为假 (F)。 $T \rightarrow F \equiv F$, 成功证明其不是有效式。

(2)

此题有误, 题中式子为重言式。

8. 四元数 $q_1 = (1, 2, 0, 3)$, $q_2 = (0, -1, 0, 2)$, 求 $q_1 * q_2$

$$q_1 * q_2 = (1 + 2i + 3k) \times (-i + 2k) = -i + 2 - 3j + 2k - 4j - 6 = -4 - i - 7j + 2k$$

即 $(-4, -1, -7, 2)$

9. 一棵树有五个叶子节点, 2度节点与三度节点各一个, 剩余的节点都是四度节点, 求树的阶数 n , 并画出所有非同构的树。

点, 求树的阶数 n , 并画出所有非同构的树。

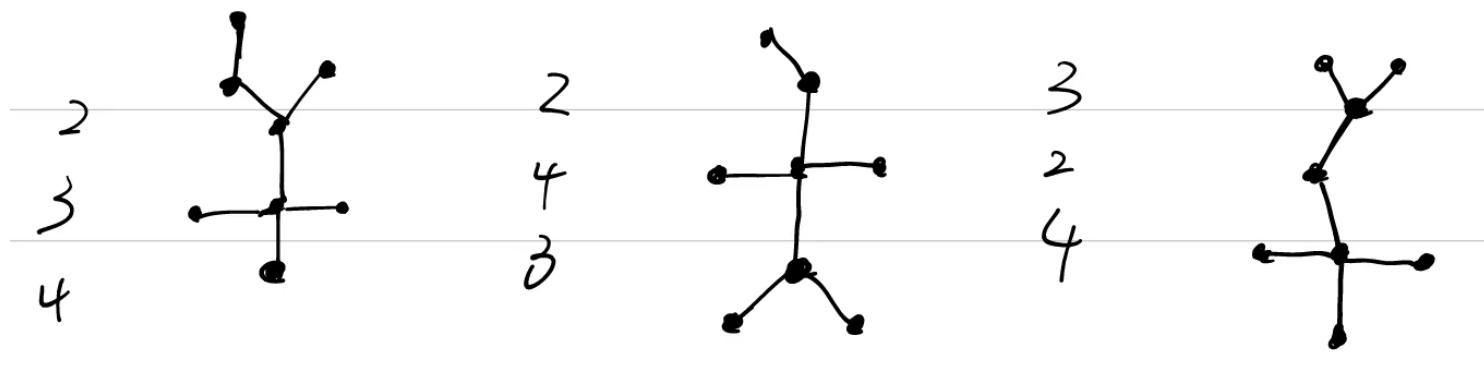
设有 x 个四度节点, 那么由题中条件, 握手定理, 和树的性质 $m = n - 1$, 得:

$$1 \times 5 + 2 \times 1 + 3 \times 1 + 4x = 2(5 + 1 + 1 + x - 1)$$

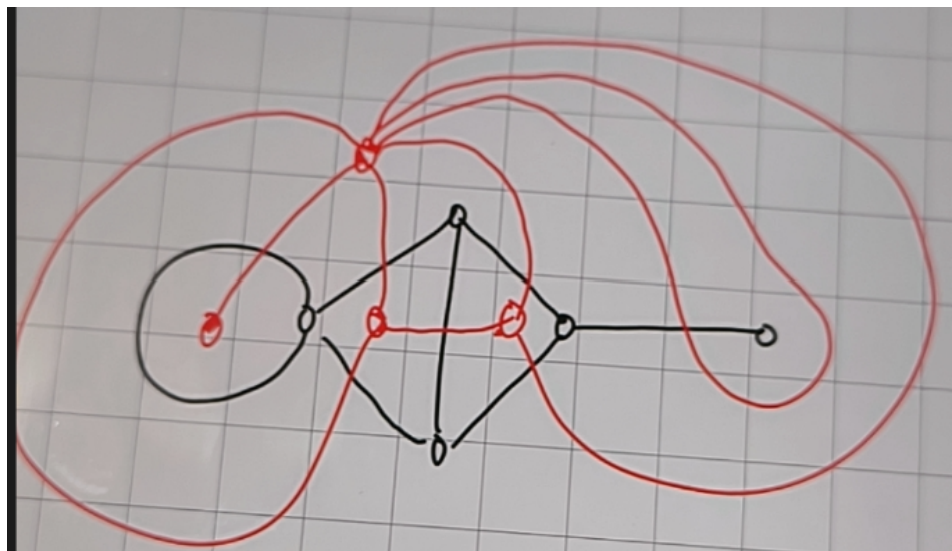
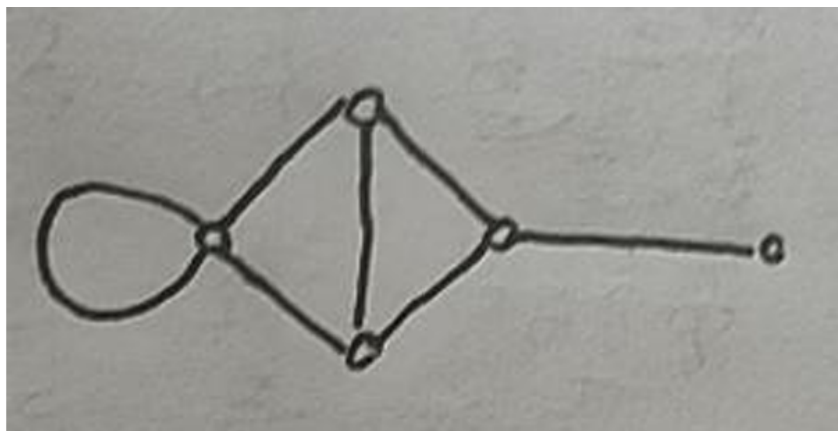
$$x = 1$$

$$n = 5 + 1 + 1 + x = 8$$

为确保非同构图的不重不漏, 我们可以对所有的内点进行排列 (梦回高中同分异构体), 去掉镜面的3种重复之后, 得到非同构图共有三种:



10. 求下图的对偶图。



11. 写出实值函数 $f(x) = x^T A x$ 的梯度矩阵

$$\nabla_x f = (A + A^T)x$$

12. 求矩阵 A 的 SVD 分解和 MP 逆矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

SVD 分解 ($A = U \Sigma V^T$)

步骤一：求 V 和奇异值 Σ

计算 $A^T A$:

$$A^T A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

其特征值为 $\lambda_1 = 5, \lambda_2 = 0$ ，对应的非零奇异值为 $\sigma_1 = \sqrt{5}$ 。

对应的单位特征向量（即 V 的列向量）为：

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \implies V = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

由此得到 3×2 的对角矩阵 Σ ：

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sqrt{5} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

步骤二：求 U

利用公式 $u_i = \frac{1}{\sigma_i}Av_i$ 求得正交基：

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \\ 0 \end{pmatrix}$$

扩充 u_1 使其成为 $\mathbb{R}^3$ 的标准正交基，可取：

$$u_2 = \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

SVD 分解最终结果：

$$U = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} & 0 \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Sigma = \begin{pmatrix} \sqrt{5} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad V^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Moore-Penrose 逆矩阵 (A^+)

利用公式 $A^+ = V\Sigma^+U^T$ 或对 A 进行满秩分解：

$$\Sigma^+ = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

计算得到：

$$A^+ = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} & 0 \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

MP 逆矩阵最终结果：

$$A^+ = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

四，应用题

甲乙丙丁象棋比赛，只能两人参加，满足：

- 1)甲和乙有且仅有一人参加比赛
 - 2)若乙参加，则丙参加
 - 3)丙和丁至多一人参加
 - 4)若丁不参加，则甲不参加(可能第二条记得不是特别清，第二条可能不太对)，
- 问：请用真值表法，决定派谁参加比赛？

- 若甲参加，乙不参加。
 - 若丙参加，则丁不参加，则甲不参加，矛盾。
 - 若丁参加，不矛盾，所以可能是甲丁。
- 若乙参加，甲不参加
 - 则丙参加，则丁不参加，则甲不参加，无矛盾。所以可能是乙丙。

综上，可能是甲丁或乙丙。

有了自然语言之后，我们再写真值表法。

逻辑符号化：

设命题变量如下：

- p : 甲参加比赛
- q : 乙参加比赛
- r : 丙参加比赛
- s : 丁参加比赛

将题目中的 4 个条件符号化：

1. 甲和乙有且仅有一人参加： $(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$ ，即异或关系 $p \oplus q$
2. 若乙参加，则丙参加： $q \rightarrow r$
3. 丙和丁至多一人参加： $\neg(r \wedge s)$
4. 若丁不参加，则甲不参加： $\neg s \rightarrow \neg p$ （等价于逆否命题 $p \rightarrow s$ ）

目标复合命题为上述 4 个条件的合取（即同时成立）：

$$W = (p \oplus q) \wedge (q \rightarrow r) \wedge \neg(r \wedge s) \wedge (\neg s \rightarrow \neg p)$$

真值表法

（注：表中 1 表示真/参加，0 表示假/不参加）

p (甲)	q (乙)	r (丙)	s (丁)	条件1: $p \oplus q$	条件2: $q \rightarrow r$	条件3: $\neg(r \wedge s)$	条件4: $\neg s \rightarrow \neg p$	总真值 W
1	1	1	1	0	1	0	1	0
1	1	1	0	0	1	1	0	0
1	1	0	1	0	0	1	1	0
1	1	0	0	0	0	1	0	0
1	0	1	1	1	1	0	1	0
1	0	1	0	1	1	1	0	0
1	0	0	1	1	1	1	1	1 (方案一)
1	0	0	0	1	1	1	0	0
0	1	1	1	1	1	0	1	0
0	1	1	0	1	1	1	1	1 (方案二)
0	1	0	1	1	0	1	1	0
0	1	0	0	1	0	1	1	0
0	0	1	1	0	1	0	1	0
0	0	1	0	0	1	1	1	0
0	0	0	1	0	1	1	1	0
0	0	0	0	0	1	1	1	0

啊啊啊真的要写这么多行吗

结论

通过真值表末列可以看出，使总真值 W 为真（满足所有逻辑约束）的解共有 **2 组**：

1. **方案一**： $p = 1, q = 0, r = 0, s = 1$ ，即派 **甲、丁** 两人参加。
2. **方案二**： $p = 0, q = 1, r = 1, s = 0$ ，即派 **乙、丙** 两人参加。

五、分析题

1. 主成分分析。协方差计算式把1/n改成1/(n-1)对贡献率计算和主成分的表达式是否有影响？

完全没有。如果按照复习资料上的推导方式，我们是在限定条件 $C^T C = I$ 下求 $\text{tr}(C^T \mathbf{X}_0^T \mathbf{X}_0 C)$ 的最大值。这个过程中，是 $\frac{1}{n}$ 还是 $\frac{1}{n-1}$ 根本对这个优化问题的目标函数完全没有任何影响，因为式子中根本没有出现 n 。

或者按照老师的推导方式，把协方差阵的 $\frac{1}{n}$ 换成 $\frac{1}{n-1}$ 只改变特征值大小，不改变**特征向量方向与相对贡献率**，故主成分表达式不变，贡献率数值不变。

拓展阅读：如果把S型分析改成R型分析，从计算上增加了什么？又带来了什么影响？在什么情况下R型分析是好的，什么情况下可能失真？从S型分析切换到R型分析，本质上是改变了数据对待“量纲”的态度。

1. 从计算上增加了什么？从S型（协方差）改成R型（相关系数），在计算流程上核心增加了数据的标准化处理（Z-score Normalization）。
数据级计算：对原始数据矩阵中的每一个元素 x_{ij} ，不仅要减去该指标的均值 μ_j （中心化），还要除以该指标的标准差 σ_j ：
- $$x'_{ij} = \frac{x_{ij} - \mu_j}{\sigma_j}$$
- 矩阵级计算：在形成待分解的矩阵时，计算上相当于用一个由各变量标准差构成的对角矩阵 $D = \text{diag}(\sigma_1^2, \sigma_2^2, \dots, \sigma_p^2)$ 去对协方差矩阵 S 进行左右缩放：
- $$R = D^{-1/2} S D^{-1/2}$$
- 因此，计算上增加了提取标准差、求倒数平方根矩阵、以及两次矩阵乘法的开销。
2. 带来了什么影响？
消除量纲（单位）的统治力：所有变量被强行压缩到了同一个“起跑线”上，权重被拉平。总方差（Total Variance）的定义改变：在S型分析中，总方差是所有变量实际方差的总和（即 $\text{tr}(S) = \sum \sigma_j^2$ ）；而在R型分析中，由于每个变量标准化后的方差都是 1，总方差直接等于变量的个数 p （即 $\text{tr}(R) = p$ ）。主成分几何方向的重构：R型提取出的特征向量（主成分系数）与S型绝不是简单的线性缩放关系。旋转轴的方向会发生根本性改变，最终的业务解释也会完全不同。
3. 什么情况下 R型分析是好的？
当数据集属于“多量纲、高悬殊”时，R型分析是最佳选择。不同单位的数据集：比如分析城市发展，指标包含“GDP（亿元）”、“人口（万人）”、“人均寿命（岁）”、“绿化率（%）”。这些指标无法直接相加。使用R型分析可以完美消除单位影响。数值范围极其悬殊：即使单位相同（如都是“元”），但“企业年产值（动辄千万）”和“人均办公耗材费用（几百元）”放在一起，若用S型分析，产值变量会瞬间主导特征值，让后期分析直接漏掉微观指标的波动信息。
4. 什么情况下可能失真？
当原始方差本身就带有核心“物理或业务信号”时，R型分析会导致信息扭曲。量纲相同且方差代表关键信息：比如在图像处理中分析像素点的灰度值（都在 $0 \sim 255$ 之间），或者在金融中分析同一币种下不同资产的收益率波动。资产的真实波动大小本身就是核心特征。如何失真？人工放大噪声：R型分析会将那些原本波动极小、甚至只是微弱测量误差的噪声变量，强行“扩容”到与核心信号变量同等的方差权重（方差强化为 1），导致模型引入大量背景噪声。阉割核心信号：那些真正具有强主导能力的、高波动的核心变量，其权重被强行削弱，导致模型无法准确识别出真正的核心主控因素。

2. 求 5 等分contor集的势。

5等分 Cantor 集的势是 **连续统的势**（实数集的势），即 $\aleph_1$ 。

它的势与传统的“三分 Cantor 集”以及整个实数区间 $[0, 1]$ 的势**完全一样**，都是不可数无穷。

- 基于地址编码的简明证明:
1. **五进制编码**：将区间 5 等分，意味着我们可以用**五进制小数**来标记每一段的“地址”(小数点后的每一位数字可以是 0, 1, 2, 3, 4)。
2. **规则过滤**：无论具体的五等分规则是挖掉中间几段、留下几段，只要每一步**至少留下 2 段**（设留下了 m 种位置，且 $2 \leq m < 5$ ），那么这个 Cantor 集中的任意一个点，都可以唯一对应一串由这 m 个允许数字组成的无限长序列。
3. **势的计算**：所有可能序列的总数（即该集合的势）为：

$$m^{\aleph_0}$$

根据基数算术，由于 $2 \leq m < 5$ ，有：

$$2^{\aleph_0} \leq m^{\aleph_0} \leq 5^{\aleph_0} = (2^{\log_2 5})^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}$$

根据夹逼定理 (Cantor-Bernstein 定理)，它的基数只能是 $2^{\aleph_0} = \aleph$.

结论： 改变等分数量和挖掘规则，只会改变分形维数（测度依然是0），但里面**点的个数（势）永远不会变**，依旧和实数线一样多。