不定积分的代数解法

郑华盛
（南昌航空大学 数学与信息科学学院，江西 南昌 330063）

［摘　要］基于积分运算是微分运算的逆运算，利用线性代数方法，提出了一种求解几类特殊函数不定积分的新方法，并结合实例验证了方法的有效性.

［关键词］不定积分；线性空间；线性变换；基函数；矩阵
［中图分类号］O151.26;O13　　［文献标识码］C　　［文章编号］1672-1454(2014)01-0078-06

众所周知，微积分学是高等数学的主要内容，积分运算与微分运算二者互为逆运算. 但积分的计算要比微分的计算更为复杂，更为灵活，更具有技巧性. 文献[1]对不定积分的一些基本计算方法作了较为详细地介绍. 文献[2]从微分的角度研究了不定积分的解法. 本文主要从线性代数的角度研究如何求解不定积分，进而探索新的积分方法，提出一种计算不定积分的代数方法，并成功地应用于求解高等数学中几类特殊函数的不定积分.

1　主要结论

先给出有关分块矩阵逆的一个结论：

引理 1[3-4]　设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{B} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D}\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{G}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{D} & \boldsymbol{O}\end{bmatrix}$，其中 $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{D}$ 皆为可逆方阵，则

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{B}^{-1} & \boldsymbol{O}\\ -\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{C}\boldsymbol{B}^{-1} & \boldsymbol{D}^{-1}\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{G}^{-1}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{O} & \boldsymbol{D}^{-1}\\ \boldsymbol{B}^{-1} & \boldsymbol{O}\end{bmatrix}.$$

下面利用线性代数中线性空间与线性变换的概念，给出计算不定积分 $\int f(x)\mathrm{d}x$ 的一种新方法. 主要结论如下：

定理 1　设 V 为 $\mathbb{R}$ 上全体可微函数所组成的一个线性空间，$\boldsymbol{p}_i(x)\in V$，$(i=1,2,\cdots,n)$，$\boldsymbol{p}_1(x)$，$\boldsymbol{p}_2(x)$，…，$\boldsymbol{p}_n(x)$线性无关，

$$W=\mathrm{Span}(\boldsymbol{p}_1(x),\boldsymbol{p}_2(x),\cdots,\boldsymbol{p}_n(x)),\quad f(x)\in W,$$

且微分运算 D 关于 W 是封闭的，即 $\forall\, \boldsymbol{p}(x)\in W$, $D\boldsymbol{p}(x)=\boldsymbol{p}'(x)\in W$，则

(i) $D(\boldsymbol{p}_1(x),\boldsymbol{p}_2(x),\cdots,\boldsymbol{p}_n(x))=(\boldsymbol{p}_1(x),\boldsymbol{p}_2(x),\cdots,\boldsymbol{p}_n(x))\boldsymbol{A}$，其中 $\boldsymbol{A}\in\mathbb{R}^{n\times n}$；

(ii) 若 $D\boldsymbol{p}_1(x),D\boldsymbol{p}_2(x),\cdots,D\boldsymbol{p}_n(x)$ 线性无关，则 $\boldsymbol{A}$ 可逆；

(iii) 若 $\boldsymbol{A}$ 可逆，不妨设 $\boldsymbol{A}^{-1}=(b_{ij})_{n\times n}$，则

$$\int f(x)\mathrm{d}x=\sum_{j=1}^{n}k_j\int \boldsymbol{p}_j(x)\mathrm{d}x=\sum_{j=1}^{n}k_j(\boldsymbol{p}_1(x),\boldsymbol{p}_2(x),\cdots,\boldsymbol{p}_n(x))\begin{pmatrix}b_{1j}\\ b_{2j}\\ \vdots\\ b_{nj}\end{pmatrix}+C,$$

［收稿日期］2012-09-04；［修改日期］2013-09-09
［基金项目］江西省教育厅及南昌航空大学 2013 年度教改项目(JXJG-13-8-18,JY1329)；江西省学位与研究生教育教学改革项目(JXYJG-2012-072)；江西省教育厅及南昌航空大学研究生数值分析优质课程建设项目；南昌航空大学优秀教学团队建设项目

其中 C 为任意常数.

证　(i)由已知,有

$$Dp_1(x)=p_1'(x)=a_{11}p_1(x)+a_{21}p_2(x)+\cdots+a_{n1}p_n(x),$$
$$Dp_2(x)=p_2'(x)=a_{12}p_1(x)+a_{22}p_2(x)+\cdots+a_{n2}p_n(x),$$
$$\cdots\cdots$$
$$Dp_n(x)=p_n'(x)=a_{1n}p_1(x)+a_{2n}p_2(x)+\cdots+a_{nn}p_n(x).$$

即

$$D(p_1(x),p_2(x),\cdots,p_n(x))=(p_1(x),p_2(x),\cdots,p_n(x))A,$$

其中 $A=(a_{ij})_{n\times n}$.

(ii) 若 $Dp_1(x),Dp_2(x),\cdots,Dp_n(x)$ 线性无关,则由

$$\lambda_1\cdot Dp_1(x)+\lambda_2\cdot Dp_2(x)+\cdots+\lambda_n\cdot Dp_n(x)=0,$$

得 $\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_n=0$,即

$$\begin{cases}a_{11}\lambda_1+a_{12}\lambda_2+\cdots+a_{1n}\lambda_n=0,\\ a_{21}\lambda_1+a_{22}\lambda_2+\cdots+a_{2n}\lambda_n=0,\\ \cdots\cdots\\ a_{n1}\lambda_1+a_{n2}\lambda_2+\cdots+a_{nn}\lambda_n=0\end{cases}$$

只有零解,从而得 $|A|\neq0$,即 A 可逆.

(iii) 若 A 可逆,不妨设 $A^{-1}=(b_{ij})_{n\times n}$,则在相差任意常数的情况下,微分变换 D 可逆,且其逆变换 D^{-1} 满足

$$D^{-1}(p_1(x),p_2(x),\cdots,p_n(x))=(p_1(x),p_2(x),\cdots,p_n(x))A^{-1}+C,$$

即

$$D^{-1}p_j(x)=\int p_j(x)\mathrm{d}x=(p_1(x),p_2(x),\cdots,p_n(x))\begin{pmatrix}b_{1j}\\ b_{2j}\\ \vdots\\ b_{nj}\end{pmatrix}+C,\quad j=1,\ 2,\ \cdots,n.$$

因为 $f(x)\in W$,于是有 $f(x)=\sum\limits_{j=1}^{n}k_jp_j(x)$,从而得

$$\int f(x)\mathrm{d}x=\sum_{j=1}^{n}k_j\int p_j(x)\mathrm{d}x=\sum_{j=1}^{n}k_j(p_1(x),p_2(x),\cdots,p_n(x))\begin{pmatrix}b_{1j}\\ b_{2j}\\ \vdots\\ b_{nj}\end{pmatrix}+C.$$

定理 1 给出了计算不定积分的一种代数解法,它可以同时方便地求出 $\int p_j(x)\mathrm{d}x\ (j=1,\ 2,\ \cdots,n)$. 若仅需计算某个 $\int p_j(x)\mathrm{d}x$,则只需求 A^{-1} 的第 j 列即可. 具体计算时,应根据 $f'(x)$ 及其分项的导数形式选取基函数 $p_1(x)$,$p_2(x)$,$\cdots$,$p_n(x)$.

2　应用实例

为了验证本文方法的有效性,我们计算以下五种类型的不定积分.

类型一　$\int e^{\alpha x}\cos\beta x\,\mathrm{d}x$ 与 $\int e^{\alpha x}\sin\beta x\,\mathrm{d}x$ 型积分(其中 $\alpha^2+\beta^2\neq0$).

例 1 求 $\int e^{\alpha x}\cos\beta x\,\mathrm{d}x$,其中 $\alpha^2+\beta^2\neq0$.

解　设 $f(x)=e^{\alpha x}\cos\beta x$, 则 $f'(x)=\alpha\,e^{\alpha x}\cos\beta x-\beta\,e^{\alpha x}\sin\beta x$,且由 $e^{\alpha x}\cos\beta x$ 及 $e^{\alpha x}\sin\beta x$ 求导后的表达式,可知选取基函数

$$\boldsymbol{p}_1(x)=\mathrm{e}^{\alpha x}\cos\beta x,\quad \boldsymbol{p}_2(x)=\mathrm{e}^{\alpha x}\sin\beta x,$$

则有

$$D(\boldsymbol{p}_1(x),\boldsymbol{p}_2(x))=(\boldsymbol{p}_1'(x),\boldsymbol{p}_2'(x))=(\boldsymbol{p}_1(x),\boldsymbol{p}_2(x))\boldsymbol{A},$$

其中 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ -\beta & \alpha\end{pmatrix}$. 而 $\boldsymbol{A}^{-1}=\frac{1}{\alpha^2+\beta^2}\begin{pmatrix}\alpha & -\beta\\ \beta & \alpha\end{pmatrix}$,故由定理1得

$$\int \mathrm{e}^{\alpha x}\cos\beta x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\alpha^2+\beta^2}\mathrm{e}^{\alpha x}(\alpha\cos\beta x+\beta\sin\beta x)+C,$$

$$\int \mathrm{e}^{\alpha x}\sin\beta x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\alpha^2+\beta^2}\mathrm{e}^{\alpha x}(-\beta\cos\beta x+\alpha\sin\beta x)+C.$$

本文方法可同时求出 $\int \mathrm{e}^{\alpha x}\cos\beta x\,\mathrm{d}x$ 及 $\int \mathrm{e}^{\alpha x}\sin\beta x\,\mathrm{d}x$ 的值,避免两次使用分部积分公式. 类似地,求 $\int \sin(\ln x)\mathrm{d}x$ 和 $\int \cos(\ln x)\mathrm{d}x$,只需作变换 $\ln x=t$,即可化为 $\int \mathrm{e}^t\sin t\,\mathrm{d}t$ 和 $\int \mathrm{e}^t\cos t\,\mathrm{d}t$ 型积分,按上述方法求解即可.

类型二 $\int \cos\alpha x\sin\beta x\,\mathrm{d}x$,$\int \sin\alpha x\cos\beta x\,\mathrm{d}x$,$\int \sin\alpha x\sin\beta x\,\mathrm{d}x$ 及 $\int \cos\alpha x\cos\beta x\,\mathrm{d}x$ 型积分(其中 $|\alpha|\neq|\beta|$)

例2 求 $\int \cos\alpha x\sin\beta x\,\mathrm{d}x$,其中 $|\alpha|\neq|\beta|$.

解设 $f(x)=\cos\alpha x\sin\beta x$,则

$$f'(x)=-\alpha\sin\alpha x\cdot\sin\beta x+\beta\cos\alpha x\cdot\sin\beta x,$$

且由 $\sin\alpha x\sin\beta x$ 及 $\cos\alpha x\sin\beta x$ 求导后的表达式,可知选取基函数

$$\boldsymbol{p}_1(x)=\cos\alpha x\sin\beta x,\quad \boldsymbol{p}_2(x)=\sin\alpha x\cos\beta x,$$

$$\boldsymbol{p}_3(x)=\sin\alpha x\sin\beta x,\quad \boldsymbol{p}_4(x)=\cos\alpha x\cos\beta x,$$

则有

$$\begin{aligned}D(\boldsymbol{p}_1(x),\boldsymbol{p}_2(x),\boldsymbol{p}_3(x),\boldsymbol{p}_4(x))&=(\boldsymbol{p}_1'(x),\boldsymbol{p}_2'(x),\boldsymbol{p}_3'(x),\boldsymbol{p}_4'(x))\\&=(\boldsymbol{p}_1(x),\boldsymbol{p}_2(x),\boldsymbol{p}_3(x),\boldsymbol{p}_4(x))\boldsymbol{A},\end{aligned}$$

其中

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0 & 0 & \alpha & -\beta\\ 0 & 0 & \beta & -\alpha\\ -\alpha & -\beta & 0 & 0\\ \beta & \alpha & 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{D} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}.$$

而由引理1,得

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{O} & \boldsymbol{D}^{-1}\\ \boldsymbol{B}^{-1} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0 & -\frac{\alpha}{s} & -\frac{\beta}{s}\\ 0 & 0 & \frac{\beta}{s} & \frac{\alpha}{s}\\ \frac{\alpha}{s} & -\frac{\beta}{s} & 0 & 0\\ \frac{\beta}{s} & -\frac{\alpha}{s} & 0 & 0\end{pmatrix},$$

其中 $s=\alpha^2-\beta^2$,故由定理1得

$$\begin{aligned}\int \cos\alpha x\sin\beta x\,\mathrm{d}x&=\frac{\alpha}{s}\boldsymbol{p}_3(x)+\frac{\beta}{s}\boldsymbol{p}_4(x)+C\\&=\frac{1}{\alpha^2-\beta^2}(\alpha\sin\alpha x\sin\beta x+\beta\cos\alpha x\cos\beta x)+C.\end{aligned}$$

本文解法还可以同时求出不定积分 $\int \sin\alpha x\cos\beta x\,\mathrm{d}x$,$\int \sin\alpha x\sin\beta x\,\mathrm{d}x$ 及 $\int \cos\alpha x\cos\beta x\,\mathrm{d}x$,虽然略有计算量,但思路清晰,不难计算,而且无需应用积化和差公式.

类型三　$\int P_m(x)e^{ax}dx$ 型积分(其中 $P_m(x)$ 为 x 的 m 次多项式).

例 3　求 $\int x^2e^{3x}dx$.

解　设 $f(x)=x^2e^{3x}$，则

$$f'(x)=2xe^{3x}+3x^2e^{3x},$$

且由 xe^{3x} 及 x^2e^{3x} 求导后的表达式，可知选取基函数

$$\boldsymbol{p}_1(x)=x^2e^{3x},\quad \boldsymbol{p}_2(x)=xe^{3x},\quad \boldsymbol{p}_3(x)=e^{3x},$$

则有

$$\begin{aligned}D(\boldsymbol{p}_1(x),\boldsymbol{p}_2(x),\boldsymbol{p}_3(x))&=(\boldsymbol{p}_1'(x),\boldsymbol{p}_2'(x),\boldsymbol{p}_3'(x))\\&=(\boldsymbol{p}_1(x),\boldsymbol{p}_2(x),\boldsymbol{p}_3(x))\boldsymbol{A},\end{aligned}$$

其中 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3&0&0\\2&3&0\\0&1&3\end{pmatrix}$. 而 $\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}&0&0\\-\frac{2}{9}&\frac{1}{3}&0\\\frac{2}{27}&-\frac{1}{9}&\frac{1}{3}\end{pmatrix}$，故由定理 1 得

$$\begin{aligned}\int x^2e^{3x}dx&=\frac{1}{3}\boldsymbol{p}_1(x)-\frac{2}{9}\boldsymbol{p}_2(x)+\frac{2}{27}\boldsymbol{p}_3(x)+C\\&=\frac{1}{3}x^2e^{3x}-\frac{2}{9}xe^{3x}+\frac{2}{27}e^{3x}+C.\end{aligned}$$

本文方法还可同时求得不定积分 $\int xe^{3x}dx$ 及 $\int e^{3x}dx$，无须多次使用分部积分公式.

注　(i)当 m 较大时，$\boldsymbol{A}$ 为稀疏矩阵，可将 $\boldsymbol{A}$ 分块后由引理 1 求 $\boldsymbol{A}^{-1}$，计算并不复杂；

(ii)对于 $\int P(x)(\ln x)^m dx$（其中 m 为正整数，$P(x)$ 为 x 的任意实数幂次的线性组合）型积分，作变换 $x=e^t$，即可化为 $\int t^mP(e^t)e^tdt$ 型积分，按例 3 方法求解即可.

类型四　$\int P_m(x)\cos\beta x\,dx$ 与 $\int P_m(x)\sin\beta x\,dx$ 型积分(其中 $P_m(x)$ 为 x 的 m 次多项式).

例 4　求 $\int x^3\cos2x\,dx$.

解　设 $f(x)=x^3\cos2x$，则 $f'(x)=3x^2\cos2x-2x^3\sin2x$，且由 $x^2\cos2x$ 与 $x^3\sin2x$ 求导后的表达式，可知选取基函数

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{p}_1(x)=x^3\cos2x,\quad \boldsymbol{p}_2(x)=x^3\sin2x,\quad \boldsymbol{p}_3(x)=x^2\cos2x,\quad \boldsymbol{p}_4(x)=x^2\sin2x,\\&\boldsymbol{p}_5(x)=x\cos2x,\quad \boldsymbol{p}_6(x)=x\sin2x,\quad \boldsymbol{p}_7(x)=\cos2x,\quad \boldsymbol{p}_8(x)=\sin2x,\end{aligned}$$

则有

$$D(\boldsymbol{p}_1(x),\boldsymbol{p}_2(x),\cdots,\boldsymbol{p}_8(x))=(\boldsymbol{p}_1(x),\boldsymbol{p}_2(x),\cdots,\boldsymbol{p}_8(x))\boldsymbol{A},$$

其中

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&2&0&0&0&0&0&0\\-2&0&0&0&0&0&0&0\\3&0&0&2&0&0&0&0\\0&3&-2&0&0&0&0&0\\0&0&2&0&0&2&0&0\\0&0&0&2&-2&0&0&0\\0&0&0&0&1&0&0&2\\0&0&0&0&0&1&-2&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{C}&\boldsymbol{D}\end{pmatrix}.$$

而由引理 1 可先求 $\boldsymbol{B}^{-1}$，$\boldsymbol{D}^{-1}$，再求 $\boldsymbol{A}^{-1}$，得

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{3}{4} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{3}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{8} & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{3}{8} & -\frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix},$$

故由定理1可得

$$\begin{aligned}\int x^3\cos 2x\,dx &= \frac{1}{2}p_2(x)+\frac{3}{4}p_3(x)-\frac{3}{4}p_6(x)-\frac{3}{8}p_7(x)+C\\ &=\frac{1}{2}x^3\sin 2x+\frac{3}{4}x^2\cos 2x-\frac{3}{4}x\sin 2x-\frac{3}{8}\cos 2x+C.\end{aligned}$$

本文方法还可同时得到$\int x^3\sin 2x\,dx$，$\int x^2\cos 2x\,dx$，$\int x^2\sin 2x\,dx$，$\int x\cos 2x\,dx$及$\int x\sin 2x\,dx$等8个不定积分的计算结果，不必多次使用分部积分公式．当m较大时，A为稀疏矩阵，可将A分块由引理1求得A^{-1}，虽然稍有计算量，但计算并不困难．

类型五 $\int P_m(x)e^{\alpha x}\cos\beta x\,dx$与$\int P_m(x)e^{\alpha x}\sin\beta x\,dx$型积分(其中$P_m(x)$为$x$的$m$次多项式).

例5 求$\int xe^{\alpha x}\cos\beta x\,dx$（其中$\alpha^2+\beta^2\neq 0$）.

解 设$f(x)=xe^{\alpha x}\cos\beta x$，则

$$f'(x)=e^{\alpha x}\cos\beta x+\alpha xe^{\alpha x}\cos\beta-\beta x\ e^{\alpha x}\sin\beta x,$$

且由$e^{\alpha x}\cos\beta x$，$xe^{\alpha x}\cos\beta x$及$xe^{\alpha x}\sin\beta x$求导后的表达式，可知取基函数

$$p_1(x)=xe^{\alpha x}\cos\beta x,\quad p_2(x)=xe^{\alpha x}\sin\beta x,$$
$$p_3(x)=e^{\alpha x}\cos\beta x,\quad p_4(x)=e^{\alpha x}\sin\beta x,$$

则有

$$D(p_1(x),p_2(x),p_3(x),p_4(x))=(p_1(x),p_2(x),p_3(x),p_4(x))A,$$

其中

$$A=\begin{pmatrix}\alpha & \beta & 0 & 0\\ -\beta & \alpha & 0 & 0\\ 1 & 0 & \alpha & \beta\\ 0 & 1 & -\beta & \alpha\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}B & O\\ E & B\end{pmatrix}.$$

由引理1得

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{\alpha}{l} & \frac{\beta}{l} & 0 & 0\\ -\frac{\beta}{l} & \frac{\alpha}{l} & 0 & 0\\ -\frac{\alpha^2-\beta^2}{l^2} & -\frac{2\alpha\beta}{l^2} & \frac{\alpha}{l} & \frac{\beta}{l}\\ \frac{2\alpha\beta}{l^2} & -\frac{\alpha^2-\beta^2}{l^2} & -\frac{\beta}{l} & \frac{\alpha}{l}\end{pmatrix},$$

其中 $l=\alpha^2+\beta^2$，故由定理 1 得

$$\int x\mathrm{e}^{\alpha x}\cos\beta x\mathrm{d}x=\frac{\alpha}{l}\boldsymbol{p}_1(x)-\frac{\beta}{l}\boldsymbol{p}_2(x)-\frac{\alpha^2-\beta^2}{l^2}\boldsymbol{p}_3(x)+\frac{2\alpha\beta}{l^2}\boldsymbol{p}_4(x)+C$$
$$=\frac{1}{\alpha^2+\beta^2}\left(\alpha x\mathrm{e}^{\alpha x}\cos\beta x-\beta x\mathrm{e}^{\alpha}\sin\beta x-\frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha^2+\beta^2}\mathrm{e}^{\alpha x}\cos\beta x+\frac{2\alpha\beta}{\alpha^2+\beta^2}\mathrm{e}^{\alpha x}\sin\beta x\right)+C.$$

同时还可得到 $\int x\mathrm{e}^{\alpha x}\sin\beta x\mathrm{d}x$，$\int\mathrm{e}^{\alpha x}\cos\beta x\mathrm{d}x$ 及 $\int\mathrm{e}^{\alpha x}\sin\beta x\mathrm{d}x$ 的计算结果，不用多次应用分部积分公式.

本文方法的优点是：可同时求得多个不定积分 $\int p_j(x)\mathrm{d}x(j=1,2,\cdots,n)$ 的结果. 当 m 较大时，虽然形式上似乎求 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 的计算工作量稍大一些，但因为此时 $\boldsymbol{A}$ 为稀疏矩阵，可通过矩阵分块，由引理 1 不难求得 $\boldsymbol{A}^{-1}$，也并不复杂. 若只需要求某个 $\int p_i(x)\mathrm{d}x$，则仅需求出 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 的第 i 列即可. 综上所述，本文方法不失为计算上述五种类型不定积分的一种较为新颖、直接且实用的方法. 该方法从线性变换的角度出发，用代数方法研究不定积分的求法，对于激发学生将代数方法应用于高等数学中解题，拓展学生的解题思维具有积极的促进作用.

[参　考　文　献]

[1] 同济大学应用数学系. 高等数学(上册)[M]. 5 版. 北京：高等教育出版社，2005：182－221.

[2] 郭鹏云，云文在，田强，陈向华，宋志平. 不定积分解法研究[J]. 大学数学，2012，28(3)：149－153.

[3] 同济大学应用数学系. 线性代数[M]. 4 版. 北京：高等教育出版社，2008：46－56；141－157.

[4] 北京大学数学力学系. 高等代数[M]. 北京：人民教育出版社，1978：177－189.

Algebraic Method of Solving Indefinite Integral

ZHENG Hua-sheng

(School of Mathematics and Information Science, Nanchang Hangkong University, Nanchang, Jiangxi 330063, China)

Abstract: Based on integral operation is inverse operation of differential operation, a new method to solve indefinite integral of some representative kinds of functions is presented by linear algebra method. And then, several examples are given to verify the validation of this method.

Key words: indefinite integral; linear space; linear transformation; basic function; matrix

不定积分的代数解法

作者： 郑华盛， ZHENG Hua-sheng
作者单位： 南昌航空大学数学与信息科学学院,江西南昌,330063
刊名： 大学数学
英文刊名： College Mathematics
年，卷(期)： 2014,30(1)

参考文献(4条)

1. 同济大学应用数学系 高等数学(上册) 2005
2. 郭鹏云,云文在,田强,陈向华,宋志平 不定积分解法研究[期刊论文]-大学数学 2012(3)
3. 同济大学应用数学系 线性代数 2008
4. 北京大学数学力学系 高等代数 1978