题目1证明题　　一般

设$f(x)$在$[a,b]$上正值，连续，则在 (a,b)内至少存在一点 ξ，

使$\int_a^{\xi} f(x)dx=\int_{\xi}^{b} f(x)dx=\frac{1}{2}\int_a^b f(x)dx$ 。

解答_

证：令$F(x)=\int_a^x f(t)dt-\int_x^b f(t)dt$

由于$x\in[a,b]$时，$f(x)>0$

$\therefore F(a)=-\int_a^b f(t)dt<0$

$F(b)=\int_a^b f(t)dt>0$

由根的存在性定理，存在一点$\xi\in(\mathrm{a},\mathrm{b})$使

$\mathrm{F}(\xi)=0$

即$\int_a^{\xi} f(t)dt=\int_{\xi}^{b} f(t)dt$

又 Q $\int_a^b f(t)dt=\int_a^{\xi} f(x)dx+\int_{\xi}^{b} f(x)dx$

$=\int_a^{\xi} f(x)dx+\int_{\xi}^{b} f(x)dx$

$=2\int_a^{\xi} f(x)dx$

从而原式成立。

题目2证明题　　一般

设$f(x)$在$[a,b]$上可导,且$f'(x)\le M, f(a)=0,$

证明:$\int_a^b f(x)dx\le\frac{M}{2}(b-a)^2$。

解答_

证明:由假设可知,$\forall x\in(a,b) f(x)$在$[a,x]$上满足

微分中值定理,则

$f(x)=f(x)-f(a)$

$=f'(\xi)(x-a)$　　　　$\xi\in(\mathrm{a},\mathrm{x})$

又$\because \mathrm{f}'(\mathrm{x})\le\mathrm{M}$，$\forall x\in(a,b)$

$\therefore f(x)\le M(x-a)$

由定积分的比较定理,有

$\int_a^b f(x)dx\le\int_a^b M(x-a)dx=\frac{M}{2}(b-a)^2$。

题目16证明题

设$f(x)$在$[0,2a],(a>0)$上连续，

证明:$\int_0^{2a} f(x)dx=\int_0^a[f(x)+f(2a-x)]dx$ 。

解答_

由于$\int_0^{2a} f(x)dx=\int_0^a f(x)dx+\int_a^{2a} f(x)dx$

令$x=2a-t$，则$dx=-dt$

$\int_0^{2a} f(x)\,dx=\int_0^a f(x)\,dx+\int_0^a f(2a-t)\,dt$

$=\int_0^a[f(x)+f(2a-x)]\,dx$。

题目5证明题

设k为正整数，证明：

$(1)\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 kxdx=\pi$ ；

$(2)\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 kxdx=\pi$ 。

解答_

$(1)\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 kxdx$

$=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1+\cos 2kx}{2}dx$

$=[\frac{1}{2}x+\frac{1}{4k}\sin 2kx]\Big|_{-\pi}^{\pi}$

$=(\frac{\pi}{2}+0)-(-\frac{\pi}{2}+0)$

$=\pi$。

$(2)\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 kxdx$

$=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1-\cos 2kx}{2}dx$

$=[\frac{1}{2}x-\frac{1}{4k}\sin 2kx]\Big|_{-\pi}^{\pi}$

$=(\frac{\pi}{2}-0)-(-\frac{\pi}{2}-0)$

$=\pi$。

题目18证明题　　一般

设$f(x)$在$[0,1]$上有一阶连续导数 .且$f(1)-f(0)=1$.

试证 : $\int_0^1[f'(x)]^2dx\ge 1$。

解答_

证明$\because [f'(x)-1]^2=[f'(x)]^2-2f'(x)+1\ge 0$

$\therefore [f'(x)]^2\ge 2f'(x)-1$

$\therefore \int_0^1[f'(x)]^2dx\ge 2\int_0^1 f'(x)dx-\int_0^1 dx$

$=2f(x)\Big|_0^1-1$

$=2[f(1)-f(0)]-1$

$=1$。

题目3证明题

若函数$f(x)$在区间$[a,b]$上连续，

则$\int_a^b f(x)dx=(b-a)\int_a^b f[a+(b-a)x]dx$ 。

解答_

作代换$x=a+(b-a)t$,则$dx=(b-a)dt$

且$x=b$时$t=1$

$x=a$时$t=0$

$\therefore\int_a^b f(x)dx$

$=\int_0^1 f[a+(b-a)t](b-a)dt$

$=\frac{1}{b-a}\int_0^1 f[a+(b-a)t]dt$

$=\frac{1}{b-a}\int_0^1 f[a+(b-a)x]dx$。

题目21证明题　　一般

设函数$f(x)$在$[0,1]$上连续,

证明:$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(|\cos x|)dx=\frac{1}{4}\int_0^{2\pi} f(|\cos x|)dx$　。

解答_

证:显然$f(|\cos x|)$是以π为周期的函数

$\therefore\int_0^{2\pi} f(|\cos x|)dx$

$=2\int_0^{\pi} f(|\cos x|)dx$

$=2[\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(|\cos x|)dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(|\cos x|)dx]$

在后一积分中,令$x=\pi-t$则

$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(|\cos x|)dx$

$=-\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} f(|\cos(\pi-t)|)dt$

$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(|\cos t|)dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(|\cos x|)dx$

$\therefore\int_0^{2\pi} f(|\cos x|)dx$

$=2[\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(|\cos x|)dx+\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(|\cos x|)dx]$

$=4\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(|\cos x|)dx$

得证$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(|\cos x|)dx=\frac{1}{4}\int_0^{2\pi} f(|\cos x|)dx$。

题目22证明题　　一般

若函数$f(x)$在R连续，且$f(x)=\int_a^x f(t)dt$，则$f(x)\equiv 0$　。

解答_

$f(x)$在R连续

$\therefore f(x)$在R可导

且$\forall x\in R$有$f'(x)=(\int_a^x f(t)dt)^1=f(x)$

$f'(x)-f(x)=0$

考虑函数$p(x)=f(x)e^{-x}.\forall x\in R$

$p'(x)=f'(x)e^{-x}-f(x)e^{-x}=[f'(x)-f(x)]e^{-x}=0$

$\therefore p(x)=c$(常数)

$\therefore c=f(x)e^{-x}$　　　f(x) $=ce^x$

已知$f(a)=\int_a^a f(t)dt=0$

$\therefore f(a)=ce^x=0$

$\therefore c=0$

$\therefore f(x)=0$　　$\forall x\in R$。

题目23证明题　　一般

设$f(x)$是以π为周期的连续函数，

证明:$\int_0^{2\pi}(\sin x+x)f(x)dx=\int_0^{\pi}(2x+\pi)f(x)dx$ 。

解答_

证明：由于

$$\int_0^{2\pi}(\sin x+x)f(x)dx$$

$$=\int_0^{\pi}(\sin x+x)f(x)dx+\int_{\pi}^{2\pi}(\sin t+t)f(t)dt$$

令$t=\pi+x$，则

$$\int_{\pi}^{2\pi}(\sin t+t)f(t)dt$$

$$=\int_0^{\pi}[(\sin(\pi+x)+\pi+x]f(\pi+x)dx$$

$$=\int_0^{\pi}(x+\pi-\sin x)f(x)dx$$

$$\therefore\int_0^{2\pi}(\sin x+x)f(x)dx$$

$$=\int_0^{\pi}(\sin x+x)f(x)dx+\int_0^{\pi}(x+\pi-\sin x)f(x)dx$$

$$=\int_0^{\pi}(2x+\pi)f(x)dx。$$

题目24证明题　　一般

设$f(x)$在$[0,1]$上连续且单调递减,

试证明:对于任何$q\in[0,1]$,都有不等式

$\int_0^q f(x)dx\ge q\int_0^1 f(x)dx$成立。

解答_

令$x=qt$,则$dx=qdt$,从而

$$\int_0^q f(x)dx=\int_0^1 f(qt)\cdot qdt=q\int_0^1 f(qt)dt$$

由于$q\le 1$,即$qt\le t$

又$f(x)$单调递减,故$f(qt)\ge f(t)$

$$\therefore \int_0^1 f(qt)dt\ge\int_0^1 f(t)dt$$

$$\therefore \int_0^q f(x)dx=q\int_0^1 f(qt)dt\ge q\int_0^1 f(t)dt。$$

题目25证明题　　一般

设$f(x)$在$[a,b]$上单调增加且$f''(x)>0$.

证明:$(b-a)f(a)<\int_a^b f(x)dx<(b-a)\dfrac{f(a)+f(b)}{2}$。

解答_

证明:由假设$\forall x\in[a,b].x>a$时$f(x)>f(a)$

$$\therefore \int_a^b f(x)dx>(b-a)f(a)$$

$\forall t\in[a,b].f(t)$在x点处的展式为

$$f(t)=f(x)+f'(x)(t-x)+\frac{1}{2!}f''(\xi)(t-x)^2$$

(ξ在t与x之间)

又因$f''(\xi)>0$.故

$$f(t)>f(x)+f'(x)(t-x)$$

将$t=b,t=a$分别代入上式,并相加,有

$$f(b)+f(a)>2f(x)+(a+b)f'(x)-2xf'(x)$$

$$\int_a^b[f(b)+f(a)]dx>2\int_a^b f(x)dx+(a+b)\int_a^b f'(x)dx-2\int_a^b xf'(x)dx$$

$$2[f(b)+f(a)](b-a)>4\int_a^b f(x)dx$$

$$\therefore \int_a^b f(x)dx<\frac{f(a)+f(b)}{2}(b-a)。$$

题目26证明题　　一般

设函数$f(x)$在[a，b]上连续且单调递增。

$$F(x)=\frac{1}{x-a}\int_a^x f(t)dt,(a<x\le b)$$

$$F(a)=f(a),$$

证明：$F(x)$在$[a,b]$上单调增。

解答_

证明：对$[a,b]$内的每个x，由积分中值定理

$$F(x)=\frac{1}{x-a}\int_a^x f(t)dt=\frac{1}{x-a}\cdot f(\xi)(x-a)=f(\xi)\quad (a<\xi<x)$$

当$x\to a^+$时，$\xi\to a^+$

$$\lim_{x\to a^+}F(x)=\lim_{x\to a^+}f(\xi)=f(a)=F(a)$$

$\therefore F(x)$在点a连续.从而$F(x)$在$[a,b]$上连续，则

$$F'(x)=\frac{f(x)}{x-a}-\frac{1}{(x-a)^2}\int_a^x f(t)dt$$

$$=\frac{f(x)}{x-a}-\frac{1}{(x-a)^2}[f(\xi)(x-a)]$$

$$=\frac{f(x)-f(\xi)}{x-a}\qquad a<x\le b$$

Q f(x)单调增.且ξ满足$a<\xi<x$，故$f(\xi)<f(x)$，从而

$F'(x)>0$，　$(a<x\le b)$

$\therefore F(x)$在$[a,b]$上单调增。

题目27证明题　　一般

设$f(x)$在$[a,b]$上二阶可导且$f''(x)<0$,

证明：$\int_a^b f(x)dx\le(b-a)f(\frac{a+b}{2})$ 。

解答_

$\forall x\in(a,b)$将$f(x)$在$\frac{a+b}{2}$处展开,有

$$f(x)=f(\frac{a+b}{2})+f'(\frac{a+b}{2})(x-\frac{a+b}{2})+\frac{1}{2!}f''(\xi)(x-\frac{a+b}{2})^2$$

(ξ介于x与$\frac{a+b}{2}$之间.)

由题设知$f''(\xi)<0$

$$\therefore f(x)\le f(\frac{a+b}{2})+f'(\frac{a+b}{2})(x-\frac{a+b}{2})$$

$$\int_a^b f(x)dx\le(b-a)f(\frac{a+b}{2})+\frac{1}{2}f^1(\frac{a+b}{2})(x-\frac{a+b}{2})^2\Big|_a^b$$

$$=(b-a)f(\frac{a+b}{2})。$$

题目28证明题　　一般

设$f(x)$在$[a,b]$上连续，在$[a,b]$可导，且$f'(x)<0$，证明函数

$$F(x)=\int_a^x\frac{f(t)}{x-a}dt$$

在(a,b)内满足$F'(x)\le0$ 。

解答_

$$F'(x)=\frac{(x-a)f(x)-\int_a^x f(t)dt}{(x-a)^2}$$

$$=\frac{(x-a)f(x)-(x-a)f(\xi)}{(x-a)^2} \qquad \xi\in[\mathrm{a},x]$$

$$=\frac{f(x)-f(\xi)}{(x-a)}$$

由已知$x\in(a,b)$时，$f'(x)<0$，故$f(x)$在(a,b)内递减

$a\le\xi\le \mathrm{x}, \qquad x\in(\mathrm{a},\mathrm{b})$

$\therefore \mathrm{f}(x)\le \mathrm{f}(\xi)$

又$\mathrm{x}-\mathrm{a}>0$

$\therefore \mathrm{F}'(x)\le 0 \qquad x\in(\mathrm{a},\mathrm{b})$。

题目29证明题　　一般

试证：如果$f(x)$在$[a,b]$上连续，且对于一切$x\in[a,b]$，$f(x)\ge 0$

同时至少存在一点$\xi\in[\mathrm{a},\mathrm{b}]$，使$\mathrm{f}(\xi)>0$，则$\int_a^b f(x)dx>0$ 。

解答_

证明：由$f(x)$在ξ点连续，且$f(\xi)>0$，$\xi\in[\mathrm{a},\mathrm{b}]$

则存在$\delta>0$，当$\mathrm{x}\in(\xi-\delta,\xi+\delta)$时，有

$\mathrm{f(x)}>0$

于是

$$\int_{\mathrm{a}}^{\mathrm{b}} f(x)dx\ge\int_{\xi-\delta}^{\xi+\delta} f(\xi)dx=2\delta\, f(\xi)>0$$

$\therefore \int_{\mathrm{a}}^{\mathrm{b}} f(x)dx>0$。

题目30证明题　　一般

试证$\int_a^b f(c-x)dx=\int_{c-b}^{c-a} f(x)dx$ 。

解答_

令$t=c-x$则$x=c-t,dx=-dt$

且$x=a$时,$t=c-a$

$x=b$时,$t=c-b$

$\therefore \int_a^b f(c-x)dx$

$=\int_{c-a}^{c-b} f(t)(-dt)$

$=-\int_{c-a}^{c-b} f(t)dt$

$=\int_{c-b}^{c-a} f(x)dx$。

题目31证明题　　一般

设函数$f(x)$在$[0,1]$上可微，且满足等式：

$$f(1)-2\int_0^{\frac{1}{2}} xf(x)dx=0$$

试证在$(0,1)$内至少存在一点ξ，使$\mathrm{f}'(\xi)=-\frac{\mathrm{f}(\xi)}{\xi}$。

解答_

由于$f(1)-2\int_0^{\frac{1}{2}} xf(x)dx=0$

则由积分中值定理,有$\xi_1\in[0,\frac{1}{2}]$,使

$f(1)-2\cdot\frac{1}{2}\cdot\xi_1 f(\xi_1)=0$成立,即$f(1)-\xi_1 f(\xi_1)=0$

令$F(x)=xf(x)$,　则$F(\xi_1)=F(1)$;

对函数$F(x)$在$[\xi_1,1]$上用罗尔定理,有

$F'(\xi)=0,\quad \xi\in(\xi_1,1)\subset(0,1)$

即$\xi f'(\xi)+f(\xi)=0,\quad \xi\subset(0,1)$

$\therefore f'(\xi)=-\frac{f(\xi)}{\xi}\quad \xi\subset(0,1)$。

题目32证明题　　一般

设$f(x)$在$[a,b]$上连续,并且对于每一个在$[a,b]$

上的连续函数$g(x)$.都有$\int_a^b g(x)f(x)dx=0$

证明:　$f(x)=0\qquad(a\le x\le b)$。

解答_

证明:若不然,设有$x_0\in(a,b)$,使$f(x_0)\ne0$.

不妨设$f(x_0)>0$.由于$f(x)$在x_0处

连续,故对$\varepsilon_0=\frac{f(x_0)}{2}$.存在$\delta>0$.

当$|x-x_0|<\delta$时,即在区间$(x_0-\delta,x_0+\delta)$内,有

$$|f(x)-f(x_0)|<\frac{f(x_0)}{2}.$$

从而$f(x)>\frac{f(x_0)}{2}>0$

构造连续函数$g(x)$如下:

$$g(x)=\begin{cases}0 & x\in[a,x_0-\delta]\cup[(x_0+\delta,b]\\ h(x) & x\in(x_0-\delta.x_0+\delta)\end{cases}$$

其中$h(x)>0.x\in(x_0-\delta.x_0+\delta)$且

$$\lim_{x\to(x_0-\delta)^+}h(x)=\lim_{x\to(x_0+\delta)^-}h(x)=0$$

$$\therefore\int_a^b g(x)f(x)dx$$

$$=\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}h(x)f(x)dx>\frac{f(x_0)}{2}\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}h(x)dx>0$$

这与题设矛盾故$f(x)\equiv0\qquad a\le x\le b$。

题目33证明题　　难

设函数$f(x)$在$[a,b]$上有连续导数　$f'(x$，且　$f(a)=0$，

则$\int_a^b|f(x)f'(x)|dx\le\frac{b-a}{2}\int_a^b[f'(x)]^2dx$。

解答_

令$F(x)=\int_a^x [f'(t)]dt \qquad a \le x \le b$

则$F(x) \ge \left|\int_a^x [f'(t)]dt\right|$

$=\left| f(t)\Big|_a^x \right|$

$=|f(x)-f(a)|$

$=|f(x)|$

$2\int_a^b |f(x)f'(x)|\,dx \le 2\int_a^b F(x)F^{'}(x)\,dx = F^2(b)$

由柯西不等式，有

$F^2(b)=(\int_a^b F'(x)dx)^2 \le \int_a^b\, dx\int_a^b [F'(x)]^2 dx$

$\qquad =(b-a)\int_a^b [f^{'}(x)]^2 dx$

$\int_a^b |f(x)f^{'}(x)|dx \le \dfrac{b-a}{2}\int_a^b [f(x)]^2 dx$。

题目34证明题　　难

设$f(x)$在$[a,b]$上二阶连续可微，其中$a<0<b$，则在该区间上必存在一个ξ，使

$$\int_a^b f(x)dx = bf(b)-af(a)-\frac{1}{2!}[b^2 f'(b)-a^2 f'(a)]$$
$$+\frac{1}{3!}(b^3-a^3)f''(\xi_0)$$ 。

解答_

令$F(x)=\int_a^x f(t)dt$，则$F(a)=0$，$F'(x)=f(x)$

$F''(x)=f'(x).F'''(x)=f''(x)$

将$F(x)$在$x=t\quad(a\le t\le b)$处展成二阶$Taylor$公式，有

$$F(x)=F(t)=F'(t)(x-t)+\frac{1}{2!}[F''(t)(x-t)^2+\frac{1}{3}F'''(\xi)(x-t)^3]$$

$$+\frac{1}{3!}(b^3-a^3)f''(\xi_0)\qquad \xi\in(\mathrm{x},\mathrm{t})$$

令$\mathrm{x}=0$，分别将$t=a$，$t=b$代入上式，并相减，有

$$0=F(a)-F(b)+bf(b)-af(a)+\frac{1}{2!}[a^2f'(a)-b^2f'(b)]$$

$$+\frac{1}{3!}[b^3f''(\xi_2)-a^3f''(\xi_1)]$$

其中$\xi_1\in(\mathrm{a},0)\qquad \xi_2\in(0,\mathrm{b})$

$$\therefore\int_{\mathrm{a}}^{\mathrm{b}}f(x)dx=bf(b)-af(a)-\frac{1}{2!}[b^2f'(b)-a^2f'(a)]+\frac{1}{3!}[(b^3f''(\xi_2)-a^3f''(\xi_1)$$

令$\mathrm{m}=\min\{f''(\xi_1),f''(\xi_2)\}$

$M=\max\{f''(\xi_1),f''(\xi_2)\}$

$\therefore m(b^3-a^3)\le b^3f''(\xi_2)-a^3f''(\xi_1)\le M(b^3-a^2)$

由于$f''(\mathrm{x})$在$[a,b]$连续，于是存在ξ_0使

$$\frac{b^3f''(\xi_2)-a^3f''(\xi_1)}{b^3-a^3}=f''(\xi_0)$$

于是 $b^3f''(\xi_2)-a^3f''(\xi_1)=(b^3-a^3)f''(\xi_0)$

$$\therefore\int_{\mathrm{a}}^{\mathrm{b}}f(x)dx=bf(b)-af(a)-\frac{1}{2!}[b^2f'(b)-a^2f'(a)]$$

$$+\frac{1}{3!}(b^3-a^3)f''(\xi_0)。$$

题目35证明题　　难

若$f(x)$关于$x=T$对称，且$a<T<b$，

则$\int_a^b f(x)dx=2\int_T^b f(x)dx+\int_a^{2T-b}f(x)dx$ 。

解答_

证明：因为$\int_a^{2T-b}f(x)dx=\int_a^T f(x)dx+\int_T^{2T-b}f(x)dx$

令$x=2T-t$，注意到$f(2T-t)=f(t)$，则

$$\int_T^{2T-b}f(x)dx=-\int_T^b f(2T-t)dt=-\int_T^b f(t)dt$$

$$=-\int_T^b f(x)dx$$

$$\therefore 2\int_T^b f(x)dx+\int_a^{2T-b}f(x)dx$$

$$=2\int_T^b f(x)dx+\int_a^T f(x)dx-\int_T^b f(x)dx$$

$$=\int_a^b f(x)dx。$$

题目36证明题　　难

试证$I=\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^4}dx=\int_0^{+\infty}\frac{x^2}{1+x^4}dx=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$ 。

解答_

令$x=\frac{1}{t}$，则$dx=-\frac{1}{t^2}dt$

当$x\to 0+$时，$t\to +\infty$

$x\to +\infty$时，$t\to 0+$

$$\therefore \int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^4}dx=\int_{+\infty}^{0}\frac{1}{1+(\frac{1}{t})^4}(-\frac{1}{t^2})dt$$

$$=\int_0^{+\infty}\frac{t^2}{1+t^4}dt$$

$$=\int_0^{+\infty}\frac{x^2}{1+x^4}dx$$

$$\therefore I=\frac{1}{2}[\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^4}dx+\int_0^{+\infty}\frac{x^2}{1+x^4}dx]$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{1+x^2}{1+x^4}dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{\frac{1}{x^2}+1}{\frac{1}{x^2}+x^2}dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{d(x-\frac{1}{x})}{(x-\frac{1}{x})^2+2}$$

令$u=x-\frac{1}{x}$，则$x\to 0+$时，$u\to -\infty$

$x\to +\infty$时，$u\to +\infty$

$$\therefore I=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{u^2+2}du$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2}}arctgu/\sqrt{2}\Big|_{-\infty}^{\infty}$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2}}(\frac{\pi}{2}-(-\frac{\pi}{2}))$$

$$=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}。$$

题目37证明题　　难

证明奇函数的一切原函数皆为偶函数，

偶函数的原函数中有一为奇函数。

解答_

证明：

设$f(x)$在$[-l,l]$上有定义，则$f(x)$的全部原函数可表示为

$F_c(x)=\int_0^x f(t)dt+c$　　　c为任意常数　-l ≤ x ≤ l

当f(-x) = f(x).即f(x)为偶函数时

$$F_0(-x)=\int_0^{-x} f(t)dt+0$$
$$=-\int_0^x f(-t)dt$$
$$=-\int_0^x f(t)dt$$
$$=-F_0(x)$$

即$F_0(x)$是奇函数

但当$c\neq 0$时，

$$F_c(-x)=F_0(-x)+c$$
$$=-F_0(x)+c$$
$$=-(F_0(x)+c)+2c$$
$$=-F_c(x)+2c$$
$$\neq -F_c(x)$$

则其它原函数都不是奇函数，

当$f(-x)=-f(x)$，即$f(x)$为奇函数时，显然对一切c，均有

$$F_c(-x)=\int_0^{-x} f(t)dt+c$$
$$=-\int_0^x f(t)dt+c$$
$$=\int_0^x f(t)dt+c$$
$$=F_c(x)$$

即它的一切原函数都是偶函数。

题目38证明题　　难

设$f(x)$在$[a,b]$上连续，且$f(x)>0$，又$F(x)=\int_a^x f(t)\,dt+\int_b^x \frac{1}{f(t)}dt$

证明：$F(x)=0$在$[a,b]$内有且仅有一个实根。

解答_

$$F'(x)=[\int_a^x f(t)\,dt]^1+[\int_b^x \frac{1}{f(t)}dt]^1$$

$$=f(x)+\frac{1}{f(x)}=\frac{f^2(x)+1}{f(x)}$$

$f(x)>0$

$\therefore (f(x)-1)^2=f^2(x)-2f(x)+1\geq 0$

$\therefore f^2(x)+1\geq 2f(x)$

$\therefore \dfrac{f^2(x)+1}{f(x)}\geq 2>0$，从而$F(x)$在$[a,b]$上严格单调增加。

$$F(a)=\int_a^a f(t)\,dt+\int_b^a \frac{1}{f(t)}dt=-\int_a^b \frac{dt}{f(t)}<0$$

$$F(b)=\int_a^b f(t)\,dt+\int_b^b \frac{1}{f(t)}dt=\int_a^b \frac{dt}{f(t)}>0$$

由连续函数的根的存在性定理知$F(x)=0$，在$[a,b]$内有且仅有一个实根。

题目39证明题　　难

证明:当$a>1$时,有$\int_1^a f(x^2+\frac{a^2}{x^2})\frac{1}{x}dx=\int_1^a f(x+\frac{a}{x})\frac{1}{x}dx$。

解答_

证明:令$x^2=t$，则$dt=2xdx$，$dx=\dfrac{1}{2\sqrt{t}}dt$

$$\text{左式}=\int_1^a f(x^2+\frac{a^2}{x^2})\frac{1}{x}dx$$

$$=\int_1^{a^2} f(t+\frac{a^2}{t})\cdot\frac{1}{\sqrt{t}2\sqrt{t}}dt$$

$$=\int_1^{a^2} f(t+\frac{a^2}{t})\frac{1}{2t}dt$$

$$=\frac{1}{2}\int_1^a f(t+\frac{a^2}{t})\cdot\frac{dt}{t}+\frac{1}{2}\int_a^{a^2} f(t+\frac{a^2}{t})\frac{dt}{t}$$

在第二个积分中,令$t=\dfrac{a^2}{u}$,有

$$\frac{1}{2}\int_a^{a^2} f(t+\frac{a^2}{t})\frac{dt}{t}=\frac{1}{2}\int_a^1 f(\frac{a^2}{u}+u)\cdot\frac{u}{a^2}\cdot a^2(-\frac{1}{u^2})du$$

$$=\frac{1}{2}\int_a^1 f(\frac{a^2}{u}+u)(-\frac{1}{u})du$$

$$=\frac{1}{2}\int_1^a f(u+\frac{a^2}{u})\frac{du}{u}$$

将它与第一个积分相加即得

$$\text{左式}=\frac{1}{2}\int_1^a f(t+\frac{a^2}{t})\frac{dt}{t}+\frac{1}{2}\int_1^a f(u+\frac{a^2}{u})\frac{du}{u}=\text{右式}。$$

题目40证明题　　难

若函数$f(x)$在$[0,+\infty]$连续，且$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$，

则：$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}\int_0^x f(t)dt=A$。

解答_

$\because \lim_{x\to+\infty} f(x) = A$

$\therefore \forall\varepsilon > 0.\exists\mathrm{B} > 0$，使$\forall\mathrm{x} > \mathrm{B}$，有

$\left|\mathrm{f(x)} - \mathrm{A}\right| < \varepsilon$

从而，对$\forall\mathrm{x} > \mathrm{B}$，有

$$\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt = \frac{1}{x}(\int_0^B f(t)dt + \int_B^x f(t)dt)$$

$$= \frac{1}{x}\int_0^B f(t)dt + \frac{1}{x}\int_B^x [f(t) - A]dt + \frac{1}{x}\int_B^x Adt$$

其中$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^B f(t)dt = 0$

$$\left|\frac{1}{x}\int_B^x [f(t) - A]dt\right| \le \frac{1}{x}\int_B^x [f(t) - A]dt$$

$$< \varepsilon\,(1 - \frac{\mathrm{B}}{\mathrm{x}})$$

$$< \varepsilon$$

即$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_B^x [f(t) - A]dt = 0$

$$\therefore \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_B^x Adt = \lim_{x\to+\infty} A(1 - \frac{B}{x}) = A$$

$$\therefore \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^B f(t)dt + \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_B^x [f(t) - A]dt$$

$$+ \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_B^x Adt = A\text{。}$$

题目41证明题　　难

证明: 若$\int_a^b f^2(x)dx = 0$则$f(x) = 0$　　$\mathrm{x} \in [\mathrm{a,b}]$。

解答_

证明: 若有$\xi \in (a,b)$,.使$f(\xi) \neq 0$,则有

$$f^2(\xi) = \lambda > 0$$

由f(x)的连续性可知,存在含有点ξ

的一个小区间$[\xi - \delta, \xi + \delta]$,

使$[\xi - \delta, \xi + \delta] \subset [a,b]$,且

$$f^2(x) \geq \frac{\lambda}{2} \qquad x \in [\xi - \delta, \xi + \delta]$$

于是

$$\int_a^b f^2(x)dx$$

$$= \int_a^{\xi - \delta} f^2(x)dx + \int_{\xi - \delta}^{\xi + \delta} f^2(x)dx + \int_{\xi + \delta}^{b} f^2(x)dx$$

$$\geq \int_{\xi - \delta}^{\xi + \delta} f^2(x)dx$$

$$\geq \frac{\lambda}{2} \cdot 2\delta$$

$$> 0$$

这与假设条件矛盾!即说明在(a,b)内不能有点ξ,

使$f(\xi) \neq 0$,故$f(x) \equiv 0 x \in (a,b)$.再根据已知条件.

$f(x)$在$[a,b]$上的连续性,知在$[a,b]$上,$f(x) \equiv 0$。

题目42证明题　　难

设函数$f(x)$在$[a,b]$上连续,

证明:$\lim\limits_{n \to 0} \frac{1}{h} \int_a^x [f(t+h) - f(t)]dt = f(x) - f(a)$ $(a < x < b)$。

解答_

$$证明1:设\varphi(x)=\int_a^x f(t)dt则\varphi'(x)=f(x)$$

$$\lim_{n\to 0}\frac{1}{h}\int_a^x[f(t+h)-f(t)]dt$$

$$=\lim_{n\to 0}\frac{1}{h}[\varphi(x+h)-\varphi(a+h)-\varphi(x)+\varphi(a)]$$

$$=\lim_{n\to 0}\frac{1}{h}\frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)-[\varphi(a+h)+\varphi(a)]}{h}$$

$$=\varphi'(x)-\varphi'(a)=f(x)-f(a)。$$

$$证明2:设t+h=u,则$$

$$\int_a^x f(t+h)dt=\int_{a+h}^{x+h}f(u)du=\int_{a+h}^{x+h}f(t)dt$$

$$故\int_a^x f(t+h)-f(t)]dt$$

$$=\int_{a+h}^{x+h}f(t)dt-[\int_a^{a+h}f(t)dt+\int_{a+h}^{x+h}f(t)dt+\int_{x+h}^{x}f(t)dt]$$

$$=\int_x^{x+h}f(t)dt-\int_a^{a+h}f(t)dt$$

$$=f(\xi_1)h-f(\xi_2)h$$

其中ξ_1在$x,x+h$之间，ξ_2在$a,a+h$之间

$$\therefore\lim_{n\to 0}\frac{1}{h}\int_a^x[f(t+h)-f(t)]dt$$

$$=\lim_{n\to 0}\frac{1}{h}[f(\xi_1)-f(\xi_2)]$$

$$=f(x)-f(a)。$$

题目43证明题　　难

设$f(x)$处处二阶可导,且$f''(x)\ge 0$又$u(t)$为任一连续函数,

证明:$\frac{1}{a}\int_0^a f[u(t)]dt\ge f[\frac{1}{a}\int_0^a u(t)dt]\qquad (a>0)$。

解答_

证明:由$Taylor$公式,有

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2!}f''(\xi)(x-x_0)^2.\quad \xi\in(x_0,x)$$

$$\because f''(x)\ge 0$$

$$\therefore f(x)\ge f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$$

令$x_0=\frac{1}{a}\int_0^a u(t)dt\qquad x=u(t)$则

$$f(u(t))\ge f(\frac{1}{a}\int_0^a u(t)dt)+f'[\frac{1}{a}\int_0^a u(t)dt](u(t)-\frac{1}{a}\int_0^a u(t)dt)$$

从0到a积分,有

$$\int_0^a u(t)dt\ge af(\frac{1}{a}\int_0^a u(t)dt)+f'(\frac{1}{a}\int_0^a u(t)dt)[\int_0^a u(t)dt-\int_0^a u(t)dt]$$

$$=af(\frac{1}{a}\int_0^a u(t)dt)\qquad (a>0)$$

$$\therefore\frac{1}{a}\int_a^b f[u(t)]dt\ge f[\frac{1}{a}\int_a^b u(t)dt]。$$

题目44证明题　　难

证明：若函数$f(x)$在$[0,+\infty)$一致连续，

且无穷积分$\int_0^{+\infty} f(x)dx$收敛，则$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ 。

解答_

设$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\neq 0$，则$\exists\varepsilon_0>0$，$\forall \mathrm{n}\in \mathrm{N}$，$\exists x_n>\mathrm{n}$，有$|\mathrm{f}(\mathrm{x_n})|\geq\varepsilon_0$

从而，存在数列$\{x_n\}$，且$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=+\infty$，有$|\mathrm{f}(\mathrm{x_n})|\geq\varepsilon_0$

已知$f(x)$在$[0,+\infty)$上一致连续，即对$\dfrac{\varepsilon_0}{2}>0,\exists\delta>0$,

使$\forall x'$、$x''\in[a,+\infty)$,$|x'-x''|\leq\delta$,，有$|f(x')-f(x'')|<\dfrac{\varepsilon_0}{2}$

从而$\forall x\in[x_n,x_n+\delta]$,$|x-x_n|\leq\delta$,

有$|f(x)-f(x_n)|>\dfrac{\varepsilon_0}{2}\ |f(x)\geq|f(x_n)|-|f(x_n)-f(x)|>\varepsilon_0-\dfrac{\varepsilon_0}{2}=\dfrac{\varepsilon_0}{2}$ (1)

$\forall x\in[x_n,x_n+\delta]$，$f(x)$与$f(x_n)$必同号，否则若$f(x)$与$f(x_n)$异号，则有

$|f(x)-f(x_n)|=|f(x)|+|f(x_n)|>\varepsilon_0$，矛盾!

若$f(x_n)>0$，则$f(x)>0$，由(1)式，有$f(x)>\dfrac{\varepsilon_0}{2}$，

从而$\int_{x_n}^{x_n+\delta} f(x)dx>\dfrac{\varepsilon_0}{2}\int_{x_n}^{x_n+\delta}dx=\dfrac{\varepsilon_0\delta}{2}$

若$f(x_n)<0$，则$f(x)<0$，有$f(x)<-\dfrac{\varepsilon_0}{2}$，

从而$\int_{x_n}^{x_n+\delta} f(x)dx<-\dfrac{\varepsilon_0}{2}\int_{x_n}^{x_n+\delta}dx=-\dfrac{\varepsilon_0\delta}{2}$或$\left|\int_{x_n}^{x_n+\delta} f(x)dx\right|>\dfrac{\varepsilon_0\delta}{2}$

于是存在正常数$\dfrac{\varepsilon_0\delta}{2}>0$，$\forall n\in N$,有$\left|\int_{x_n}^{x_n+\delta} f(x)dx\right|>\dfrac{\varepsilon_0\delta}{2}$

根据柯西收敛准则的否定叙述,$\int_0^{+\infty} f(x)dx$发散，

这与已知条件矛盾!

$\therefore\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0$。

2003年12月02日

3 微积分在积分不等式中的应用

不等式是数量之间大小的比较，而通过比较可以显示出变量变化之间相互制约的关系．因此，从某种意义上来讲,

积分不等式也不例外.在数学分析中积分比等式的尤为重要．许多的积分不等式在数学分析中都起到了至关重要的作用．所以对积分不等式的研究无论是实际应用，还是理论分析都有重要的意义．

3.1 微分证明积分不等式

微分在积分不等式中的应用主要是利用微分中值定理、泰勒公式、函数的单调性、极值、最值、凸函数法等来证明积分不等式．以下对这些方法分别做详细的介绍.

3.1.1 Lagrange中值定理证明积分不等式

引理3.1.1.1[10]（Lagrange中值定理）如果函数 $y=f(x)$，满足下列条件:

(1)在闭区间 $\left[a,b\right]$上连续；

(2)在开区间 (a,b) 内可导，

则在区间 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使得

$$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

由于 ξ 在 a,b 之间，因此 $f'(\xi)$ 将有一个取值范围，即 $f'(\xi)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ 有一个取值范围，这样就得到了一个不等式．因此，可利用 ξ 在区间 (a,b) 内的特点证明积分不等式.

例3.1.1.1 若函数 $f(x)$ 在 $\left[a,b\right]$上具有连续的导数，且 $f(a)=f(b)=0$. 试证明 $\max\limits_{x\in[a,b]}\left|f^{'}(x)\right|\geq\dfrac{4}{(b-a)^2}\displaystyle\int_a^b\left|f(x)\right|dx$.

证 由于 $\displaystyle\int_a^b\left|f(x)\right|dx=\int_a^{\frac{a+b}{2}}\left|f(x)\right|dx+\int_{\frac{a+b}{2}}^b\left|f(x)\right|dx$，

记 $M=\max\limits_{x\in[a,b]}\left|f^{'}(x)\right|$. 由Lagrange中值定理知

$$\begin{aligned}\left|f(x)\right| &= \left|f(a)+f^{'}(\xi)(x-a)\right| \\ &\le M\left|x-a\right|\end{aligned},$$

其中 $x\in(a,\dfrac{a+b}{2})$， $\xi\in(a,x)$.

$$\begin{aligned}\left|f(x)\right| &= \left|f(b)+f^{'}(\eta)(b-x)\right| \\ &\le M\left|x-b\right|\end{aligned},$$

其中 $x\in(\dfrac{a+b}{2},b)$， $\eta\in(x,b)$.

因此

$$\begin{aligned}\int_a^{\frac{a+b}{2}}\left|f(x)\right|dx &\le \int_a^{\frac{a+b}{2}}M\left|x-a\right|dx \\ &= \int_a^{\frac{a+b}{2}}M(x-a)dx\ ; \\ &= \frac{M(b-a)^2}{8}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_{\frac{a+b}{2}}^{b}\left|f(x)\right|dx &\le \int_{\frac{a+b}{2}}^{b}M\left|x-b\right|dx \\ &= \int_{\frac{a+b}{2}}^{b}M(b-x)dx\ . \\ &= \frac{M(b-a)^2}{8}\end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned}\int_a^b\left|f(x)\right|dx &\le \frac{M(b-a)^2}{8}+\frac{M(b-a)^2}{8} \\ &= M\cdot\frac{(b-a)^2}{4}\end{aligned},$$

即 $M\ge\dfrac{4}{(b-a)^2}\int_a^b\left|f(x)\right|dx$.

例3.1.1.2 设函数 $f(x)$ 在 $[0,2]$上具有连续的导数， $f(0)=f(2)=1$，且 $\left|f^{'}(x)\right|\le 1$，证明： $\int_0^2 f(x)dx\ge 1$.

证 由Lagrange中值定理知

$$\begin{aligned}f(x) &= f(0)+f^{'}(\xi)x \\ &= 1+f^{'}(\xi)x\end{aligned},$$

其中 $(0<x<1,0<\xi<x)$;

$$\begin{aligned} f(x) &= f(2) + f^{'}(\eta)(x-2) \\ &= 1 + f^{'}(\eta)(x-2) \end{aligned},$$

其中$(1 < x < 2，x < \eta < 2)$.

所以

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(x)dx &\geq \int_0^1 1dx - \int_0^1 \left| f^{'}(\xi)x \right| dx \\ &\geq 1 - \int_0^1 xdx \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned};$$

$$\begin{aligned} \int_1^2 f(x)dx &\geq \int_1^2 1dx - \int_1^2 \left| f^{'}(\eta)(x-2) \right| dx \\ &\geq 1 - \int_1^2 (2-x)dx \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}.$$

因此

$$\begin{aligned} \int_1^2 f(x)dx &= \int_0^1 f(x)dx + \int_1^2 f(x)dx \\ &\geq 1 \end{aligned}.$$

例3.1.1.3 设$f(x)$在$[a,b]$上可导，且$f^{'}(x) \leq M$，$f(a)=0$，求证：

$$\int_a^b f(x)dx \leq \frac{M}{2}(b-a)^2.$$

证 由Lagrange中值定理知

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x) - f(a) \\ &= f^{'}(\varepsilon)(x-a) \end{aligned}.$$

其中$\varepsilon \in (a,x)$

又$f^{'}(x) \leq M$，$f(a)=0$，故$f(x) \leq M(x-a)$.

则

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)dx &\leq \int_a^b M(x-a)dx \\ &= \frac{M}{2}(b-a)^2 \end{aligned}.$$

3.1.2 Taylor公式证明积分不等式

引理3.1.2.1[10]（Taylor中值定理） 如果函数$f(x)$中含有x_0的某个开区间(a,b)内具有直到$n+1$阶的导数，对意$x \in (a,b)$有

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2$$
$$+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x)$$

（3.1.2.1）

其中 $R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$，

（3.1.2.2）

这里ξ是x_0与x之间的某个值.

公式（3.1.2.1）称为$f(x)$按$(x-x_0)$的幂展开的带有Lagrange型余项的n阶Taylor公式，而R_n表达式（3.1.2.2）称为Lagrange型余项.

利用泰勒公式证明积分不等式的一般方法是将函数$f(x)$在所给区间的端点或特定点（如区间的中点、零点）展开，通过分析余项在点ξ的性质，从而得到结果.

例3.1.2.1 设函数$f(x)$在$[a,b]$上具有连续的二阶导数，$f(a)=f(b)=0$，令$M=\max\limits_{x\in[a,b]}\left|f''(x)\right|$，证明$\left|\int_a^b f(x)dx\right|\le\frac{M}{12}(b-a)^3$.

证 对$\forall x\in[a,b]$，由Taylor公式知

$$f(a)=f(x)+f'(x)(a-x)+\frac{f''(\xi)}{2}(a-x)^2,\ a<\xi<b.$$

注意到$f(a)=f(b)=0$，因此有

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx&=-\int_a^b f'(x)(a-x)dx-\int_a^b\frac{f''(\xi)}{2}(a-x)^2dx\\&=-f(x)(x-a)\Big|_a^b-\int_a^b f(x)dx-\int_a^b\frac{f''(\xi)}{2}(a-x)^2dx,\\&=-\int_a^b f(x)dx-\int_a^b\frac{f''(\xi)}{2}(a-x)^2dx\end{aligned}$$

移项，整理得

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b f(x)dx\right|&\le\frac{M}{4}\int_a^b(a-x)^2dx\\&=\frac{M}{12}(b-a)^3\end{aligned}.$$

例3.1.2.2 设函数$f(x)$在$[0,2]$上具有连续的二阶导数，且$f(1)=0$，证明：

$\int_0^2 f(x)dx \le \frac{1}{3}\max_{x\in[0,2]}\left|f''(x)\right|$.

证 由Taylor公式知，对$\forall x\in[0,2]$，将$f(x)$在$x=1$处展开，得

$$f(x)=f(1)+f'(1)(x-1)+\frac{f''(\varepsilon)}{2!}(x-1)^2,\quad \varepsilon\in(x,1).$$

由 $f(x)=0$，有

$$\begin{aligned}\left|\int_0^2 f(x)dx\right| &\le \left|f'(1)\right|\left|\int_0^2 (x-1)dx\right|+\frac{1}{2}\max_{x\in[0,2]}\left|f''(x)\right|\int_0^2 (x-1)^2dx \\ &\le \frac{1}{3}\max_{x\in[0,2]}\left|f''(x)\right|\end{aligned}.$$

故命题成立.

例3.1.2.3 设函数$f(x)$在$[a,b]$上具有二阶连续的导数，且$f(\frac{a+b}{2})=0$，

记$M=\sup_{x\in[a,b]}\left|f''(x)\right|$，试证明：

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right|\le M\frac{(b-a)^3}{24}.$$

证 将$f(x)$在$x=\frac{a+b}{2}$点Taylor展开，并注意到$f(\frac{a+b}{2})=0$. 得

$$f(x)=f'(\frac{a+b}{2})(x-\frac{a+b}{2})+\frac{f''(\xi)}{2!}(x-\frac{a+b}{2})^2,$$

因此

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx &= f'(\frac{a+b}{2})\int_a^b (x-\frac{a+b}{2})dx+\frac{1}{2!}\int_a^b f''(\xi)(x-\frac{a+b}{2})^2dx \\ &= \frac{1}{2!}\int_a^b f''(\xi)(x-\frac{a+b}{2})^2dx\end{aligned}.$$

故

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b f(x)dx\right| &\le \frac{1}{2!}\int_a^b \left|f''(\xi)\right|(x-\frac{a+b}{2})^2dx \\ &\le M\frac{(b-a)^3}{24}\end{aligned}.$$

3.1.3 函数的单调性证明积分不等式

单调函数是一类很重要的函数，常在积分不等式证明中使用，运用导数可

以判断出函数的单调性.

引理3.1.3.1[10] 设函数 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导.

（1）如果在 (a,b) 内 $f'(x)>0$，那么函数 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调递增；

（2）如果在 (a,b) 内 $f'(x)<0$，那么函数 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调递减.

利用函数的增减性证明积分不等式的步骤为：

（1）通过恒等变换(形)构造合适的辅助函数 $F(x)$（构造辅助函数一般的方法是，直接将不等号右端项移至不等号左端，令不等号右端为零，左端即为所求的辅助函数）；

（2）求 $F(x)$ 在所给区间上的一阶导数，然后判别一阶导数在此区间上的符号；

（3）有时需要求 $F(x)$ 在所给区间端点的函数值或极限，以便作出比较，即可得到所要证明的结果.

例3.1.3.1 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，且单调递减，$f(x)>0$. 求证对满足

$0<\alpha<\beta<1$ 的任何 α，β 有 $\beta\int_0^\alpha f(x)dx>\alpha\int_\alpha^\beta f(x)dx$.

证 令 $F(x)=x\int_0^\alpha f(t)dt-\alpha\int_\alpha^x f(t)dt$，$x\ge\alpha$，

由题意可知

$$\begin{aligned}F'(x)&=\int_0^\alpha f(t)dt-\alpha f(x)\\&=\int_0^\alpha [f(t)-f(x)]dt.\\&>0\end{aligned}$$

因此 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上单调递增，从而 $F(\beta)>0(0<\alpha<\beta<1)$.

即 $\beta\int_0^\alpha f(x)dx>\alpha\int_\alpha^\beta f(x)dx$.

例3.1.3.2 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且单调递增，证明

$$\int_a^b xf(x)dx\ge\frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)dx.$$

证 构造辅助函数 $F(t)=\int_a^t xf(x)dx-\frac{a+t}{2}\int_a^t f(x)dx$，

显然 $F(a)=0$，对任意的 $t\in[a,b]$，有

$$
\begin{aligned}
F'(t) &= tf(t) - \frac{1}{2}\int_a^t f(x)dx - \frac{a+t}{2}f(t) \\
&= \frac{t-a}{2}f(t) - \frac{1}{2}\int_a^t f(x)dx \qquad , \\
&= \frac{1}{2}\int_a^t [f(t) - f(x)]dx
\end{aligned}
$$

其中 $x \in (a,t)$.

因为 $f(x)$ 单调递增，则 $F'(t) \geq 0$，故 $F(t)$ 单调递增，

因此 $F(b) \geq F(a) = 0$.

故

$$\int_a^b xf(x)dx \geq \frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)dx .$$

例3.1.3.3 设 $f(x)$， $g(x)$ 和它们的平方在区间 $[a,b]$ 上可积，证明不等式（Schwarz不等式）

$$(\int_a^b f(x)g(x)dx)^2 \leq \int_a^b f^2(x)dx \int_a^b g^2(x)dx .$$

证 构造函数

令 $F(t) = \int_a^t f^2(x)dx \int_a^t g^2(x)dx - (\int_a^t f(x)g(x)dx)^2$，

则当 $t \geq a$ 时，

$$
\begin{aligned}
F^{'}(t) &= \int_a^t f^2(t)g^2(x)dx + \int_a^t f^2(x)g^2(t)dx - 2f(t)g(t)\int_a^t f(x)g(x)dx \\
&= \int_a^t (f(t)g(x) - f(x)g(t))^2 dx \qquad . \\
&\geq 0
\end{aligned}
$$

于是可知 $F(t)$ 单调不减，又 $F(a) = 0$，所以 $F(b) \geq 0$.

即得证 $(\int_a^b f(x)g(x)dx)^2 \leq \int_a^b f^2(x)dx \int_a^b g^2(x)dx$.

3.1.4 函数凹凸性证明积分不等式

定义3.1.4.1[10]

设 $f(x)$ 在区间 I 上有定义, 若对 I 上的任意任意两点 x_1, x_2 和任意实数 $\lambda \in (0,1)$ 恒有

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2) ,$$

则称 $f(x)$ 在 I 上是凸函数. 反之，如果总有

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geq \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2) ,$$

则称 $f(x)$ 在 I 上是凹函数.

如果函数 $f(x)$ 在 I 内具有二阶导数,那么就能利用二阶导数的符号来判定曲线的凹凸性.下面就是曲线凹凸性的判定定理.

引理3.1.4.1[10] 设 $f(x)$ 在区间 I 上二阶可导,那么

(1)若在 I 上 $f''(x)\geq 0$,则 $f(x)$ 在 I 上为凸函数;

(2)若在 I 上 $f''(x)\leq 0$,则 $f(x)$ 在上 I 为凹函数.

例3.1.4.1 设 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上连续的凸函数，即对 $\forall x_1,x_2\in[a,b]$，$x_1<x_2$，及 $\forall\lambda\in[0,1]$，有

$$f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)\leq\lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2).$$

试证明：$f(\frac{a+b}{2})\leq\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\leq\frac{f(a)+f(b)}{2}$.

证

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx&=\frac{1}{2}\int_a^b[f(x)+f(a+b-x)]dx\\&=\int_a^b\frac{f(x)+f(a+b-x)}{2}dx\\&\geq\int_a^b f(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}(a+b-x))dx\quad.\\&=\int_a^b f(\frac{a+b}{2})dx\\&=(b-a)f(\frac{a+b}{2})\end{aligned}$$

从而得左不等式，下证右不等式

$\forall x\in[a,b]$，有 $x=\frac{b-x}{b-a}a+\frac{x-a}{b-a}b$，

从而 $f(x)\leq\frac{b-x}{b-a}f(a)+\frac{x-a}{b-a}f(b)$.

两边积分得 $\int_a^b f(x)dx\leq\frac{b-a}{2}(f(a)+f(b))$.

于是得右不等式.

故命题成立.

3.2 积分证明积分不等式

3.2.1 定积分性质证明积分不等式

运用定积分的性质证明积分不等式是比较简单的做法，在解某些积分不等式时，能得出良好的结果.

例3.2.1.1 若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $f(x)>0$，求证：

$$\ln(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx)\geq\frac{1}{b-a}\int_a^b \ln f(x)dx.$$

证 将区间 $[a,b]$ 进行n等分，并设 $x_i=a+\frac{i}{n}(b-a)$，$(i=0,1,\cdots,n)$.

于是，$\Delta x_i=\frac{(b-a)}{n}$.利用 $\ln x$ 在 $(0,+\infty)$ 是凹函数，则

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\ln f(x_i)\leq\ln\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}f(x_i).$$

即 $\frac{1}{b-a}\sum_{i=1}^{n}\ln f(x_i)\Delta x_i\leq\ln(\frac{1}{b-a}\sum_{i=1}^{n}f(x_i)\Delta x_i)$.

由假设条件知，$f(x)$ 与 $\ln f(x)$ 在 $[a,b]$ 上都连续，因此可积，在上式中令 $n\to+\infty$，则由定积分定义及 $\ln f(x)$ 的连续性可得：

$$\frac{1}{b-a}\sum_{i=1}^{n}\ln f(x_i)\Delta x_i\leq\ln(\frac{1}{b-a}\sum_{i=1}^{n}f(x_i)\Delta x_i).$$

故 $\ln(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx)\geq\frac{1}{b-a}\int_a^b \ln f(x)dx$.

例3.2.1.2 已知 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，对任意的x, y都有 $|f(x)-f(y)|<M|x-y|$. 求证：$\left|\int_n^1 f(x)dx-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f(\frac{k}{n})\right|\leq\frac{M}{2n}$

证 由于 $\int_n^1 f(x)dx=\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}f(x)dx$

因此

$$\begin{aligned}\left|\int_n^1 f(x)dx-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f(\frac{k}{n})\right| &= \left|\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}f(x)dx-\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}f(\frac{k}{n})dx\right| \\ &\le \sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}\left|f(x)-f(\frac{k}{n})\right|dx \\ &\le M\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}\left|x-\frac{k}{n}\right|dx \\ &= \frac{M}{2n}\end{aligned}.$$

故命题成立.

3.2.2 Schwarz不等式证明积分不等式

引理3.2.2.1[11]（Schwarz不等式）

若函数$f(x),g(x)$在区间$[a,b]$上皆可积，则

$$[\int_a^b f(x)g(x)dx]^2\le\int_a^b f^2(x)dx\int_a^b g^2(x)dx.$$

例3.2.2.1

设函数$f(x)$在$[a,b]$上连续，$f(x)>0$，且$\int_a^b f(x)dx=1$，试证明：

$$(\int_a^b f(x)\cos kxdx)^2+(\int_a^b f(x)\sin kxdx)^2\le 1.\ (k\text{为实数})$$

证 由Schwarz不等式知，

$$\begin{aligned}(\int_a^b f(x)\cos kxdx)^2 &= (\int_a^b\sqrt{f(x)}\cdot\sqrt{f(x)}\cos kx)^2 \\ &\le\int_a^b(\sqrt{f(x)})^2dx\int_a^b(\sqrt{f(x)}\cos kx)^2dx \\ &=\int_a^b f(x)dx\int_a^b f(x)\cos^2 kxdx \\ &=\int_a^b f(x)\cos^2 kxdx.\end{aligned}$$

同理可得$(\int_a^b f(x)\sin kxdx)^2\le\int_a^b f(x)\sin^2 kxdx$.

因此

$$\begin{aligned}(\int_a^b f(x)\cos kxdx)^2+(\int_a^b f(x)\sin kxdx)^2 &\le\int_a^b f(x)(\cos^2 kx+\sin^2 kx)dx \\ &=\int_a^b f(x)dx \\ &=1\end{aligned}.$$

例3.2.2.2 设$a>0$，试证明：

$$\int_0^{\pi} xa^{\sin x}dx\int_0^{\frac{\pi}{2}} a^{-\sin x}dx \geq \frac{\pi^3}{4}.$$

证 作变换 $x=t+\frac{\pi}{2}$，则 $\int_0^{\pi} xa^{\sin x}dx=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} a^{\sin x}dx$.

由Schwarz不等式可得

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} xa^{\sin x}dx\int_0^{\frac{\pi}{2}} a^{-\sin x}dx &= \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}(a^{\frac{\sin x}{2}})^2dx\int_0^{\frac{\pi}{2}}(a^{\frac{-\sin x}{2}})^2dx \\ &\geq \pi(\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1dx)^2 \\ &= \frac{\pi^3}{4}\end{aligned}.$$

故结论成立.

例3.2.2.3 试证明：

$$\frac{1}{4}\pi(a+b)\leq\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x}dx\leq\frac{1}{4}\pi\sqrt{2(a^2+b^2)}.$$

证 由Schwarz不等式得

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x}dx &\leq \sqrt{\frac{\pi}{2}}(\int_0^{\frac{\pi}{2}}(a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x)dx)^{\frac{1}{2}} \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{2}}(\frac{\pi}{4}(a^2+b^2))^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{4}\pi\sqrt{2(a^2+b^2)}\end{aligned}.$$

即积分不等式的右半边为真.下证积分不等式的左半边为真.

因为

$$\begin{aligned}(a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x)-(a\sin^2 x+b\cos^2 x)^2 &= (a-b)^2\sin^2 x\cos^2 x \\ &\geq 0\end{aligned},$$

所以

$$a\sin^2 x+b\cos^2 x\leq\sqrt{a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x},$$

积分便得

$$\begin{aligned}\frac{1}{4}\pi(a+b) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}(a\sin^2 x+b\cos^2 x)dx \\ &\leq \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x}dx\end{aligned}.$$

综上，命题得证.

3.2.3 重积分证明积分不等式

当积分不等式中出现两个积分，可以将两个积分的积分变量换成不同符号，即化为二重积分，从而再求出结果.

例3.2.3.1 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $f(x)>0$，证明：

$$\int_a^b f(x)dx\int_a^b \frac{1}{f(x)}dx \ge (b-a)^2 .$$

证 记

$$\begin{aligned} I &= \int_a^b f(x)dx\int_a^b \frac{1}{f(x)}dx \\ &= \int_a^b f(y)dy\int_a^b \frac{1}{f(x)}dx , \\ &= \iint_D \frac{f(y)}{f(x)}dxdy \end{aligned}$$

且

$$\begin{aligned} I &= \int_a^b f(x)dx\int_a^b \frac{1}{f(x)}dx \\ &= \int_a^b f(x)dx\int_a^b \frac{1}{f(y)}dy , \\ &= \iint_D \frac{f(x)}{f(y)}dxdy \end{aligned}$$

两式相加，得

$$\begin{aligned} 2I &= \iint_D (\frac{f(x)}{f(y)}+\frac{f(y)}{f(x)})dxdy \\ &\ge 2\iint_D dxdy , \\ &= 2(b-a)^2 \end{aligned}$$

其中 $\dfrac{f(x)}{f(y)}>0$，

即 $\int_a^b f(x)dx\int_a^b \frac{1}{f(x)}dx \ge (b-a)^2$.

例3.2.3.2 设函数 $f(x)$ 是 $[0,1]$ 上单调递减且恒大于0的连续函数，求证：

$$\frac{\int_0^1 xf^2(x)dx}{\int_0^1 xf(x)dx} \le \frac{\int_0^1 f^2(x)dx}{\int_0^1 f(x)dx} .$$

证 令

$$
\begin{aligned}
I &= \int_0^1 xf(x)dx\int_0^1 f^2(x)dx - \int_0^1 xf^2(x)dx\int_0^1 f(x)dx \\
&= \int_0^1 xf(x)dx\int_0^1 f^2(y)dy - \int_0^1 f(x)dx\int_0^1 yf^2(y)dy \\
&= \int_0^1\int_0^1 f^2(y)f(x)(x-y)dxdy
\end{aligned}
$$

同理 $I=\int_0^1\int_0^1 f(y)f^2(x)(y-x)dxdy$ 两边相加整理得：

$$2I=\int_0^1\int_0^1 f(x)f(y)(x-y)[f(y)-f(x)]dxdy.$$

由于 $f(x)>0$ 且在 $[0,1]$ 上单调递减，因此，$(x-y)(f(y)-f(x))\ge 0$，

从而 $I\ge 0$，故命题得证.

3.2.4 积分中值定理证明积分不等式

引理3.2.4.1[11]（积分第一中值定理）

若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则至少存在一点 $\xi\in[a,b]$，使得

$$\int_a^b f(x)dx=f(\xi)(b-a).$$

引理3.2.4.2[11]（推广的积分第一中值定理）

若 $f(x)$ 与 $g(x)$ 都在 $[a,b]$ 上连续，且 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上不变号，则至少存在一点 $\xi\in[a,b]$，使得

$$\int_a^b f(x)g(x)dx=f(\xi)\int_a^b g(x)dx.$$

引理3.2.4.3[11]（积分第二中值定理） 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积.

（i）若函数 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上递减，且 $g(x)\ge 0$，则存在 $\xi\in[a,b]$，使得

$$\int_a^b f(x)g(x)dx=g(a)\int_a^\xi f(x)dx;$$

（ii）若函数 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上递增，且 $g(x)\ge 0$，则存在 $\eta\in[a,b]$，使得

$$\int_a^b f(x)g(x)dx=g(b)\int_\eta^b f(x)dx.$$

引理3.2.4.4[11]（推广的积分第二中值定理）

设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积. 若 $g(x)$ 为单调函数，则存在 $\xi\in[a,b]$，使得

$$\int_a^b f(x)g(x)dx=g(a)\int_a^\xi f(x)dx+g(b)\int_\xi^b f(x)dx.$$

例3.2.4.1 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续且单调递增，求证：

$$\int_a^b xf(x)dx\ge\frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)dx.$$

证1 （推广的积分第一中值定理）

因为$\int_a^b xf(x)dx \ge \frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)dx \Leftrightarrow \int_a^b (x-\frac{a+b}{2})f(x)dx \ge 0$.

又

$$\begin{aligned}\int_a^b (x-\frac{a+b}{2})f(x)dx &= \int_a^{\frac{a+b}{2}} (x-\frac{a+b}{2})f(x)dx + \int_{\frac{a+b}{2}}^b (x-\frac{a+b}{2})f(x)dx \\ &= f(\varepsilon)\int_a^{\frac{a+b}{2}} (x-\frac{a+b}{2})dx + f(\eta)\int_{\frac{a+b}{2}}^b (x-\frac{a+b}{2})dx, \\ &= \frac{(b-a)^2}{8}\left[f(\varepsilon)-f(\eta)\right] \\ &\ge 0\end{aligned}$$

其中$\varepsilon \in \left[a,\frac{a+b}{2}\right]$，$\eta \in \left[\frac{a+b}{2},b\right]$.

故 $\int_a^b xf(x)dx \ge \frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)dx$.

证2 （推广的积分第二中值定理）

因为$f(x)$单调，由积分第二中值定理得

$$\begin{aligned}\int_a^b (x-\frac{a+b}{2})f(x)dx &= f(a)\int_a^{\varepsilon} (x-\frac{a+b}{2})dx + f(b)\int_{\varepsilon}^b (x-\frac{a+b}{2})dx \\ &= \frac{1}{2}\left[(\frac{b-a}{2})^2-(\varepsilon-\frac{a+b}{2})^2\right]\left[f(b)-f(a)\right]\end{aligned},$$

其中$\varepsilon \in [a,b]$.

而（$\frac{b-a}{2})^2-(\varepsilon-\frac{a+b}{2})^2 \ge 0$，$f(b)-f(a) \ge 0$.

又因为$f(x)$单调递增，故$\int_a^b (x-\frac{a+b}{2})f(x)dx \ge 0$.

例3.2.4.2 设函数$f(x)$在$[0,1]$上有定义，而且单调不减，证明：对于任何$a \in (0,1)$有

$$\int_0^a f(x)dx \ge a\int_0^1 f(x)dx.$$

证 （推广的积分第一中值定理）

对任意$a \in (0,1)$，由$\int_0^1 f(x)dx = \int_0^a f(x)dx + \int_a^1 f(x)dx$，

得$\int_0^a f(x)dx - a\int_0^1 f(x)dx = (1-a)\int_0^a f(x)dx - a\int_a^1 f(x)dx$.

函数$f(x)$在$[0,1]$上有定义，且单调不减，即是说$f(x)$在$[0,1]$连续.

从而

$$\begin{aligned}\int_0^a f(x)dx - a\int_0^1 f(x)dx &= (1-a)\int_0^a f(x)dx - a\int_0^1 f(x)dx \\ &= (1-a)f(\varepsilon)\int_0^a 1dx - af(\eta)\int_a^1 1dx, \\ &= a(1-a)f(\varepsilon) - a(1-a)f(\eta) \\ &= a(1-a)(f(\varepsilon) - f(\eta))\end{aligned}$$

其中 $\varepsilon \in (0,1)$，$\eta \in (0,1)$，

再 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有定义，且单调不减，而 $\varepsilon \in (0,1)$，$\eta \in (0,1)$，
于是 $f(\varepsilon) > f(\eta)$，即 $\int_0^a f(x)dx \geq a\int_0^1 f(x)dx$.

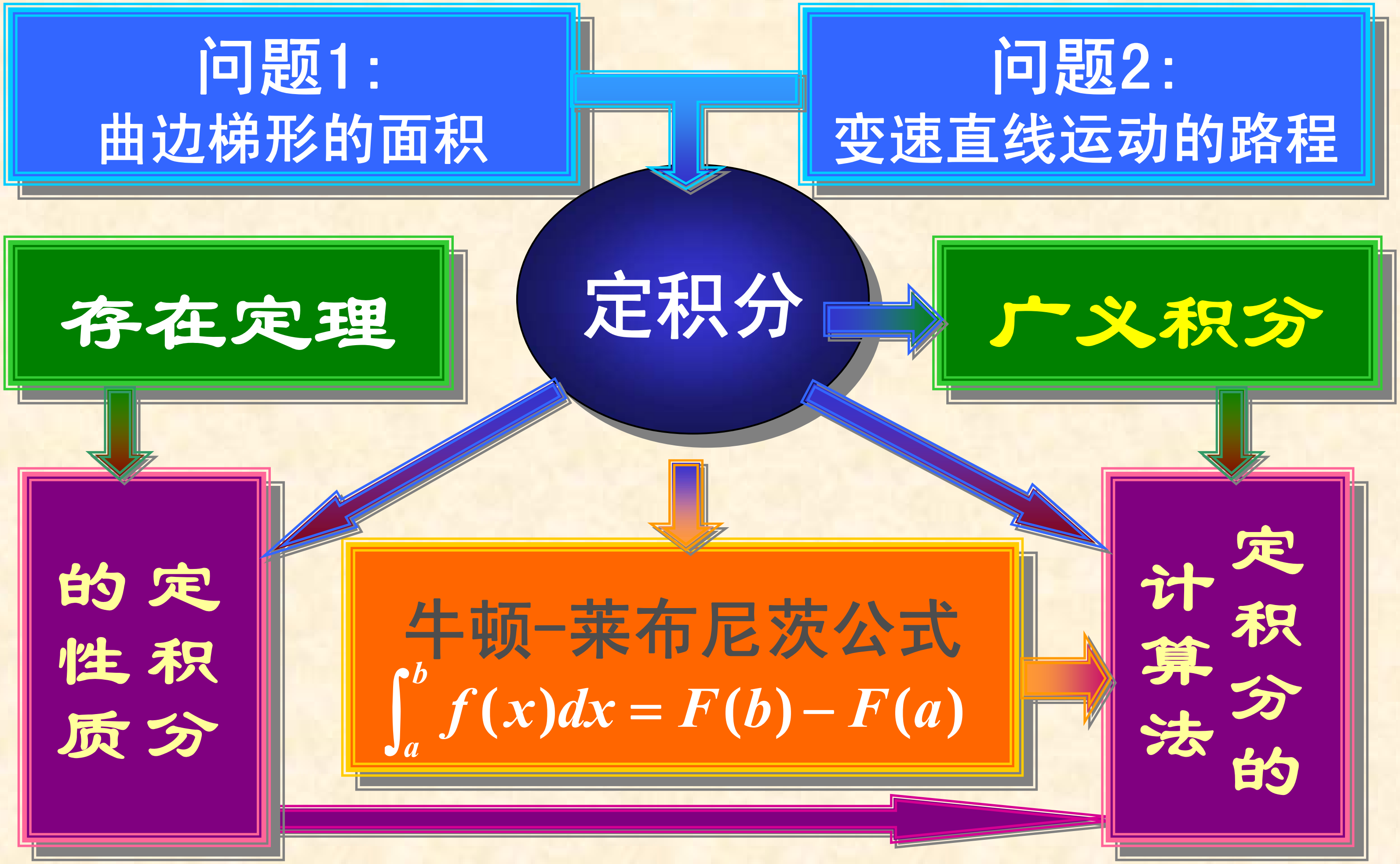
第五章 习题课

定积分

- 一、主要内容
- 二、典型例题

下页 返回

一、主要内容


问题1：
曲边梯形的面积
问题2：
变速直线运动的路程
定积分
存在定理
广义积分
定积分的性质
牛顿-莱布尼茨公式
$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$
定积分的计算法

1、问题的提出

实例1 （求曲边梯形的面积A）

曲边梯形由连续曲线 $y=f(x)(f(x)\geq 0)$、

x轴与两条直线$x=a$、$x=b$所围成.

$$A=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i$$

实例2 （求变速直线运动的路程）

设某物体作直线运动，已知速度$v=v(t)$是时间间隔$[T_1,T_2]$上t的一个连续函数，且$v(t)\geq 0$，求物体在这段时间内所经过的路程 S.

$$s=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}v(\tau_i)\Delta t_i$$

方法:分割、求和、取极限.

2、定积分的定义

定义 设函数$f(x)$在$[a,b]$上有界，在$[a,b]$中任意若干若干个分点

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

把区间$[a,b]$分成n个小区间，

$$[x_0, x_1],[x_1, x_2],\cdots[x_{n-1}, x_n],$$

各小区间的长度依次为$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$，$(i = 1,2,\cdots)$，

在各小区间上任取 一点ξ_i（$\xi_i \in \Delta x_i$），

作乘积 $f(\xi_i)\Delta x_i \quad (i=1,2,\cdots)$ 并作和 $S=\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$，

记 $\lambda=\max\{\Delta x_1,\Delta x_2,\cdots,\Delta x_n\}$，如果不论对 $[a,b]$

怎样的分法，也不论在小区间 $[x_{i-1},x_i]$ 上点 ξ_i 怎样

的取法，只要当 $\lambda\to 0$ 时，和 S 总趋于确定的极限 I，

我们称这个极限 I 为函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的定积分，

记为 $\int_a^b f(x)dx = I = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$.

3、存在定理

可积的两个充分条件:

定理1　当函数$f(x)$在区间$[a,b]$上连续时，

称$f(x)$在区间$[a,b]$上可积.

定理2　设函数$f(x)$在区间$[a,b]$上有界,

且只有有限个间断点，则$f(x)$在区间$[a,b]$上可积.

4、定积分的性质

性质1 $\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$

性质2 $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$ 　　(k 为常数)

性质3 假设$a < c < b$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

性质4 $\int_a^b 1\cdot dx=\int_a^b dx=b-a$

性质5 如果在区间$[a,b]$上$f(x)\geq 0$,

则$\int_a^b f(x)dx\geq 0 \qquad (a<b)$

推论:（1） 如果在区间$[a,b]$上$f(x)\leq g(x)$,

则$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx \qquad (a<b)$

（2） $\left|\int_a^b f(x)dx\right|\leq \int_a^b |f(x)|dx \qquad (a<b)$

性质6　设M及m分别是函数$f(x)$在区间$[a,b]$

上的最大值及最小值，

则　$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a).$$

性质7 (定积分中值定理)

如果函数$f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，

则在积分区间$[a,b]$上至少存在一个点ξ，

使$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a) \quad (a \le \xi \le b)$$

积分中值公式

5、牛顿—莱布尼茨公式

定理1 如果$f(x)$在$[a,b]$上连续，则积分上限的函数$\Phi(x)=\int_a^x f(t)dt$在$[a,b]$上具有导数，且它的导数是 $\Phi'(x)=\dfrac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt=f(x) \qquad (a\le x\le b)$

定理2（原函数存在定理）如果$f(x)$在$[a,b]$上连续，则积分上限的函数$\Phi(x)=\int_a^x f(t)dt$就是$f(x)$在$[a,b]$上的一个原函数.

定理 3（微积分基本公式） 如果$F(x)$是连续函数$f(x)$在区间$[a,b]$上的一个原函数，则

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

也可写成 $\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b$.

牛顿—莱布尼茨公式

表明：一个连续函数在区间 $[a,b]$ 上的定积分等于它的任一原函数在区间 $[a,b]$ 上的增量.

6、定积分的计算法

（1）定义

（2）性质

（3）换元法

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt$$

换元公式

（4）分部积分法

$$\int_a^b udv = [uv]_a^b - \int_a^b vdu$$

分部积分公式

7、广义积分

(1)无穷限的广义积分

$$\int_{a}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty}\int_{a}^{b} f(x)dx$$

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{b} f(x)dx$$

当极限存在时，称广义积分收敛；当极限不存在时，称广义积分发散.

(2)无界函数的广义积分

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t\to a^+}\int_t^b f(x)dx$$

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t\to b^-}\int_a^t f(x)dx$$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

$$= \lim_{\varepsilon\to+0}\int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx + \lim_{\varepsilon'\to+0}\int_{c+\varepsilon'}^b f(x)dx$$

当极限存在时，称广义积分收敛；当极限不存在时，称广义积分发散.

二、典型例题

例1 设 $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}+x^3\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$, 求 $f(x)$ 及 $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.

定积分是一个数

解 令 $a=\boxed{\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x,}$ 则 $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}+ax^3$

$$a=\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x+a\int_0^1 x^3\,\mathrm{d}x$$

$$=\arctan x\Big|_0^1+a\cdot\frac{1}{4}x^4\Big|_0^1=\frac{\pi}{4}+\frac{a}{4},\quad\therefore\quad a=\frac{\pi}{3}.$$

$$\therefore\quad f(x)=\frac{1}{1+x^2}+\frac{\pi}{3}x^3,\quad \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=a=\frac{\pi}{3}.$$

例2 求极限

$$I=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{n+1}+\frac{\sin\frac{2\pi}{n}}{n+\frac{1}{2}}+\cdots+\frac{\sin\pi}{n+\frac{1}{n}}\right).$$

解 $I=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\boxed{\dfrac{\sin\frac{i}{n}\pi}{n+\frac{1}{i}}}$

$$\frac{\sin\pi\frac{i}{n}}{n+\frac{1}{i}}\overset{?}{=}f\left(\frac{i}{n}\right)\cdot\frac{1}{n}$$

不是

$$\frac{\sin\pi\frac{i}{n}}{n+1}<\frac{\sin\pi\frac{i}{n}}{n+\frac{1}{i}}<\frac{\sin\pi\frac{i}{n}}{n}\qquad(i=1,2,\cdots,n)$$

$$\frac{\sin \pi \frac{i}{n}}{n+1} < \frac{\sin \pi \frac{i}{n}}{n+\frac{1}{i}} < \frac{\sin \pi \frac{i}{n}}{n} \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

$$\because \quad \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \sin \pi \frac{i}{n} \cdot \frac{1}{n}$$

$$= \int_0^1 \sin \pi x \,\mathrm{d}\, x = -\frac{1}{\pi} \cos \pi x \Big|_0^1 = \frac{2}{\pi}.$$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{\sin \pi \frac{i}{n}}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} \cdot \sum_{i=1}^{n} \sin \pi \frac{i}{n} \cdot \frac{1}{n}$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{\sin\pi\frac{i}{n}}{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}\cdot\sum_{i=1}^{n}\sin\pi\frac{i}{n}\cdot\frac{1}{n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}\cdot\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sin\pi\frac{i}{n}\cdot\frac{1}{n}$$

$$=1\cdot\int_0^1\sin\pi x\,\mathrm{d}\,x=\frac{2}{\pi}.$$

由夹逼准则，得

$$\therefore\quad I=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{\sin\frac{i}{n}\pi}{n+\frac{1}{i}}=\frac{2}{\pi}.$$

练习

1. 设 $f(x)=3x-\sqrt{1-x^2}\int_0^1 f^2(x)\,\mathrm{d}x$，求 $f(x)$.

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\ln\sqrt[n]{(1+\frac{1}{n})^2(1+\frac{2}{n})^2\cdots(1+\frac{n}{n})^2}=(\qquad)$.

(A) $\int_1^2 \ln^2 x\,\mathrm{d}x$ (B) $2\int_1^2 \ln x\,\mathrm{d}x$

(C) $2\int_1^2 \ln(1+x)\,\mathrm{d}x$ (D) $\int_1^2 \ln^2(1+x)\,\mathrm{d}x$

1. 设 $f(x)=3x-\sqrt{1-x^2}\int_0^1 f^2(x)\,\mathrm{d}x$, 求 $f(x)$.

解 令 $a=\int_0^1 f^2(x)\,\mathrm{d}x$, 则 $f(x)=3x-a\sqrt{1-x^2}$

$$f^2(x)=(3x-a\sqrt{1-x^2})^2$$

$$=9x^2-6ax\sqrt{1-x^2}+a^2(1-x^2)$$

等式两边积分:

$$a=\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x=\int_0^1[9x^2-6ax\sqrt{1-x^2}+a^2(1-x^2)]\mathrm{d}x$$

$$=3-2a+\frac{2}{3}a^2,$$

即 $2a^2-9a+9=0.$

即 $2a^2-9a+9=0,$

$$(2a-3)(a-3)=0$$

解得 $a=\frac{3}{2},\ \ a=3.$

$\therefore$ $f(x)=3x-\frac{3}{2}\sqrt{1-x^2}$

及 $f(x)=3x-3\sqrt{1-x^2}.$

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\ln\sqrt[n]{(1+\frac{1}{n})^2(1+\frac{2}{n})^2\cdots(1+\frac{n}{n})^2} = ($ **B** $)$.

(2004考研)

(A) $\int_1^2 \ln^2 x\,\mathrm{d}x$ (B) $2\int_1^2 \ln x\,\mathrm{d}x$

(C) $2\int_1^2 \ln(1+x)\,\mathrm{d}x$ (D) $\int_1^2 \ln^2(1+x)\,\mathrm{d}x$

解 $\lim\limits_{n\to\infty}\ln\sqrt[n]{(1+\frac{1}{n})^2(1+\frac{2}{n})^2\cdots(1+\frac{n}{n})^2}$

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\boxed{\ln(1+\frac{i}{n})^2\cdot\frac{1}{n}} = \int_0^1 \ln(1+x)^2\,\mathrm{d}x \overset{\text{或}}{=} \int_1^2 \ln t^2\,\mathrm{d}t$$

$(t = 1 + x)$

目录 上页 下页 返回 结束

例3 求 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\sin 2x}dx.$

解 原式 $=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{(\sin x-\cos x)^2}dx$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left|\sin x-\cos x\right|dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\cos x-\sin x)dx+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}(\sin x-\cos x)dx$$

$$=2\sqrt{2}-2.$$

例4　求 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sin x+\cos x}dx.$

解法1.　由 $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sin x+\cos x}dx$, 设 $J=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin x+\cos x}dx$,

则　$I+J=\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx=\frac{\pi}{2}$,

$$I-J=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x-\cos x}{\sin x+\cos x}dx=-\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d(\cos x+\sin x)}{\sin x+\cos x}=0.$$

故得 $2I=\frac{\pi}{2}$,　即 $I=\frac{\pi}{4}$.

解法2.

令 $\sin x = A(\sin x + \cos x) + B(\sin x + \cos x)'$

$$= (A - B)\sin x + (A + B)\cos x$$

则 $\begin{cases} A - B = 1 \\ A + B = 0 \end{cases}$ 解得 $A = \dfrac{1}{2},\quad B = -\dfrac{1}{2}.$

$$\therefore \quad I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x}\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} [\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{(\sin x + \cos x)'}{\sin x + \cos x}]\mathrm{d}x$$

$$= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln(\sin x + \cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}.$$

例5 求 $\int_0^{\ln 2}\sqrt{1-e^{-2x}}dx.$

x	0	$\ln 2$
t	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{6}$

解 令 $e^{-x}=\sin t,$

则 $x=-\ln\sin t,\ dx=-\frac{\cos t}{\sin t}dt.$

$$原式=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}}\cos t\left(-\frac{\cos t}{\sin t}\right)dt=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2 t}{\sin t}dt$$

$$=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{dt}{\sin t}-\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\sin t\,dt=\ln(2+\sqrt{3})-\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

例6 求 $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\sin 2x dx.$

解 令 $2x=t$, $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\sin 2x dx=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin t dt.$

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\sin 2x dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(2\sin x\cos x)dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\ln 2+\ln\sin x+\ln\cos x)dx$$

$$=\frac{\pi}{4}\ln 2+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\sin x dx+\boxed{\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\cos x dx}$$

$$\boxed{\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\cos x\,\mathrm{d}x}\overset{x=\frac{\pi}{2}-t}{=\!=}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}}\ln\cos\left(\frac{\pi}{2}-t\right)(-\mathrm{d}t)=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin t\,\mathrm{d}t$$

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\sin 2x dx$$

$$=\frac{\pi}{4}\ln 2+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\sin x dx+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin x dx$$

$$=\frac{\pi}{4}\ln 2+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin x dx=\frac{\pi}{4}\ln 2+2I$$

$$\therefore I=-\frac{\pi}{4}\ln 2.$$

例7 设$f(x)$在$[a,b]$上连续，

证明 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(|\cos x|)dx = \frac{1}{4}\int_0^{2\pi} f(|\cos x|)dx$.

证 $\int_0^{2\pi} f(|\cos x|)dx$

偶函数

$\underset{t=\pi-x}{\overset{x=\pi-t}{=\!=\!=}} \int_{\pi}^{-\pi} f(|\cos(\pi-t)|)(-dt) = \int_{-\pi}^{\pi} \boxed{f(|\cos t|)}dt$

$= 2\int_0^{\pi} f(|\cos t|)dt \underset{u=\frac{\pi}{2}-t}{\overset{t=\frac{\pi}{2}-u}{=\!=\!=}} 2\int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} f\left(\left|\cos\left(\frac{\pi}{2}-u\right)\right|\right)(-du)$

目录 上页 下页 返回 结束

偶函数

$$= 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \boxed{f(|\sin u|)}du$$

$$= 4\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(|\sin u|)du = 4\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(|\cos u|)du$$

即 $$\int_{0}^{2\pi} f(|\cos x|)dx = 4\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(|\cos x|)dx$$

$\therefore$ $$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(|\cos x|)dx = \frac{1}{4}\int_{0}^{2\pi} f(|\cos x|)dx.$$

例8 设 $F(x)=\int_0^x (x^2-t^2)f(t)dt$, $f(x)$可导，且$f(0)=0$. 证明：

(1) 若$f(x)$为偶函数，则 $F(x)$为奇函数；

(2) 若$f(x)>0(x>0)$, 则$F(x)$在$[0,+\infty)$上单调增加；

(3) 当$x\to 0$时， $F'(x)$与x^3是等价无穷小，求 $f'(0)$.

证 (1) $f(-x)=f(x)$

$$\because\ F(-x)=\int_0^{-x}[(-x)^2-t^2]f(t)dt$$

$$=\int_0^{-x}(x^2-t^2)f(t)dt$$

$$F(x)=\int_0^{-x}(x^2-t^2)f(t)dt$$

$$\xlongequal{令u=-t}\int_0^{x}[x^2-(-u)^2]f(-u)(-du)$$

$$=-\int_0^{x}(x^2-u^2)f(u)du \quad =-F(x)$$

$\therefore \quad F(x)$是奇函数

(2) $$F(x)=\int_0^{x}(x^2-t^2)f(t)dt$$

$$=x^2\cdot\int_0^{x}f(t)dt-\int_0^{x}t^2f(t)dt$$

$$F'(x)=2x\int_0^{x}f(t)dt+\cancel{x^2\cdot f(x)}-\cancel{x^2f(x)}$$

目录 上页 下页 返回 结束

$$F'(x)=2x\int_0^x f(t)dt$$

$\because \quad f(x)>0\ (x>0)$

$\therefore$ 当$x>0$时,$\int_0^x f(t)dt>0$

从而当 $x>0$时，$F'(x)>0$

又$\because F(x)$在$[0,+\infty)$上连续

$\therefore\ F(x)$在$[0,+\infty)$上单调增加.

(3) $1=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{F'(x)}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x\int_0^x f(t)dt}{x^3}$

$$= 2\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(t)dt}{x^2} \qquad (\frac{0}{0})$$

$$= 2\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{2x} = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} \qquad (f(0)=0)$$

$$= f'(0)$$

$$\therefore f'(0) = 1$$

例9 设 $f(x)$ 可导，且 $f(0)=0$,

$$F(x)=\int_0^x t^{n-1}f(x^n-t^n)dt,\quad (n\in N)$$

求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{F(x)}{x^{2n}}$.

解 $F(x)=\int_0^x t^{n-1}f(x^n-t^n)dt=\dfrac{1}{n}\int_0^x f(x^n-t^n)d(t^n)$

$$=-\frac{1}{n}\int_0^x f(x^n-t^n)d(x^n-t^n)$$

$$\underline{\underline{令u=x^n-t^n}}-\frac{1}{n}\int_{x^n}^0 f(u)du=\frac{1}{n}\int_0^{x^n} f(u)du$$

$$\therefore \quad F(x)=\frac{1}{n}\int_0^{x^n} f(u)du$$

$$F'(x)=\frac{1}{n}f(x^n)\cdot nx^{n-1}=f(x^n)\cdot x^{n-1}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{F(x)}{x^{2n}}=\lim_{x\to 0}\frac{F'(x)}{2nx^{2n-1}}=\frac{1}{2n}\lim_{x\to 0}\frac{f(x^n)\cdot x^{n-1}}{x^{2n-1}}$$

$$=\frac{1}{2n}\lim_{x\to 0}\frac{f(x^n)}{x^n}=\frac{1}{2n}\lim_{x\to 0}\frac{f(x^n)-f(0)}{x^n} \qquad (f(0)=0)$$

$$=\frac{1}{2n}f'(0)$$

练习3.

设 $f(x)$连续， $F(x)$是$f(x)$的原函数，则 (　A　).

(A) 当$f(x)$是奇函数时， $F(x)$必是偶函数；

(B) 当$f(x)$是偶函数时， $F(x)$必是奇函数；

(C) 当$f(x)$是周期函数时， $F(x)$也是周期函数；

(D) 当$f(x)$是单调增加函数时， $F(x)$必是单调增加函数.

(A) 当$f(x)$是奇函数时，$F(x)$必是偶函数；

解 $$F(x)=\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t+C$$

$$F(-x)=\int_0^{-x} f(t)\,\mathrm{d}t+C$$

$$\overset{u=-t}{=}\int_0^x f(-u)(-\mathrm{d}u)+C$$

$$=\int_0^x f(u)\,\mathrm{d}u+C=F(x).$$

$\therefore$ (A) ⌧

(B) 当 $f(x)$ 是偶函数时，$F(x)$ 必是奇函数；

反例：$f(x)=\cos x$ 偶函数

$F(x)=\sin x+1$ 无奇偶性

(C) 当 $f(x)$ 是周期函数时，$F(x)$ 也是周期函数；

反例：$f(x)=1+\cos x$ 周期函数

$F(x)=x+\sin x$ 非周期函数

(D) 当 $f(x)$ 是单调增加函数时，$F(x)$ 必是单调增加函数。反例：$f(x)=x$ 单调增

$F(x)=\frac{1}{2}x^2$ 无单调性。

练习4. 设 $F(x)=\int_x^{x+2\pi} e^{\sin t}\sin t\,dt$, 则 $F(x)$(A).

(A) 为正常数； (B) 为负常数；

(C) 恒为零； (D) 不为常数.

解法1 令 $f(t)=e^{\sin t}\sin t$, 则

若 $f(x)$连续, $f(x+T)=f(x)$,

则 $\int_a^{a+T} f(x)dx=\int_0^T f(x)dx.$

$$f(t+2\pi)=f(t)$$

$$F(x)=\int_0^{2\pi} e^{\sin t}\sin t\,dt=\int_{-\pi}^{\pi} e^{\sin t}\sin t\,dt$$ 为常数

$$=\int_0^{\pi}(e^{\sin t}\sin t-e^{-\sin t}\sin t)\,dt$$

$$=\int_0^{\pi}(e^{\sin t}-e^{-\sin t})\sin t\,dt$$

$$\boxed{\begin{aligned}&\int_{-a}^{a}f(x)dx\\&=\int_0^a[f(x)+f(-x)]dx\end{aligned}}$$

$\because$ 当$t\in(0,\pi)$时, $\sin t>0$

$\therefore$ $e^{\sin t}-e^{-\sin t}>0$, $(e^{\sin t}-e^{-\sin t})\sin t>0$,

$\therefore$ $F(x)>0$且$F(x)$为常数. 选(A)

解法1 $F(x) = \int_0^{2\pi} e^{\sin t} \sin t \, dt$

$$= -\int_0^{2\pi} e^{\sin t} \, d(\cos t)$$

$$= -[e^{\sin t} \cos t \Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} e^{\sin t} \cos^2 t dt]$$

$$= \int_0^{2\pi} e^{\sin t} \cos^2 t dt > 0$$

类似题(提高练习题—2004年考研)

$$\text{设 } f(x)=\int_{x}^{x+\frac{\pi}{2}}|\sin t|\,\mathrm{d}t,$$

(1) 证明 $f(x)$是以π为周期的周期函数;

(2)求 $f(x)$的值域.

证(1) $f(x+\pi)=\int_{x+\pi}^{x+\frac{3\pi}{2}}|\sin t|\,\mathrm{d}t$

$$\overset{t=\pi+u}{=}\int_{x}^{x+\frac{\pi}{2}}|\sin(\pi+u)|\,\mathrm{d}u=\int_{x}^{x+\frac{\pi}{2}}|\sin u|\,\mathrm{d}u=f(x).$$

$\therefore$ $f(x)$是以π为周期的周期函数 .

解 (2) $f(x)=\int_{x}^{x+\frac{\pi}{2}}|\sin t|\,\mathrm{d}t,$

$\because\quad |\sin x|$在$(-\infty,+\infty)$上连续

$\therefore\quad f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上可导

又$\because\quad f(x)$以π为周期，故只需在 $[0,\pi]$上讨论$f(x)$的值域.

$$\because\quad f'(x)=\left|\sin(x+\frac{\pi}{2})\right|-|\sin x| = |\cos x|-|\sin x|$$

令 $f'(x)=0$，得驻点 $x_1=\dfrac{\pi}{4}$，$x_2=\dfrac{3\pi}{4}$.

$$f(\frac{\pi}{4})=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}}|\sin t|\,\mathrm{d}t=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}|\sin t|\,\mathrm{d}t=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\sin t\,\mathrm{d}t$$

$$=-\cos x\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}=\sqrt{2}$$

若 $f(x)$连续，$f(x+T)=f(x)$，

则 $\int_a^{a+T} f(x)dx=\int_0^T f(x)dx.$

$$f(\frac{3\pi}{4})=\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}}|\sin t|\,\mathrm{d}t=\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}|\sin t|\,\mathrm{d}t+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}}|\sin t|\,\mathrm{d}t$$

$$=-\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}|\sin t|\,\mathrm{d}t+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}+\pi}|\sin t|\,\mathrm{d}t$$

以π为周期

$$=-\sqrt{2}+\int_0^{\pi}\sin t\,\mathrm{d}t=-\sqrt{2}+2.$$

$$f(0)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}|\sin t|\,\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin t\,\mathrm{d}t=1$$

$$f(\pi)=\int_\pi^{\pi+\frac{\pi}{2}}|\sin t|\,\mathrm{d}t$$

$$=\int_\pi^{\frac{3\pi}{2}}(-\sin t)\,\mathrm{d}t=1$$

$\therefore$ $f(x)$在$[0,\pi]$上的最小值是 $2-\sqrt{2}$, 最大值是$\sqrt{2}$,

故 $f(x)$的值域是$[2-\sqrt{2}, 2]$.

练习5. 设$f(x)$连续，常数 $a>0$，证明：

$$\int_1^a f\left(x^2+\frac{a^2}{x^2}\right)\frac{dx}{x}=\int_1^a f\left(x+\frac{a^2}{x}\right)\frac{dx}{x}.$$

分析 显然要用换元法.

$$x=\varphi(t)=?$$

原则：先看被积函数，再看限.

令 $t=x^2\ (x=\sqrt{t})$，则

$$\int_1^a f(x^2+\frac{a^2}{x^2})\frac{dx}{x}=\int_1^a f(x^2+\frac{a^2}{x^2})\frac{dx^2}{2x^2}$$

$$\underline{\underline{令\ t=x^2}}\ \frac{1}{2}\int_1^{a^2} f(t+\frac{a^2}{t})\frac{dt}{t}$$

$$\boxed{右端=\int_1^a f(x+\frac{a^2}{x})\frac{dx}{x}}$$

$$=\frac{1}{2}[\int_1^a f(t+\frac{a^2}{t})\frac{dt}{t}+\underline{\int_a^{a^2} f(t+\frac{a^2}{t})\frac{dt}{t}}]$$

需证: $$\int_a^{a^2} f(t+\frac{a^2}{t})\frac{dt}{t}\overset{?}{=}\int_1^a f(t+\frac{a^2}{t})\frac{dt}{t}$$

需证: $\int_a^{a^2} f(t+\frac{a^2}{t})\frac{dt}{t} \overset{?}{=} \int_1^a f(t+\frac{a^2}{t})\frac{dt}{t}$

问: 能否作变换 $u=\frac{t}{a}$? 否

$$\int_a^{a^2} f(t+\frac{a^2}{t})\frac{dt}{t} = \int_1^a f(au+\frac{a}{u})\frac{du}{u}$$

被积函数未达到要求!

要求: $t+\frac{a^2}{t}=u+\frac{a^2}{u}$, 即 $(t-u)+a^2\frac{u-t}{ut}=0$

即 $(t-u)+a^2\dfrac{u-t}{ut}=0$

亦即 $(t-u)(1-\dfrac{a^2}{tu})=0$

$\therefore\quad 1-\dfrac{a^2}{tu}=0,\quad \boxed{u=\dfrac{a^2}{t}}$

证 $\displaystyle\int_1^a f(x^2+\frac{a^2}{x^2})\frac{dx}{x}=\int_1^a f(x^2+\frac{a^2}{x^2})\frac{dx^2}{2x^2}$

$\underline{\underline{令\ t=x^2}}\ \displaystyle\frac{1}{2}\int_1^{a^2} f(t+\frac{a^2}{t})\frac{dt}{t}$

$$=\frac{1}{2}\left[\int_1^a f\left(t+\frac{a^2}{t}\right)\frac{dt}{t}+\underline{\int_a^{a^2} f\left(t+\frac{a^2}{t}\right)\frac{dt}{t}}\right]$$

$$\int_a^{a^2} f\left(t+\frac{a^2}{t}\right)\frac{dt}{t} \xlongequal{令 u=\frac{a^2}{t}} \int_a^1 f\left(\frac{a^2}{u}+u\right)\frac{u}{a^2}\cdot\left(-\frac{a^2}{u^2}\right)du$$

$$=\int_1^a f\left(u+\frac{a^2}{u}\right)\frac{du}{u}=\int_1^a f\left(t+\frac{a^2}{t}\right)\frac{dt}{t}$$

代入上式，得

$$\int_1^a f\left(x^2+\frac{a^2}{x^2}\right)\frac{dx}{x}=\int_1^a f\left(x+\frac{a^2}{x}\right)\frac{dx}{x}.$$

例10 求 $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}[\frac{\sin x}{x^8+1}+\sqrt{\ln^2(1-x)}]dx.$

解　原式 $=0+\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}|\ln(1-x)|dx$

$$=\int_{-\frac{1}{2}}^{0}\ln(1-x)dx-\int_{0}^{\frac{1}{2}}\ln(1-x)dx$$

$$=\frac{3}{2}\ln\frac{3}{2}+\ln\frac{1}{2}.$$

例11 求 $\int_{-2}^{2}\min\{\frac{1}{|x|},x^2\}dx.$

解 $\because \min\{\frac{1}{|x|},x^2\}=\begin{cases} x^2, & |x|\le 1 \\ \frac{1}{|x|}, & |x|>1 \end{cases}$ 是偶函数,

$$原式 = 2\int_0^2 \min\{\frac{1}{|x|},x^2\}dx$$

$$= 2\int_0^1 x^2dx + 2\int_1^2 \frac{1}{x}dx = \frac{2}{3} + 2\ln 2.$$

例12 设 $f(x)=\int_0^x e^{-y^2+2y}dy$,求 $\int_0^1 (x-1)^2 f(x)dx$.

解　原式 $=\frac{1}{3}\int_0^1 f(x)d(x-1)^3$

$$=\frac{1}{3}[(x-1)^3 f(x)\Big|_0^1-\int_0^1 (x-1)^3 f'(x)dx]$$

$$=\frac{1}{3}\{[0+\underbrace{f(0)]}_{0}-\int_0^1 (x-1)^3 e^{-x^2+2x}dx\}$$

$$=-\frac{1}{6}\int_0^1 (x-1)^2 e^{-(x-1)^2+1}d[(x-1)^2]$$

$$\underline{\underline{令 (x-1)^2=u}}\ -\frac{e}{6}\int_1^0 ue^{-u}du=-\frac{1}{6}(e-2).$$

例13 设 $p>0$， 证明： $\dfrac{p}{p+1}<\int_0^1\dfrac{dx}{1+x^p}<1.$

证 $\because$ $\dfrac{1}{1+x^p}$在$[0,1]$上连续，且

当$x\in(0,1),\ p>0$时，有

$$1-x^p<\frac{1}{1+x^p}=1-\frac{x^p}{1+x^p}<1$$

而 $\displaystyle\int_0^1(1-x^p)dx=1-\frac{x^{p+1}}{p+1}\bigg|_0^1=\frac{p}{p+1}$

$$\therefore\ \frac{p}{p+1}=\int_0^1(1-x^p)dx<\int_0^1\frac{dx}{1+x^p}<\int_0^1 dx=1$$

例14 求下列广义积分：

$$(1)\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{e^{1+x}+e^{3-x}};\quad (2)\int_1^{2}\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{3x^2-2x-1}}.$$

解 (1) 原式 $=\int_1^{+\infty}\frac{e^{-(1+x)}}{1+e^{2-2x}}\mathrm{d}x$

$$=\int_1^{+\infty}\frac{e^{-2}\cdot e^{1-x}}{1+(e^{1-x})^2}\mathrm{d}x=-e^{-2}\lim_{b\to+\infty}\int_1^{b}\frac{1}{1+(e^{1-x})^2}\mathrm{d}(e^{1-x})$$

$$=-e^{-2}\lim_{b\to+\infty}\arctan e^{1-x}\Big|_1^{b}=-e^{-2}\lim_{b\to+\infty}(\arctan e^{1-b}-\frac{\pi}{4})$$

$$=\frac{\pi}{4e^2}.$$

(2) $\because \lim\limits_{x\to 1} f(x) = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1}{x\sqrt{3x^2-2x-1}} = \infty,$

$\therefore x = 1$ 为 $f(x)$ 的瑕点.

$$原式 = \lim_{t\to 1^+} \int_t^2 \frac{dx}{x\sqrt{3x^2-2x-1}}$$

$$= \lim_{t\to 1^+} \left[-\int_t^2 \frac{d(1+\frac{1}{x})}{\sqrt{2^2-(1+\frac{1}{x})^2}}\right]$$

$$= -\lim_{t\to 1^+} \arcsin \frac{1+\frac{1}{x}}{2}\Bigg|_t^2 = \frac{\pi}{2} - \arcsin\frac{3}{4}.$$

测 验 题

一、选择题：

1、$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{n^2+1}+\dfrac{n}{n^2+2^2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n^2}\right)=$（　　）

（A）0；　　（B）$\dfrac{1}{2}$；

（C）$\dfrac{\pi}{4}$；　　（D）$\dfrac{\pi}{2}$．

2、$\dfrac{d}{dx}\int_0^x \ln(t^2+1)\,dt=$（　　）

（A）$\ln(x^2+1)$；　　（B）$\ln(t^2+1)$；

（C）$2x\ln(x^2+1)$；　　（D）$2t\ln(t^2+1)$．

3、$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x \sin t^2 dt}{x^3}$ =(　　　)

（A）0；　　　　　　（B）1；

（C）$\dfrac{1}{3}$；　　　　　　（D）∞ .

4.、定积分$\int_0^1 e^{\sqrt{x}}dx$的值是（　　　）

（A）e；　　　　　　（B）$\dfrac{1}{2}$；

（C）$e^{\frac{1}{2}}$；　　　　　　（D）2 .

5、下列积分中，使用变换正确的是（　　）

（A）$\int_0^{\pi}\frac{dx}{1+\sin^3 x}$，令 $x=\arctan t$；

（B）$\int_0^{3} x\sqrt[3]{1-x^2}dx$，令 $x=\sin t$；

（C）$\int_{-1}^{2}\frac{x\ln(1+x^2)}{1+x^2}dx$，令 $1+x^2=u$；

（D）$\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}dx$，令 $x=t^{\frac{1}{3}}$.

6、下列积分中，值为零的是（　　）

（A）$\int_{-1}^{1}x^2dx$；　　（B）$\int_{-1}^{2}x^3dx$；

（C）$\int_{-1}^{1}dx$；　　（D）$\int_{-1}^{1}x^2\sin x dx$.

7、已知$f(0)=1$，$f(2)=3$，$f'(2)=5$，

则$\int_0^2 xf''(x)dx=$（　）

（A）12；　　（B）8；

（C）7；　　（D）6.

8、设$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1+x}, & x\geq 0\\ \dfrac{1}{1+e^x}, & x<0\end{cases}$，则定积分$\int_0^2 f(x-1)dx$

=（　）

（A）$1+\ln(1+\frac{1}{e})$；　　（B）$2-\ln(1+e^2)+\ln 3$；

（C）$1+\ln(1+\frac{1}{e})+\ln 2$；　　（D）$1-\ln(1+\frac{1}{e})$.

9、广义积分$\int_{2}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+x-2}=$（　　）

（A）$\ln 4$ ；　　（B）0；

（C）$\frac{1}{3}\ln 4$；　　（D）发散.

10、广义积分$\int_{0}^{2}\frac{dx}{x^2-4x+3}=$（　　）

（A）$1-\ln 3$；　　（B）$\frac{1}{2}\ln\frac{2}{3}$；

（C）$\ln 3$；　　（D）发散.

二、证明不等式:

$$\frac{1}{2} \leq \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^n}} \leq \frac{\pi}{6}, \quad (n>2).$$

三、求下列函数的导数:

1、$F(x)=\int_{x^2}^{x^3} \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}$;

2.、由方程$\int_0^y e^{t^2} dt+\int_0^{x^2} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt=1$，确定 y 为 x 的函数，求$\frac{dy}{dx}$.

四、求下列定积分：

1、$\int_1^4 \frac{dx}{x(1+\sqrt{x})}$；　　2、$\int_0^a \frac{dx}{x+\sqrt{a^2-x^2}}$；

3、$\int_0^3 \arcsin\sqrt{\frac{x}{1+x}}dx$；　　4、$\int_{-2}^5 |x^2-2x-3|dx$；

5、$\int_{-1}^1 \frac{dx}{1+2^{\frac{1}{x}}}$；　　6、$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+4x+9}$；

7、$\int_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{3x^2-2x-1}}$；　　8、$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x-1}}dx$.

五、 设$f(x)$在$[0,1]$上有连续导数，$f(0)=0$，且$0<f'(x)\le 1$，试证：

$$\left[\int_0^1 f(x)dx\right]^2 \ge \int_0^1 [f(x)]^3 dx.$$

六、 设$f(x)$在[0，1]上有二阶连续导数，证明：

$$\int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{2}[f(0)+f(1)] - \frac{1}{2}\int_0^1 x(1-x)f''(x)dx.$$

测验题答案

一、1、C；　2、A；　3、C；　4、D；　5、C；

6、D；　7、B；　8、A；　9、C；　10、D.

三、1、$\dfrac{3x^2}{\sqrt{1+x^{12}}}-\dfrac{2x}{\sqrt{1+x^8}}$；　2、$\pm 2e^{-y^2}\sin x^2$.

四、1、$2\ln\dfrac{4}{3}$；　2、$\dfrac{\pi}{4}$；　3、$\dfrac{4}{3}\pi-\sqrt{3}$；　4、$\dfrac{71}{3}$；

5、1；　6、$\dfrac{\pi}{\sqrt{5}}$；　7、$\dfrac{\pi}{2}-\arcsin\dfrac{3}{4}$；　8、$\pi$.