

## 正、余弦和差化积公式

指[高中数学三角函数](#)部分的一组[恒等式](#)

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2\sin[(\alpha + \beta)/2] \cdot \cos[(\alpha - \beta)/2]$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2\cos[(\alpha + \beta)/2] \cdot \sin[(\alpha - \beta)/2]$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2\cos[(\alpha + \beta)/2] \cdot \cos[(\alpha - \beta)/2]$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2\sin[(\alpha + \beta)/2] \cdot \sin[(\alpha - \beta)/2] \quad \text{【注意右式前的$$

负号】

以上四组公式可以由[积化和差](#)公式推导得到

### 证明过程

$\sin \alpha + \sin \beta = 2\sin[(\alpha + \beta)/2] \cdot \cos[(\alpha - \beta)/2]$ 的证明过程

因为

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta,$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta,$$

将以上两式的左右两边分别相加，得

$$\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) = 2\sin \alpha \cos \beta,$$

$$\text{设 } \alpha + \beta = \theta, \quad \alpha - \beta = \phi$$

那么

$$\alpha = (\theta + \phi)/2, \quad \beta = (\theta - \phi)/2$$

把  $\alpha$ ， $\beta$  的值代入，即得

$$\sin \theta + \sin \phi = 2\sin[(\theta + \phi)/2] \cos[(\theta - \phi)/2]$$

### [编辑本段](#)正切的和差化积

$$\tan \alpha \pm \tan \beta = \sin(\alpha \pm \beta) / (\cos \alpha \cdot \cos \beta) \quad (\text{附证明})$$

$$\cot \alpha \pm \cot \beta = \sin(\beta \pm \alpha) / (\sin \alpha \cdot \sin \beta)$$

$$\tan \alpha + \cot \beta = \cos(\alpha - \beta) / (\cos \alpha \cdot \sin \beta)$$

$$\tan \alpha - \cot \beta = -\cos(\alpha + \beta) / (\cos \alpha \cdot \sin \beta)$$

证明：左边 =  $\tan \alpha \pm \tan \beta = \sin \alpha / \cos \alpha \pm \sin \beta / \cos \beta$

$$= (\sin \alpha \cdot \cos \beta \pm \cos \alpha \cdot \sin \beta) / (\cos \alpha \cdot \cos \beta)$$

$$= \sin(\alpha \pm \beta) / (\cos \alpha \cdot \cos \beta) = \text{右边}$$

$\therefore$  等式成立

### [编辑本段](#)注意事项

在应用和差化积时，必须是一次同名三角函数方可实行。若是异名，必须用[诱导公式](#)化为同名；若是高次函数，必须用[降幂公式](#)降为一次

口诀

正加正，正在前，余加余，余并肩

正减正，余在前，余减余，负正弦

反之亦然

生动的口诀：（和差化积）

帅+帅=帅哥

帅-帅=哥帅

咕+咕=咕咕

哥-哥=负嫂嫂

反之亦然

### 编辑本段记忆方法

和差化积公式的形式比较复杂，记忆中以下几个方面是难点，下面指出了各自的简单记忆方法。

### 结果乘以 2

这一点最简单的记忆方法是通过三角函数的值域判断。 $\sin$  和  $\cos$  的值域都是  $[-1, 1]$ ，其积的值域也应该是  $[-1, 1]$ ，而和差的值域却是  $[-2, 2]$ ，因此乘以 2 是必须的。

也可以通过其证明来记忆，因为展开两角和差公式后，未抵消的两项相同而造成有系数 2，如：

$$\begin{aligned} & \cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta) \\ &= [\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta] - [\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta] \\ &= 2\sin\alpha\sin\beta \end{aligned}$$

故最后需要乘以 2。

### 只有同名三角函数能和差化积

无论是正弦函数还是余弦函数，都只有同名三角函数的和差能够化为乘积。这一点主要是根据证明记忆，因为如果不是同名三角函数，两角和差公式展开后乘积项的形式都不同，就不会出现相抵消和相同的项，也就无法化简下去了。

### 乘积项中的角要除以 2

在和差化积公式的证明中，必须先把  $\alpha$  和  $\beta$  表示成两角和差的形式，才能够展开。熟知要使两个角的和、差分别等于  $\alpha$  和  $\beta$ ，这两个角应该是  $(\alpha + \beta)/2$  和  $(\alpha - \beta)/2$ ，也就是乘积项中角的形式。

注意和差化积和积化和差的公式中都有一个“除以 2”，但位置不同；而只有和差化积公式中有“乘以 2”。

### 使用哪两种三角函数的积

这一点较好的记忆方法是拆分成两点，一是是否同名乘积，二是“半差角”  $(\alpha - \beta)/2$  的三角函数名。

是否同名乘积，仍然要根据证明记忆。注意两角和差公式中，余弦的展开中含有两对同名三角函数的乘积，正弦的展开则是两对异名三角函数的乘积。所以，余弦的和差化作同名三角函数的乘积；正弦的和差化作异名三角函数的乘积。

$(\alpha - \beta)/2$  的三角函数名规律为：和化为积时，以  $\cos(\alpha - \beta)/2$  的形式出现；反之，以  $\sin(\alpha - \beta)/2$  的形式出现。

由函数的奇偶性记忆这一点是最便捷的。如果要使和化为积，那么  $\alpha$  和  $\beta$  调换位置对结果没有影响，也就是若把  $(\alpha - \beta)/2$  替换为  $(\beta - \alpha)/2$ ，结果应当是一样的，从而  $(\alpha - \beta)/2$  的形式是  $\cos(\alpha - \beta)/2$ ；另一种情况可以类似说明。

### 余弦-余弦差公式中的顺序相反/负号

这是一个特殊情况，完全可以死记下来。

当然，也有其他方法可以帮助这种情况的判定，如  $(0, \pi]$  内余弦函数的单调性。因为这个区间内余弦函数是单调减的，所以当  $\alpha$  大于  $\beta$  时， $\cos \alpha$  小于  $\cos \beta$ 。但是这时对应的  $(\alpha + \beta)/2$  和  $(\alpha - \beta)/2$  在  $(0, \pi)$  的范围内，其正弦的乘积应大于 0，所以要么反过来把  $\cos \beta$  放到  $\cos \alpha$  前面，要么就在式子的最前面加上负号。

### 积化和差公式

$\sin \alpha \sin \beta = [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]/2$ （注意：此时差的余弦在和的余弦前面）

或写作： $\sin \alpha \sin \beta = -[\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta)]/2$ （注意：此时公式前有负号）

$$\cos \alpha \cos \beta = [\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)]/2$$

$$\sin \alpha \cos \beta = [\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)]/2$$

$$\cos \alpha \sin \beta = [\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)]/2$$

### [编辑本段](#)证明

积化和差恒等式可以通过展开角的和差恒等式的右手端来证明。

即只需要把等式右边用两角和差公式拆开就能证明：

$$\begin{aligned} \sin \alpha \sin \beta &= -1/2[-2\sin \alpha \sin \beta] \\ &= -1/2[(\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta) - (\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta)] \\ &= -1/2[\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta)] \end{aligned}$$

其他的 3 个式子也是相同的证明方法。

（参见[和差化积](#)）

### [编辑本段](#)作用

积化和差公式可以将两个三角函数值的积化为另两个三角函数值的和乘以常数的形式，所以使用积化和差公式可以达到降次的效果。

在历史上，[对数](#)出现之前，积化和差公式被用来将乘除运算化为加减运算，运算需要利用三角函数表。

运算过程：将两个数通过乘、除 10 的方幂化为 0 到 1 之间的数，通过查表求出对应的反三角函数值，即将原式化为  $10^k \sin \alpha \sin \beta$  的形式，套用积化和差后再次查表求三角函数的值，并最后利用加减算出结果。

对数出现后，积化和差公式的这个作用由更加便捷的对数取代。

### [编辑本段](#)记忆方法

积化和差公式的形式比较复杂，记忆中以下几个方面是难点，下面指出了各自的简单记忆方法。

#### 结果除以 2

这一点最简单的记忆方法是通过三角函数的值域判断。 $\sin$  和  $\cos$  的值域都是  $[-1, 1]$ ，其和差的值域应该是  $[-2, 2]$ ，而积的值域确是  $[-1, 1]$ ，因此除以 2 是必须的。

也可以通过其证明来记忆，因为展开两角和差公式后，未抵消的两项相同而造成有系数 2，如：

$$\begin{aligned} & \cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta) \\ &= (\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta) - (\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta) \\ &= 2 \sin \alpha \sin \beta \end{aligned}$$

故最后需要除以 2。

#### 使用同名三角函数的和差

无论乘积项中的三角函数是否同名，化为和差形式时，都应是同名三角函数的和差。这一点主要是根据证明记忆，因为如果不是同名三角函数，两角和差公式展开后乘积项的形式都不同，就不会出现相抵消和相同的项，也就无法化简下去了。

#### 使用哪种三角函数的和差

仍然要根据证明记忆。注意两角和差公式中，余弦的展开中含有两对同名三角函数的乘积，正弦的展开则是两对异名三角函数的乘积。所以反过来，同名三角函数的乘积，化作余弦的和差；异名三角函数的乘积，化作正弦的和差。

#### 是和还是差？

这是积化和差公式的使用中最容易出错的一项。规律为：“小角”  $\beta$  以  $\cos \beta$  的形式出现时，乘积化为**和**；反之，则乘积化为**差**。

由函数的奇偶性记忆这一点是最便捷的。如果  $\beta$  的形式是  $\cos \beta$ ，那么若把  $\beta$  替换为  $-\beta$ ，结果应当是一样的，也就是含  $\alpha + \beta$  和  $\alpha - \beta$  的两项调换位置对结果没有影响，从而结果的形式应当是和；另一种情况可以类似说明。

### 正弦-正弦积公式中的顺序相反/负号

这是一个特殊情况，完全可以死记下来。

当然，也有其他方法可以帮助这种情况的判定，如  $[0, \pi]$  内余弦函数的单调性。因为这个区间内余弦函数是单调减的，所以  $\cos(\alpha + \beta)$  不大于  $\cos(\alpha - \beta)$ 。但是这时对应的  $\alpha$  和  $\beta$  在  $[0, \pi]$  的范围内，其正弦的乘积应大于等于 0，所以要么反过来把  $\cos(\alpha - \beta)$  放到  $\cos(\alpha + \beta)$  前面，要么就在式子的最前面加上负号。

## 万能公式

**【词语】：** 万能公式

**【释义】：** 应用公式  $\sin \alpha = \frac{2 \tan(\alpha/2)}{1 + [\tan(\alpha/2)]^2}$

$\cos \alpha = \frac{1 - \tan(\alpha/2)^2}{1 + [\tan(\alpha/2)]^2}$

$\tan \alpha = \frac{2 \tan(\alpha/2)}{1 - [\tan(\alpha/2)]^2}$

将  $\sin \alpha$ 、 $\cos \alpha$ 、 $\tan \alpha$  代换成  $\tan(\alpha/2)$  的式子，这种代换称为万能置换。

**【推导】：**（字符版）

$$\sin \alpha = 2 \sin(\alpha/2) \cos(\alpha/2) = \frac{2 \sin(\alpha/2) \cos(\alpha/2)}{[\sin(\alpha/2)]^2 + [\cos(\alpha/2)]^2} = \frac{2 \tan(\alpha/2)}{1 + (\tan \alpha/2)^2}$$

$$\cos \alpha = \frac{[\cos(\alpha/2)]^2 - [\sin(\alpha/2)]^2}{[\sin(\alpha/2)]^2 + [\cos(\alpha/2)]^2} = \frac{1 - \tan(\alpha/2)^2}{1 + (\tan \alpha/2)^2}$$

$$\tan \alpha = \frac{2 \tan(\alpha/2)}{1 - \tan(\alpha/2)^2}$$

The image shows a handwritten derivation of the universal formulas. It starts with the double-angle formula for sine:  $\sin \theta = 2 \sin(\frac{\theta}{2}) \cos(\frac{\theta}{2})$ . This is divided by  $[\sin(\frac{\theta}{2})]^2 + [\cos(\frac{\theta}{2})]^2$  to get  $\frac{2 \sin(\frac{\theta}{2}) \cos(\frac{\theta}{2})}{\sin^2(\frac{\theta}{2}) + \cos^2(\frac{\theta}{2})}$ . Using the identity  $\frac{\sin x}{\cos x} = \tan x$ , the numerator becomes  $2 \tan(\frac{\theta}{2})$  and the denominator becomes  $1 + \tan^2(\frac{\theta}{2})$ . The final result is  $\sin \theta = \frac{2 \tan \frac{\theta}{2}}{1 + \tan^2 \frac{\theta}{2}}$ . A similar process is shown for cosine, resulting in  $\cos \theta = \frac{1 - \tan^2 \frac{\theta}{2}}{1 + \tan^2 \frac{\theta}{2}}$ . For tangent, the double-angle formula  $\tan \theta = \frac{\tan(\frac{\theta}{2}) + \tan(\frac{\theta}{2})}{1 - \tan(\frac{\theta}{2}) \tan(\frac{\theta}{2})}$  is used, leading to  $\tan \theta = \frac{2 \tan \frac{\theta}{2}}{1 - \tan^2 \frac{\theta}{2}}$ .