在不等式证明中的妙用泰勒公式

张广军

（山东工商学院数学院）

摘 要 专题介绍泰勒公式在各类型不等式证明中的使用，进一步拓宽了泰勒公式的应用范围。

关键词 泰勒公式 不等式 导数

众所周知泰勒公式[1]在近似计算上有着独特的优势，利用它可以将非线性问题化为线性问题，并能满足很高的精确度要求。除此之外，还可以用泰勒公式求极限，判断级数的敛散性等。在这里，我们专门探讨泰勒公式在多种不等式证明中的使用方法。

1 证明含定积分不等式中的应用

泰勒公式在定积分不等式方面应用的关键在于（1）确定在哪一点 x_0 将函数展开（2）将函数展开到第几项为止。要解决好这两个关键，其中蕴含着一些技巧。

例1.设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调增加，且 $f''(x)>0$，证明 $\int_a^b f(x)dx<(b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}$。

分析：（1）因为在不等式右边出现了 $f(a)$ 与 $f(b)$，提示我们选择 $x_0=a, x_0=b$ 分别展开。（2）已知 $f''(x)>0$，所以最多只能展到含二阶导数项为止。

证明：对 $\forall x_0\in[a,b]$, $f(x)$ 在点 x_0 处的泰勒展开式为：

$f(x_0)=f(x)+f'(x)(t-x)+\frac{1}{2}f''(\xi)(t-x)^2$ 其中 ξ 在 x_0 与 x 之间

$$\because f''(\xi)>0,\therefore f(x_0)>f(x)+f'(x)(t-x) \tag{1}$$

令 $x_0=a, x_0=b$ 分别代入（1）并相加得

$$f(a)+f(b)>2f(x)+(a+b)f'(x)-2xf'(x) \tag{2}$$

对（2）式两边同时在 $[a,b]$ 定积分得

$$(b-a)[f(a)+f(b)]>2\int_a^b f(x)dx+(a+b)\int_a^b f'(x)dx-2\int_a^b xf'(x)dx$$

即 $(b-a)[f(a)+f(b)]>2\int_a^b f(x)dx+(a+b)[f(b)-f(a)]-2[xf(x)\big|_a^b-\int_a^b f(x)dx]$

$$\Rightarrow 2[f(a)+f(b)](b-a)>4\int_a^b f(x)dx$$

故 $\int_a^b f(x)dx<(b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}$

2 证明含导函数不等式中的应用

例2.设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上二阶可导，且 $f'(a)=f'(b)=0$ 试证存在一点 $\xi\in[a,b]$，使得 $|f''(\xi)|\ge\frac{4}{(b-a)^2}|f(b)-f(a)|$

证明：应用泰勒公式得

$$f(a)=f(\frac{a+b}{2})+\frac{f''(x_1)}{2}(\frac{a-b}{2})^2 \qquad x_1\in(a,\frac{a+b}{2}) \tag{3}$$

$$f(b)=f(\frac{a+b}{2})+\frac{f''(x_2)}{2}(\frac{a-b}{2})^2 \qquad x_2\in(\frac{a+b}{2},b) \tag{4}$$

从而 $|f(a)-f(b)|\le\left|f(b)-f(\frac{a+b}{2})\right|+\left|f(a)-f(\frac{a+b}{2})\right|$

$$=\frac{(b-a)^2}{4}\bullet\frac{1}{2}(|f''(x_1)|+|f''(x_2)|)$$

取 $|f''(\xi)|=\max\{\ |f''(x_1)|,|f''(x_2)|\ \}$，则 $\xi\in(a,b)$，

并有 $|f(b)-f(a)|\le\frac{1}{4}(b-a)^2|f''(\xi)|$.

3 证明代数不等式中的应用

例3.设 $a_i,b_i\ge0$，$i=1,2$ 若 $a_1+a_2=b_1+b_2>0$，则有

$$a_1^2+a_2^2>b_1^2+b_2^2 \quad\Leftrightarrow\begin{cases}a_1^p+a_2^p>b_1^p+b_2^p & p<0\text{或}p>1\\ a_1^p+a_2^p<b_1^p+b_2^p & 0<p<1\end{cases}$$

证明：1）易证当 p 为正整数 $(p\ge2)$ 时，有

$$a_1^2+a_2^2>b_1^2+b_2^2\Leftrightarrow a_1^p+a_2^p>b_1^p+b_2^p$$

2）在这里我们只证当 $0<p<1$ 时的充分性，

由泰勒公式知 $(1+x)^p=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{p(p-1)\cdots(p-n+1)}{n!}x^n$ （5）

不妨设 $a_1\le a_2, b_1\le b_2$，令 $a=a_1+a_2=b_1+b_2$ 为了保证级数收敛，先考虑 $a_1,a_2,b_1,b_2>0$ 的情形，将 $x=-\frac{a_i}{a},\ x=-\frac{b_i}{a}\ (i=1,2)$ 分别代入（5）得

$$\left(1-\frac{a_i}{a}\right)^p=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\alpha_n\left(\frac{a_i}{a}\right)^n,\ \left(1-\frac{b_i}{a}\right)^p=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\alpha_n\left(\frac{b_i}{a}\right)^n \tag{6}$$

这里 $\alpha_n=p(p-1)(p-2)\cdots(p-n+1)/n!$，由（6）得

$$(a_1^p+a_2^p)-(b_1^p+b_2^p)=a^p\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\alpha_n a^{-n}[(a_1^n+a_2^n)-(b_1^n+b_2^n)] \tag{7}$$

由 $0<p<1$ 知，当 $n\ge2$ 时，

$$(-1)^n\alpha_n=\frac{-p(1-p)(2-p)\cdots(n-1-p)}{n!}<0 \tag{8}$$

由（7）和（8）及1）知，$a_1^p+a_2^p<b_1^p+b_2^p$

当 $a_1=0$ 时，只需证 $(b_1+b_2)^p<b_1^p+b_2^p$ 若 $b_1=b_2$ 结论显然成立；当 $b_1\ne b_2$ 时，则有 $b_1<b_2$，由文献[2]知，$(1+x)^p<1+x^p\ (0<p<1,x\ne1)$ （9）

令 $x=\frac{b_1}{b_2}$ 代入（9）即得结果。

其必要性及其余的结论均可通过1）与2）和代数运算方法得到。

泰勒公式在不等式证明中的应用还有很多，在这里我们只列举了具有代表性的三种类型，有兴趣的读者可列举更多。

参考文献

[1] 同济大学应用数学系．高等数学(上册)[M]．北京：高等教育出版社，2002，137-142

[2] 刘一鸣，周家云，解际太．数学分析(上册)[M]．济南：山东大学出版社，1993，15

作者简介 张广军（1973-），山东工商学院讲师，东北财经大学在职硕士。

（收稿日期：2008·12·30）

（接172页）5 在教学过程中引入数学试验

随着Mathmatica、MathLab等数学软件的使用，高职数学中所涉及的数值计算、图形描绘已是轻而易举的常规操作。在有限的高职数学课时中抽出几个课时安排数学实验课，旨在培养学生数学建模及数据处理能力，使其在不断的应用与探索中领会数学与现代高新技术的完美结合，并获得现代科技所需要的数学知识与数学素质。

传统的数学教学，侧重于对学生运算技巧的培养。而对于技术应用型人才，从业以后不会要求他们用严密的逻辑来证明一个纯数学问题或公式，需要的往往是计算结果而非解题过程。把数学中一部分费时、计算复杂又极有使用价值的近似计算问题设计成实验课，让学生应用数学软件加以解决，这样大大地减轻了学生的计算工作，又把教师从繁杂的计算中解放出来，用更多的时间加强基本概念和应用方法的教学，大大地简化烦琐的运算过程，提高工作效率。通过数学实验，学生不仅获得了知识，还学会了研究问题的方法，最重要的是改变了学习数学的态度，从而提高了学生学数学、用数学的积极性。

6 结语

高职数学教学的新模式正在全国各高职院校中逐步形成。要适应新模式的要求，必须转变教育观念，改革教学内容，探索新的教学方法和教学手段，才能顺应高职教育快速发展的需要，才能培养出既掌握基本理论知识又能运用其解决实际问题的高素质高技能人才。

参考文献

[1] 刘明忠．以专业为导向探索高职数学教学新模式[J]．襄樊职业技术学院学报，2005,（2）：45-46

[2] 戴士弘．职业教育课程教学改革[M]．北京：清华大学出版社，2007

作者简介 冯兰军（1956-），女，副教授，毕业于河南大学，武汉大学软件工程硕士。

（收稿日期：2009·01·06）