巧用换元积分法一题九解

连 坡

（西北农林科技大学 理学院，陕西 杨凌 712100）

摘 要 运用换元积分法对一道不定积分习题给出了 9 种不同解法，探讨总结换元积分法使用中的一些常用技巧.

关键词 高等数学；换元法；不定积分

中图分类号 O172.2 **文献标识码** A **文章编号** 1008-1399(2011)06-0011-02

积分运算是求导运算或微分运算的逆运算，相对于函数求导，运算难度较大，是高等数学课堂教学一个难点. 课堂教学中，引导学生灵活运用各种换元积分方法，尝试一题多解，鼓励学生在实践中不断探索总结换元积分技巧，对于提高学生积分水平非常关键. 下面是作者在换元积分法一节课堂教学中，对一道积分习题给出的 9 种解法，供大家教学参考.

习题[1] 求解不定积分

$$I=\int\frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}\mathrm{d}x.$$

由题目有意义知 $0<x<1$.

当积分问题不能直接使用基本积分公式解决时，通常可以考虑把被积函数的形式向基本积分公式的形式进行变形，达到运用基本积分公式求解积分的目的.

解法 1 $I=\int\frac{1}{\sqrt{1-(2x-1)^2}}\mathrm{d}(2x-1)=$

$$\arcsin(2x-1)+C.$$

解法 2 $I=-\int\frac{1}{\sqrt{1-(1-2x)^2}}\mathrm{d}(1-2x)=$

$$\arccos(1-2x)+C.$$

掌握常用的换元方法（如三角代换、双曲代换、倒代换等），熟悉这些方法的使用特点和目的，针对所求解的积分问题对症下药，灵活运用.

解法 3 可令

$$x=\sin^2 t\quad\left(0<t<\frac{\pi}{2}\right),$$

那么

$$I=\int\frac{1}{\sin t\cos t}\mathrm{d}\sin^2 t=$$

$$\int\frac{1}{\sin t\cos t}\cdot 2\sin t\cos t\,\mathrm{d}t=$$

$$2t+C=2\arcsin\sqrt{x}+C.$$

解法 4 可令

$$x=\frac{1}{t},$$

则有

$$\mathrm{d}x=-\frac{1}{t^2}\mathrm{d}t,$$

那么

$$I=\int\frac{t}{\sqrt{t-1}}\cdot\left(-\frac{1}{t^2}\right)\mathrm{d}t=$$

$$-\int\frac{1}{t\sqrt{t-1}}\mathrm{d}t=$$

$$-2\int\frac{1}{t}\mathrm{d}\sqrt{t-1}=$$

$$-2\int\frac{1}{1+(\sqrt{t-1})^2}\mathrm{d}\sqrt{t-1}=$$

$$-2\mathrm{crctan}\sqrt{t-1}+C=$$

$$-2\arctan\sqrt{\frac{1-x}{x}}+C.$$

解法 5 可令

$$x=\frac{1}{\mathrm{ch}^2 t}\quad(t>0),$$

则有

$$\mathrm{d}x=-2\frac{\mathrm{sh}t}{\mathrm{ch}^3 t}\mathrm{d}t,$$

从而

$$I=\int\frac{\mathrm{ch}^2 t}{\mathrm{sh}t}\cdot\left(-2\frac{\mathrm{sh}t}{\mathrm{ch}^3 t}\right)\mathrm{d}t=$$

$$-2\int\frac{1}{\mathrm{ch}t}\mathrm{d}t=$$

$$-2\int\frac{1}{\mathrm{ch}^2 t}\mathrm{d}\,\mathrm{sh}t=$$

收稿日期：2011-03-18；**修改日期**：2011-09-12.

基金项目：西北农林科技大学教改项目(JY0902100).

作者简介：连坡(1962—)，男，陕西宝鸡人，副教授，主要从事应用数学研究. Email：lianpo3608@163.com.

$$-2\int \frac{1}{1+\mathrm{sh}^2 t}\mathrm{d}\,\mathrm{sh}t =$$

$$-2\arctan \mathrm{sh}t + C =$$

$$-2\arctan\sqrt{\frac{1-x}{x}} + C.$$

当被积函数是几个函数乘积的形式时，利用积分是微分逆运算的特点，选择其中一个因子为突破点，对被积函数逐步进行凑微元变形，改变微元，再把被积函数其余部分转化为新微元的表达式，利用积分公式求解.

解法 6 $$I = \int \frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{1-x}}\mathrm{d}x =$$

$$2\int \frac{1}{\sqrt{1-x}}\mathrm{d}\sqrt{x} =$$

$$2\int \frac{1}{\sqrt{1-(\sqrt{x})^2}}\mathrm{d}\sqrt{x} =$$

$$2\arcsin\sqrt{x} + C.$$

解法 7 $$I = \int \frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{1-x}}\mathrm{d}x =$$

$$-2\int \frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}\sqrt{1-x} =$$

$$-2\int \frac{1}{\sqrt{1-(\sqrt{1-x})^2}}\mathrm{d}\sqrt{1-x} =$$

$$-2\arcsin\sqrt{1-x} + C.$$

解法 8 $$I = \int \frac{1}{x\sqrt{\frac{1-x}{x}}}\mathrm{d}x =$$

$$\int \frac{1}{x}\cdot(-2x^2)\cdot \mathrm{d}\sqrt{\frac{1-x}{x}} =$$

$$-2\int x\mathrm{d}\sqrt{\frac{1-x}{x}} =$$

$$-2\int \frac{1}{1+\left(\sqrt{\frac{1-x}{x}}\right)^2}\mathrm{d}\sqrt{\frac{1-x}{x}} =$$

$$-2\arctan\sqrt{\frac{1-x}{x}} + C.$$

解法 9 $$I = \int \frac{1}{(1-x)\sqrt{\frac{x}{1-x}}}\mathrm{d}x =$$

$$\int \frac{1}{1-x}\cdot 2(1-x)^2\cdot \mathrm{d}\sqrt{\frac{x}{1-x}} =$$

$$2\int (1-x)\mathrm{d}\sqrt{\frac{x}{1-x}} =$$

$$2\int \frac{1}{1+\left(\sqrt{\frac{x}{1-x}}\right)^2}\mathrm{d}\sqrt{\frac{x}{1-x}} =$$

$$2\arctan\sqrt{\frac{x}{1-x}} + C.$$

从以上的 9 种解法中可以看出：当被积函数原函数不能由基本积分公式直接得出时，通常可利用换元积分法对被积函数进行变形，如化去根号、消去分母、整体代换等，再运用积分公式加以解决；根据被积函数的特点，可把被积函数分解成几个函数的乘积，利用凑微分法，改变积分变量，再把其余的被积函数化成关于新积分变量的表达式进行求解[2]；不定积分的结果是原函数的集合，通常是用一个原函数加任意常数的方式表达. 从本质上讲，一个函数的任意两个原函数只相差一个常数，但从形式上看，有时原函数差异很大，上面的例子就说明了这一点，因此不要拘泥于和参考答案一致，只要带任意常数的积分结果的导数等于被积函数，这个积分结果就是正确答案.

参考文献

[1] 同济大学数学系. 高等数学：上册[M]. 6 版. 北京：高等教育出版社，2007：193-207.

[2] 连坡. 分部积分法使用的几个技巧[J]. 高等数学研究. 2006，12(6)：37-39.

Nine Substitution Approaches for an Integral

LIAN Po

(School of Science, Northwest A&F University, Yangling 712100, PRC)

Abstract: By using substitutions, this paper provides nine different approaches for an indefinite integral, which illustrates some common substitution skills for integration.

Keywords: higher mathematics, substitution, indefinite integral