极限计算方法总结

《高等数学》是理工科院校最重要的基础课之一，极限是《高等数学》的重要组成部分。求极限方法众多，非常灵活，给同学们的学习带来较大困难，而极限学的好坏直接关系到《高等数学》后面内容的学习。下面先对极限概念和一些结果进行总结，然后通过例题给出求极限的各种方法，以便学员更好地掌握这部分知识。

一、极限定义、运算法则和一些结果

1．定义：（各种类型的极限的严格定义参见《高等数学》函授教材，这里不一一叙述）。

说明：（1）一些最简单的数列或函数的极限（极限值可以观察得到）都可以用上面的极限严格定义证明，例如：$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{b}{an}=0\ (a,b\text{为常数且}a\neq 0)$；$\lim\limits_{x\to 2}(3x-1)=5$；

$\lim\limits_{n\to\infty}q^n=\begin{cases}0,\quad \text{当}|q|<1\text{时}\\ \text{不存在},\text{当}|q|\geq 1\text{时}\end{cases}$；等等

（2）在后面求极限时，（1）中提到的简单极限作为已知结果直接运用，而不需再用极限严格定义证明。

2．极限运算法则

定理 1 已知 $\lim f(x)$，$\lim g(x)$ 都存在，极限值分别为 A，B，则下面极限都存在，

且有 （1）$\lim[f(x)\pm g(x)]=A\pm B$

（2）$\lim f(x)\cdot g(x)=A\cdot B$

（3）$\lim\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{A}{B},(\text{此时需}B\neq 0\text{成立})$

说明：极限号下面的极限过程是一致的；同时注意法则成立的条件，当条件不满足时，不能用。

3．两个重要极限

（1） $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$

（2） $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$ ； $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x=e$

说明：不仅要能够运用这两个重要极限本身，还应能够熟练运用它们的变形形式，

作者简介：靳一东，男，（1964—），副教授。

例如：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{3x}=1$，$\lim\limits_{x\to 0}(1-2x)^{\frac{1}{-2x}}=e$，$\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{3}{x})^{\frac{x}{3}}=e$；等等。

4．等价无穷小

定理 2 无穷小与有界函数的乘积仍然是无穷小（即极限是 0）。

定理 3 当 $x\to 0$ 时，下列函数都是无穷小（即极限是 0），且相互等价，即有：

$$x\sim\sin x\sim\tan x\sim\arcsin x\sim\arctan x\sim\ln(1+x)\sim e^{x}-1$$。

说明：当上面每个函数中的自变量 x 换成 $g(x)$ 时（$g(x)\to 0$），仍有上面的等价关系成立，例如：当 $x\to 0$ 时，$e^{3x}-1\sim 3x$；$\ln(1-x^2)\sim -x^2$。

定理 4 如果函数 $f(x),g(x),f_1(x),g_1(x)$ 都是 $x\to x_0$ 时的无穷小，且 $f(x)\sim f_1(x)$，$g(x)\sim g_1(x)$，则当 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f_1(x)}{g_1(x)}$ 存在时，$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 也存在且等于 $f(x)\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f_1(x)}{g_1(x)}$，即 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f_1(x)}{g_1(x)}$。

5．洛比达法则

定理 5 假设当自变量 x 趋近于某一定值（或无穷大）时，函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 满足：

（1）$f(x)$ 和 $g(x)$ 的极限都是 0 或都是无穷大；

（2）$f(x)$ 和 $g(x)$ 都可导，且 $g(x)$ 的导数不为 0；

（3）$\lim\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在（或是无穷大）；

则极限 $\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 也一定存在，且等于 $\lim\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$，即 $\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$。

说明：定理 5 称为洛比达法则，用该法则求极限时，应注意条件是否满足，只要有一条不满足，洛比达法则就不能应用。特别要注意条件（1）是否满足，即验证所求极限是否为“$\dfrac{0}{0}$”型或“$\dfrac{\infty}{\infty}$”型；条件（2）一般都满足，而条件（3）则在求导完毕后可以知道是否满足。另外，洛比达法则可以连续使用，但每次使用之前都需要注意条件。

6．连续性

定理 6 一切连续函数在其定义去间内的点处都连续，即如果 x_0 是函数 $f(x)$ 的定义去间内的一点，则有 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$ 。

7．极限存在准则

定理 7（准则 1） 单调有界数列必有极限。

定理 8（准则 2） 已知 $\{x_n\}$, $\{y_n\}$, $\{z_n\}$ 为三个数列，且满足：

（1） $y_n \le x_n \le z_n$, $(n=1,2,3,\cdots)$

（2） $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$， $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$

则极限 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 一定存在，且极限值也是 a ，即 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ 。

二、求极限方法举例

1． 用初等方法变形后，再利用极限运算法则求极限

例 1 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{3x+1}-2}{x-1}$

解：原式= $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(\sqrt{3x+1})^2-2^2}{(x-1)(\sqrt{3x+1}+2)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x-3}{(x-1)(\sqrt{3x+1}+2)}=\dfrac{3}{4}$ 。

注：本题也可以用洛比达法则。

例 2 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}(\sqrt{n+2}-\sqrt{n-1})$

解：原式= $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n}[(n+2)-(n-1)]}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n-1}} \overset{\text{分子分母同除以 }\sqrt{n}}{=} \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3}{\sqrt{1+\frac{2}{n}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}}}=\dfrac{3}{2}$ 。

例 3 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(-1)^n+3^n}{2^n+3^n}$

解：原式 $\overset{\text{上下同除以}3^n}{=} \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(-\frac{1}{3})^n+1}{(\frac{2}{3})^n+1}=1$ 。

2． 利用函数的连续性（定理 6）求极限

例 4 $\lim\limits_{x\to 2} x^2 e^{\frac{1}{x}}$

解：因为 $x_0 = 2$ 是函数 $f(x) = x^2 e^{\frac{1}{x}}$ 的一个连续点，

所以 原式= $2^2 e^{\frac{1}{2}} = 4\sqrt{e}$ 。

3．利用两个重要极限求极限

例 5 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{3x^2}$

解：原式= $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin^2\frac{x}{2}}{3x^2} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin^2\frac{x}{2}}{12\cdot(\frac{x}{2})^2} = \dfrac{1}{6}$ 。

注：本题也可以用洛比达法则。

例 6 $\lim\limits_{x\to 0}(1-3\sin x)^{\frac{2}{x}}$

解：原式= $\lim\limits_{x\to 0}(1-3\sin x)^{\frac{1}{-3\sin x}\cdot\frac{-6\sin x}{x}} = \lim\limits_{x\to 0}[(1-3\sin x)^{\frac{1}{-3\sin x}}]^{\frac{-6\sin x}{x}} = e^{-6}$ 。

例 7 $\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{n-2}{n+1})^n$

解：原式= $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\dfrac{-3}{n+1})^{\frac{n+1}{-3}\cdot\frac{-3n}{n+1}} = \lim\limits_{n\to\infty}[(1+\dfrac{-3}{n+1})^{\frac{n+1}{-3}}]^{\frac{-3n}{n+1}} = e^{-3}$ 。

4．利用定理 2 求极限

例 8 $\lim\limits_{x\to 0} x^2\sin\dfrac{1}{x}$

解：原式=0 （定理 2 的结果）。

5．利用等价无穷小代换（定理 4）求极限

例 9 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\ln(1+3x)}{\arctan(x^2)}$

解：$\because$ $x\to 0$时，$\ln(1+3x) \sim 3x$，$\arctan(x^2) \sim x^2$，

$\therefore$ 原式= $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cdot 3x}{x^2} = 3$ 。

例 10 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{\sin x}}{x-\sin x}$

解：原式=$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\sin x}(e^{x-\sin x}-1)}{x-\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\sin x}(x-\sin x)}{x-\sin x}=1$ 。

注：下面的解法是错误的：

原式=$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(e^x-1)-(e^{\sin x}-1)}{x-\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x-\sin x}=1$ 。

正如下面例题解法错误一样：

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-x}{x^3}=0$ 。

例 11 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan(x^2\sin\frac{1}{x})}{\sin x}$

解：$\because$ 当 $x\to 0$ 时，$x^2\sin\dfrac{1}{x}$ 是无穷小，$\therefore \tan(x^2\sin\dfrac{1}{x})$与$x^2\sin\dfrac{1}{x}$等价，

所以， 原式=$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\sin\frac{1}{x}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}x\sin\dfrac{1}{x}=0$ 。（最后一步用到定理 2）

6．利用洛比达法则求极限

说明：当所求极限中的函数比较复杂时，也可能用到前面的重要极限、等价无穷小代换等方法。同时，洛比达法则还可以连续使用。

例 12 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{3x^2}$ （例 4）

解：原式=$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{6x}=\dfrac{1}{6}$ 。（最后一步用到了重要极限）

例 13 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\cos\frac{\pi x}{2}}{x-1}$

解：原式=$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{-\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi x}{2}}{1}=-\dfrac{\pi}{2}$ 。

例 14 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}$

解：原式=$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{3x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{6x}=\dfrac{1}{6}$ 。（连续用洛比达法则，最后用重要极限）

例 15 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-x\cos x}{x^2\sin x}$

解：

$$\text{原式}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x\cos x}{x^2\cdot x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-(\cos x-x\sin x)}{3x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x\sin x}{3x^2}=\frac{1}{3}$$

例 18 $\lim\limits_{x\to 0}[\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\ln(1+x)}]$

解：**错误解法**：原式=$\lim\limits_{x\to 0}[\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x}]=0$ 。

正确解法：

$$\text{原式}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-x}{x\ln(1+x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-x}{x\cdot x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x}-1}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{2x(1+x)}=\frac{1}{2}$$ 。

应该注意，洛比达法则并不是总可以用，如下例。

例 19 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-2\sin x}{3x+\cos x}$

解：易见：该极限是“$\dfrac{0}{0}$”型，但用洛比达法则后得到：$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-2\cos x}{3-\sin x}$，此极限

不存在，而原来极限却是存在的。正确做法如下：

原式=$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-\dfrac{2\sin x}{x}}{3+\dfrac{\cos x}{x}}$ （分子、分母同时除以 x）

$=\dfrac{1}{3}$ （利用定理 1 和定理 2）

7．利用极限存在准则求极限

例 20 已知 $x_1=\sqrt{2}$，$x_{n+1}=\sqrt{2+x_n}$，$(n=1,2,\cdots)$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$

解：易证：数列 $\{x_n\}$ 单调递增，且有界（0< x_n <2），由准则 1 极限 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$。对已知的递推公式 $x_{n+1}=\sqrt{2+x_n}$ 两边求极限，得：

$a=\sqrt{2+a}$，解得：$a=2$ 或 $a=-1$（不合题意，舍去）

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=2$。

例 21 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)$

解： 易见：$\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}<\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}<\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$

因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}=1$，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}=1$

所以由准则 2 得：$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)=1$ 。

上面对求极限的常用方法进行了比较全面的总结，由此可以看出，求极限方法灵活多样，而且许多题目不只用到一种方法，因此，要想熟练掌握各种方法，必须多做练习，在练习中体会。另外，求极限还有其它一些方法，如用定积分求极限等，由于不常用，这里不作介绍。

极限与连续的 62 个典型习题

习题 1 设 $a_i>0,\quad i=1,2,\cdots,m$，**求** $\lim\limits_{n\to\infty}(a_1{}^n+a_2{}^n+\cdots+a_m{}^n)^{\frac{1}{n}}$.

解 记 $a=\max\{a_1,a_2,\cdots,a_m\}$，**则有**

$(a_1{}^n+a_2{}^n+\cdots+a_m{}^n)^{\frac{1}{n}}\geq(a^n)^{\frac{1}{n}}=a$，$\lim\limits_{n\to\infty}a=a$.**另一方面**

$(a_1{}^n+a_2{}^n+\cdots+a_m{}^n)^{\frac{1}{n}}\leq(ma^n)^{\frac{1}{n}}=a\cdot(m)^{\frac{1}{n}}$.

因为 $\lim\limits_{n\to\infty} m^{\frac{1}{n}}=(\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{m})=1$，**故** $\lim\limits_{n\to\infty} a\cdot m^{\frac{1}{n}}=a$ **.利用两边夹定理，知**

$\lim\limits_{n\to\infty}(a_1{}^n+a_2{}^n+\cdots+a_m{}^n)^{\frac{1}{n}}=a$，**其中** $a=\max\{a_1,a_2,\cdots a_m\}$。

例如 $\lim\limits_{n\to\infty}(1+3^n+5^n+9^n)^{\frac{1}{n}}=9$。

习题 2 求 $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{n^2+n+1}+\frac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n+n})$。

解

$$\frac{1+2+\cdots+n}{n^2+n+n}<\frac{1}{n^2+n+1}+\frac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n+n}<\frac{1+2+\cdots+n}{n^2+n+1},$$

即 $$\frac{n(n+1)}{2(n^2+2n)}<\frac{1}{n^2+n+1}+\frac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n+n}<\frac{n(1+n)}{2(n^2+n+1)}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n(1+n)}{2(n^2+2n)}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2n+4}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{n}}{2+\frac{4}{n}}=\frac{1}{2}.$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n(1+n)}{2(n^2+n+1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{n}}{2+\frac{2}{n}+\frac{2}{n^2}}=\frac{1}{2}.$$

利用两边夹定理知

$$\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{n^2+n+1}+\frac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n+n})=\frac{1}{2}.$$

习题 3 求 $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)})^n$。

解 $$\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)})^n=\lim_{n\to\infty}((1-\frac{1}{2})+(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+\cdots+(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}))^n$$

$$=\lim_{n\to\infty}(1-\frac{1}{n+1})^n=\lim_{n\to\infty}(1-\frac{1}{n+1})^{(n+1)-1}=\lim_{n\to\infty}(1-\frac{1}{n+1})^{n+1}\cdot(1-\frac{1}{n+1})^{-1}$$

$$=\lim_{n\to\infty}[(1+\frac{1}{-(n+1)})^{-(n+1)}]^{-1}\cdot\lim_{n\to\infty}(1-\frac{1}{n+1})^{-1}=e^{-1}\cdot 1=e^{-1}$$

习题 4 求 $\lim\limits_{x\to 1}\frac{1-\sqrt[n]{x}}{1-\sqrt[m]{x}}\quad(m,n\in N)$。

解（变量替换法）令 $t=\sqrt[mn]{x}$，**则当** $x\to 1$ **时，** $t\to 1$ **.于是,**

原式 $=\lim\limits_{t\to 1}\dfrac{1-t^m}{1-t^n}=\lim\limits_{t\to 1}\dfrac{(1-t)(1+t+t^2+\cdots+t^{m-1})}{(1-t)(1+t+t^2+\cdots+t^{n-1})}=\dfrac{m}{n}$.

习题 5 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}(\dfrac{x}{x-1})^{\sqrt{x}}$.

解（变量替换法）令 $\sqrt{x}=t,x\to+\infty,t\to+\infty$，

原式 $=\lim\limits_{t\to\infty}(\dfrac{t^2}{t^2-1})^t=\lim\limits_{t\to\infty}(\dfrac{t}{t-1}\cdot\dfrac{t}{t+1})^t=\lim\limits_{t\to\infty}[(1+\dfrac{1}{t})^{-1}\cdot(1-\dfrac{1}{t})^{-1}]^t$

$=\lim\limits_{t\to\infty}(1+\dfrac{1}{t})^{-t}\cdot(1-\dfrac{1}{t})^{-t}=e^{-1}\cdot e=e^0=1$.

习题 6 求 $\lim\limits_{x\to 0}(\dfrac{3-e^x}{2+x})^{\frac{1}{\sin x}}$　　**(1^∞ 型)。**

为了利用重要极限，对原式变形

$$\lim_{x\to o}(\frac{3-e^x}{2+x})^{1/\sin x}=\lim_{x\to o}(\frac{2+x+1-x-e^x}{2+x})^{1/\sin x}$$
$$=\lim_{x\to o}[(1+\frac{1-x-e^x}{2+x})^{\frac{2+x}{1-x-e^x}}]^{\frac{1-e^x-x}{2+x}\cdot\frac{1}{\sin x}}$$

$$=\lim_{x\to o}[(1+\frac{1-x-e^x}{2+x})^{\frac{2+x}{1-x-e^x}}]^{\frac{-x-x}{2+x}\cdot\frac{1}{\sin x}}=e^{-2/2}=e^{-1}$$

习题 7　求　$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}-2}{x^2}$. **解 原式**

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}-2)(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}+2)}{x^2(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}+2)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1+x+1-x+2\sqrt{1-x^2}-4}{x^2(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}+2)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2(1-x^2-1)}{x^2(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}+2)(\sqrt{1-x^2}+1)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-2}{(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}+2)(\sqrt{1-x^2}+1)}=\frac{-2}{4\cdot 2}=-\frac{1}{4}.$$

习题 8　求　$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2+6x+5}}{3x-2}$. **解 由于**

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{4x^2+6x+5}}{3x-2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{4+\frac{6}{x}+\frac{5}{x^2}}}{3-\frac{2}{x}}=\frac{2}{3}.$$

而 $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{4x^2+6x+5}}{3x-2}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2(4+\frac{6}{x}+\frac{5}{x^2})}}{x(3-\frac{2}{x})}$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{|x|\sqrt{(4+\frac{6}{x}+\frac{5}{x^2})}}{x(3-\frac{2}{x})}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-\sqrt{(4+\frac{6}{x}+\frac{5}{x^2})}}{(3-\frac{2}{x})}=\frac{-2}{3}$$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{4x^2+6x+5}}{3x-2}\neq\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{4x^2+6x+5}}{3x-2}$.故 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{4x^2+6x+5}}{3x-2}$ 不存在。

习题 9 研究下列极限 (1) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}$.

$\because$ 原式 $=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}\cdot\sin x$，其中 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$，$|\sin x|\le 1$. $\therefore$ 上式极限等于 0，即 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=0$. (2) $\lim\limits_{x\to0}x\cdot\sin\frac{1}{x}$.

因为 $|\sin\frac{1}{x}|\le 1$，$\lim\limits_{x\to0}x=0$，所以 $\lim\limits_{x\to0}x\cdot\sin\frac{1}{x}=0$.

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}x\cdot\sin\frac{1}{x}$. 原式 $=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{\frac{1}{x}\to0}\frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}=1$.

习题 10 计算 $\lim\limits_{x\to0}(x+a^x)^{\frac{1}{x}}$，$(a>0,a\neq1)$.

解 原式 $=\lim\limits_{x\to0}a(1+xa^{-x})^{\frac{1}{x}}=a\lim\limits_{x\to0}(1+xa^{-x})^{\frac{1}{xa^{-x}}\cdot a^{-x}}$

$$=a\cdot[\lim_{x\to0}(1+xa^{-x})^{\frac{1}{xa^{-x}}}]^{\lim\limits_{x\to0}a^{-x}}=a\cdot e^1=ae.$$

习题 11 $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^\alpha-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\frac{e^{\alpha\ln x}-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\frac{e^{\alpha\ln x}-1}{\alpha\ln x}\cdot\frac{\alpha\ln x}{x-1}$

$$=\lim_{\alpha\ln x\to0}\frac{e^{\alpha\ln x}-1}{\alpha\ln x}\cdot\lim_{(x-1)\to0}\frac{\alpha\ln[1+(x-1)]}{x-1}=1\times\alpha\times1=\alpha.$$

习题 12　已知 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+bx+c}{1-x}=5$**，求**$b,c$**的值。**

解　首先 $\lim\limits_{x\to 1}x^2+bx+c=1+b+c=0$**，**$\therefore b=-1-c$

原式$=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x-c)}{-(x-1)}=\lim\limits_{x\to 1}[-(x-c)]=c-1=5$**，**

$\therefore\ c=6$**，而** $b=-(1+c)=-(1+6)=-7$**。**

习题 13　下列演算是否正确?

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x^2}}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\underset{\substack{\downarrow\\0}}{x}\cdot\underset{\substack{\downarrow\\1}}{\frac{1}{\frac{\sin x}{x}}}\cdot\underset{\text{有界}}{\sin\frac{1}{x^2}}=0.$$

习题 14　求 $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x})$**。**

解　原式$=\lim\limits_{x\to+\infty}2\sin\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2}\cdot\cos\dfrac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}$

$$=2\lim_{x\to+\infty}\sin\frac{1}{2(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}\cdot\cos\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}=0.$$

习题 15　求 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x^2}\cdot\sin x^2}{x+1}$**。**

解　$\because\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x^2}}{x+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{\frac{1}{x}}}{1+\frac{1}{x}}=0$**，**$|\sin x^2|\le 1$**，原式 = 0.**

习题 16　证明 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+m}{x+n}\right)^{kx+b}=e^{k(m-n)}$ **(**m,n,k,b**为常数)。**

证　$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+m}{x+n}\right)^{kx+b}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+n+(m-n)}{x+n}\right)^{kx+b}$　**(令**$\dfrac{1}{x+n}=\dfrac{1}{y}$**)**

$$=\lim_{y\to\infty}\left(\frac{x+m}{x+n}\right)^{kx+b}=\lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{m-n}{y}\right)^{k(y-n)+b}=\lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{m-n}{y}\right)^{k(m-n)\cdot\frac{y}{m-n}-kn+b}$$

$$=\lim_{y\to\infty}\left[\left(1+\frac{m-n}{y}\right)^{\frac{y}{m-n}}\right]^{k(m-n)}\cdot\lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{m-n}{y}\right)^{-kn+b}=e^{k(m-n)}\cdot 1=e^{k(m-n)}.$$

习题 17 求 $\lim\limits_{x\to 0}(1-\sin x)^{\frac{3}{x}}$.

解 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}(1+(-\sin x))^{\frac{1}{-\sin x}\cdot\frac{-3\cdot\sin x}{x}}=e^{-3}$.

习题 18 求 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\ln x-\ln a}{x-a}$. **解** **(连续性法)**

原式 $=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{1}{x-a}\ln\dfrac{x}{a}=\lim\limits_{x\to a}\ln(\dfrac{x}{a})^{\frac{1}{x-a}}$

$=\lim\limits_{x\to a}\ln[1+\dfrac{x-a}{a}]^{\frac{a}{x-a}\cdot\frac{1}{a}}=\ln[\lim\limits_{x\to a}(1+\dfrac{x-a}{a})^{\frac{a}{x-a}}]^{\frac{1}{a}}=\ln e^{\frac{1}{a}}=\dfrac{1}{a}\ln e=\dfrac{1}{a}$.

习题 19 **试证方程** $x=a\sin x+b$ **(其中** $a>0,b>0$ **)至少有一个正根,并且它不大于** $a+b$.

证 设 $f(x)=a\sin x+b-x$, **此初等函数在数轴上连续,** $\therefore f(x)$ **在** $[0,a+b]$ **上必连续。** $\because f(0)=b>0$, **而**

$f(a+b)=a\sin(a+b)-(a+b)+b=a[\sin(a+b)-1]\le 0$ **若** $f(a+b)=0$, **则** $a+b$ **就是方程** $x=a\sin x+b$ **的一个正根。**

若 $f(a+b)<0$ **,则由零点存在定理可知在** $(0,a+b)$ **内至少存在一点** $\xi\in(0,a+b)$ **,使** $f(\xi)=0$ **.即** $\xi=a\sin\xi+b.$

故方程 $x=a\sin x+b$ **至少有一正根,且不大于** $a+b$.

习题 21 **求** $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{1-\cos x}}$.

解 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\{[1+(\cos x-1)]^{\frac{1}{\cos x-1}}\}^{-1}=e^{-1}$.

习题 20 **设** $\{x_n\}$ **满足** $x_n>0$ **且** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{x_{n-1}}=r<1$. **试证** $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0.$

证 $\because\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{x_{n-1}}=r<1$, **取** $\varepsilon=\dfrac{1-r}{2}>0,\exists N,$ **使得当** $n>N$ **时有**

$\left| \dfrac{x_n}{x_{n-1}} - r \right| < \varepsilon = \dfrac{1-r}{2}$, **即** $0 < \dfrac{x_n}{x_{n-1}} < r + \dfrac{1-r}{2} = \dfrac{r+1}{2}$, **亦即** $0 < x_n < \dfrac{r+1}{2} x_{n-1}$, **于是递推得** $0 < x_n < \dfrac{r+1}{2} x_{n-1} < (\dfrac{r+1}{2})^2 x_{n-2} < \ldots < (\dfrac{r+1}{2})^{n-N} x_N$

$\because \dfrac{r+1}{2} < 1$, $\therefore \lim\limits_{n\to\infty} (\dfrac{r+1}{2})^{n-N} x_N = 0$, **从而由两边夹准则有** $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

习题 22　用定义研究函数 $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt{x}} & x > 0 \\ 0 & x \le 0 \end{cases}$ **的连续性。**

证 首先，当 $x > 0$, $f(x) = \dfrac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt{x}}$ **是连续的。同理，当**

$x < 0$, $f(x) = 0$ **也是连续的。而在分段点** $x = 0$ **处**

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} 0 = 0 = f(0),$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt{x}} = 0 = f(0).$$

所以 $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0)$. **故** $f(x) \in C(-\infty, +\infty)$.

习题 23　求证 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}} = 1$.

证 $\because \sqrt[n]{\dfrac{1}{2n}} < \sqrt[n]{\dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}} < 1$，**而**

$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\dfrac{1}{2n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\dfrac{1}{2}} \cdot \dfrac{1}{\sqrt[n]{n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\dfrac{1}{2}} \cdot \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1 \cdot \dfrac{1}{1} = 1$.**由两边夹定理知，原式成立.**

习题 24 设 $F(x,y) = \dfrac{f(y-x)}{2x}, F(1,y) = \dfrac{y^2}{2} - y + 5$. **任取** $x_0 > 0$, **记**

$x_1 = F(x_0, 2x_0), \ldots, x_{n+1} = F(x_n, 2x_n), \ldots$ **试证** $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ **存在，并求极限值。**

证 $\because$ $F(1,y) = \dfrac{f(y-1)}{2} = \dfrac{y^2}{2} - y + 5 = \dfrac{1}{2}[(y-x)^2 + 9]$,

$\therefore$ $f(y-1) = (y-1)^2 + 9, \therefore f(y-x) = (y-x)^2 + 9$. **故**

$F(x,y) = \dfrac{(y-x)^2 + 9}{2x}$. **由题设**

$x_1=\dfrac{(2x_0-x_0)^2+9}{2x_0}=\dfrac{x_0^2+9}{2x_0},\ x_2=\dfrac{x_1^2+9}{2x_1},\ldots,x_{n+1}=\dfrac{x_n^2+9}{2x_n},\ldots$ **由于**

$x_{n+1}=\dfrac{1}{2}(x_n+\dfrac{9}{x_n})\ge\sqrt{x_n\cdot\dfrac{9}{x_n}}=3,\ \dfrac{x_{n+1}}{x_n}=\dfrac{1}{2}(1+\dfrac{9}{x_n^2})\le\dfrac{1}{2}(1+\dfrac{9}{3^2})=1$

$\therefore x_{n+1}\le x_n.$ **故** $\{x_n\}$ **单调有下界，故有极限。设** $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A,$

由 $x_{n+1}=\dfrac{x_n^2+9}{2x_n}\Rightarrow A=\dfrac{A^2+9}{2A}$, **解出** $A=3$ **（舍去** $A=-3$ **）。**

习题 25 设 $x_0>0, x_{n+1}=1+\dfrac{x_n}{1+x_n}, n=1,2,\ldots,$ **求** $\lim\limits_{n\to\infty}x_n.$

解 显然 $x_0>0, x_{n+1}=1+\dfrac{x_n}{1+x_n}<2.\therefore\{x_n\}$ **有上界** 2 **，有下界** $0.$

$x_1-x_0=1+\dfrac{x_0}{1+x_0}-x_0=\dfrac{1+x_0-x_0^2}{1+x_0}$, **当** $0<x_0\le\dfrac{1+\sqrt5}{2}$ **时**

$1+x_0-x_0^2\ge0,$ **即** $x_1\ge x_0,$ **假设** $x_n>x_{n-1},$ **则**

$x_{n+1}-x_n=\dfrac{x_n}{1+x_n}-\dfrac{x_{n-1}}{1+x_{n-1}}=\dfrac{x_n-x_{n-1}}{(1+x_n)(1+x_{n-1})}>0.$ **故** $\{x_n\}$ **单增。** $\therefore\lim\limits_{n\to\infty}x_n$

存在。设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A,$ **则由** $\lim\limits_{n\to\infty}x_{n+1}=1+\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{1+x_n}$ **得** $A=1+\dfrac{A}{1+A}$, **即**

$A^2-A-1=0,\therefore A=\dfrac{1+\sqrt5}{2}$ **（舍去负值）。当** $x_0>\dfrac{1+\sqrt5}{2}$ **时，有** $x_1<x_0,$

用完全类似的方法可证 $\{x_n\}$ **单减有下界** 0 **，同理可证** $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\dfrac{1+\sqrt5}{2}.$

习题 26 设数列 $\{x_n\}$ **由下式给出** $x_1=2, x_{n+1}=2+\dfrac{1}{x_n}, n=1,2,\ldots$ **求** $\lim\limits_{n\to\infty}x_n.$

解 $\{x_n\}$ **不是单调的，但** $\{x_{2n-1}\}$ **单增，并以 3 为上界，故有极限。设** $\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n-1}=B.$ $\{x_{2n}\}$ **单减，并以 2 为下界，设** $\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n}=C.$ **在等式** $x_{n+1}=2+\dfrac{1}{x_n}$ **两边按奇偶取极限，得两个关系** $B=2+\dfrac{1}{C}, C=2+\dfrac{1}{B}$ **，解出** $B=C.$ **由于的奇数列与偶数列的极限存在且相等，因此** $\{x_n\}$ **的极限存在，记** $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A.$ **于是**

$\lim\limits_{n\to\infty} x_{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}(2+\frac{1}{x_n})$.**故有** $A=2+\frac{1}{A}$,**解出** $A=1+\sqrt{2}$,**（舍去负值** $1-\sqrt{2}$ **）**

习题 27 **设** $x_1>0,\ x_{n+1}=\frac{x_n+2}{x_n+1}$， **试证** $\{x_n\}$ **收敛，并求极限。**

证 **显然** $x_n>0$,**假设** $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$,**则由** $x_{n+1}=\frac{x_n+2}{x_n+1}$令$n\to\infty$，**可解出** $A=2$ **（舍去** -2**）。下面证明** $\{x_n\}$**收敛于** $\sqrt{2}$.**由于**

$$\left|x_n-\sqrt{2}\right|=\left|\frac{(\sqrt{2}-1)(x_{n-1}-\sqrt{2})}{x_{n-1}+1}\right|<(\sqrt{2}-1)\left|x_{n-1}-\sqrt{2}\right|,$$

递推可得 $\left|x_n-\sqrt{2}\right|<(\sqrt{2}-1)^2\left|x_{n-2}-\sqrt{2}\right|<\ldots<(\sqrt{2}-1)^{n-1}\left|x_1-\sqrt{2}\right|$

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{2}-1)^{n-1}=0$.**由两边夹可得** $\lim\limits_{n\to\infty}\left|x_n-\sqrt{2}\right|=0$.**故** $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\sqrt{2}$.

习题 28 **设** $f_1(t)=f(t)>0,\ f_{n+1}(t)=\frac{2f_n^2(t)}{1+f_n^2(t)}$.**试证**

（1） $\forall t,\ \lim\limits_{n\to\infty}f_n(t)$ **存在；（2）当** $f(t)\ge 1$ **时，** $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(t)=1$; **当** $f(t)<1$ **时，** $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(t)=0$;

证 $\forall n$,**显然有** $f_n(t)\ge 0$,**又** $f_{n+1}(t)-f_n(t)=-f_n(t)\frac{[f_n(t)-1]^2}{1+f_n^2(t)}\le 0$.

$\therefore \forall t,\ f_n(t)$ **单减有下界。** $\therefore$ **收敛。令** $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(t)=F(t)$, **在原式两边取极限得** $F(t)=\frac{2F^2(t)}{1+F^2(t)}$. **由此可解出** $F(t)=0$ **或** $F(t)=1$. **当** $f(t)\ge 1$ **时，** $f_2(t)=\frac{2f_1^2(t)}{1+f_1^2(t)}\ge\frac{2f^2(t)}{2f^2(t)}=1$. **归纳假设** $f_k(t)\ge 1$, **则** $f_k^2(t)\ge 1$, **而** $f_{k+1}(t)=\frac{2f_k^2(t)}{1+f_k^2(t)}\ge\frac{2f_k^2(t)}{2f_k^2(t)}=1,\therefore\forall n$ **，有** $f_n(t)\ge 1$. **因此** $f(t)\ge 1$ **时** $F(t)=1$. **即** $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(t)=1,(f(t)\ge 1$**时）。**

当 $f(t)<1$**时，由** $f_n(t)$**的单减性便知即当** $F(t)=0$**时，即**

$\lim\limits_{n\to\infty}f_n(t)=0$ **（当** $f(t)<1$**时）。**

习题 29 $\lim\limits_{x\to 0}(\frac{\cos x}{\cos 2x})^{\frac{1}{\sin x\sin 2x}}=\lim\limits_{x\to 0}(\frac{1-\sin^2 x}{1-\sin^2 2x})^{\frac{1}{2\sin x\sin 2x}}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\sin^2 x)^{\frac{-1}{\sin^2 x}\cdot\frac{-1}{4\cos x}}}{(1-\sin^2 2x)^{\frac{-1}{\sin^2 2x}\cdot(-\cos x)}}=\frac{e^{-\frac{1}{4}}}{e^{-1}}=e^{\frac{3}{4}}.$$

习题 30 若 $\{x_n\}$ **收敛，则** $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(x_n)^n}{n!}=0.$

证 $\because\{x_n\}$ **收敛，设** $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A.$ **故** $\{x_n\}$ **必有界。设**

$|x_n|\le B, n=1,2,\ldots$ **因此** $0\le\left|\frac{(x_n)^n}{n!}\right|\le\frac{B^n}{n!}$，**而** $\frac{B^n}{n!}\to 0,\ \therefore\ \lim\limits_{n\to\infty}\frac{(x_n)^n}{n!}=0.$

习题 31 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n}.\quad(0<\frac{n!}{n^n}=\frac{1}{n}\cdot\frac{2}{n}\cdots\frac{n}{n}<\frac{1}{n},\therefore\ \lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n}=0)$

变量替换求极限法

(为求 $\lim\limits_{x\to a}F(x)$, **有时可令** $x=\varphi(y)$, **而** $F(x)=F[\varphi(y)]$ **)**

习题 32 求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+\alpha x)^{\frac{1}{\beta}}-1}{x}$ **(**β **为自然数)**

解 令 $(1+\alpha x)^{\frac{1}{\beta}}-1=y$, **则** $x=\frac{[(y+1)^{\beta}-1]}{\alpha}$, **因此**

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+\alpha x)^{\frac{1}{\beta}}-1}{x}=\lim_{y\to 0}\frac{y}{\frac{(y+1)^{\beta}-1}{\alpha}}=\lim_{y\to 0}\frac{\alpha y}{y^{\beta}+c_{\beta}^{1}y^{\beta-1}+\ldots+c_{\beta}^{\beta-1}y+1-1}$$

$$=\lim_{y\to 0}\frac{\alpha}{y^{\beta-1}+c_{\beta}^{1}y^{\beta-2}+\ldots+\beta y}=\frac{\alpha}{\beta}.$$

习题 33 求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[m]{1+x}-1-\frac{1}{m}x}{x^2}.$

解 令 $\sqrt[m]{1+x}-1=y,\Rightarrow x=(y+1)^m-1$, **且当** $x\to 0$ **时** $y\to 0$, **故 原式**

$$=\lim_{y\to 0}\frac{y-\frac{1}{m}[(1+y)^m-1]}{[(y+1)^m-1]^2}=\lim_{y\to 0}\frac{-\frac{m-1}{2}y^2+\ldots}{m^2y^2+\ldots}=-\frac{m-1}{2m^2}.$$

习题 34 求 $\lim\limits_{n\to\infty}n^2(\sqrt[n]{a}-\sqrt[n+1]{a}),\ a>0.$

解 先求 $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2(\sqrt[x]{a}-\sqrt[x+1]{a})$, **令** $\frac{1}{x}=t$, **则上式**

$$=\lim_{t\to0^+}\frac{a^t-a^{\frac{1}{1+t}}}{t^2}=\lim_{t\to0^+}a^t\cdot\frac{1-a^{-\frac{t^2}{1+t}}}{t^2}=\lim_{t\to0^+}\frac{1-\exp(-\frac{t^2}{1+t}\ln a)}{t^2}\qquad=\lim_{t\to0^+}\frac{\frac{t^2}{1+t}\ln a}{t^2}=\ln a.$$

故原式 $=\ln a.$

用等价无穷小替换求极限

习题 35 求 $\lim\limits_{\varphi\to0}\frac{1-\sqrt[n]{\cos n\varphi}}{\varphi^2}\quad(n\in\mathrm{N}).$

解 记 $x=\sqrt[n]{\cos n\varphi}$, 则 $x\to1\ (\varphi\to0).$

原式= $\lim\limits_{\varphi\to0}\frac{(1-x)(1+x+\ldots+x^{n-1})}{\varphi^2(1+x+\ldots+x^{n-1})}=\lim\limits_{\varphi\to0}\frac{1-x^n}{n\varphi^2}=\lim\limits_{\varphi\to0}\frac{1-\cos n\varphi}{n\varphi^2}$

= $\lim\limits_{\varphi\to0}\frac{\frac{1}{2}(n\varphi)^2}{n\varphi^2}=\frac{n}{2}\quad$ (当 $u\to0, 1-\cos u\sim\frac{1}{2}u^2$)

习题 36 设 $f(x)$ **与** x **是等价无穷小，** $f(x)\neq x$, **求证**

(1) $\lim\limits_{x\to0^+}[f(x)]^x=1$; **(2)** $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{[f(x)]^x-x^x}{f(x)-x}=1.$

证 $\because f(x)\sim x$, **即** $\frac{f(x)}{x}\to1\ \ (x\to0)$, $\therefore\frac{f(x)}{x}=1+\alpha(x)$,

其中 $\alpha(x)\to0$，当 $\to0$，即 $f(x)=x[1+\alpha(x)]$ (当 $x\to0$). **故**

$$\lim_{x\to0^+}[f(x)]^x=\lim_{x\to0^+}x^x[1+\alpha(x)]^x=\lim_{x\to0^+}x^x\lim_{x\to0^+}[1+\alpha(x)]^x$$

$$=1\cdot\lim_{x\to0^+}[1+\alpha(x)]^{\frac{1}{\alpha(x)}\cdot x\alpha(x)}=e^0=1.$$

(2) $$\lim_{x\to0^+}\frac{[f(x)]^x-x^x}{f(x)-x}=\lim_{x\to0^+}x^x\cdot\frac{e^{\ln[\frac{f(x)}{x}]^x}-1}{x\cdot\ln\frac{f(x)}{x}}\cdot\frac{x\cdot\ln\frac{f(x)}{x}}{f(x)-x}$$

$$\lim_{x\to0^+} x^x=\lim_{x\to0^+} e^{x\ln x}=\lim_{x\to0^+} e^{\frac{-\ln\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}}=e^{\lim\limits_{x\to0^+}\frac{-\ln\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}}=e^0=1.$$

$$\lim_{x\to0^+}\frac{e^{\ln[\frac{f(x)}{x}]^x}-1}{x\cdot\ln\frac{f(x)}{x}}=\lim_{x\to0^+}\frac{e^{x\ln\frac{f(x)}{x}}-1}{x\cdot\ln\frac{f(x)}{x}}=\lim_{x\ln\frac{f(x)}{x}\to0^+}\frac{e^{x\ln\frac{f(x)}{x}}-1}{x\cdot\ln\frac{f(x)}{x}}=1.$$

$$\lim_{x\to0^+}\frac{x\cdot\ln\frac{f(x)}{x}}{f(x)-x}=\lim_{x\to0^+}\frac{x\cdot\ln f(x)-x\ln x}{f(x)-x}=\lim_{x\to0^+}\frac{x}{f(x)-x}\cdot\ln[1+\frac{f(x)-x}{x}]$$

$$=\lim_{x\to0^+}\ln[1+\frac{f(x)-x}{x}]^{\frac{x}{f(x)-x}}=\ln\lim_{x\to0^+}[1+\frac{f(x)-x}{x}]^{\frac{x}{f(x)-x}}=\ln e=1.$$

$$\Rightarrow\ \lim_{x\to0^+}\frac{[f(x)]^x-x^x}{f(x)-x}=1\times1\times1=1.$$

习题 37 设 $f(x)\in C[0,n],n\ (n\ge2)$ 为自然数，$f(0)=f(n)$. 试证 $\exists\xi,\ \xi+1\in[0,n]$,

使 $f(\xi)=f(\xi+1)$.

证（分析:要证 $\exists\xi,\ \xi+1\in[0,n]$, 使 $f(\xi)=f(\xi+1)$. 即要证 $g(x)=f(x+1)-f(x)$ 有根 ξ ） 令 $g(x)=f(x+1)-f(x)$，显然在 $[0,n-1]$ 上连续，于是 $g(i)=f(i+1)-f(i),i=1,\ldots,n-1$. 记 $m=\min\limits_{0\le i\le n-1}\{g(i)\}$, $M=\max\limits_{0\le i\le n-1}\{g(i)\}$, 则 $m\le\frac{1}{n}\sum\limits_{i=0}^{n-1}g(i)\le M$, 又 $\sum\limits_{i=0}^{n-1}g(i)=f(n)-f(0)=0$. 对函数 $g(x)$ 应用介值定理，知 $\exists\xi\in[0,n-1]$, 使 $g(\xi)=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=0}^{n-1}g(i)=0$, 即存在 $\xi,\ \xi+1\in[0,n-1]$, 使 $f(\xi+1)=f(\xi)$.

习题 38 设 $f(x)\in C[a,b]$, 且 $a<c<d<b$, 证明 $\exists\xi\in[a,b]$,

使 $(\alpha+\beta)f(\xi)=\alpha\ f(c)+\beta\ f(d)$.

证 （分析：将结果变形 $f(\xi)=\dfrac{\alpha f(c)+\beta f(d)}{\alpha+\beta}\overset{\Delta}{=}\mu$）

记 $m=\min\limits_{x\in[a,b]}\{f(x)\}, M=\max\limits_{x\in[a,b]}\{f(x)\}$, 则 $m\le f(x)\le M, x\in[a,b]$

于是 $(\alpha+\beta)m\le\alpha\ f(c)+\beta\ f(d)\le(\alpha+\beta)M$

或 $m\le\dfrac{\alpha f(c)+\beta f(d)}{\alpha+\beta}\le M$

由介值定理知

$\exists\xi\in[a,b]$,使 $f(\xi)=\dfrac{\alpha f(c)+\beta f(d)}{\alpha+\beta}$，**即** $(\alpha+\beta)f(\xi)=\alpha f(c)+\beta f(d)$.

习题 39 **设** $f(x)\in C(-\infty,+\infty)$ **且** $f[f(x)]=x$.**证** $\exists\xi$,**使** $f(\xi)=\xi$.

证 反证法。若不存在点 ξ **使** $f(\xi)=\xi$.**即** $\forall x\in(-\infty,+\infty)$ **均有** $f(x)\neq x$.$\because f(x)$ **连续，不妨设恒有** $f(x)>x$. **于是** $f[f(x)]>f(x)>x$. **此与** $f[f(x)]=x$ **矛盾。故** $\exists\xi$, **使** $f(\xi)=\xi$.

习题 40 **设** $f(x)\in C(a,b)$ **且** $f(x)>0$. **又** $a<x_1<x_2<\ldots<x_n<b$, **证明至少有一点** $\xi\in(a,b)$, **使** $f(\xi)=\sqrt[n]{f(x_1)f(x_2)\ldots f(x_n)}$.

证 $\because f(x)\in C(x_1,x_n)$, **故** $f(x)$ **在** $[x_1,x_n]$ **上有最大值** M **和最小值** m **，使** $0<m\le f(x_i)\le M$, $i=1,2,\ldots,n$. **于是** $m\le\sqrt[n]{f(x_1)f(x_2)\ldots f(x_n)}\le M$ **由介值定理，知** $\exists\xi\in[x_1,x_n]\subset(a,b)$, **使** $f(\xi)=\sqrt[n]{f(x_1)f(x_2)\ldots f(x_n)}$.

习题 41 **证明方程** $x\cdot 2^x=1$ **至少有一个小于 1 的正根。**

证 设 $f(x)=x\cdot 2^x-1$, **显然** $f(x)\in C[0,1]$, **但** $f(0)=-1<0,\quad f(1)=2-1=1>0$, $\therefore\exists x_0\in(0,1)$, **使** $f(x_0)=x_0\cdot 2^{x_0}-1=0$, **即方程** $x\cdot 2^x=1$ **至少有一个小于 1 的正根** x_0 **存在。**

习题 42 **设** $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{2n-1}+ax^2+bx}{x^{2n}+1}$ **连续，求** a,b.

解
$$f(x)=\begin{cases} ax^2+bx, & |x|<1 \\ \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{1}{x}+\frac{a}{x^{2n-2}}+\frac{b}{x^{2n-1}}}{1+\frac{1}{x^{2n}}}=\dfrac{1}{x}, & |x|>1 \\ \dfrac{1+a+b}{2}, & x=1 \\ -\dfrac{1-a+b}{2}, & x=-1 \end{cases}$$

故 $f(1+0)=1, f(1-0)=a+b, f(-1+0)=a-b, f(-1-0)=-1$. **由于** $f(x)$ **在=1，-1 处连续，所以** $\begin{cases} a+b=1 \\ a-b=-1 \end{cases}\Rightarrow\quad a=0,b=1.$

习题 43 试证方程 $xe^x = x + \cos\frac{\pi}{2}x$ 至少有一个实根。

证 做函数 $f(x) = xe^x - x - \cos\frac{\pi}{2}x.$ 显然

$f(0) = -1 < 0, f(1) = e - 1 > 0, \therefore \exists\xi \in (0,1),$ 使 $f(\xi) = 0.$ 即 $xe^x = x + \cos\frac{\pi}{2}x$ 在 $(0,1)$ 内必有实根。

习题 44 求 $f(x) = \dfrac{|x-1|}{x^2 - x^3}$ 的连续区间。

（解：先改写为分段函数，结论为：$(-\infty,0)\cup(0,1)\cup(1,+\infty)$）

习题 45 求 b 为何值时，函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & 0 \le x \le 2 \\ bx - 2, & 2 < x \le 3 \end{cases}$，在 $[0,3]$ 上处处连续。

只需讨论分段点处的连续性：$f(2-0) = \lim\limits_{x\to 2^-}(x^2 - 1) = 3 = f(2),$

$f(2+0) = \lim\limits_{x\to 2^+}(bx - 2) = 2b - 2 = f(2),$ 要在 $x = 2$ 处连续，必有 $2b - 2 = 3, \Rightarrow b = \frac{5}{2}.$

习题 46 设 $a > 0, x_1 > 0$，定义 $x_{n+1} = \frac{1}{4}(3x_n + \frac{a}{x_n^3}), n = 1,2,...$ 求 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$

解 $x_{n+1} = \frac{1}{4}(x_n + x_n + x_n + \frac{a}{x_n^3}) \ge \sqrt[4]{x_n \cdot x_n \cdot x_n \cdot \frac{a}{x_n^3}} = \sqrt[4]{a}. \therefore \{x_n\}$ 有下界 $\sqrt[4]{a}.$ 即 $\forall n \in N,$

有 $x_n \ge \sqrt[4]{a}.$ 又 $\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{1}{4}(3 + \frac{a}{x_n^4}) \le \frac{1}{4}(3 + \frac{a}{a}) = 1$，即 $\{x_n\}$ 单减有下界，故有极限。设

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$ 且 $A \ge \sqrt[4]{a} > 0.$ 有 $\lim\limits_{n\to\infty} x_{n+1} = \frac{1}{4}\lim\limits_{n\to\infty}(3x_n + \frac{a}{x_n^3})$ 有 $A = \frac{1}{4}(3A + \frac{a}{A^3}) \Rightarrow A = \sqrt[4]{a}$

（舍去负根）（注意：先证明极限的存在是必要的。）

习题 47

设 $a > 0, x_1 = \sqrt{a}, x_2 = \sqrt{a + \sqrt{a}} = \sqrt{a + x_1}, ..., x_{n+1} = \sqrt{a + x_n}.$ $n = 1,2,..$ 求 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n.$

（解：$\{x_n\}$ 单增有上界 $1 + \sqrt{a}$，可解出极限 $A = \dfrac{1 + \sqrt{1 + 4a}}{2}$）

习题 48 设 $f(x) \in C[0,1],$ 且 $0 \le f(x) \le 1,$ 证明 $\exists\xi \in [0,1],$ 使 $f(\xi) = \xi.$

证 若 $f(0) = 0,$ 则取 $\xi = 0.$ 若 $f(1) = 1,$ 则可取 $\xi = 1.$ $f(0) > 0,$ $f(1) < 1,$ 则令

$g(x)=f(x)-x,$ 必有 $g(x)\in C[0,1]$ 且 $g(0)\cdot g(1)<0,$ 由零点定理知 $\exists\xi\in(0,1),$ 使 $g(\xi)=0,$ 即 $f(\xi)=\xi.$

习题 49 (选择题)设 $f(x),\varphi(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有定义，$f(x)$ 连续且 $f(0)\neq 0,\varphi(x)$ 有间断点，则

(A) $\varphi[f(x)]$ 必有间断点，(B) $[\varphi(x)]^2$ 必有间断点，

(C) $f[\varphi(x)]$ 必有间断点，(D) $\dfrac{\varphi(x)}{f(x)}$ 必有间断点.

解 选[D] ((A) 因 $f(x)$ 的值域可能很小。

(B)反例 $\varphi(x)=\begin{cases}1, x\neq 0\\ 0, x=0\end{cases}$ 而 $[\varphi(x)]^2\equiv 1$ 无间断点。

(C) $\because\varphi(x)$ 总有定义。

习题 50 证明方程 $x=a\sin x+b\quad(a>0,b>0)$ 至少有一个正根，且不超过 $a+b.$

证 设 $f(x)=a\sin x+b-x,\because f(x)\in C(-\infty,+\infty),\therefore f(x)\in C[0,a+b],$ 而

$$\begin{aligned}f(0)&=b=0, f(a+b)=a\sin(a+b)+b-(b+a)\\&=a[\sin(a+b)-1]\leq 0.\end{aligned}$$

如果 $f(a+b)=0,$ 则 $a+b$ 即为 $f(x)$ 的零点.如果 $f(a+b)<0,$ 则由介值定理知 $\exists\xi\in(0,a+b),$ 使 $f(\xi)=0,$ 即 ξ 为所求,故原命题成立.

习题 51 若函数 $f(x)$ 可以达到最大值和最小值，求证 $\max[-f(x)]=-\min f(x).$

证 设 $\min f(x)=f(x_0),$ 则对任意 x 有 $f(x)\geq f(x_0),$ 或有 $-f(x)\leq -f(x_0)(=-\min f(x)).$ 由 x 的任意性，可知

$$\max[-f(x)]=-f(x_0)=-\min f(x).$$

习题 52 设 $f(x)\in C[a,b]$ 且恒大于零，证明 $\dfrac{1}{f(x)}$ 在 $[a,b]$ 上连续.

证 任取 $x_0\in[a,b]$ 由于 $f(x)$ 在 x_0 处连续且大于 $0,\therefore\exists\delta_1>0,$ 使当 $|x-x_0|<\delta_1,$ 时

(若 $x_0=a$ 为左端点，则应为 $0\leq x-a<\delta_1,$ 类似处理 $x_0=b$)有

$f(x) > \frac{1}{2}f(x_0) > 0$ .... (*)

$\forall \varepsilon > 0$, 对 $\frac{f^2(x_0)}{2}\varepsilon$，可找到 $\exists \delta_2 > 0$，使当 $|x - x_0| < \delta_2$，时有

$|f(x) - f(x_0)| < \frac{f^2(x_0)}{2}\varepsilon$ .... (**)

取 $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, **则当** $|x - x_0| < \delta$ **时，有**

$$\left|\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{f(x_0)}\right| = \frac{|f(x_0) - f(x)|}{f(x)f(x_0)} < \frac{|f(x) - f(x_0)|}{\frac{1}{2}[f(x_0)]^2} < \frac{\frac{1}{2}[f(x_0)]^2 \cdot \varepsilon}{\frac{1}{2}[f(x_0)]^2} = \varepsilon.$$

故知 $\frac{1}{f(x)}$ **在** $x = x_0$ **处连续。由** x_0 **的任意性，知** $\frac{1}{f(x)}$ **在** $[a,b]$ **上连续.**

习题 53 设 $f(x) = \begin{cases} x^\alpha \sin\frac{1}{x}, & x > 0, \\ e^x + \beta, & x \le 0, \end{cases}$ **试讨论** $f(x)$ **在** $x = 0$ **处的连续性.**

解 $f(0) = 1 + \beta$, 而 $f(0 - 0) = 1 + \beta$,

$$f(0+0) = \lim_{x \to 0^+} x^\alpha \cdot \sin\frac{1}{x} = \begin{cases} 0, & \alpha > 0 \\ \text{不存在，} & \alpha \le 0 \end{cases}$$

$\therefore$ 当 $\alpha > 0$，$\beta = -1$ **时，** $f(x)$ **在** $x = 0$ **处连续，**

当 $\alpha > 0$，$\beta \ne -1$ **时，** $x = 0$ **为** $f(x)$ **的跳跃间断点（第一类间断点).当** $\alpha \le 0$, **时** $x = 0$ **为第二间断点。**

习题 54 设函数 $f(x) = \begin{cases} 5e^x - \cos x, & x \le 0 \\ \frac{\sin 2x}{tg\alpha x}, & x > 0 \end{cases}$ **问当** $\alpha = ?$, $f(x)$ **在** $x = 0$ **处连续。 解**

$$f(0) = 5 - 1 = 4, f(0-0) = 4, f(0+0) = \lim_{x \to 0^+}\frac{\sin 2x}{tg\alpha x} = \lim_{x \to 0^+}\frac{2x}{\alpha x} = \frac{2}{\alpha}.$$

$\therefore$ 当 $f(0\text{-}0) = f(0+0) = f(0)$, **即** $\frac{2}{\alpha} = 4, \alpha = \frac{1}{2}$ **时，** $f(x)$ **在** $x = 0$ **处连续。**

习题 55 求函数 $f(x) = \frac{x^2 - 1}{\sin \pi x}$ **的间断点，并判定其类型.**

解 因当 $x = n$ **（** n **为任一整数）时，** $\sin \pi x = 0, \therefore x = n$ **是** $f(x)$ **的间断点。再细分，**

当$n \neq \pm 1$**时，** $\lim\limits_{x \to n} \dfrac{x^2-1}{\sin \pi x} = \infty$, **不存在，故除**$\pm 1$**处的任何整数都是**$f(x)$**的第二类间断点。因**

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2-1}{\sin \pi x} \overset{x=t+1}{=} \lim_{t \to 0} (\frac{t^2+2t}{\sin \pi (t+1)}) = \lim_{t \to 0} (\frac{t^2+2t}{\sin \pi t \cos \pi + \cos \pi t \sin \pi})$$

$$= \lim_{t \to 0} (-\frac{t^2}{\sin \pi t} - \frac{2t}{\sin \pi t}) = -\frac{2}{\pi}, \text{同理} \lim_{x \to -1} \frac{x^2-1}{\sin \pi x} = \frac{2}{\pi}.$$

亦即$x = \pm 1$**是**$f(x)$**的第一类（可去）间断点.**

习题 56 求函数 $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x(1+x)}{\cos \dfrac{\pi}{2} x}, & x \leq 0 \\ \sin \dfrac{\pi}{x^2-4}, & x > o \end{cases}$ **的间断点并判定其类型。**

解 $f(x)$**的分段点为** $x = 0. \because \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{x(1+x)}{\cos \dfrac{\pi}{2} x} = 0.$

$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} \sin \dfrac{\pi}{x^2-4} = \sin(-\dfrac{\pi}{4}) = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}. \therefore x = 0$**是**$f(x)$**的第一类（跳跃）间断点。当**$x < 0$**时，** $f(x) = \dfrac{x(1+x)}{\cos \dfrac{\pi}{2} x}$, **在点**

$x = -1, -3, -5, \ldots, -(2k+1), \ldots (k = 0, 1, 2, \ldots)$ **处，** $f(x)$ **无意义，故** $x = -1, -3, -5, \ldots, -(2k+1), \ldots$ **是**$f(x)$**的间断点。因为**

$$\lim_{x \to -1} f(x) = \lim_{x \to -1} \frac{x(1+x)}{\cos \frac{\pi}{2} x} \overset{u=\frac{\pi}{2}(1+x)}{=} \lim_{u \to 0} \frac{u}{\sin u} \cdot \frac{2}{\pi} (\frac{2u}{\pi} - 1)$$

$$= -\frac{2}{\pi}, \therefore x = -1$$

是第一类(可去)间断点。显然$x = -3, -5, \ldots$**都是极限为**∞**的第二类间断点。当**$x > 0$**时，** $f(x) = \sin \dfrac{x}{x^2-4}$, **在点**$x = 2$**时，** $f(x)$**没定义，故**$x = 2$**是**$f(x)$**的间断点。又** $\because \lim\limits_{x \to 2} \sin \dfrac{x}{x^2-4}$, **不存在，故为第二类间断点。**

习题 57 设函数 $f(x) \in C[0, +\infty)$, **且** $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x+1) - f(x)] = A$, **试证**

$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=A.$

证　因为连续，所以 $\forall a,b\in[0,+\infty), f(x)$ **在** $[a,b]\subset[0,+\infty)$ **上有界。又因为** $\lim_{x\to+\infty}[f(x+1)-f(x)]=A,$ **所以** $\forall\varepsilon>0,\exists K_1,$

当 $x>K_1$ **时，恒有** $|\ f(x+1)-f(x)-A\ |<\frac{\varepsilon}{3},$ **取** $x>K_1+1,$ **则存在自然数** n **使得** $n\le x-K_1<n+1$ **.记** $l=x-K_1-n$ **，则** $0\le l<1,$ **且** $x=K_1+l+n,$ **于是** $\frac{f(x)}{x}-A=\frac{n}{x}[\frac{f(x)-f(K_1+l)}{n}-A]+\frac{f(K_1+l)}{x}-\frac{K_1+l}{x}A.$ **下面估计上式右边三项的绝对值。**

（1）

$\because\frac{n}{x}\le1,\therefore\left|\frac{n}{x}[\frac{f(x)-f(K_1+l)}{n}-A]\right|\le\left|\frac{f(x)-f(K_1+l)}{n}-A\right|=$

$\left|\frac{f(K_1+l+n)-f(K_1+l)}{n}-A\right|$

$=\frac{1}{n}\left|\sum_{i=1}^{n}[f(K_1+l+i)-f(K_1+l+i-1)-A]\right|$

$\le\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left|f(K_1+l+i)-f(K_1+l+i-1)-A\right|<\frac{1}{n}\cdot n\frac{\varepsilon}{3}=\frac{\varepsilon}{3}.$

（2）因为 $f(x)$ **在** $[K_1,K_1+1]$ **上有界，即** $\exists M>0,$ **使** $|f(x)|\le M$ **.故** $\exists K_2=\frac{3M}{\varepsilon},$ **当** $x>K_2$ **时，恒有** $\left|\frac{f(K_1+l)}{x}\right|<\frac{M}{K_2}=\frac{\varepsilon}{3}.$

（3）因为 $\lim_{x\to+\infty}\frac{K_1+l}{x}A=0,$ **故** $\exists K_3>0,$ **使当** $x>K_3$ **时恒有** $\left|\frac{f(K_1+l)}{x}A\right|<\frac{\varepsilon}{3}.$ **综合（1），（2），（3）** $\Rightarrow\forall\varepsilon>0,$ **取**

$K=\max\{K_1+1,K_2,K_3\}$ **，则当** $x>K$ **时，恒有**

$\left|\frac{f(x)}{x}-A\right|<\varepsilon,\therefore\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=A.$

习题 68　若 $\varphi(x)$ **和** $\psi(x)$ **为连续周期函数，当** $-\infty<x<+\infty$ **时，有定义，且**

$\lim\limits_{x\to\infty}[\varphi(x)-\psi(x)]=0,$**证明**$\varphi(x)\equiv\psi(x).$

证 先证明$\varphi(x)$**和**$\psi(x)$**有相同周期。设**$\varphi(x)$**的周期为** p **,则**$\varphi(x+p)=\varphi(x),$**由于当**$x\to\infty$**时，**$\varphi(x+p)-\psi(x+p)\to 0,$**即得** $\lim\limits_{x\to\infty}[\varphi(x)-\psi(x+p)]=0$ **，以及**

$\lim\limits_{x\to\infty}[\psi(x)-\psi(x+p)]=\lim\limits_{x\to\infty}[\varphi(x)-\psi(x+p)]-\lim\limits_{x\to\infty}[\varphi(x)-\psi(x)]=0$..............(*)

现在说明$\psi(x)$**的周期也是** p **。若不然，则至少存在一个**$x_0,$**使**$\psi(x_0)\neq\psi(x_0+p).$**设**$\psi(x)$**的周期为**$q,N$**为任意正整数，**

$x=x_0+Nq,$**以及**$\alpha=|\ \psi(x_0)-\psi(x_0+p)\ |>0,$**此时恒有**

$$|\ \psi(x)-\psi(x+p)\ |=|\psi(x_0+Nq)-\psi(x_0+Nq+p)|$$

$$=|\psi(x_0)-\psi(x_0+p)|=\alpha\text{ .}$$

但由（*），对充分大的$x,$**必成立**$|\psi(x)-\psi(x+p)|<\alpha,$**这显然矛盾（矛盾于**$=\alpha$**）**

$\therefore p=q.$**下面证明**$\varphi(x)\equiv\psi(x).$**若结论不真，则至少存在一个**$x_1,$**使**$\varphi(x_1)\neq\psi(x_1).$**记**$\beta=|\ \varphi(x_1)-\psi(x_1)\ |>0,$ **则** $\forall\, x=x_1+Np,$ **恒有** $|\ \varphi(x)-\psi(x\ )\ |=\beta,$ **这与**$\lim\limits_{x\to\infty}[\varphi(x)-\psi(x)]=0,$**矛盾。于是**$\varphi(x)\equiv\psi(x).$

习题 59　求　$\lim\limits_{x\to o}(\lim\limits_{n\to\infty}\cos\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{4}\cdot\cos\frac{x}{8}\cdot\cdots\cdot\cos\frac{x}{2^n})$

解 ∵ $\sin\frac{x}{2^n}=\sin(2\cdot\frac{x}{2^n})=2\sin\frac{x}{2^n}\cos\frac{x}{2^n}$

∴　$\cos\frac{x}{2^n}=\dfrac{\sin\frac{x}{2^{n-1}}}{2\sin\frac{x}{2^n}}$，　于是

原式 $=\lim\limits_{x\to 0}(\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin x}{2\sin\frac{x}{2}}\cdot\dfrac{\sin\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{4}}\cdot\dfrac{\sin\frac{x}{4}}{2\sin\frac{x}{8}}\cdots\dfrac{\sin\frac{x}{2^{n-1}}}{2\sin\frac{x}{2^n}})$

$=\lim\limits_{x\to 0}(\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin x}{2^n\cdot\sin\frac{x}{2^n}})=\lim\limits_{x\to 0}(\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}\cdot\dfrac{\frac{x}{2^n}}{\sin\frac{x}{2^n}})$

$=\lim\limits_{x\to 0}(\dfrac{\sin x}{x}\cdot 1)=1$.

习题60 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{a}+\frac{2}{a^2}+\frac{3}{a^3}+\ldots+\frac{n}{a^n})$.

解 记 $S_n=\frac{1}{a}+\frac{2}{a^2}+\frac{3}{a^3}+\ldots+\frac{n}{a^n}$,则 $\frac{1}{a}S_n$

$=\frac{1}{a^2}+\frac{2}{a^3}+\frac{3}{a^4}+\ldots+\frac{n}{a^{n+1}}$.

$S_n-\frac{1}{a}S_n=(\frac{1}{a}+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{a^3}+\ldots+\frac{1}{a^n})-\frac{n}{a^{n+1}}$.

∴ $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\dfrac{1}{1-\frac{1}{a}}\lim\limits_{n\to\infty}\{\dfrac{\frac{1}{a}[1-(\frac{1}{a})^n]}{1-\frac{1}{a}}-\dfrac{n}{a^{n+1}}\}$

$=\dfrac{a}{a-1}(\dfrac{1}{a-1}-0)=\dfrac{a}{(a-1)^2}$.

习题 61　试证 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{a^n}=0$，　其中 $a>1$.

证　设$x_n=\dfrac{n}{a^n}$，　则$\dfrac{|x_{n+1}|}{|x_n|}=\dfrac{\dfrac{n+1}{a^{n+1}}}{\dfrac{n}{a^n}}=\dfrac{n+1}{a^n}$

$=\dfrac{1}{a}(1+\dfrac{1}{n}).\because\quad a>1,$则$\exists N>0,$　使得当$n>N$时，

有$\dfrac{|x_{n+1}|}{x_n}=\dfrac{1}{a}(1+\dfrac{1}{n})<q<1.$

故　$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{a^n}=0.$

习题 62　$a=?$　$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln(\cos x)}{x^2}, & x\neq 0\\ a, & x=0\end{cases}$ **在** $x=0$ **点连续。**

解

$$\because\ \lim_{x\to0}\frac{\ln(\cos x)}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\ln(1-\sin^2\frac{x}{2})}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to0}\ln(1-\sin^2\frac{x}{2})^{\frac{1}{-2\sin^2\frac{x}{2}}\cdot\frac{-2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}}=\frac{1}{2}$$

如果函数在 $x=0$ **连续，则** $a=\dfrac{1}{2}.$

63．$\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-x)=$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}-x^2}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}+x}\ \text{(分子分母除以}\ x\text{)}=-\infty.$$

附加：（未整理）

$$
\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\sin^2(\pi\sqrt{n^2+n}) \\
&=\lim_{n\to\infty}\sin^2[\pi(\sqrt{n^2+n}-n)+n\pi] \\
&=\lim_{n\to\infty}\{(-1)^n\sin[\pi(\sqrt{n^2+n}-n)]\}^2 \\
&=\lim_{n\to\infty}\sin^2[\pi(\sqrt{n^2+n}-n)] \\
&=\lim_{n\to\infty}\sin^2\frac{n\pi}{\sqrt{n^2+n}+n} \\
&=\lim_{n\to\infty}\sin^2\frac{n\pi}{\sqrt{n^2+n}+n} \\
&=\lim_{n\to\infty}\sin^2\frac{\pi}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1} \\
&=\sin^2\frac{\pi}{2} \\
&=1
\end{aligned}
$$

$$1\le\sqrt[n]{n}=\sqrt[n]{\sqrt{n}\cdot\sqrt{n}\cdot\underbrace{1\cdot1\cdot\cdots\cdot1}_{n-2个1}}\le\frac{2\sqrt{n}+n-2}{n}$$

$$\because\ \lim_{n\to\infty}\frac{2\sqrt{n}+n-2}{n}=\lim_{n\to\infty}(\frac{2}{\sqrt{n}}+1-\frac{2}{n})=1$$

$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$ （根据“夹逼准则”）

$$x\to0^+\Rightarrow\frac{1}{x}\to+\infty\Rightarrow e^{\frac{1}{x}}\to+\infty$$

$$\therefore\ \lim_{x\to0^+}\frac{e^{\frac{1}{x}}-1}{e^{\frac{1}{x}}+1}=1$$

$$x\to0^-\Rightarrow\frac{1}{x}\to-\infty\Rightarrow e^{\frac{1}{x}}\to0$$

$$\therefore\ \lim_{x\to0^-}\frac{e^{\frac{1}{x}}-1}{e^{\frac{1}{x}}+1}=-1$$

$$\because\ \lim_{x\to0^+}\frac{e^{\frac{1}{x}}-1}{e^{\frac{1}{x}}+1}\ne\lim_{x\to0^-}\frac{e^{\frac{1}{x}}-1}{e^{\frac{1}{x}}+1}$$

所以，$x=0$ 是函数 $f(x)=\dfrac{e^{\frac{1}{x}}-1}{e^{\frac{1}{x}}+1}$ 的跳跃间断点

$$\lim_{n\to\infty} n^2(\arctan\frac{a}{n}-\arctan\frac{a}{n+1})$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\arctan\frac{a}{x}-\arctan\frac{a}{x+1}}{\frac{1}{x^2}}$$

$$\overset{t=\frac{1}{x}}{=}\lim_{t\to0^+}\frac{\arctan at-\arctan\frac{at}{t+1}}{t^2}$$

$$\overset{洛必达法则}{=}\lim_{t\to0^+}\frac{\frac{1}{1+a^2t^2}\cdot a-\frac{1}{1+(\frac{at}{t+1})^2}\cdot\frac{a}{(t+1)^2}}{2t}$$

$$=a\lim_{t\to0^+}\frac{\frac{1}{1+a^2t^2}-\frac{1}{(t+1)^2+a^2t^2}}{2t}$$

$$=a\lim_{t\to0^+}\frac{2t+t^2}{2t(1+a^2t^2)[(t+1)^2+a^2t^2]}$$

$$=a$$

【附注：本题用拉格朗日中值定理比较简便】

$$\lim_{x\to0}\frac{e^x-\frac{1+ax}{1+bx}}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{(1+bx)e^x-(1+ax)}{x^3+bx^4}$$

$$\overset{洛必达法则}{=}\lim_{x\to0}\frac{be^x+(1+bx)e^x-a}{3x^2+4bx^3}\quad(\because\ a=b+1)$$

$$\overset{洛必达法则}{=}\lim_{x\to0}\frac{2be^x+(1+bx)e^x}{6x+12bx^2}$$

$\therefore\ 2b+1=0$

$$\therefore\begin{cases}b=-\frac{1}{2}\\ a=\frac{1}{2}\end{cases}$$

令 $x=1+t$，则 $x\to1$ 等价于 $t\to0$

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{\sin\pi x}$$
$$=\lim_{t\to 0}\frac{(1+t)^2-1}{\sin(\pi+\pi t)}$$
$$=\lim_{t\to 0}\frac{2t+t^2}{-\sin\pi t}$$
$$=\lim_{t\to 0}\frac{2t+t^2}{-\pi t}$$
$$=\lim_{t\to 0}\frac{2+t}{-\pi}$$
$$=-\frac{2}{\pi}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+e^x)}{\ln(1+2^x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln e^x+\ln(1+e^{-x})}{\ln 2^x+\ln(1+2^{-x})}$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+\ln(1+e^{-x})}{x\ln 2+\ln(1+2^{-x})}$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+\frac{1}{x}\ln(1+e^{-x})}{\ln 2+\frac{1}{x}\ln(1+2^{-x})}$$
$$=\frac{1}{\ln 2}$$

$$\left(\frac{5^n}{2}\right)^{\frac{1}{n}}<\left(\frac{3^n+5^n}{2}\right)^{\frac{1}{n}}<\left(\frac{5^n+5^n}{2}\right)^{\frac{1}{n}}$$
$$\therefore\ \frac{5}{2^{\frac{1}{n}}}<\left(\frac{3^n+5^n}{2}\right)^{\frac{1}{n}}<5$$
$$\because\ \lim_{n\to\infty}2^{\frac{1}{n}}=1$$
$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\frac{5}{2^{\frac{1}{n}}}=5$$
$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\left(\frac{3^n+5^n}{2}\right)^{\frac{1}{n}}=5$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^x$$
$$=\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{x+1}\right)^{x+1-1}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{x+1}\right)^{-\frac{x+1}{2}\cdot(-2)-1}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{x+1}\right)^{-\frac{x+1}{2}\cdot(-2)}\cdot\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{x+1}\right)^{-1}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1-\frac{2}{x+1}\right)^{-\frac{x+1}{2}}\right]^{-2}\cdot\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{x+1}\right)^{-1}$$
$$=e^{-2}\cdot 1$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(2x+1)^{30}(3x-1)^{20}}{(2x+7)^{50}}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^{30}(2+\frac{1}{x})^{30}\cdot x^{20}(3-\frac{1}{x})^{20}}{x^{50}(2+\frac{7}{x})^{50}}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^{50}(2+\frac{1}{x})^{30}(3-\frac{1}{x})^{20}}{x^{50}(2+\frac{7}{x})^{50}}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(2+\frac{1}{x})^{30}(3-\frac{1}{x})^{20}}{(2+\frac{7}{x})^{50}}$$
$$=\frac{2^{30}3^{20}}{2^{50}}$$
$$=(\frac{3}{2})^{20}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x+x^2\cos\frac{1}{x}}{(1+\cos x)\ln(1+x)}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+\cos x}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x+x^2\cos\frac{1}{x}}{\ln(1+x)}$$
$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x+x^2\cos\frac{1}{x}}{x}$$
$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}(\frac{\sin x}{x}+x\cos\frac{1}{x})$$
$$=\frac{1}{2}(1+0)$$
$$=\frac{1}{2}$$

$$\ln(1+u)\sim u$$
$$\sin u\sim u$$
$$\therefore\ \sin\ln(1+\frac{3}{x})\sim\ln(1+\frac{3}{x})\sim\frac{3}{x}$$
$$\sin\ln(1+\frac{1}{x})\sim\ln(1+\frac{1}{x})\sim\frac{1}{x}$$
$$\therefore\ \lim_{x\to\infty}x[\sin\ln(1+\frac{3}{x})-\sin\ln(1+\frac{1}{x})]$$
$$=\lim_{x\to\infty}x[\sin\ln(1+\frac{3}{x})]-\lim_{x\to\infty}x[\sin\ln(1+\frac{1}{x})]$$
$$=\lim_{x\to\infty}(x\cdot\frac{3}{x})-\lim_{x\to\infty}(x\cdot\frac{1}{x})$$
$$=3-1$$
$$=2$$

令$t=x-\frac{\pi}{3}$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{\sin(x-\frac{\pi}{3})}{1-2\cos x}=\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{1-2\cos(t+\frac{\pi}{3})}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{1-(\cos t-\sqrt{3}\sin t)}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{1-\cos t+\sqrt{3}\sin t}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{1}{\frac{1-\cos t}{\sin t}+\sqrt{3}}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{1}{\tan\frac{t}{2}+\sqrt{3}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\lim_{x\to -8}\frac{\sqrt{1-x}-3}{2+\sqrt[3]{x}}$$

$$=\lim_{x\to -8}\frac{(\sqrt{1-x}-3)(\sqrt{1-x}+3)(4-2\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2})}{(2+\sqrt[3]{x})(4-2\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2})(\sqrt{1-x}+3)}$$

$$=\lim_{x\to -8}\frac{(1-x-9)(4-2\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2})}{(8+x)(\sqrt{1-x}+3)}$$

$$=-\lim_{x\to -8}\frac{4-2\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt{1-x}+3}$$

$$=-\frac{4+4+4}{3+3}$$

$$=-2$$

令 $t=\frac{1}{x}$，则

$$\lim_{x\to +\infty}(\cos\frac{1}{x}+\sin\frac{1}{x})^x$$

$$=\lim_{t\to 0^+}(\cos t+\sin t)^{\frac{1}{t}}$$

$$=\exp[\lim_{t\to 0^+}\frac{1}{t}\ln(\cos t+\sin t)]$$

$$=\exp[\lim_{t\to 0^+}\frac{\ln(\cos t+\sin t)}{t}]$$

$$\overset{\text{洛必达法则}}{=}\exp[\lim_{t\to 0^+}\frac{\cos t-\sin t}{\cos t+\sin t}]$$

$$=\exp(1)$$

$$=e$$

设 $F(x)=f(x)-f(x+\frac{1}{4})$，

则 $F(x)$ 在 $[0,\frac{3}{4}]$ 上连续，

$$F(0)+F(\frac{1}{4})+F(\frac{1}{2})+F(\frac{3}{4})$$
$$=[f(0)-f(\frac{1}{4})]+[f(\frac{1}{4})-f(\frac{1}{2})]+[f(\frac{1}{2})-f(\frac{3}{4})]+[f(\frac{3}{4})-f(1)]$$
$$=f(0)-f(1)$$
$$=0$$

（1）若 $F(0)$、$F(\frac{1}{4})$、$F(\frac{1}{2})$、$F(\frac{3}{4})$ 中至少一个等于 0，

则命题已经得证；

（2）若 $F(0)$、$F(\frac{1}{4})$、$F(\frac{1}{2})$、$F(\frac{3}{4})$ 都不等于 0，

则其中必有一正一负（因为不可能全正或全负）

根据零点定理，在这两个点之间，必然有点 ξ

使得 $F(\xi)=0$，即 $f(\xi)=f(\xi+\frac{1}{4})$

比如 $e^{-\frac{x^2}{2}}-\cos x$

开始不妨多展开几项

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^5}{5!}+o(x^5)$$

$$\therefore\ e^{-\frac{x^2}{2}}=1+(-\frac{x^2}{2})+\frac{(-\frac{x^2}{2})^2}{2!}+\frac{(-\frac{x^2}{2})^3}{3!}+\frac{(-\frac{x^2}{2})^4}{4!}+\frac{(-\frac{x^2}{2})^5}{5!}+o[(-\frac{x^2}{2})^5]$$
$$=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{8}-\frac{x^6}{48}+\frac{x^8}{384}-\frac{x^{10}}{3840}+o(x^{10})$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+o(x^6)=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}-\frac{x^6}{720}+o(x^6)$$

结果发现，蓝色部分可以抵消，红色部分不能抵消，

其余部分，更是高阶无穷小。于是

$$e^{-\frac{x^2}{2}}-\cos x=\frac{x^4}{8}-\frac{x^4}{24}+o(x^4)=\frac{x^4}{12}+o(x^4)$$

即 $e^{-\frac{x^2}{2}}-\cos x\sim\frac{x^4}{12}$

那么，熟练以后，就可以如下书写过程了：

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+o(x^2)$$

$$\therefore\ e^{-\frac{x^2}{2}}=1+(-\frac{x^2}{2})+\frac{(-\frac{x^2}{2})^2}{2!}+o[(-\frac{x^2}{2})^2]$$

$$=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{8}+o(x^4)$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+o(x^4)=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^4)$$

$$e^{-\frac{x^2}{2}}-\cos x=\frac{x^4}{8}-\frac{x^4}{24}+o(x^4)=\frac{x^4}{12}+o(x^4)$$

即 $e^{-\frac{x^2}{2}}-\cos x\sim\frac{x^4}{12}$

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x\arcsin x}-\sqrt{\cos x}}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{(\sqrt{1+x\arcsin x}-\sqrt{\cos x})(\sqrt{1+x\arcsin x}+\sqrt{\cos x})}{x^2(\sqrt{1+x\arcsin x}+\sqrt{\cos x})}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{1+x\arcsin x-\cos x}{x^2(\sqrt{1+x\arcsin x}+\sqrt{\cos x})}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{1}{\sqrt{1+x\arcsin x}+\sqrt{\cos x}}\cdot\lim_{x\to0}(\frac{1-\cos x}{x^2}+\frac{x\arcsin x}{x^2})$$

$$=\frac{1}{2}\cdot(\frac{1}{2}+1)=\frac{3}{4}$$

所以，$a=\frac{3}{4}$

$$\lim_{x\to(\frac{\pi}{2})^-}(\tan x)^{2x-\pi} = \lim_{x\to(\frac{\pi}{2})^-} e^{(2x-\pi)\ln\tan x} \quad (\because\ A = e^{\ln A})$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to(\frac{\pi}{2})^-}(2x-\pi)\ln\tan x} = e^{\lim\limits_{x\to(\frac{\pi}{2})^-}\frac{\ln\tan x}{\frac{1}{2x-\pi}}}$$

$$\overset{\text{洛必达法则}}{=} e^{\lim\limits_{x\to(\frac{\pi}{2})^-}\frac{\frac{1}{\tan x}\sec^2 x}{\frac{2}{(2x-\pi)^2}}} = e^{\lim\limits_{x\to(\frac{\pi}{2})^-}\frac{(2x-\pi)^2}{2\sin x\cos x}}$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to(\frac{\pi}{2})^-}\frac{(2x-\pi)^2}{\sin 2x}} \overset{\text{洛必达法则}}{=} e^{\lim\limits_{x\to(\frac{\pi}{2})^-}\frac{2(2x-\pi)}{2\cos 2x}}$$

$$= e^0 = 1$$