求数列极限的十五种方法

1．定义法

$\varepsilon - N$ 定义：设 $\{a_n\}$ 为数列，a 为定数，若对任给的正数 ε，总存在正数 N，使得当 $n > N$ 时，有 $|a_n - a| < \varepsilon$，则称数列 $\{a_n\}$ 收敛于 a；记作：$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$，否则称 $\{a_n\}$ 为发散数列．

例 1．求证：$\lim\limits_{n\to\infty} a^{\frac{1}{n}} = 1$，其中 $a > 0$．

证：当 $a = 1$ 时，结论显然成立．

当 $a > 1$ 时，记 $\alpha = a^{\frac{1}{n}} - 1$，则 $\alpha > 0$，由 $a = (1+\alpha)^n \geq 1 + n\alpha = 1 + n(\alpha^{\frac{1}{n}} - 1)$，得 $a^{\frac{1}{n}} - 1 \leq \dfrac{a-1}{n}$，

任给 $\varepsilon > 0$，则当 $n > \dfrac{a-1}{\varepsilon} = N$ 时，就有 $a^{\frac{1}{n}} - 1 < \varepsilon$，即 $\left|a^{\frac{1}{n}} - 1\right| < \varepsilon$，即 $\lim\limits_{n\to\infty} a^{\frac{1}{n}} = 1$．

当 $0 < a < 1$ 时，令 $b = \dfrac{1}{a}$，则 $b > 1$，由上易知：$\lim\limits_{n\to\infty} b^{\frac{1}{n}} = 1$，∴ $\lim\limits_{n\to\infty} a^{\frac{1}{n}} = \dfrac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} b^{\frac{1}{n}}} = 1$．

综上，$\lim\limits_{n\to\infty} a^{\frac{1}{n}} = 1$，其中 $a > 0$．

例 2．求：$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{7^n}{n!}$．

解：变式：$\dfrac{7^n}{n!} = \dfrac{7}{1}\cdot\dfrac{7}{2}\cdots\dfrac{7}{7}\cdot\dfrac{7}{8}\cdot\dfrac{7}{9}\cdots\dfrac{7}{n-1}\cdot\dfrac{7}{n} \leq \dfrac{7^7}{7!}\cdot\dfrac{7}{n} = \dfrac{7^7}{6!}\cdot\dfrac{1}{n}$；∴ $\left|\dfrac{7^n}{n!} - 0\right| \leq \dfrac{7^7}{6!}\cdot\dfrac{1}{n}$，

∴ $\forall \varepsilon > 0$，$\exists N = \left[\dfrac{7^7}{6!}\cdot\dfrac{1}{\varepsilon}\right]$，则当 $n > N$ 时，有 $\left|\dfrac{7^n}{n!} - 0\right| \leq \dfrac{7^7}{6!}\cdot\dfrac{1}{n} < \varepsilon$；∴ $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{7^n}{n!} = 0$．

2．利用柯西收敛准则

柯西收敛准则：数列 $\{a_n\}$ 收敛的充要条件是：$\forall \varepsilon > 0$，∃正整数 N，使得当 n、$m > N$ 时，总有：$|a_n - a_m| < \varepsilon$ 成立．

例 3．证明：数列 $x_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{\sin k}{2^k}$ $(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ 为收敛数列．

$$\text{证：}|x_n - x_m| = \left|\frac{\sin(m+1)}{2^{m+1}} + \cdots + \frac{\sin n}{2^n}\right| \leq \frac{1}{2^{m+1}} + \cdots + \frac{1}{2^n} < \frac{1}{2^{m+1}}\left(\frac{1-\frac{1}{2^{n-m}}}{1-\frac{1}{2}}\right) < \frac{1}{2^m} < \frac{1}{m},$$

$$\forall \varepsilon > 0,\ \text{取 } N = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right],\ \text{当 } n > m > N \text{ 时，有 } |x_n - x_m| < \varepsilon,$$

由柯西收敛准则，数列 $\{x_n\}$ 收敛．

例 4．（有界变差数列收敛定理）若数列$\{x_n\}$满足条件：$|x_n - x_{n-1}| + |x_{n-1} - x_{n-2}| + \cdots |x_2 - x_1| \le M$，

$(n=1,\ 2,\ \cdots)$，则称$\{x_n\}$为有界变差数列，试证：有界变差数列一定收敛．

证：令$y_1 = 0,\ y_n = |x_n - x_{n-1}| + |x_{n-1} - x_{n-2}| + \cdots |x_2 - x_1|$，

那么$\{y_n\}$单调递增，由已知可知：$\{y_n\}$有界，故$\{y_n\}$收敛，

从而$\forall \varepsilon > 0$，$\exists$正整数N，使得当$n > m > N$时，有$|y_n - y_m| < \varepsilon$；

此即$|x_n - x_m| \le |x_n - x_{n-1}| + |x_{n-1} - x_{n-2}| + \cdots |x_{m+1} - x_m| < \varepsilon$；由柯西收敛准则，数列$\{x_n\}$收敛．

注：柯西收敛准则把$\varepsilon - N$定义中的a_n与a的关系换成了a_n与a_m的关系，其优点在于无需借用数列以外的数a，只需根据数列本身的特征就可鉴别其敛散性．

3．运用单调有界定理

单调有界定理：在实数系中，有界的单调数列必有极限．

例 5．证明：数列$x_n = \sqrt{a + \sqrt{a + \cdots \sqrt{a}}}$（$n$个根式，$a > 0$，$n = 1,\ 2,\ \cdots$）极限存在，并求$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$．

证：由假设知$x_n = \sqrt{a + x_{n-1}}$；①

用数学归纳法可证：$x_{n+1} > x_n,\ k \in N$；②

此即证$\{x_n\}$是单调递增的．

事实上，$0 < x_{n+1} < \sqrt{a + x_n} < \sqrt{a + \sqrt{a} + 1} < \sqrt{(\sqrt{a} + 1)^2} = \sqrt{a} + 1$；

由①②可知：$\{x_n\}$单调递增有上界，从而$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = l$存在，对①式两边取极限得：$l = \sqrt{a + l}$，

解得：$l = \dfrac{1 + \sqrt{1 + 4a}}{2}$和$l = \dfrac{1 - \sqrt{1 + 4a}}{2}$（舍负）；$\therefore \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \dfrac{1 + \sqrt{1 + 4a}}{2}$．

4．利用迫敛性准则（即两边夹法）

迫敛性：设数列$\{a_n\}$、$\{b_n\}$都以a为极限，数列$\{c_n\}$满足：存在正数N，当$n > N$时，有：$a_n \le c_n \le b_n$，则数列$\{c_n\}$收敛，且$\lim\limits_{n\to\infty} c_n = a$．

例 6．求：$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2+n+1} + \dfrac{2}{n^2+n+2} + \cdots + \dfrac{n}{n^2+n+n}\right)$．

解：记：$x_n = \dfrac{1}{n^2+n+1} + \dfrac{2}{n^2+n+2} + \cdots + \dfrac{n}{n^2+n+n}$，则：$\dfrac{1+2+\cdots+n}{n^2+n+n} \le x_n \le \dfrac{1+2+\cdots+n}{n^2+n+1}$；

$\therefore \dfrac{n(n+1)}{2(n^2+2n)} \le x_n \le \dfrac{n(n+1)}{2(n^2+n+1)}$；从而$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n(n+1)}{2(n^2+2n)} = \dfrac{1}{2} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n(n+1)}{2(n^2+n+1)}$，

$\therefore$由迫敛性，得：$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2+n+1} + \dfrac{2}{n^2+n+2} + \cdots + \dfrac{n}{n^2+n+n}\right) = \dfrac{1}{2}$．

注：迫敛性在求数列极限中应用广泛，常与其他各种方法综合使用，起着基础性的作用．

5．利用定积分的定义计算极限

黎曼积分定义：设为 $f(x)$ 定义在 $[a, b]$ 上的一个函数，J 为一个确定的数，若对任给的正数 $\varepsilon>0$，总存在某一正数 δ，使得对 $[a, b]$ 的任意分割 T，在其上任意选取的点集 $\{\xi_i\}$，$\xi_i \in \left[x_{i-1}, x_i\right]$，只要 $T<\delta$，就有 $\left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i - J\right|<\varepsilon$，则称函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上（黎曼）可积，数 J 为 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的定积分，记作 $J=\int_a^b f(x)dx$．

例7．求：$\lim\limits_{n\to\infty}\left[(n!)^{-1}\cdot n^{-n}\cdot(2n!)\right]^{\frac{1}{n}}$．

解：原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{(2n)!}{n!n^n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{(n+1)(n+2)\cdots(2n)}{n^n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\left[(1+\dfrac{1}{n})(1+\dfrac{2}{n})\cdots(1+\dfrac{n}{n})\right]^{\frac{1}{n}}$

$$=\exp\left(\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\ln(1+\frac{i}{n})\right)=\exp\left(\int_0^1\ln(1+x)dx\right)=\exp\left(2\ln 2-1\right).$$

例8．求：$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\sin\frac{\pi}{n}}{n+1}+\dfrac{\sin\frac{2\pi}{n}}{n+\frac{1}{2}}+\cdots+\dfrac{\sin\frac{n\pi}{n}}{n+\frac{1}{n}}\right)$．

解：因为：$\dfrac{\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+\cdots+\sin\frac{n\pi}{n}}{n+1}<\dfrac{\sin\frac{\pi}{n}}{n+1}+\dfrac{\sin\frac{2\pi}{n}}{n+\frac{1}{2}}+\cdots+\dfrac{\sin\frac{n\pi}{n}}{n+\frac{1}{n}}<\dfrac{\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+\cdots+\sin\frac{n\pi}{n}}{n+\frac{1}{n}}$，

又：$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+\cdots+\sin\frac{n\pi}{n}}{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n+1}\cdot\dfrac{1}{\pi}\cdot\left[\dfrac{\pi}{n}(\sin\dfrac{\pi}{n}+\sin\dfrac{2\pi}{n}+\cdots+\sin\dfrac{n\pi}{n})\right]$

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+\cdots+\sin\frac{n\pi}{n}}{n+1}=\dfrac{1}{\pi}\cdot\int_0^{\pi}\sin xdx=\dfrac{2}{\pi}$；

同理：$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+\cdots+\sin\frac{n\pi}{n}}{n+\frac{1}{n}}=\dfrac{2}{\pi}$；

由迫敛性，得：$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\sin\frac{\pi}{n}}{n+1}+\dfrac{\sin\frac{2\pi}{n}}{n+\frac{1}{2}}+\cdots+\dfrac{\sin\frac{n\pi}{n}}{n+\frac{1}{n}}\right)=\dfrac{2}{\pi}$．

注：数列极限为“有无穷多项无穷小的和的数列极限，且每项的形式很规范”这一类型问题时，可以考虑能否将极限看作是一个特殊的函数定积分的定义；部分相关的数列极限直接利用积分定义可能比较困难，这时需要综合运用迫敛性准则等方法进行讨论．

6．利用（海涅）归结原则求数列极限

归结原则： $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A \Leftrightarrow$ 对任何 $x_n\to x_0\ (n\to\infty)$，有 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=A$.

例9．求：$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{e^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}}$.　　**解：** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{e^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{e^{\frac{1}{n}}-e^0}{\frac{1}{n}-0}=(e^x)'\big|_{x=0}=1$.

例10．计算：$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n^2}\right)^n$.

解： 一方面，$(1+\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n^2})^n<(1+\dfrac{1}{n})^n\to e\ \ (n\to\infty)$；

另一方面，$(1+\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n^2})^n=(1+\dfrac{n-1}{n^2})^{\frac{n^2}{n-1}-\frac{n}{n-1}}\ge(1+\dfrac{n-1}{n^2})^{\frac{n^2}{n-1}-2}$；

由归结原则：（取 $x_n=\dfrac{n^2}{n-1},\ n=2,\ 3,\ \cdots$），

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{n-1}{n^2})^{\frac{n^2}{n-1}-2}=\lim_{n\to\infty}(1+\frac{n-1}{n^2})^{\frac{n^2}{n-1}}\cdot\lim_{n\to\infty}(1+\frac{n-1}{n^2})^{-2}=\lim_{n\to\infty}(1+\frac{n-1}{n^2})^{\frac{n^2}{n-1}}=\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x=e\ ;$$

由追敛性，得：$\lim\limits_{n\to\infty}(1+\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n^2})^n=e$.

注： 数列是一种特殊的函数，而函数又具有连续、可导、可微、可积等优良性质，有时我们可以借助函数的这些优良性质将数列极限转化为函数极限，从而使问题得到简化和解决.

7．利用施托尔茨（stolz）定理求数列极限

stolz **定理1**：$(\dfrac{\infty}{\infty})$ 型：若 $\{y_n\}$ 是严格递增的正无穷大数列，它与数列 $\{x_n\}$ 一起满足：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}=l，\text{则有}\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=l，\text{其中 } l \text{ 为有限数，或 } +\infty，\text{或 } -\infty .$$

stolz **定理2**：$(\dfrac{0}{0})$ 型：若 $\{y_n\}$ 是严格递减的趋向于零的数列，$n\to\infty$ 时，$x_n\to 0$ 且

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}=l，\text{则有}\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=l，\text{其中 } l \text{ 为有限数，或 } +\infty，\text{或 } -\infty .$$

例11．求：$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1^p+2^p+\cdots+n^p}{n^{p+1}}\ \ (p\in N)$.

解： 令 $x_n=1^p+2^p+\cdots+n^p,\ y_n=n^{p+1},\ n\in N$，则由定理1，得：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1^p+2^p+\cdots+n^p}{n^{p+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^p}{(n+1)^{p+1}-n^{p+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^p}{(p+1)n^p-\frac{(p+1)\cdot p}{2}n^{p-1}+\cdots+1}=\frac{1}{p+1}.$$

注： 本题亦可由**方法五**（即定积分定义）求得，也较为简便，此处略.

例12．设 $S_n=\dfrac{\sum\limits_{k=0}^{n}\ln C_n^k}{n^2}$，求：$\lim\limits_{n\to\infty}S_n$．

解：令 $y_n=n^2$，则 $\{y_n\}$ 单调递增数列，于是由定理2得：

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=0}^{n}\ln C_n^k}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=0}^{n+1}\ln C_{n+1}^k-\sum\limits_{k=0}^{n}\ln C_n^k}{(n+1)^2-n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=0}^{n}\ln\dfrac{n+1}{n-k+1}}{2n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)\ln(n+1)-\sum\limits_{k=1}^{n+1}\ln k}{2n+1}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)\ln(n+1)-n\ln n-\ln(n+1)}{2n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(\dfrac{n+1}{n})^n}{2}=\frac{1}{2}.$$

注：stolz 定理是一种简便的求极限方法，特别对分子、分母为求和型，利用 stolz 定理有很大的优越性，它可以说是求数列极限的洛必达（ L'Hospita ）法则．

8．利用级数求和求数列极限

由于数列与级数在形式上的统一性，有时数列极限的计算可以转化为级数求和，从而通过级数求和的知识使问题得到解决．

例13．求：$\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{1}{a}+\dfrac{2}{a^2}+\cdots+\dfrac{n}{a^n})$，$(a>1)$．

解：令 $x=\dfrac{1}{a}$，则 $|x|<1$，考虑级数：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}nx^n$．$\because\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)x^{n+1}}{nx^n}=x<1$，

$\therefore$此级数是收敛的．令 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}nx^n=x\cdot\sum\limits_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}$，再令 $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}$，

$\because\int_0^x f(t)dt=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int_0^x nt^{n-1}dt=\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^n=\dfrac{x}{1-x}$；$\therefore\ f(x)=(\dfrac{x}{1-x})'=\dfrac{1}{(1-x)^2}$；

而 $S(x)=x\cdot f(x)=\dfrac{x}{(1-x)^2}$；因此，原式$==S(a^{-1})=\dfrac{a^{-1}}{(1-a^{-1})^2}$．

9．利用级数收敛性判断极限存在

由于级数与数列在形式上可以相互转化，使得级数与数列的性质有了内在的密切联系，因此数列极限的存在性及极限值问题，可转化为研究级数收敛性问题．

例14．设 $x_0>0$，$x_{n+1}=\dfrac{2(1+x_n)}{2+x_n}\ (n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$，证明：数列 $\{x_n\}$ 收敛，并求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$．

证：由 $x_0>0$，可得：$x_n>0\ (n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$，令 $f(x)=\dfrac{2(1+x)}{2+x},\ (x>0)$，

则 $0<f'(x)=\dfrac{2}{(2+x)^2}<\dfrac{1}{2}$，且 $f(x_n)=\dfrac{2(1+x_n)}{2+x_n}=x_{n+1},\ x_n>0,\ (n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$，

考虑级数：$\sum\limits_{n=0}^{\infty}|x_{n+1}-x_n|$；

由于 $\left|\frac{x_{n+1}-x_n}{x_n-x_{n-1}}\right|=\left|\frac{f(x_n)-f(x_{n-1})}{x_n-x_{n-1}}\right|=\left|\frac{f'(\xi)(x_n-x_{n-1})}{x_n-x_{n-1}}\right|<\frac{1}{2}$；

所以，级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\left|x_{n+1}-x_n\right|$ 收敛，从而 $\sum_{n=0}^{\infty}(x_{n+1}-x_n)$ 收敛.

令 $S_n=\sum_{k=0}^{n}\left(x_{k+1}-x_k\right)=x_{n+1}-x_0$，$\because \lim_{n\to\infty}S_n$ 存在，$\therefore \lim_{n\to\infty}x_{n+1}=x_0+\lim_{n\to\infty}S_n=l$（存在）；

对式子：$x_{n+1}=\frac{2(1+x_n)}{2+x_n}$，两边同时取极限：$l=\frac{2(1+l)}{2+l}$，

$\therefore l=\sqrt{2}$ 或 $l=-\sqrt{2}$（舍负）；$\therefore \lim_{n\to\infty}x_n=\sqrt{2}$.

例15．证明：$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\cdots+\frac{1}{n}-\ln n)$ 存在．（此极限值称为 Euler 常数）.

证：设 $a_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\cdots+\frac{1}{n}-\ln n$，则 $\left|a_n-a_{n-1}\right|=\left|\frac{1}{n}-\left[\ln n-\ln(n-1)\right]\right|$；

对函数 $y=\ln n$ 在 $[n-1,\ n]$ 上应用拉格朗日中值定理，

可得：$\ln n-\ln(n-1)=\frac{1}{n-1+\theta}\quad(0<\theta<1)$，

所以 $\left|a_n-a_{n-1}\right|=\left|\frac{1}{n}-\frac{1}{n-1+\theta}\right|=\left|\frac{\theta-1}{n(n-1+\theta)}\right|<\frac{1}{(n-1)^2}$；

因为 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n-1)^2}$ 收敛，由比较判别法知：$\sum_{n=2}^{\infty}\left|a_n-a_{n-1}\right|$ 也收敛，

所以 $\lim_{n\to\infty}a_n$ 存在，即 $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\cdots+\frac{1}{n}-\ln n)$ 存在.

10．利用幂级数求极限

利用基本初等函数的麦克劳林展开式，常常易求出一些特殊形式的数列极限.

例16．设 $\sin_1 x=\sin x,\ \sin_n x=\sin(\sin_{n-1}x)\ (n=2,\ 3,\ \cdots)$，若 $\sin x>0$，求：$\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{n}{3}}\cdot\sin_n x$.

解：对于固定的 x，当 $n\to\infty$ 时，$\frac{1}{\sin_n x}$ 单调趋于无穷，由 stolz 公式，有：

$$\lim_{n\to\infty}n\sin^2{}_n x=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\frac{1}{\sin^2{}_n x}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1-1}{\frac{1}{\sin^2{}_{n+1}x}-\frac{1}{\sin^2{}_n x}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\frac{1}{\sin^2(\sin_n x)}-\frac{1}{\sin^2{}_n x}}$$

$$=\lim_{t\to0^+}\frac{1}{\frac{1}{\sin^2 t}-\frac{1}{t^2}}=\lim_{t\to0^+}\frac{t^2\cdot\sin^2 t}{t^2-\sin^2 t}=\lim_{t\to0^+}\frac{t^4-\frac{1}{3}\cdot t^6+o(t^6)}{t^2-(t^2-\frac{1}{3}t^4+o(t^4))}$$

$$=\lim_{t\to 0^+}\frac{t^4-\frac{1}{3}\cdot t^6+o(t^6)}{\frac{1}{3}t^4+o(t^4)}=\lim_{t\to 0^+}\frac{1-\frac{1}{3}\cdot t^2+o(t^2)}{\frac{1}{3}+o(1)}=3.$$

11．利用微分中值定理求极限

拉格朗日中值定理是微分学重要的基本定理，它利用函数的局部性质来研究函数的整体性质，其应用十分广泛．下面我们来看一下拉格朗日中值定理在求数列极限中的应用．

例17．求：$\lim\limits_{n\to\infty}n^2(\arctan\frac{a}{n}-\arctan\frac{a}{n+1})$，$(a\neq 0)$．

解：设 $f(x)=\arctan x$，在$[\frac{a}{n+1},\ \frac{a}{n}]$上应用拉格朗日中值定理，

得：$f(\frac{a}{n})-f(\frac{a}{n+1})=\frac{1}{1+\xi^2}(\frac{a}{n}-\frac{a}{n+1}),\ \xi\in[\frac{a}{n+1},\ \frac{a}{n}]$，

故当 $n\to\infty$ 时，$\xi\to 0$，可知：原式$=\lim\limits_{n\to\infty}n^2\cdot\frac{a}{1+\xi^2}\cdot\frac{n}{n+1}=a$．

12．巧用无穷小数列求数列极限

引理：数列$\{x_n\}$收敛于a的充要条件是：数列$\{x_n-a\}$为无穷小数列．　**注**：该引理说明，若$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，则$x_n$可作“变量”替换：令$x_n=a+\alpha_n$，其中$\{\alpha_n\}$是一个无穷小数列．

定理1：若数列$\{\alpha_n\}$为无穷小数列，则数列$\{|\alpha_n|\}$也为无穷小数列，反之亦成立．

定理2：若数列$\{\alpha_n\}$为无穷小数列，则数列$\{\frac{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n}{n}\}$也为无穷小数列．

推论1：设数列$\{\alpha_n\}$为无穷小数列，则数列$\{\frac{|\alpha_1|+|\alpha_2|+\cdots+|\alpha_n|}{n}\}$也为无穷小数列．

例18．（算术平均收敛公式）设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，求极限$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$．

解：由$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，作“变量”代换，令$x_n=a+\alpha_n$，其中$\{\alpha_n\}$是一无穷小数列；

由定理2的结论有：$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(a+\alpha_1)+(a+\alpha_2)+\cdots+(a+\alpha_n)}{n}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{na+(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n)}{n}=a+\lim_{n\to\infty}\frac{(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n)}{n}=a+0=a.$$

此题还可以用**方法1**（定义法）证明，也可通过**方法7**（stolz 公式）求得，此处略．

例19．设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=b$，求极限$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_1y_n+x_2y_{n-1}+\cdots+x_ny_1}{n}$．

解：由$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=b$，作“变量”代换，

令 $x_n = a+\alpha_n$， $y_n = b+\beta_n$，其中$\{\alpha_n\}$，$\{\beta_n\}$都是一无穷小数列，

故$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_1y_n+x_2y_{n-1}+\cdots+x_ny_1}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(a+\alpha_1)(b+\beta_n)+\cdots+(a+\alpha_n)(b+\beta_1)}{n}$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[ab+b\frac{\alpha_1+\cdots+\alpha_n}{n}+a\frac{\beta_1+\cdots+\beta_n}{n}+\frac{\alpha_1\beta_n+\cdots+\alpha_n\beta_1}{n}\right]$$

因为$\beta_n\to 0\ (n\to\infty)$，所以$\{\beta_n\}$有界数列，即$|\beta_n|\le M$，

从而结合上述推论1，有：$\left|\dfrac{\alpha_1\beta_n+\cdots\alpha_n\beta_1}{n}\right|\le M\cdot\dfrac{|\alpha_1|+|\alpha_2|+\cdots+|\alpha_n|}{n}\to 0\ \ (n\to\infty)$，

再根据定理1，即有：$\dfrac{\alpha_1\beta_n+\cdots\alpha_n\beta_1}{n}\to 0\ (n\to\infty)$；

又由定理2，可知：$a\cdot\dfrac{\beta_1+\cdots+\beta_n}{n}\to 0$，$b\cdot\dfrac{\alpha_1+\cdots+\alpha_n}{n}\to 0\ (n\to\infty)$；

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_1y_n+x_2y_{n-1}+\cdots+x_ny_1}{n}=ab$.

注：利用无穷小数列求数列极限通常在高等数学和数学分析教材中介绍甚少，但却是一种很实用有效的方法．用这种方法求某类数列的极限是极为方便的．

13．利用无穷小的等价代换求某些函数列的极限

定理：设函数 $f(x)$、$g(x)$ 在 $x=0$ 的某个领域有意义，$g(x)>0$，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=1$，且当 $n\to\infty$ 时，

$a_{mn}\to 0\ \ (m=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$，$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{m=1}^{n}f(a_{mn})=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{m=1}^{n}g(a_{mn})$，则在右端极限存在时成立．

例20．求极限$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}(\sqrt[3]{1+\dfrac{i}{n}}-1)$.

解：令 $f(x)=\sqrt[3]{1+x}-1$， $g(x)=\dfrac{1}{3}x$，当 $x\to 0$时，$\sqrt[3]{1+x}-1\sim x$，

由定理1，得：$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}(\sqrt[3]{1+\dfrac{i}{n}}-1)=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{i}{n^2}=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{6}$.

例21．求：$\lim\limits_{n\to\infty}\prod\limits_{i=1}^{n}(1+\dfrac{i^2}{n^3}a^2)$，（$a$为非零常数）．

解：原式$=\exp\left(\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\ln(1+\dfrac{i^2}{n^3}a^3)\right)$；令 $f(x)=\ln(1+x)$，当 $x\to 0$时，$\ln(1+x)\sim x$，

由定理1，得：$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\ln(1+\dfrac{i^2}{n^3}a^3)=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{i^2}{n^3}a^3=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3}a^2=\dfrac{1}{3}a^2$；

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}\prod\limits_{i=1}^{n}(1+\dfrac{i^2}{n^3}a^2)=\exp(\dfrac{1}{3}a^2)$.

注：我们知道，当 $x \to 0$ 时，函数 $\sin x,\ \tan x,\ \arcsin x,\ \arctan x,\ e^x - 1,\ \ln(1+x)$ 都 x 与等价，倘若熟悉这些等价函数，观察它们与本文定理中的 $f(x)$ 的关系，把求某些函数列极限问题转化为求熟知的数列极限问题，这样就会起到事半功倍的效果.

14．利用压缩映射原理求数列极限

定义1：设 $f(x)$ 在 $[a,\ b]$ 上有定义，方程 $f(x) = x$ 在 $[a,\ b]$ 上的解称为 $f(x)$ 在 $[a,\ b]$ 上的不动点.

定义2：若存在一个常数 k，且 $0 \le k < 1$，使得 $\forall x$、$y \in [a,\ b]$ 有 $|f(x) - f(y)| \le k|x - y|$，

则称 $f(x)$ 是 $[a,\ b]$ 上的一个压缩映射.

压缩映射原理：设称 $f(x)$ 是 $[a,\ b]$ 上的一个压缩映射且 $x_0 \in [a,\ b]$，$x_{n+1} = f(x_n)$，对 $\forall n \in N$，

有 $x_n \in [a,\ b]$，则称 $f(x)$ 在 $[a,\ b]$ 上存在唯一的不动点 c，且 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = c$.

例22．设 $x_1 = \dfrac{a}{2}$，$x_{n+1} = \dfrac{a + x_n^2}{2}$ $(0 < a < 1)$，$n = 1,\ 2,\ \cdots$，求 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

解：考察函数 $f(x) = \dfrac{a}{2} + \dfrac{x^2}{2}$，$x \in [0,\ \dfrac{1+a}{2}]$，

易见对 $\forall x \in [0,\ \dfrac{1+a}{2}]$，有：$x_{n+1} = \dfrac{a + x_n^2}{2} = f(x_n)$，$x_1 = \dfrac{a}{2} \in [0,\ \dfrac{1+a}{2}]$，$|f'(x)| = x \le \dfrac{1+a}{2} < 1$；

所以，$f(x)$ 是压缩的，由压缩映射原理，数列 $\{x_n\}$ 收敛.

设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = c$，则 c 是 $x = \dfrac{a}{2} + \dfrac{x^2}{2}$ 在 $[0,\ \dfrac{1+a}{2}]$ 的解，解得 $c = 1 - \sqrt{1-a}$，即 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1 - \sqrt{1-a}$.

例23．证明：数列 $x_n = \sqrt{a + \sqrt{a + \cdots \sqrt{a}}}$（$n$ 个根式，$a > \dfrac{1}{4}$，$n = 1,\ 2,\ \cdots$）极限存在，并求 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

解：易知：$x_n = \sqrt{a + x_{n-1}}$，

考察函数：$f(x) = \sqrt{a+x}$，$x \in [0,\ +\infty)$ 且在 $[0,\ +\infty)$ 上有：$|f'(x)| = \left|\dfrac{1}{2\sqrt{a+x}}\right| \le \dfrac{1}{2\sqrt{a}} < 1$，

因此，$f(x)$ 在 $[0,\ +\infty)$ 上是压缩的；$x_1 = \sqrt{a} \in [0,\ +\infty)$，$x_{n+1} = f(x_n)$，

由压缩映射原理，数列 $\{x_n\}$ 收敛且极限为方程：$x = f(x) = \sqrt{a+x}$ 的解，

解得：$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \dfrac{1 + \sqrt{1+4a}}{2}$.

本题也可通过**方法三**（单调有界定理）解得，此处略.

注：压缩映射原理在实分析中有着十分广泛的应用，如用它可十分简单的证明稳函数存在定理、微分方程解的存在性定理，特别的在求一些数列极限中有着十分重要的作用，往往可以使数列极限问题得到简便快速的解决.

15．利用矩阵求解一类数列的极限

（**1**）若数列的递推公式形如：$x_n = px_{n-1} + qx_{n-2}$ 且已知 x_0、x_1，其中 p、q 为常数且 $p \neq 0$，$q \neq 0$，$n = 2,\ 3,\ \cdots$；

解：可将递推公式写成矩阵形式，则有 $\begin{pmatrix} x_n \\ x_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & q \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_{n-1} \\ x_{n-2} \end{pmatrix} = \cdots = \begin{pmatrix} p & q \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{n-1}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_0 \end{pmatrix}$，

$n = 2,\ 3,\ \cdots$，从而可利用线性代数知识求出 x_n 的表达式，并进一步求出 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

（**2**）若数列的递推公式形如：$x_n = \dfrac{ax_{n-1} + b}{cx_{n-1} + d}$ 且已知 x_0，其中 $c \neq 0$ 且 $ad \neq bc$，$n = 1,\ 2,\ \cdots$，

解法1：令 $cx_{n-1} + d = \dfrac{y_{n-2}}{y_{n-1}}$，则 $x_{n-1} = \dfrac{1}{c}(\dfrac{y_{n-1}}{y_{n-2}} - d)$，$x_n = \dfrac{1}{c}(\dfrac{y_n}{y_{n-1}} - d)$，

从而有：$\dfrac{1}{c}(\dfrac{y_n}{y_{n-1}} - d) = (\dfrac{a}{c}(\dfrac{y_{n-1}}{y_{n-2}} - d) + b)\cdot\dfrac{y_{n-2}}{y_{n-1}}$，

整理得：$y_n = (a+d)y_{n-1} + (bc - ad)y_{n-2}$，再由（1）可以求解.

解法2：设与关系式 $x_1 = \dfrac{ax_0 + b}{cx_0 + d}$ 对应的矩阵为 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & b \end{pmatrix}$，由关系式 $x_n = \dfrac{ax_{n-1} + b}{cx_{n-1} + d}$；

逐次递推，有 $x_n = \dfrac{a_n x_0 + b_n}{c_n x_0 + d_n}$，其对应的矩阵为 $B = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}$，

利用数学归纳法易证得 $B = A^n$，通过计算 A^n 可求出 x_n 的表达式，并进一步求出 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

例24．证明：满足递推公式 $x_{n+1} = \alpha x_n + (1-\alpha)x_{n-1}\ (0 < \alpha < 1)$ 的任何实数序列 $\{x_n\}$ 有一个极限，并求出以 α、x_0 及 x_1 表示的极限.

解：由已知可得：$\begin{pmatrix} x_n \\ x_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & 1-\alpha \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_{n-1} \\ x_{n-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & 1-\alpha \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{n-1}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_0 \end{pmatrix} = A^{n-1}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_0 \end{pmatrix}$，（$A = \begin{pmatrix} \alpha & 1-\alpha \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$）；

矩阵 A 的特征值 $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = \alpha - 1$，对应的特征向量分别为：$\xi_1 = (1,\ 1)'$，$\xi_2 = (\alpha - 1,\ 1)'$；

令 $P = (\xi_1,\ \xi_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1-\alpha \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$，则 $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \alpha - 1 \end{pmatrix}$，从而有：

$$A^{n-1} = P\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (\alpha-1)^{n-1} \end{pmatrix}P^{-1} = \frac{1}{2-\alpha}\begin{pmatrix} 1 & \alpha-1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (\alpha-1)^{n-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1-\alpha \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2-\alpha}\begin{pmatrix} 1-(\alpha-1)^n & 1-\alpha+(\alpha-1)^n \\ 1-(\alpha-1)^{n-1} & 1-\alpha+(\alpha-1)^{n-1} \end{pmatrix};$$

于是，$x_n = \dfrac{1}{2-\alpha}\left[(1-(\alpha-1)^n)x_1 + (1-\alpha+(\alpha-1)^n)x_0\right]$.

因为$|\alpha-1|<1$，所以$\lim\limits_{n\to\infty}(\alpha-1)^n=0$，从而$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\dfrac{1}{2-\alpha}\left[(1-\alpha)x_0+x_1\right]$.

例25．已知斐波那契数列定义为：$F_{n+1}=F_n+F_{n-1}\ \ (n=1,\ 2,\ \cdots;\ F_0=F_1=1)$；

若令$x_n=\dfrac{F_n}{F_{n+1}}$，$x_0=1$且$x_n=\dfrac{1}{1+x_{n-1}}$，$(n=1,\ 2,\ \cdots)$，证明极限$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在并求此极限.

解：显然$x_1=\dfrac{1}{1+x_0}$，相应矩阵$A=\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix}$的特征值$\lambda_1=\dfrac{1+\sqrt5}{2}$, $\lambda_2=\dfrac{1-\sqrt5}{2}$，

对应的特征向量分别为：$\xi_1=(\dfrac{2}{1+\sqrt5},\ 1)'$, $\xi_2=(\dfrac{2}{1-\sqrt5},\ 1)'$；

令$P=\left(\xi_1,\ \xi_2\right)=\begin{pmatrix}\dfrac{2}{1+\sqrt5}&\dfrac{2}{1-\sqrt5}\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{1}{\lambda_1}&\dfrac{1}{\lambda_2}\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\lambda_2&-\lambda_1\\1&1\end{pmatrix}$，$P^{-1}=\dfrac{1}{\sqrt5}\begin{pmatrix}1&\lambda_1\\-1&-\lambda_2\end{pmatrix}$；

则有：$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}\lambda_1&0\\0&\lambda_2\end{pmatrix}$；于是$A^n=P\begin{pmatrix}\lambda_1^n&0\\0&\lambda_2^n\end{pmatrix}P^{-1}=\begin{pmatrix}\lambda_1^{n-1}-\lambda_2^{n-1}&\lambda_1^n-\lambda_2^n\\\lambda_1^n-\lambda_2^n&\lambda_1^{n+1}-\lambda_2^{n+1}\end{pmatrix}$；

从而，$x_n=\dfrac{\lambda_1^{n-1}-\lambda_2^{n-1}+\lambda_1^n-\lambda_2^n}{\lambda_1^n-\lambda_2^n+\lambda_1^{n+1}-\lambda_2^{n+1}}$, $\left(n=1,\ 2,\ \cdots\right)$,

由于$\left|\dfrac{\lambda_2}{\lambda_1}\right|<1$，上式右端分子、分母同时除以$\lambda_1^n$，

再令$n\to\infty$，则有：$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{F_n}{F_{n+1}}=\dfrac{\sqrt5-1}{2}$.

注：求由常系数线性递推公式所确定的数列的极限有很多种方法，矩阵解法只是其一，但与之相关的论述很少，但却简单实用.