泰勒公式的应用及技巧

费德霖

（淮南师范学院 教务处，安徽 淮南 232001）

摘 要：泰勒公式在分析和研究数学问题方面，有着重要应用，本文阐述了泰勒公式在研究方程根的唯一存在性、判断级数敛散性和定积分不等式、等式的证明方面的应用及技巧。

关键词：泰勒公式；应用；技巧；

中图分类号：O173.1 **文献标识码**：A **文章编号**：1009－9735(2001)04－0084－03

由泰勒中值定理我们知道，若函数 $f(x)$ 在含有 x_0 的某个开区间 (a,b) 内有直到 $n+1$ 阶的导数，则当 x 在 (a,b) 内时，$f(x)$ 可表示为：

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2!}f''(x_0)(x-x_0)^2+\cdots\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1},$$

其中 $\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$ 叫做拉格朗日(Lagrange)余项，是比 $(x-x_0)^n$ 高阶的无穷小，这里 ξ 是 x_0 与 x 之间的某个值。泰勒公式常用于函数的近似计算并且可有满意的精确度。例如，用于三角函数近似计算可造出三角函数表，用于解方程可有牛顿近似法求方程的近似解等等。泰勒公式成功地将一些函数表示为简单的多项式函数，这种化繁为简的功能，使泰勒公式除了应用于近似计算以外，还成为分析和研究其他数学问题的有力杠杆。下面举例阐述泰勒公式的应用及技巧。

一、应用泰勒公式证明根的唯一存在性问题

泰勒公式可用于根的唯一存在性的证明。

例 1：设 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上二阶可导，且 $f(a)>0$，$f'(a)<0$，对 $x\in(a,+\infty)$，$f''(x)\leqslant0$，证明：$f(x)=0$ 在 $(a,+\infty)$ 内存在唯一实根。

分析：这里 $f(x)$ 是抽象函数，直接讨论 $f(x)=0$ 的根有困难，由题设 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上二阶可导，且 $f(a)>0$，$f'(a)<0$，可考虑将 $f(x)$ 在 a 点展开一阶泰勒公式，然后设法应用介值定理进行证明。

证明：因为 $f''(x)\leqslant0$，所以 $f'(x)$ 单调减少，又 $f'(a)<0$，因此 $x>a$ 时，$f'(x)<f'(a)<0$，故 $f(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 上严格单调减少。在 a 点展开一阶泰勒公式有

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(\xi)}{2}(x-a)^2\quad(a<\xi<x)$$

由题设 $f'(a)<0$，$f''(\xi)\leqslant0$，于是有 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$，从而必存在 $b>a$，使得 $f(b)<0$，又因为 $f(a)>0$，在 $[a,b]$ 上应用连续函数的介值定理，存在 $x_0\in(a,b)$，使 $f(x_0)=0$，由 $f(x)$ 的严格单调性知 x_0 唯一，因此方程 $f(x)=0$ 在 $(a,+\infty)$ 内存在唯一实根。

二、应用泰勒公式判断级数的敛散性

当级数的通项表达式是由不同类型函数式构成的繁难形式时，往往利用泰勒公式将级数通项简化或统一形式，以便于利用判敛准则。

例 2：讨论级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\sqrt{\ln\frac{n+1}{n}}\right)$ 的敛散性

分析：直接根据通项去判断该级数是正项级数还是非正项级数比较困难，因而也就无法恰当选择判敛方法，注意到 $\ln\frac{n+1}{n}=\ln(1+\frac{1}{n})$，若将其泰勒展开为 $\frac{1}{n}$ 的幂的形式，开二次方后恰与 $\frac{1}{\sqrt{n}}$ 相呼应，会使判敛容易进行。

解：∵ $\ln\frac{n+1}{n}=\ln(1+\frac{1}{n})=\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+\frac{1}{3n^3}-\frac{1}{4n^4}+\cdots<\frac{1}{n}$

* **收稿日期**：2001－06－13
作者简介：费德霖(1947—)男，北京密云人，现在淮南师范学院教务处工作，高级讲师。研究方向：数学教学法。

万方数据

$\therefore\ \sqrt{\ln\frac{n+1}{n}}<\frac{1}{\sqrt{n}}$

$\therefore\ u_n=\frac{1}{\sqrt{n}}-\sqrt{\ln\frac{n+1}{n}}>0$

故该级数是正项级数。

又 $\because\ \sqrt{\ln\frac{n+1}{n}}=\sqrt{\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+\frac{1}{3n^3}+0(\frac{1}{n^3})}>\sqrt{\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}+\frac{1}{4n^3}}=\sqrt{(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{2n^{3/2}})^2}=\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{2n^{3/2}}$

$\therefore\ u_n=\frac{1}{\sqrt{n}}-\sqrt{\ln\frac{n+1}{n}}<\frac{1}{\sqrt{n}}-(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{2n^{3/2}})=\frac{1}{2n^{3/2}}$

$\because\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n^{3/2}}$ 收敛，由正项级数比较判别法知原级数收敛。

该题利用泰勒公式后还结合运用了放缩等技巧，这是运用比较判别法常用的技巧。

例 3：设 f(x) 在点 x = 0 的某一邻域内具有二阶连续导数，且 $\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=0$，证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty}f(\frac{1}{n})$ 绝对收敛。

分析：由题设条件"f(x) 在 x = 0 的某一邻域内具有二阶连续导数"这一信息可提示使用泰勒公式，又由条件 $\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=0$ 易推得 $f(0)=f'(0)=0$，这将使 f(x) 在 x = 0 点的泰勒展开式更加简单，便于利用比较判别法判敛。

解：由 $\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=0$ 及 f(x) 在 x = 0 的某邻域内具有连续的二阶导数，可知 $f(0)=\lim_{x\to0}f(x)=0$，$f'(0)=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=0$。

将 f(x) 在 x = 0 的某邻域内展成一阶泰勒公式

$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{1}{2}f''(\xi)x^2=\frac{1}{2}f''(\xi)x^2$（$\xi$ 在 0 与 x 之间），又由题设 f(x) 在属于某邻域内含 x = 0 点的一个小闭区间连续，因此存在 M>0，使

$|f''(x)|\leqslant M$，于是 $|f(x)|=\frac{1}{2}|f''(\xi)|x^2\leqslant\frac{M}{2}x^2$，令 $x=\frac{1}{n}$，则 $\left|f(\frac{1}{n})\right|\leqslant\frac{M}{2}\cdot\frac{1}{n^2}$

因为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛，故 $\sum_{n=1}^{\infty}f(\frac{1}{n})$ 绝对收敛。

三、应用泰勒公式证明定积分不等式或等式

泰勒公式在定积分等式或不等式的证明方面也有着重要应用。应用的关键在于(1)根据题设条件如何选择要展开的函数；(2)在哪一点的邻域将函数展开。要解决好这两个关键，其中蕴含着一些技巧。

例 4　设 f(x) 在 [a, b] 上单调增加，且 $f''(x)>0$，证明 $\int_a^b f(x)dx<(b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}$

分析：题设条件告知函数 f(x) 二阶可导且 $f''(x)>0$，高阶导数的存在，提示我们尝试使用泰勒公式。因为不等式左边被积函数是 f(x)，右边有 f(a)、f(b)，我们不妨对 $\forall t\in[a,b]$，将 f(t) 在点 x 处展开为泰勒公式，再令 t = a, t = b，进而找出 f(x) 与 f(a)、f(b) 的关系。

证明：对 $\forall t\in[a,b]$，f(t) 在点 x 处的一阶泰勒展开式为：

$f(t)=f(x)+f'(x)(t-x)+\frac{1}{2}f''(\xi)(t-x)^2$，其中 ξ 在 t 与 x 之间。

$\because f''(\xi)>0\quad\therefore f(t)>f(x)+f'(x)(t-x)$　　(1)

将 t = a, t = b 分别代入(1)并相加，得

$f(a)+f(b)>2f(x)+(a+b)f'(x)-2xf'(x)$　　(2)

对(2)的两边在 [a, b] 上积分，则

$[f(a)+f(b)](b-a)>2\int_a^b f(x)dx+(a+b)\int_a^b f'(x)dx-2\int_a^b xf'(x)dx\Rightarrow[f(a)+f(b)](b-a)>2\int_a^b f(x)dx+(a+b)f(x)|_a^b-2[xf(x)|_a^b-\int_a^b f(x)dx]\Rightarrow2[f(a)+f(b)](b-a)>4\int_a^b f(x)dx$

故 $\int_a^b f(x)dx<\frac{f(a)+f(b)}{2}(b-a)$

由例 4 可知，当已知被积函数 f(x) 二阶或二阶以上可导，而且已知最高阶导数的符号时，用泰勒公式证明定积分不等式往往具有满意的效果。一般先直接写出 f(x) 的泰勒展开式（有时根据题意对展开式进行放缩），然后再对两边积分证得结果。

例 5：设 f(x) 在 [0, 1] 上有连续的二阶导数，且 $f'(0)=f'(1)=0$，试证 $\int_0^1 f(x)dx=\frac{f(0)+f(1)}{2}+\frac{f''(\xi)}{6}$　$\xi\in(0,1)$

分析：题设条件 f(x) 具有连续的二阶导数，提示可用泰勒公式加以证明。由于题目中要证的等式右边具有 $f''(\xi)$，可考虑将函数 $F(x)=\int_0^x f(t)dt$ 展开为二阶泰勒公式，为便于运用题设条件 $f'(0)=f'(1)=0$，可在 x 点作泰勒展开，然后分别令 x = 1, x = 0，这样既可使展开式得以化简，又可引出 f(0)、f(1)，有利于问题的证明。

证明：$\forall x\in[0,1]$，设 $F(x)=\int_0^x f(t)dt$，则 $F(0)=0$，$F'(x)=f(x)$，$F''(x)=f'(x)$，$F'''(x)=f''(x)$，把

万方数据

F(u)在 $u=x(0\leqslant u\leqslant 1)$处展开二阶泰勒公式：$F(u)=F(x)+f(x)(u-x)+\frac{1}{2}f'(x)(u-x)^2+\frac{1}{3!}f''(\eta)(u-x)^3$（$\eta$ 在 u 与 x 之间），在展开式中，分别令 $u=1$，$u=0$，并将所得两式相减：

$$F(1)-F(0)=\int_0^1 f(t)dt=f(x)+\frac{1}{2}(1-2x)f'(x)+\frac{1}{3!}[f''(\eta_1)(1-x)^3+f''(\eta_2)x^3]$$

其中 η_1 在 x 与 1 之间，η_2 在 0 与 x 之间。再在上式右边分别令 $x=1$，$x=0$，然后相加并注意到 $f'(1)=f'(0)$，得

$$2\int_0^1 f(t)dt=f(1)+f(0)+\frac{1}{3!}[f''(\eta_1)+f''(\eta_2)]$$

设 $m=\min[f''(\eta_1),f''(\eta_2)]$，$M=\max[f''(\eta_1),f''(\eta_2)]$，则

$$m\leqslant\frac{f''(\eta_1)+f''(\eta_2)}{2}\leqslant M$$

因为 $f''(x)$在[0,1]上连续，由介值定理知存在 $\xi\in(0,1)$，使得

$$f''(\xi)=\frac{f''(\eta_1)+f''(\eta_2)}{2}$$

于是 $2\int_0^1 f(x)dx=f(1)+f(0)+\frac{1}{3}f''(\xi)$

因此 $\int_0^1 f(x)dx=\frac{f(1)+f(0)}{2}+\frac{1}{6}f''(\xi)\quad \xi\in(0,1)$

由例 5 可知，当已知被积函数 f(x) 具有二阶或二阶以上连续导数时证明定积分等式，一般先作辅助函数 $F(x)=\int_0^x f(t)dt$，再将 F(x)在所需点（一般是根据右边表达式确定展开点）进行泰勒展开，然后对泰勒余项作适当处理（一般利用介值定理）。

综上可知，高阶（二阶及二阶以上）导数的存在是提示使用泰勒公式最明显的特征之一，只要题设条件中给出函数 f(x)二阶和二阶以上可导，不妨先把 f(x)在指定点展成泰勒公式再说，一般是展成比最高阶导数低一阶的泰勒公式，然后根据题设条件恰当选择展开点（展开点未必一定以具体数值 x_0 为最合适，有时以 x 为佳）。只要在解题训练中注意分析、研究题设条件及其形式特点，并把握上述处理原则，就能比较好地掌握利用泰勒公式解题的技巧。

参 考 文 献

[1] 同济大学数学教研室主编. 高等数学[M]. 北京：人民教育出版社，1999：172－179.

[2] 刘玉琏，傅沛仁. 数学分析讲义[M]. 北京：高等教育出版社，2000，(1)：226－238.

万方数据