用等价无穷小代换求极限的两个误区*

赵 琼 （湖北经济学院统计与应用数学系 武汉 430205）

摘 要 普遍认为利用等价无穷小代换求代数和及复合函数的极限时常常隐藏着两个误区，通过对其进行探讨可以发现，只要加以适当的条件，代数和各部分为无穷小量以及复合函数的中间变量为无穷小量时，对这些部分是可以进行等价无穷小代换的.

关键词 无穷小；等价；极限；误区. **中图分类号** O171

函数极限是高等数学中的一个内容，也是教学中的重难点. 求已知函数的极限，是学习高等数学必须掌握的基本技能之一. 其中，等价无穷小代换的方法因其可以化繁为简，变难为易的优越性而倍受青睐. 然而，此方法并非万能，它的使用是有条件的，稍不注意就会出现计算错误. 本文结合具体实例，对计算时常见的两个误区做了一些探析.

误区一 代数和(或差)的各部分无穷小不能分别做代换

引理 1[1] 在同一变化过程中，若$\lim\alpha=0,\lim\beta=0,\alpha\sim\alpha',\beta\sim\beta'$，且$\lim\dfrac{\alpha'}{\beta'}$存在，则有

$$\lim\frac{\alpha}{\beta}=\lim\frac{\alpha'}{\beta'}.$$

引理 2[1] 无穷小的等价关系具有下列性质：

(1) 自反性：$\alpha\sim\alpha$；

(2) 对称性：若$\alpha\sim\beta$，则$\beta\sim\alpha$；

(3) 传递性：若$\alpha\sim\beta,\beta\sim\gamma$，则$\alpha\sim\gamma$.

定理 1 在同一变化过程中，若$\lim\alpha=0,\lim\beta=0,\alpha\sim\alpha',\beta\sim\beta'$，且$\lim\dfrac{m\alpha'}{n\beta'}=k\neq\mp1$，则

$$m\alpha\pm n\beta\sim m\alpha'\pm n\beta',$$

其中m,n,k为常数，且m,n非零.

证明 只证$\lim\dfrac{m\alpha'}{n\beta'}=k\neq-1$的情形. 因为$\alpha\sim\alpha',\beta\sim\beta'$，由引理 1 可知：

$$\lim\frac{m\alpha}{n\beta}=\lim\frac{m\alpha'}{n\beta'}=k\neq-1,$$

$$\lim\frac{m\alpha'+n\beta'}{m\alpha+n\beta}=\lim\frac{\dfrac{m\alpha'}{n\beta'}+1}{\dfrac{m\alpha}{n\beta'}+\dfrac{n\beta}{n\beta'}}=\lim\frac{k+1}{\dfrac{m\alpha}{n\beta}\cdot\dfrac{n\beta}{n\beta'}+1}=\lim\frac{k+1}{k+1}=1,$$

所以$m\alpha+n\beta\sim m\alpha'+n\beta'$.

若是$\lim\dfrac{m\alpha'}{n\beta'}=k=-1$，则$m\alpha'\sim-n\beta'$，由引理 2 中无穷小等价关系的传递性，

$$m\alpha'\sim m\alpha\sim-n\beta'\sim-n\beta,$$

* 收稿日期：2009－01－13，修改日期：2009－05－19.

从而不一定有$\lim \dfrac{m\alpha'+n\beta'}{m\alpha+n\beta}=1$，即$m\alpha+n\beta\sim m\alpha'+n\beta'$不一定成立.事实上，通过后续知识点洛必达法则的学习，此极限的结果可能是多种情况.

类似可证$\lim \dfrac{m\alpha'}{n\beta'}\neq 1$时$m\alpha-n\beta\sim m\alpha'-n\beta'$.文献[3]中只讨论了$m=n=1$的情形，该定理作了进一步推广.

当$x\to 0$时常见的等价无穷小有：

$$\sin x\sim x,\quad \tan x\sim x,\quad 1-\cos x\sim \frac{x^2}{2},\quad \ln(1+x)\sim x,\quad e^x-1\sim x.$$

例 1 求极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{\sin^3 2x}$.

错解 当$x\to 0$时，$\sin x\sim x$，$\tan x\sim x$，故

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{\sin^3 2x}=\lim_{x\to 0}\frac{x-x}{(2x)^3}=0.$$

错误解析 当$x\to 0$时，$\sin x\sim x$，$\tan x\sim x$，此时$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{x}=1$，定理1的条件不满足，故分子中差的各部分不能直接代换.事实上，学了泰勒公式便可知道，这种代换不成立的原因是由高阶项省略的差异引起.

正确解 当$x\to 0$时，$\sin 2x\sim 2x$，$\tan x-\sin x=\tan x(1-\cos x)\sim \dfrac{1}{2}x^3$，故

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{\sin^3 2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^3}{(2x)^3}=\frac{1}{16}.$$

例 2 求极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\tan x-2\sin x}{\sin 2x}$.

解 因为$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\tan x}{2\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x}{2x}=\dfrac{3}{2}\neq 1$，所以

$$\lim_{x\to 0}\frac{3\tan x-2\sin x}{\sin 2x}=\lim_{x\to 0}\frac{3x-2x}{\sin 2x}=\lim_{x\to 0}\frac{3x-2x}{2x}=\frac{1}{2}.$$

上述例子一方面表明在求$\dfrac{0}{0}$不定式中分子或分母整体做等价无穷小代换的便利，另一方面也说明在差(或和)中对其部分做等价无穷小代换并非绝对不可，只要注意定理的条件是否满足.

误区二 复合函数的中间变量不能做等价无穷小代换

定理 2[3] 设$\alpha(x)$，$\beta(x)$为$x\to x_0$(或$x\to\infty$)时的无穷小量，$\alpha(x)\sim\beta(x)$，而$f(u)$为当$u\to 0$时的无穷小量，且有$f(u)\sim u$，则当$x\to x_0$(或$x\to\infty$)时，$f(\beta(x))\sim f(\alpha(x))$.

证明 以下只证$x\to x_0$的情形，$x\to\infty$可类似证得.

因为$\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=\lim\limits_{x\to x_0}\beta(x)=0$，利用引理2中无穷小等价关系的传递性得，

$$f(\beta(x))\sim\beta(x)\sim\alpha(x)\sim f(\alpha(x)).$$

这种方法与文献[3]中的证法相比，更为简捷和直观.

例 3 求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+\sin x)}{\sin(\sin x)}$.

解法一 因为当$x\to 0$时$\ln(1+x)\sim x$，所以$\ln(1+\sin x)\sim\sin x$，从而

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+\sin x)}{\sin(\sin x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\sin x}=1.$$

(下转第 21 页)

$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}(x^3)'=\lim_{x\to 0^+}3x^2=0,\qquad f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}(x^2)'=\lim_{x\to 0^-}2x=0,$$

所以，$f'(0)=0$.

但是，值得注意的是，在定理 2 中若去掉左连续（或右连续），结论是不成立的. 例如，

(1) 设 $f(x)=\begin{cases}x^2, & x>1\\ 3, & x\leqslant 1\end{cases}$，则 $\lim\limits_{x\to 1^+}(x^2)'=\lim\limits_{x\to 1^+}2x=2$，而 $f'_+(1)=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x^2-3}{x-1}=\infty$.

(2) 设 $f(x)=\begin{cases}x^2, x\geqslant 1\\ 2x, x<1\end{cases}$，则 $\lim\limits_{x\to 1^+}(x^2)'=\lim\limits_{x\to 1^+}2x=2$，$\lim\limits_{x\to 1^-}(2x)'=\lim\limits_{x\to 1^-}2=2$，但 $f(x)$ 在 $x=1$ 处不连续，因此不可导.

当然，对于定理 2 来说，$\lim\limits_{x\to x_0^-}g'(x)$ 不存在，并不能保证 $f'_-(x_0)$ 不存在；同样，$\lim\limits_{x\to x_0^+}h'(x)$ 不存在，也不能保证 $f'_+(x_0)$ 不存在.

由定理 2 可得如下的推论：

推论　如果 $f(x)$ 在 x_0 点连续，且 $\lim\limits_{x\to x_0}f'(x)$ 存在，则 $f(x)$ 在 x_0 点可导，且有

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}f'(x).$$

但是，值得注意的是，$\lim\limits_{x\to x_0}f'(x)$ 不存在，不能保证 $f'(x_0)$ 不存在. 例如，

$$f(x)=\begin{cases}x^2\sin\dfrac{1}{x}, x\neq 0,\\ 0, \qquad x=0.\end{cases}$$

在 $x=0$ 处，虽然 $\lim\limits_{x\to 0}f'(x)=\lim\limits_{x\to 0}\left(2x\sin\dfrac{1}{x}-\sin\dfrac{1}{x}\right)$ 不存在，但是，

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\dfrac{1}{x}}{x}=\lim_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}=0.$$

因此，对于常见的分段函数来说，要讨论其在分段点处的导数，先看其在该分段点处是否连续. 如果函数在分段点处不连续，当然就不可导. 只要函数在分段点处连续，就可以用此两种方法去考虑.

虽然分段函数在分段点处的导数总可以用定义来求，本文也不能解决所有分段函数的求导问题，但对一般常见的分段函数来说，这两个结论能为我们求出其分段点处的导数提供新的思路. 对初学者容易困惑的地方给出了理论上的依据.

参考文献

[1] 吴智泉. 数学分析(上册)[M]. 长春：吉林大学出版社，1988.

[2] 潘吉勋. 微积分简明教程(上册)[M]. 广州：华南理工大学出版社，2007.

（上接第 18 页）

解法二　因为当 $x\to 0$ 时 $\sin x\sim x$，所以

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+\sin x)}{\sin(\sin x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=1.$$

两种方法的区别在于：法一是对复合函数的外层函数进行整体代换，而法二是对复合函数的内层函数局部直接代换的，显示了定理 2 的妙用.

参考文献

[1] 同济大学应用数学系. 高等数学(上)[M]. 5 版. 北京：高等教育出版社，2002.

[2] 华东师范大学数学系. 数学分析(上)[M]. 2 版. 北京：高等教育出版社，1991.

[3] 陈新明. 用等价无穷小代换求极限中的一些问题[J]. 高等数学研究，2008，11(5)：56－58.