```
int main()
/*Keep on going never give up*/
```

积分不等式葵花宝典

Sunflower book of integral inequality

作者:Hoganbin

Email:hoganbin1995@outlook.com

微信公众号:八一考研数学竞赛

更新:June 12, 2019

版本:3.07

最好的解决办法是自己给出

第 4 章 积分不等式葵花宝典

柯西—施瓦茨不等式在学习数学中被广泛应用，并在高等数学、微积分、概率论和线性代数等方面都有涉及，其所体现的形式也不同，能在欧式空间两向量的内积运算得到统一，与均值不等式有一定差异，是一个十分重要的不等式。灵活运用柯西—施瓦茨不等式能够解决很多数学上的难题，例如证明不等式、三角形求解、方程求解和最值计算等，可以很好地将这些问题完美地解决。

回过头我们再想在考研数学中如何搞定柯西—施瓦茨不等式，那八一就给大家介绍一下常用的四种证明思想，并给出相关推论 (其中相关推论留给读者自行思考)，然后利用柯西—施瓦茨不等式来证明某些例子。

由于柯西-施瓦茨不等式在实数域、微积分、n 维欧氏空间、概率空间有着重要意义，且有不同形式的推广和应用，这里我重点讲解它在微积分中的推广及其应用。

定理 4.1. 方法 1:连续函数柯西-施瓦茨不等式

设 $f(x), g(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，则有

$$\left(\int_a^b f(x)\,g(x)\,\mathrm{d}x\right)^2 \leqslant \int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x \int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x$$

等号成立的必要条件是存在常数 k 使得 $f(x)=kg(x)$.

证明：法 1: 利用判别式. 对任意的 $\lambda \in R$ 有 $[f(x)+\lambda g(x)]^2 \geqslant 0$，则 $\int_a^b [f(x)+\lambda g(x)]^2 \mathrm{d}x \geqslant 0$，即对任意的 $\lambda \in R$ 有

$$\int_a^b [f(x)+\lambda g(x)]^2 \mathrm{d}x = \lambda^2 \int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x + 2\lambda \int_a^b f(x)g(x)g(x)g(x)g(x)\mathrm{d}x + \int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x \geqslant 0$$

因此上述关于 λ 的一元二次方程的判别式 $\varDelta \leqslant 0$，故

$$\varDelta = \left(2\int_a^b f(x)\,g(x)\,\mathrm{d}x\right)^2 - 4\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x \int_a^b g^2(x)\,\mathrm{d}x \leqslant 0$$

也就有

$$\left(\int_a^b f(x)\,g(x)\,\mathrm{d}x\right)^2 \leqslant \int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x \int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x$$

法 2: 构造函数. 令 $F(x) = \int_a^x f^2(t)\mathrm{d}t \int_a^x g^2(t)\mathrm{d}t - \left[\int_a^x f(t)g(t)\mathrm{d}t\right]^2$，显然 $F(a)=0$.

$$\begin{aligned} F'(x) &= f^2(x)\int_a^x g^2(t)\,\mathrm{d}t + g^2(x)\int_a^x f^2(t)\,\mathrm{d}t - 2f(x)\,g(x)\int_a^x f(t)\,g(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_a^x \left[f^2(x)\,g^2(t) - 2f(x)\,g(x)\,f(t)\,g(t) + g^2(x)\,f^2(t)\right]\mathrm{d}t \end{aligned}$$

$$= \int_a^x [f(x)g(t) - g(x)f(t)]^2 \mathrm{d}t \geqslant 0$$

故 $F(x)$ 在 $x \geqslant a$ 上单增，因此 $F(x) \geqslant F(a) = 0$，于是 $F(b) \geqslant F(a) = 0$，即证.

法 3: 二重积分. 由轮换性可知

$$\begin{aligned}
&\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x \int_a^b g^2(x)\,\mathrm{d}x - \left[\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x\right]^2 \\
&= \int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x \int_a^b g^2(y)\,\mathrm{d}y - \int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x \int_a^b f(y)g(y)\,\mathrm{d}y \\
&= \int_a^b \int_a^b [f^2(x)g^2(y) - f(x)g(x)f(y)g(y)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{2}\int_a^b \int_a^b [f^2(x)g^2(y) - 2f(x)g(x)f(y)g(y) + f^2(y)g^2(x)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{2}\int_a^b \int_a^b [f(x)g(y) - f(y)g(x)]^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \geqslant 0
\end{aligned}$$

即证.

法 4: 定积分性质. 由题意可知，对区间 $[a,b]$ 进行 n 等分，分点为 $x_i = a + \frac{b-a}{n}i, i = 1,2,\cdots,n$，根据定积分定义有

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^n f(x_i)g(x_i)\cdot\frac{b-a}{n}$$

$$\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^n f^2(x_i)\cdot\frac{b-a}{n},\ \int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^n g^2(x_i)\cdot\frac{b-a}{n}$$

由上式可得 $\left(\sum_{i=1}^n f(x_i)g(x_i)\right)^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^n f^2(x_i)\right)\left(\sum_{i=1}^n g^2(x_i)\right)$，根据极限的保号性可知即证成立.

推论 4.1

设 $f(x), g(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，则有 Minkowski 不等式

$$\sqrt{\int_a^b (f(x)+g(x))^2\mathrm{d}x} \leqslant \sqrt{\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x} + \sqrt{\int_a^b g^2(x)\,\mathrm{d}x}$$

推论 4.2

设 $f(x), g(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，且 $f(x) > 0, g(x) > 0$，则有 Holder 不等式

$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \left(\int_a^b f^p(x)\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_a^b g^q(x)\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}}$$

其中 $p, q > 0, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

推论 4.3

设 $f(x),g(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积,且 $f(x)>0,g(x)>0$,当 $p\in(1,+\infty)$ 时,则有

$$\left(\int_a^b (f(x)+g(x))^p \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\int_a^b f^p(x)\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b g^p(x)\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}$$

♡

推论 4.4

设 $f_1(x),\quad f_2(x),\quad \cdots, f_n(x)$ 均在 $[a,b]$ 上可积,则有

$$\begin{vmatrix} \int_a^b f_1^2(x)\,\mathrm{d}x & \int_a^b f_1(x)f_2(x)\,\mathrm{d}x & \dots & \int_a^b f_1(x)f_n(x)\,\mathrm{d}x \\ \int_a^b f_2(x)f_1(x)\,\mathrm{d}x & \int_a^b f_2^2(x)\,\mathrm{d}x & \cdots & \int_a^b f_2(x)f_n(x)\,\mathrm{d}x \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \int_a^b f_n(x)f_1(x)\,\mathrm{d}x & \int_a^b f_n(x)f_2(x)\,\mathrm{d}x & \cdots & \int_a^b f_n^2(x)\,\mathrm{d}x \end{vmatrix} \geqslant 0$$

等号成立的条件是当且仅当 n 个函数组 $f_1(x),\quad f_2(x),\quad \cdots, f_n(x)$ 线性相关. ♡

推论 4.5

设 $f_1(x),\quad f_2(x),\quad \cdots, f_n(x)$ 均在 $[a,b]$ 上可积,则有

$$\left|\int_a^b f_1(x)f_2(x)\cdots f_n(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \left(\int_a^b |f_1^n(x)|\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{n}} \dots \left(\int_a^b |f_n^n(x)|\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{n}}$$

等号成立的条件是当且仅当 n 个函数组 $f_1(x),\quad f_2(x),\quad \cdots, f_n(x)$ 线性相关. ♡

定理 4.2. 方法 2:多元函数柯西-施瓦茨不等式

设二元函数 $f(x,y),g(x,y)$ 在平面区域 D 内可积,则有

$$\left(\iint_D f(x,y)g(x,y)d\sigma\right)^2 \leqslant \left(\iint_D f^2(x,y)d\sigma\right)\left(\iint_D g^2(x,y)d\sigma\right)$$

♡

证明:由于 $\iint_D (f(x,y)+\lambda g(x,y))^2 d\sigma \geqslant 0$,其中 λ 是任意实数,则有

$$\iint_D f^2(x,y)d\sigma + 2\lambda\iint_D f(x,y)g(x,y)d\sigma + \lambda^2\iint_D g^2(x,y)d\sigma \geqslant 0$$

因此上述关于 λ 的一元二次方程,且 $\iint_D g^2(x,y)d\sigma \geqslant 0$,其判别式 $\varDelta \leqslant 0$,故

$$\varDelta = \left(2\iint_D f(x,y)g(x,y)d\sigma\right)^2 - 4\iint_D f^2(x,y)d\sigma \iint_D g^2(x,y)d\sigma \leqslant 0$$

由此即可得 $\left(\iint_D f(x,y)g(x,y)d\sigma\right)^2 \leqslant \left(\iint_D f^2(x,y)d\sigma\right)\left(\iint_D g^2(x,y)d\sigma\right)$

推论 4.6

设二元函数 $f(x,y),g(x,y)$ 在平面区域 D 内非负可积函数，则有

$$\left(\iint_D (f(x,y)\cdot g(x,y))^{\frac{1}{2}}d\sigma\right)^2 \leqslant \left(\iint_D f(x,y)d\sigma\right)\left(\iint_D g(x,y)d\sigma\right)$$

♡

推论 4.7

设二元函数 $f(x,y),g(x,y)$ 在平面区域 D 内非负可积函数，且在区域 D 上可积函数 $g(x,y)\geqslant m>0, m\in R$，则有

$$\left(\iint_D f(x,y)d\sigma\right)^2 \leqslant \left(\iint_D f(x,y)g(x,y)d\sigma\right)\left(\iint_D \frac{f(x,y)}{g(x,y)}d\sigma\right)$$

或

$$\left(\iint_D f(x,y)d\sigma\right)^2 \leqslant \left(\iint_D g(x,y)d\sigma\right)\left(\iint_D \frac{f^2(x,y)}{g(x,y)}d\sigma\right)$$

♡

以上推广的证明八一均省略，均易证.

下面我们直接利用柯西—施瓦茨不等式证明一些不等式：

例 4.1: 设 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上连续，且 $1\leqslant f(x)\leqslant 3$，证明：

$$1\le \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\int_0^1 \frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x \le \frac{4}{3}$$

证明： 由 Cauchy-Schwarz 不等式：

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\int_0^1 \frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x \geqslant \left(\int_0^1 \sqrt{f(x)}\sqrt{\frac{1}{f(x)}}\mathrm{d}x\right)^2=1$$

又由基本不等式得：

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\int_0^1 \frac{3}{f(x)}\mathrm{d}x \le \frac{1}{4}\left(\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x+\int_0^1 \frac{3}{f(x)}\mathrm{d}x\right)^2$$

再由条件 $1\le f(x)\le 3$，有 $(f(x)-1)(f(x)-3)\le 0$，则

$$f(x)+\frac{3}{f(x)}\le 4\Rightarrow \int_0^1\left(f(x)+\frac{3}{f(x)}\right)\mathrm{d}x\le 4$$

即可得

$$1\le \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\int_0^1 \frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x \le \frac{4}{3}$$

例 4.2: 已知 $f(x) \geqslant 0$，在 $[a,b]$ 上连续，$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = 1$，$k$ 为任意实数, 求证

$$\left(\int_a^b f(x)\cos kx\mathrm{d}x\right)^2 + \left(\int_a^b f(x)\sin kx\mathrm{d}x\right)^2 \leqslant 1$$

证明： 对所求证的不等式左边利用 Cauchy-Schwarz 不等式

$$\left(\int_a^b f(x)\cos kx\mathrm{d}x\right)^2 \leqslant \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \cdot \int_a^b f(x)\cos^2 kx\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\cos^2 kx\mathrm{d}x \tag{4.0.1}$$

同理可得

$$\left(\int_a^b f(x)\sin kx\mathrm{d}x\right)^2 \leqslant \int_a^b f(x)\sin^2 kx\mathrm{d}x \tag{4.0.2}$$

然后 (1.1) 与 (1.2) 式相加即证.

例 4.3: 设 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上连续，且 $f(x) > 0, x \in [0,1]$，证明：

$$\frac{\int_0^1 f^3(x)\mathrm{d}x}{\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x} \geqslant \frac{\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x}{\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x}$$

证明： 由 Cauchy-Schwarz 不等式：

$$\begin{aligned}
\int_0^1 f^3(x)\,\mathrm{d}x \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x &= \int_0^1 \left(f^{\frac{3}{2}}(x)\right)^2\mathrm{d}x \cdot \int_0^1 \left(f^{\frac{1}{2}}(x)\right)^2\mathrm{d}x \\
&\geqslant \left(\int_0^1 \left(f^{\frac{3}{2}}(x)\,f^{\frac{1}{2}}(x)\right)\mathrm{d}x\right)^2 \\
&= \left(\int_0^1 f^2(x)\,\mathrm{d}x\right)^2
\end{aligned}$$

即证.

例 4.4: 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上有连续的导函数，且 $f(a) = 0$ 证明：

$$\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{(b-a)^2}{2}\int_a^b f'^2(x)\,\mathrm{d}x$$

证明： 由 N-L 公式，$f(x) = f(x) - f(a) = \int_a^x f'^2(x)\,\mathrm{d}t$，于是由 Cauchy-Schwarz 得

$$f^2(x) = \left[\int_a^x f'(t)\cdot 1\mathrm{d}t\right]^2 \leqslant \int_a^x f'^2(t)\,\mathrm{d}t \int_a^x 1^2\mathrm{d}t \leqslant (x-a)\int_a^b f'^2(t)\,\mathrm{d}t \ (x \geqslant a)$$

然后通过比较定理可得

$$\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b (x-a)\mathrm{d}x \int_a^b f'^2(t)\,\mathrm{d}t = \frac{(b-a)^2}{2}\int_a^b f'^2(x)\,\mathrm{d}x$$

例 4.5: 设 $f(x):[a,b]\to\mathbb{R}$ 且 $\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x=0$, 证明

$$\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x \geqslant 4\left(\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right)^2$$

证明: 由 Cauchy-Schwarz 不等式得

$$\begin{aligned}\left(\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right)^2 &= \left(\int_0^1 \left(1-\frac{3}{2}x\right) f(x)\mathrm{d}x\right)^2 \\ &\leqslant \int_0^1 \left(1-\frac{3}{2}x\right)^2 \mathrm{d}x \cdot \int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{4}\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x\end{aligned}$$

即证.

例 4.6: 设 $f\in C^2[a,b]$, $f(a)=f(b)=0$, $f'(a)=1$, $f'(b)=0$, 证明

$$\int_a^b (f''(x))^2\mathrm{d}x \geq \frac{4}{b-a}$$

证明: 对 $\forall c\in[a,b]$ 有

$$\int_a^b (x-c)f''(x)\mathrm{d}x=(c-a)-\int_a^b f'(x)\mathrm{d}x=c-a$$

由 Cauchy-Schwarz 不等式得

$$(c-a)^2=\left(\int_a^b (x-c)f''(x)\mathrm{d}x\right)^2 \leqslant \int_a^b (x-c)^2\mathrm{d}x\int_a^b \left(f''(x)\right)^2\mathrm{d}x$$

即

$$\int_a^b \left(f''(x)\right)^2\mathrm{d}x \geqslant \frac{(c-a)^2}{\int_a^b (x-c)^2\mathrm{d}x}=\frac{3}{(b-a)\left[\left(\frac{b-c}{c-a}\right)^2-\frac{b-c}{c-a}+1\right]}$$

考虑 $\dfrac{b-c}{c-a}=\dfrac{1}{2}$, 则 $c=\dfrac{a+2b}{3}$, 可得

$$\int_a^b \left(f''(x)\right)^2\mathrm{d}x \geqslant \frac{4}{b-a}$$

例 4.7: 设 $f(x):[0,1]\to\mathbb{R}$ 是可微函数, 且 $f(0)=f(1)=-\dfrac{1}{6}$, 求证

$$\int_0^1 (f'(x))^2\mathrm{d}x \geq 2\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x+\frac{1}{4}$$

证明： 对 $\forall t \in \mathbb{R}$，由 Cauchy-Schwarz 不等式得

$$\left(\int_0^1 (x+t) f'(x)\mathrm{d}x\right)^2 \leqslant \int_0^1 (x+t)^2 \mathrm{d}x \int_0^1 \left(f'(x)\right)^2 \mathrm{d}x$$

即

$$\frac{3}{3t^2+3t+1}\left(\frac{1}{6}+\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right)^2 \leqslant \int_0^1 \left(f'(x)\right)^2 \mathrm{d}x$$

考虑 $m = \dfrac{3}{3t^2+3t+1}$，则原不等式成立只需证明下式不等式恒成立

$$m\left(\frac{1}{6}+\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right)^2 \geqslant 2\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x + \frac{1}{4}$$

因此

$$\left(\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x + \frac{1}{6} - \frac{1}{m}\right)^2 + \left(\frac{1}{36} - \frac{1}{4m}\right) - \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{m}\right)^2 \geqslant 0$$

令 $\dfrac{1}{36} - \dfrac{1}{4m} = \left(\dfrac{1}{6} - \dfrac{1}{m}\right)^2$，解得 $m = 12$，即 $t = -\dfrac{1}{2}$. 因此

$$\int_0^1 \left(f'(x)\right)^2 \mathrm{d}x \geqslant 2\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x + \frac{1}{4}$$

例 4.8: 设 $f(x) : [0,1] \to \mathbb{R}$ 上的连续可微函数, 且 $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)\mathrm{d}x = 0$, 求证

$$\int_0^1 (f'(x))^2 \mathrm{d}x \geq 12\left(\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right)^2$$

证明： 由 Cauchy-Schwarz 不等式可得

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \left(f'(x)\right)^2 \mathrm{d}x \int_0^{\frac{1}{2}} x^2 \mathrm{d}x \geqslant \left(\int_0^{\frac{1}{2}} x f'(x)\mathrm{d}x\right)^2 = \left(\frac{1}{2} f\left(\frac{1}{2}\right)\right)^2 \Rightarrow \int_0^{\frac{1}{2}} \left(f'(x)\right)^2 \mathrm{d}x \geqslant 24\left(\frac{1}{2} f\left(\frac{1}{2}\right)\right)^2$$

同理可得

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 (1-x)^2 \mathrm{d}x \int_{\frac{1}{2}}^1 \left(f'(x)\right)^2 \mathrm{d}x \geqslant \left(\int_{\frac{1}{2}}^1 (1-x) f'(x)\mathrm{d}x\right)^2 = \left(\int_{\frac{1}{2}}^1 f(x)\mathrm{d}x - \frac{1}{2} f\left(\frac{1}{2}\right)\right)^2$$

即

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 \left(f'(x)\right)^2 \mathrm{d}x \geqslant 24\left(\int_{\frac{1}{2}}^1 f(x)\mathrm{d}x - \frac{1}{2} f\left(\frac{1}{2}\right)\right)^2$$

根据 $2\left(a^2+b^2\right) \geqslant (a+b)^2$ 得

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \left(f'(x)\right)^2 \mathrm{d}x &\geqslant 24\left(\frac{1}{2} f\left(\frac{1}{2}\right)\right)^2 + 24\left(\int_{\frac{1}{2}}^1 f(x)\mathrm{d}x - \frac{1}{2} f\left(\frac{1}{2}\right)\right)^2 \\
&\geqslant 12\left(\frac{1}{2} f\left(\frac{1}{2}\right) + \int_{\frac{1}{2}}^1 f(x)\mathrm{d}x - \frac{1}{2} f\left(\frac{1}{2}\right)\right)^2 = 12\left(\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right)^2
\end{aligned}$$

注意：设 $f(x):[a,b]\to\mathbb{R}$ 是连续可微函数，且 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=0$，求证：

$$\left(\int_a^{2b-a} f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2 \leq \frac{2(b-a)^3}{3}\int_a^{2b-a}\left(f'(x)\right)^2\mathrm{d}x$$

例 4.9: 设 $f(x):[0,1]\to\mathbb{R}$ 上的连续函数，且 $\int_0^1 f^3(x)\mathrm{d}x=0$，求证

$$\int_0^1 f^4(x)\mathrm{d}x \geqslant \frac{27}{4}\left(\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right)^4$$

证明：令 $I_n=\int_0^1 f^n(x)\mathrm{d}x$，显然 $I_2\geqslant I_1^2$. 对 $\forall m\in\mathbb{R}$ 由 Cauchy-Schwarz 不等式可得

$$\left(\int_0^1\left(m+f^2(x)\right)\cdot f(x)\mathrm{d}x\right)^2 \leqslant \int_0^1\left(m+f^2(x)\right)^2\mathrm{d}x\cdot\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x$$

化简可得

$$\left(I_2-I_1^2\right)m^2+2I_2^2m+I_2I_4\geqslant 0$$

由判别式 $\triangle\leqslant 0$ 得

$$I_4\geqslant\frac{I_2^3}{I_2-I_1^2}$$

故本题只需证明

$$\frac{I_2^3}{I_2-I_1^2}\geqslant\frac{27}{4}I_1^4$$

由均值不等式得

$$\left(I_2-I_1^2\right)I_1^4=\frac{1}{2}\left(2I_2-2I_1^2\right)\cdot I_1^2\cdot I_1^2\leqslant\frac{4}{27}I_2^3$$

即

$$\int_0^1 f^4(x)\mathrm{d}x\geqslant\frac{27}{4}\left(\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right)^4$$

例 4.10: 设 $f(x)$ 是 $[0,1]$ 上的连续可微函数，且 $f(1)=0$，试证明：

$$\int_0^1|f(x)|^2\mathrm{d}x+\left(\int_0^1|f(x)|\,\mathrm{d}x\right)^2\leqslant 4\int_0^1 x^2\left|f'(x)\right|^2\mathrm{d}x$$

证明：考虑到 $g(x)=\int_0^1|f(x)|\mathrm{d}x$，由 Cauchy-Schwarz 不等式，我们有

$$4\left(\int_0^1 x\left|f'(x)\right|\cdot|f(x)|\,\mathrm{d}x+g(x)\int_0^1 x\left|f'(x)\right|\mathrm{d}x\right)^2\leqslant 4\int_0^1 x^2\left|f'(x)\right|^2\mathrm{d}x\left(\int_0^1(|f(x)|+g(x))^2\mathrm{d}x\right)$$

由题设，我们应该注意到

$$\int_0^1 x\left|f'(x)\right|\cdot|f(x)|\,\mathrm{d}x\geqslant\left|\int_0^1 xf'(x)\,\mathrm{d}x\right|=\frac{1}{2}\int_0^1|f(x)|^2\mathrm{d}x$$

$$\int_0^1 |f(x)|\mathrm{d}x = \int_0^1 \left|\int_x^1 f'(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_0^1 \int_x^1 |f(t)|\mathrm{d}t = \int_0^1 x\left|f'(x)\right|\mathrm{d}x$$

$$\Rightarrow \left(\int_0^1 |f(x)|^2\mathrm{d}x + 2g(x)\int_0^1 |f(x)|\mathrm{d}x\right)^2 \leqslant 4\int_0^1 x^2\left|f'(x)\right|^2\mathrm{d}x\left(\int_0^1 (|f(x)|+g(x))^2\mathrm{d}x\right)$$

因此我们只需要证明

$$\left[\int_0^1 |f(x)|^2\mathrm{d}x + \left(\int_0^1 |f(x)|\mathrm{d}x\right)^2\right]\left(\int_0^1 (f(x)+g(x))^2\mathrm{d}x\right) \leqslant \left(\int_0^1 |f(x)|^2\mathrm{d}x + 2g(x)\int_0^1 |f(x)|\mathrm{d}x\right)^2$$

经化简 $\left(\int_0^1 |f(x)|\mathrm{d}x\right)^4 \geqslant 0$ 显然成立,即证.

定理 4.3. 方法 3:琴声不等式

若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续,且 $m \leqslant f(x) \leqslant M$,又 $g(x)$ 是 $[m,M]$ 上的连续的凸函数,则有:

$$g\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b g(f(x))\mathrm{d}x$$

若 $g(x)$ 是 $[m,M]$ 上的连续凹函数时,上式中的不等号相反. ♡

例 4.11: 证明:对于连续函数 $f(x)>0$,有

$$\ln\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x \geqslant \int_0^1 \ln f(x)\mathrm{d}x$$

证明: 令 $g(x)=\ln x$,则 $g'(x)=\frac{1}{x}, g''(x)=-\frac{1}{x^2}<0$,所以 $g(x)$ 为凹函数,可由上式琴声不等式定理,可得

$$\ln\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x \geqslant \int_0^1 \ln f(x)\mathrm{d}x$$

或利用定积分定义,将 $[0,1]$ 分 n 等分,可取 $\Delta x=\frac{1}{n}$,由"算术平均数 $\geqslant$ 几何平均数"得:

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \geqslant \sqrt[n]{f\left(\frac{1}{n}\right)\cdots f\left(\frac{n}{n}\right)} = \exp\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \ln f\left(\frac{k}{n}\right)$$

$$\Rightarrow \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x \geqslant \exp\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \ln f\left(\frac{k}{n}\right) = \exp\int_0^1 \ln f(x)\mathrm{d}x$$

然后两边取对数即证.

定义 4.1. 琴声不等式

若函数 $f(x)$ 在区间 I 上是凸,且 $x_1,x_2,\cdots,x_n \in I$,就有:

$$\frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n} \geqslant f\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right)$$

对于严格凸函数，等式成立当且仅当 $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.
若函数 $f(x)$ 在区间 I 上是凸，且 $x_1, x_2 \in I$，就有：

$$Rf(x_1) + (1-R)f(x_2) \geqslant f(Rx_1 + (1-R)x_2)$$

♣

例 4.12: 设 $f(x)$ 在 $[a,b](a \geqslant 0)$ 上有二阶导数，且在 $[a,b]$ 上有 $f''(x) \geqslant 0$，求证：

$$\int_a^b tf(t)\,\mathrm{d}t \leq \frac{2b-a}{6}\left[(2b+a)f(b)+(2a+b)f(a)\right]$$

证明： 利用琴声不等式，对于任意 $R \in [0,1]$，则有：

$$Rf(x_1) + (1-R)f(x_2) \geqslant f(Rx_1 + (1-R)x_2)$$

所以再令 $t = xb + (1-x)a$ 有：

$$\begin{aligned}
\int_a^b tf(t)\,\mathrm{d}t &= (b-a)\int_0^1 [xb+(1-x)a]\, f(xb+(1-x)a) \\
&\leq (b-a)\int_0^1 [xb+(1-x)a][xf(b)+(1-x)f(a)]\,\mathrm{d}x \\
&\leq \frac{2b-a}{6}\left[(2b+a)f(b)+(2a+b)f(a)\right]
\end{aligned}$$

定理 4.4. 方法 4：斯蒂文森不等式

设在区间 $[a,b]$ 上，$g_1(x), g_2(x)$ 连续，$f(x)$ 一阶可导，对任意 $x \in [a,b]$，都成立以下不等式：$\int_a^x g_1(t)\mathrm{d}t \leqslant \int_b^x g_2(t)\mathrm{d}t$，且 $\int_a^b g_1(t)\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b g_2(t)\mathrm{d}t$. 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调递减，则 $\int_a^b f(x)g_1(t)\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b f(x)g_2(t)\mathrm{d}t$；若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调递减则不等式变号。

♡

例 4.13: 证明：

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+x^2}\mathrm{d}x \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1+x^2}\mathrm{d}x$$

证明： 对任意 $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$，有 $1-\cos x \leqslant \sin x$，即得到 $\int_0^x \sin t\,\mathrm{d}t \leq \int_0^x \cos t\,\mathrm{d}t$，显然有 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\mathrm{d}x = 1$，且函数 $\frac{1}{1+x^2}$ 在 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上单调递减，所以可以利用斯蒂文森不等式，若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调递减，则 $\int_a^b f(x)g_1(t)\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b f(x)g_2(t)\mathrm{d}t$，即有：

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+x^2}\mathrm{d}x \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1+x^2}\mathrm{d}x$$

注意： 此题证法可利用 Chebyshew 不等式，另解见例 36.

定理 4.5. 方法 5:积分中值定理法

- 积分第一中值定理：设 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 为一连续函数，$g:[a,b]\to\mathbb{R}$，且 $g(x)$ 可积函数在积分区间不变号，那么存在一点 $\xi\in[a,b]$ 使得

$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x=f(\xi)\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

- 积分第二中值定理：若 $f(x),g(x)$ 在 $[a,b]$ 上黎曼可积且 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调，则存在 $\xi\in[a,b]$ 使得

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x=g(a)\int_a^\xi g(x)\mathrm{d}x+g(b)\int_\xi^b g(x)\mathrm{d}x$$

例 4.14: 设 $a>0$，$f(x)$ 在 $[0,a]$ 上连续可导，证明：

$$|f(0)|\leqslant\frac{1}{a}\int_0^a|f(x)|\,\mathrm{d}x+\int_0^a|f'(x)|\mathrm{d}x$$

证明： 由积分第一中值定理，有

$$\frac{1}{a}\int_0^a|f(x)|\,\mathrm{d}x=|f(\xi)|\,,\xi\in[0,a]$$

又由

$$\int_0^a|f'(x)|\mathrm{d}x\geqslant\int_0^\xi|f'(x)|\,\mathrm{d}x\geqslant\left|\int_0^\xi f'(\xi)\mathrm{d}x\right|=|f(\xi)-f(0)|\geqslant|f(0)|-|f(\xi)|$$

即

$$\frac{1}{a}\int_0^a|f(x)|\,\mathrm{d}x+\int_0^a|f'(x)|\mathrm{d}x\geqslant|f(\xi)|+|f(0)|-|f(\xi)|=f(0)$$

例 4.15: 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续可导，证明：

$$\left|f\left(\frac{1}{2}\right)\right|\leqslant\int_0^1|f(x)|\,\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int_0^1|f'(x)|\mathrm{d}x$$

证明： 由积分第一中值定理，有 $\int_0^{\frac{1}{2}}|f(x)|\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}|f(\xi)|\,,\xi\in\left[0,\frac{1}{2}\right]$.

再由 $N-L$ 公式，$f(\frac{1}{2})=f(\xi)+\int_\xi^{\frac{1}{2}}f'(x)\mathrm{d}x$，所以有：

$$\left|f\left(\frac{1}{2}\right)\right|\leqslant|f(\xi)|+\int_0^{\frac{1}{2}}|f'(x)|\mathrm{d}x\leqslant 2\int_0^{\frac{1}{2}}|f(x)|\,\mathrm{d}x\int_0^{\frac{1}{2}}|f'(x)|\mathrm{d}x\quad(1)$$

$$\left|f\left(\frac{1}{2}\right)\right|\leqslant|f(\xi)|+\int_{\frac{1}{2}}^1|f'(x)|\mathrm{d}x\leqslant 2\int_{\frac{1}{2}}^1|f(x)|\,\mathrm{d}x\int_{\frac{1}{2}}^1|f'(x)|\mathrm{d}x\quad(2)$$

用 (1) 与 (2) 式相加即证.

例 4.16: 设 $f(x):[0,1]\to\mathbb{R}$ 是连续函数，且 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x$，证明：存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $\int_0^{\xi} f(x)\mathrm{d}x=0$.

证明: 令 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$，则有

$$\int_0^1 F(x)\mathrm{d}x=\int_0^1\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\mathrm{d}x=\int_0^1(1-x)f(x)\mathrm{d}x=0$$

由积分第一中值定理可得，存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $\int_0^{\xi} f(x)\mathrm{d}x=0$.

定理 4.6. 方法 6：微分中值定理法

- 罗尔中值定理：若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，在开区间 (a,b) 内可导，且满足 $f(a)=f(b)$，那么在 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使得 $f'(\xi)=0$.
- 拉格朗日中值定理：若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，在开区间 (a,b) 内可导，那么在 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使得 $f'(\xi)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.
- 柯西中值定理：若函数 $f(x),g(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，在开区间 (a,b) 内可导，且 $g'(x)$ 在 (a,b) 内每一点均不为 0，那么在 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使得
$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$
- 泰勒中值定理：若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上 n 阶连续，在开区间 (a,b) 内 $n+1$ 可导，对任意 $x\in(a,b)$ 内，至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得
$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\cdot+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x)$$
其中 $R_n(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$ 为拉格朗日余项.

♡

例 4.17: 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有一阶连续导数，$f(a)=f(b)=0$，求证：

$$\int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x\le\frac{(b-a)^2}{4}M$$

其中 M 为 $|f'(x)|$ 在 $[a,b]$ 上的最大值。

证明: 由拉格朗日中值定理得：

$$\begin{cases} f(x)=f'(\xi_1)(x-a),\xi_1\in(a,x)\\ f(x)=f'(\xi_1)(x-b),\xi_1\in(x,b)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}|f(x)|\le M(x-a)\\ |f(x)|\le M(b-x)\end{cases}$$

则由定积分性质得：

$$\begin{aligned}\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x &= \int_a^{\frac{a+b}{2}} |f(x)|\mathrm{d}x + \int_{\frac{a+b}{2}}^b |f(x)|\mathrm{d}x \\ &\leqslant \int_a^{\frac{a+b}{2}} M(x-a)\mathrm{d}x + \int_{\frac{a+b}{2}}^b M(b-x)\mathrm{d}x \\ &= \frac{(b-a)^2}{4}M\end{aligned}$$

例 4.18: 设 $f(x):[0,1]\to\mathbb{R}$ 是连续函数，且 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x$，证明：存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $\int_0^\xi xf(x)\mathrm{d}x = 0$.

证明： 令 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t, G(x)=\frac{1}{x}\int_0^x F(t)\mathrm{d}t$，则有

$$G(0)=G(1)=0, G'(x)=\frac{xF(x)-\int_0^x F(t)\mathrm{d}t}{x^2}$$

由罗尔定理可得，存在 $\xi\in(0,1)$，使得

$$\xi F(\xi)-\int_0^\xi F(t)\mathrm{d}t=\int_0^\xi xF'(x)\mathrm{d}x=0$$

即

$$\int_0^\xi xf(x)\mathrm{d}x=0$$

例 4.19: 设 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上有一阶连续导数，满足 $f'(x)|\leqslant 1, f(0)=f(2)=1$，求证：

$$1\leqslant\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x\leqslant 3$$

证明： 由拉格朗日中值定理得：

$$f(x)-f(0)=f'(\xi_1)x,\quad \xi_1\in(0,x)$$

$$f(x)-f(2)=f'(\xi_2)(x-2),\quad \xi_2\in(x,2)$$

即

$$f(x)\geqslant 1-x, f(x)\geqslant x-1 \text{与} f(x)\leqslant 1+x, f(x)\leqslant 3-x$$

因此

$$\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x\geqslant\int_0^1(1-x)\mathrm{d}x+\int_1^2(x-1)\mathrm{d}x=1$$

与

$$\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_0^1(1+x)\mathrm{d}x+\int_1^2(3-x)\mathrm{d}x=3$$

即证.

例 4.20: 设 $f(x):[0,1]\to\mathbb{R}$ 是连续函数，且 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x$，证明：存在

$\xi \in (0,1)$，使得

(1) $(\xi-1)f(\xi) = f'(\xi)\int_0^{\xi}(x-1)f(x)\mathrm{d}x$

(2) $f(\xi) = f'(\xi)\int_0^{\xi} f(x)\mathrm{d}x$

(3) $\xi f(\xi) = \int_0^{\xi} xf(x)\mathrm{d}x$

(4) $\xi f(\xi) = 2\int_{\xi}^{0} xf(x)\mathrm{d}x$

(5) $\xi^2 f(\xi) = \int_0^{\xi} xf(x)\mathrm{d}x$

证明：令 $F(x) = \int_0^x f(t)\mathrm{d}t$，且 $\int_0^1 F(x)\mathrm{d}x = 0$.

考虑辅助函数

$$G_1(x) = e^{-f(x)}\int_0^x (t-1)f(t)\mathrm{d}t$$

$$G_2(x) = e^{-f(x)}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t \Rightarrow G_2(x) = -f'(x)e^{-f(x)}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t + e^{-f(x)}f(x)$$

$$G_3(x) = e^{-x}\int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t \Rightarrow G_3'(x) = -e^{-x}\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t + xe^{-x}f(x)$$

$$G_4(x) = e^{2x}\int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t \Rightarrow G_4'(x) = 2e^{2x}\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t + xe^{2x}f(x)$$

$$G_5(x) = \frac{1}{x}\int_0^x tf(t)\mathrm{d}x \Rightarrow G_5'(x) = \frac{\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t - x^2 f(x)}{x^2}$$

由罗尔定理可得，存在 $\xi \in (0,1)$ 使得 $G'(\xi) = 0$.

注意：这里的 G_3 也可以这样构造

$$G_3(x) = x^2\int_0^x f(t)\mathrm{d}t \Rightarrow G_3'(\xi) = 2x\int_0^x f(t)\mathrm{d}t + x^2 f(x)$$

显然 $G(0) = 0$，通过罗尔定理存在 $\xi \in (0,1)$，使得 $G_3'(\xi) = 0$.

$$2\xi\int_0^{\xi} f(x)\mathrm{d}x + \xi^2 f(\xi) = 0 \Rightarrow \xi f(\xi) = 2\int_{\xi}^{0} f(x)\mathrm{d}x$$

例 4.21: 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有二阶连续可微，证明：

$$\int_0^1 \left|f'(x)\right|\mathrm{d}x \leqslant 9\int_0^1 |f(x)|\mathrm{d}x + \int_0^1 \left|f''(x)\right|\mathrm{d}x$$

证明：对 $\forall x_1 \in \left[0,\frac{1}{3}\right]$，$x_2 \in \left[\frac{2}{3},1\right]$，由拉格朗日中值定理得：

$$\left|f'(\xi)\right| = \left|\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}\right| \leqslant |f(x_1) - f(x_2)| \leqslant 3|f(x_1)| + 3|f(x_2)|$$

因此对 $\forall x \in [0,1]$ 有

$$\begin{aligned}\left|f'(x)\right| &= \left|f'(\xi)+\int_{\xi}^{x} f''(t)\mathrm{d}t\right| \leqslant \left|f'(\xi)\right|+\int_{\xi}^{x}\left|f''(t)\right|\mathrm{d}t \\ &\leqslant 3\left|f\left(x_1\right)\right|+3\left|f\left(x_2\right)\right|+\int_0^1\left|f''(x)\right|\mathrm{d}x\end{aligned}$$

在上述不等式两端分别对 x_1, x_2 在 $\left[0,\frac{1}{3}\right],\left[\frac{2}{3},1\right]$ 上进行积分得

$$\begin{aligned}\left|f'(x)\right| &\leqslant 9\int_0^{\frac{1}{3}}|f(x)|\mathrm{d}x+9\int_{\frac{2}{3}}^{1}|f(x)|\mathrm{d}x+\int_0^1\left|f''(x)\right|\mathrm{d}x \\ &\leqslant 9\int_0^1|f(x)|\mathrm{d}x+\int_0^1\left|f''(x)\right|\mathrm{d}x\end{aligned}$$

因此对 x 在 $[0,1]$ 上积分可得

$$\int_0^1\left|f'(x)\right|\mathrm{d}x \leqslant 9\int_0^1|f(x)|\mathrm{d}x+\int_0^1\left|f''(x)\right|\mathrm{d}x$$

例 4.22: 设 $f(x)$ 二阶可导，且 $f''(x)\geqslant 0$ 又 $u(t)$ 为任一函数，对 $a>0$ 试证：

$$\frac{1}{a}\int_0^a f(u(t))\,\mathrm{d}t \geqslant f\left(\frac{1}{a}\int_0^a u(t)\,\mathrm{d}t\right)$$

证明： 由泰勒中值定理由

$$f(x)=f\left(x_0\right)+f'\left(x_0\right)\left(x-x_0\right)+\frac{1}{2!}f''(\xi)\left(x-x_0\right)^2. \quad \xi\in\left(x_0,x\right)$$

题设 $f''(x)>0$，即 $f(x)\geqslant f\left(x_0\right)+f'\left(x_0\right)\left(x-x_0\right)$

令 $x_0=\frac{1}{a}\int_0^a u(t)\mathrm{d}t, x=u(t)$，则有

$$f(u(t))\geqslant f\left(\frac{1}{a}\int_0^a u(t)\mathrm{d}t\right)+f\left[\frac{1}{a}\int_0^a u(t)\mathrm{d}t\right]\left(u(t)-\frac{1}{a}\int_0^a u(t)\mathrm{d}t\right)$$

从 0 到 a 的积分有

$$\int_0^a u(t)\,\mathrm{d}t \geqslant af\left(\frac{1}{a}\int_0^a u(t)\,\mathrm{d}t\right)+f'\left(\frac{1}{a}\int_0^a u(t)\,\mathrm{d}t\right)\left[\int_0^a u(t)\,\mathrm{d}t-\int_0^a u(t)\,\mathrm{d}t\right]=af\left(\frac{1}{a}\int_0^a u(t)\mathrm{d}t\right)$$

即证

$$\frac{1}{a}\int_0^a f(u(t))\,\mathrm{d}t \geqslant f\left(\frac{1}{a}\int_0^a u(t)\,\mathrm{d}t\right)$$

例 4.23: 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 二阶连续可导，$f(a)=f(b)=0, M=\max\limits_{x\in[a,b]}\left|f''(x)\right|$，证明：

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant \frac{(b-a)^3}{12}M$$

证明: 对 $\forall x \in (a,b)$,由泰勒公式可得

$$f(a) = f(x) + f'(x)(a-x) + \frac{1}{2}f''(\xi)(a-x)^2, \quad \xi \in (a,x)$$

$$f(b) = f(x) + f'(x)(b-x) + \frac{1}{2}f''(\xi)(b-x)^2, \quad \eta \in (x,b)$$

两式相加

$$f(x) = f'(x)\left(x - \frac{a+b}{2}\right) - \frac{1}{4}\left[f''(\xi)(a-x)^2 + f''(\eta)(b-x)^2\right]$$

再两边积分

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f'(x)\left(x - \frac{a+b}{2}\right)\mathrm{d}x - \frac{1}{4}\int_a^b \left[f''(\xi)(a-x)^2 + f''(\eta)(b-x)^2\right]\mathrm{d}x$$

其中

$$\int_a^b f'(x)\left(x - \frac{a+b}{2}\right)\mathrm{d}x = \int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right)\mathrm{d}f(x) = -\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

于是

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = -\frac{1}{8}\int_a^b \left[f''(\xi)(a-x)^2 + f''(\eta)(b-x)^2\right]\mathrm{d}x$$

因此

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant= \frac{M}{8}\int_a^b \left[(a-x)^2 + (b-x)^2\right]\mathrm{d}x = \frac{M}{12}(b-a)^3$$

注意: 当题目条件出现二阶连续导数,且知某些点函数值时,往往采用泰勒公式.

另解:利用分部积分法导出 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 与 $f''(x)$ 的有关积分关系.

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)\mathrm{d}x &= \int_a^b f(x)\mathrm{d}(x-a) = -\int_a^b f'(x)(x-a)\mathrm{d}(x-b) \\
&= \int_a^b f''(x)(x-a)(x-b)\mathrm{d}x + \int_a^b f'(x)(x-b)\mathrm{d}x \\
&= \int_a^b f''(x)(x-a)(x-b)\mathrm{d}x + \int_a^b (x-b)\mathrm{d}x \\
&= \int_a^b f''(x)(x-a)(x-b)\mathrm{d}x - \int_a^b f(x)\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

因此

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_a^b f''(x)(x-a)(x-b)\mathrm{d}x$$

即

$$\begin{aligned}
\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| &\leqslant \frac{1}{2}M\int_a^b (x-a)(b-x)\mathrm{d}x = \frac{1}{4}M\int_a^b (b-x)\mathrm{d}(x-a)^2 \\
&= \frac{1}{4}M\int_a^b (x-a)^2\mathrm{d}x = \frac{M}{12}(b-a)^3
\end{aligned}$$

定理 4.7. 方法 7:函数单调法

设 $f'(x)$ 在 (a,b) 内存在且不变号,则当 $f'(x)\geqslant 0$ 时,则 $f(x)$ 在 (a,b) 内单增;当 $f'(x)\leqslant 0$ 时,则 $f(x)$ 在 (a,b) 内单调.

例 4.24: 设 $f(x)$ 在 $[0,b]$ 上有连续且单调递增,当 $a\in[0,b]$ 试证:

$$\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x \geqslant \frac{b}{2}\int_0^b f(x)\mathrm{d}x-\frac{a}{2}\int_0^a f(x)\mathrm{d}x$$

证明: 作辅助函数

$$F(u)=\int_a^u xf(x)\,\mathrm{d}x-\frac{u}{2}\int_0^u f(x)\,\mathrm{d}x+\frac{a}{2}\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x\qquad(a\le u\le b)$$

即

$$\begin{aligned}F'(u)&=uf(u)-\frac{1}{2}uf(u)-\frac{1}{2}\int_a^u f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}uf(u)-\frac{1}{2}\int_a^u f(x)\,\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{2}\left[f(u)\cdot(u-0)-\int_0^u f(x)\,\mathrm{d}x\right]=\frac{1}{2}\left[\int_0^u f(u)\,\mathrm{d}x-\int_0^u f(x)\,\mathrm{d}x\right]\\&=\frac{1}{2}\int_0^u[f(u)-f(x)]\mathrm{d}x\geqslant 0\end{aligned}$$

于是由拉格朗日中值定理由

$$F(b)=F(a)+F(\xi)(b-a)=F(\xi)(b-a)\geqslant 0\quad(a<\xi<b)$$

即原不等式恒成立.

例 4.25: 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上二阶可导,且 $f''(x)\geqslant 0$,证明:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\le\frac{b-a}{2}(f(a)+f(b))$$

证明: 由 $f''(x)\geqslant 0$,则 $f'(x)$ 在 $[a,b]$ 上单增,对任意 $x\in(a,b)$,有:

$$f'(\varphi)=\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\le f'(x),\varphi\in(a,x)$$

$$\Rightarrow f(x)\le f(a)+(x-a)f'(x)$$

即有:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\le\int_a^b f(a)\,\mathrm{d}x+\int_a^b(x-a)f'(x)\,\mathrm{d}x=(b-a)(f(a)+f(b))-\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

$$\Rightarrow 2\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\le(b-a)(f(a)+f(b))\Rightarrow\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\le\frac{b-a}{2}(f(a)+f(b))$$

例 4.26: 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上二阶可导，且 $f''(x)\leqslant 0$，证明：

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

证明： $f(x)$ 在 $x_0=\frac{a+b}{2}$ 处的一阶泰勒公式为

$$f(x)=f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)+\frac{f'(\xi)}{2!}\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2$$

其中 $\xi\in(x,\frac{a+b}{2})$，利用条件 $f''(x)\leqslant 0$ 可得

$$f(x)\leqslant f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)$$

两边从 a 到 b 取积分得

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leqslant (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\int_a^b\left(x-\frac{a+b}{2}\right)\mathrm{d}x=(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

即证.

例 4.27: 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可微，且当 $x\in(0,1)$ 时，$0<f'(x)<1$，$f(0)=0$，试证：

$$\left(\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2>\int_0^1 f^3(x)\mathrm{d}x$$

证明： 令 $F(x)=\left(\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2-\int_0^1 f^3(x)\mathrm{d}x$，即

$$F'(x)=2f(x)\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t-f^3(x)=f(x)\left[2\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t-f^2(x)\right]$$

由 $x\in(0,1)$ 时，$0<f'(x)<1$，$f(0)=0$，即 $f(x)>0$.

设 $G(x)=2\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t-f^2(x)$，则 $G(0)=0$，有 $G'(x)=2f(x)\big(1-f'(x)\big)>0$，所以 $G(x)>0$，因此当 $x\in(0,1)$ 时，$F'(x)>0$.

例 4.28: 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续且单调递增，试证

$$\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x\geqslant\frac{1}{2}\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$$

证明： 令 $F(x)=\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t-\frac{x}{2}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$，即

$$F'(x)=\frac{1}{2}\int_0^x (f(x)-f(t))\mathrm{d}t\geqslant 0$$

可知 $F(x)$ 单调递增，即 $F(1)\geqslant F(0)$，则原不等式成立.

定理 4.8. 方法 8:二重积分法

若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，函数 $g(x)$ 在 $[c,d]$ 可积，则二元函数 $F(x,y)=f(x)g(y)$ 在矩阵区域 $D:(x,y):a\leqslant x\leqslant b,c\leqslant y\leqslant d$ 上可积，且有：

$$\iint_D f(x)g(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\int_c^d g(y)\mathrm{d}y$$

例 4.29: 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有一阶连续导数，试证：

$$\int_0^1|f(x)|\mathrm{d}x\leqslant\max\left\{\int_0^1\left|f'(x)\right|\mathrm{d}x,\left|\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right|\right\}$$

证明： 由题易知

$$\int_0^1|f(x)|\mathrm{d}x=\left|\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right|$$

假设存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $f(\xi)=0$，有 $f(x)=\displaystyle\int_\xi^x f'(t)\mathrm{d}t$，所以

$$\int_0^1|f(x)|\mathrm{d}x\leqslant\int_0^1\left|\int_\xi^x f'(t)\,\mathrm{d}t\right|\mathrm{d}x\leqslant\int_0^1\int_0^1\left|f'(t)\right|\mathrm{d}t\mathrm{d}x=\int_0^1\left|f'(x)\right|\mathrm{d}x$$

即证.

例 4.30: 设 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，且 $f(x)>0$，证明：

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\int_a^b\frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x\geqslant(b-a)^2$$

证明： 记 $D:(x,y)=a\leqslant x\leqslant b,a\leqslant y\leqslant b$，有

$$I=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\int_a^b\frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x=\int_a^b f(y)\mathrm{d}y\int_a^b\frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x=\iint_D\frac{f(y)}{f(x)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$I=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\int_a^b\frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\int_a^b\frac{1}{f(y)}\mathrm{d}y=\iint_D\frac{f(x)}{f(y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

因此

$$2I=\iint_D\left[\frac{f(x)}{f(y)}+\frac{f(y)}{f(x)}\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\geqslant 2\iint_D\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2(b-a)^2$$

$$\Rightarrow I=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\int_a^b\frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x\geqslant(b-a)^2$$

即证.

定义 4.2. 方法 9:定积分性质法

若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上非负可积，则 $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leqslant 0$；若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上恒正，则 $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x>0$，若 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，且 $f(x)\leqslant g(x)$，则 $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leqslant$

$\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$;若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积,则 $\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$ ♣

例 4.31: 试证:若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,对一切的 $x\in[a,b]$,$f(x)\geqslant 0$,且 $f(x)\neq 0$,则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x > 0$.

证明: 由题意知,可假设存在一点 $x_0\in(a,b)$,使得 $f(x_0)>0$,又由 $f(x)$ 在 x_0 上连续,则存在 $\xi>0$,当 $x\in(x_0-\xi,x_0+\xi)$ 时,有 $f(x)>0$,从而我们可以得到:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geqslant \int_{x_0-\xi}^{x_0+\xi} f(x_0)\,\mathrm{d}x_0 = 2\xi f(x_0) > 0$$

即证.

例 4.32: 证明:

$$\frac{1}{2} < \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{4-x^2+x^4}}\mathrm{d}x < \frac{\pi}{6}$$

证明: 设

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{4-x^2+x^4}} \Rightarrow f'(x) = \frac{x\left(1-2x^2\right)}{\sqrt{\left(4-x^2+x^4\right)^3}}$$

令 $f'(x)=0$,得 $x_1=0, x_2=\frac{1}{\sqrt{2}}$,又 $f(0)=f(1)=\frac{1}{2}, f(\frac{1}{2})=\frac{1}{\sqrt{2}}$,由积分估计可得:

$$\frac{1}{2} < \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{4-x^2+x^4}}\mathrm{d}x < \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{6}$$

即证.

定义 4.3. 方法 10:留数法

设 D 是复平面上单连通开区域,C 是其边界,函数 $F(z)$ 在 D 内除了有限个奇点 $a_1,a_2,\cdot,a_n$ 外解析,在闭区域 $D+C$ 上除了 $a_1,a_2,\cdot,a_n$ 外连续,则有:

$$\oint_C F(z)\mathrm{d}z = 2\pi i\sum_{i=1}^n \operatorname{Res}\left[F(z),a_i\right]$$

♣

例 4.33: 设函数 $f(x)$ 在 $[0,2\pi]$ 上连续,且有 $M=\max\limits_{x\in[0,2\pi]} f(x)$,当 $a>0$,试证:

$$\int_0^{2\pi}\frac{f(\theta)}{a+\cos\theta}\mathrm{d}\theta \leqslant \frac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}}M$$

证明: 令 $z=e^{i\theta}$,则有 $\cos\theta=\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}=\frac{z^2+1}{2z}$,所以:

$$\int_0^{2\pi}\frac{1}{a+\cos\theta}\mathrm{d}\theta = \oint_{|z|=1}\frac{1}{iz\left(a+\frac{z^2+1}{2z}\right)}\mathrm{d}z = \oint_{|z|=1}\frac{2}{i\left(z^2+2az+1\right)}\mathrm{d}z$$

$$= -2i \oint_{|z|=1} \frac{1}{\left(z-\left(-a+\sqrt{a^2-1}\right)\right)\left(z-\left(-a-\sqrt{a^2-1}\right)\right)} \mathrm{d}z$$

再令

$$F(z) = \frac{1}{\left(z-\left(-a+\sqrt{a^2-1}\right)\right)\left(z-\left(-a-\sqrt{a^2-1}\right)\right)}$$

显然 $F(z)$ 在 $D:|z| \leqslant 1$ 内有且仅有一个单极点 $-a+\sqrt{a^2-1}1$，根据留数计算公式得：

$$\operatorname{Res}\left[F(z), -a+\sqrt{a^2-1}\right] = \frac{1}{2\sqrt{a^2-1}}$$

则由留数定理得：

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{a+\cos\theta} \mathrm{d}\theta = -2i \frac{2\pi i}{2\sqrt{a^2-1}} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}}$$

因为 $f(\theta) \leqslant M, \dfrac{1}{a+\cos\theta} > 0$，所以得

$$\int_0^{2\pi} \frac{f(\theta)}{a+\cos\theta} \mathrm{d}\theta \leqslant M \int_0^{2\pi} \frac{1}{a+\cos\theta} \mathrm{d}\theta = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}} M$$

即证.

定理 4.9. 方法 11:Favard 不等式

若函数 $f(x):[0,1] \to \mathbb{R}$ 是一个非负凹函数，则有

$$\int_0^1 f^p(x)\mathrm{d}x \leqslant \frac{2^p}{p+1}\left(\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right)^p$$

证明： 不妨考虑 $f(0)=f(1)=0$，$f(x)$ 有连续的二阶导数，则 $f''(x)<0$，即

$$f(x) = -\int_0^1 K(x,t) f''(t)\mathrm{d}t$$

其中 Green 函数

$$K(x,t) = \begin{cases} t(1-x) & 0 \leqslant t \leqslant x \leqslant 1 \\ x(1-t) & 0 \leqslant x \leqslant t \leqslant 1 \end{cases}$$

由 Minkowski 不等式可得

$$\begin{aligned}\left(\int_0^1 f^p(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}} &= \left(\int_0^1\left(\int_0^1 K(x,t)\left(-f''(t)\right)\mathrm{d}t\right)^p \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \int_0^1\left(\int_0^1 K^p(x,t)\left(-f''(t)\right)^p \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}} \mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{(p+1)^{\frac{1}{p}}} \int_0^1 t(1-t)\left|f''(t)\right| \mathrm{d}t\end{aligned}$$

又

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = -\int_0^1\int_0^1 K(x,t) f''(t)\mathrm{d}t\mathrm{d}x = -\int_0^1\int_0^1 K(x,t) f''(t)\mathrm{d}x\mathrm{d}t = -\frac{1}{2}\int_0^1 t(1-t) f''(t)\mathrm{d}t$$

因此

$$\int_0^1 f^p(x)\mathrm{d}x \leqslant \frac{2^p}{p+1}\left(\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right)^p$$

例 4.34: 若函数 $f(x):[0,1]\to\mathbb{R}$ 是一个非负凹函数, 且 $f(0)=1$,证明:

$$\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x \leqslant \frac{2}{3}\left(\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right)^2$$

证明: 法 1: 令 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$,利用凹函数性质得到

$$F(x)=x\int_0^1 f[ux+(1-u)\cdot 0]\mathrm{d}u \geqslant x\int_0^1 [uf(x)+(1-u)]\mathrm{d}u=\frac{xf(x)}{2}+\frac{x}{2}$$

考虑

$$I=\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x,\ U=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$$

即原命题等价于证明:$2U^2-3I\geqslant 0$

又有

$$I=\int_0^1 x\mathrm{d}F(x)=F(1)-\int_0^1 F(x)\mathrm{d}x\leqslant U-\int_0^1\left(\frac{xf(x)}{2}+\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x=U-\frac{I}{2}-\frac{1}{4}$$

因此 $3I\leqslant 2U-\frac{1}{2}$,也就是

$$2U^2-3I\geqslant 2U^2-\left(2U-\frac{1}{2}\right)=2\left(U-\frac{1}{2}\right)^2\geqslant 0$$

即证.

法 2: 令 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$,利用 $f(t)$ 的凹函数性质得到

$$\frac{f(t)-f(0)}{t}\geqslant\frac{f(x)-f(0)}{x}$$

即有

$$\int_0^1 F(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^1\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t\mathrm{d}x\geqslant\int_0^1\int_0^x\left(\frac{f(x)-1}{x}t+1\right)\mathrm{d}t\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^1(xf(x)+x)\mathrm{d}x$$

因此

$$\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x=F(1)-\int_0^1 F(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\int_0^1(xf(x)+x)\mathrm{d}x$$

所以

$$\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x\leqslant\frac{2}{3}\left(\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x-\frac{1}{4}\right)\leqslant\frac{2}{3}\left(\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right)^2$$

注意：法 1 与法 2 本质上是一样的，但是法 2 写的更为清晰。

例 4.35: 若函数 $f(x):[0,1]\to\mathbb{R}$ 是一个非负凹函数，且 $f(0)=1$，证明：

$$2\int_0^1 x^2 f(x)\mathrm{d}x+\frac{1}{12}\leqslant\left(\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right)^2$$

证明：法 2：令 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$，利用 $f(t)$ 的凹函数性质得到

$$\frac{f(t)-f(0)}{t}\geqslant\frac{f(x)-f(0)}{x}$$

即有

$$\int_0^1 F(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^1\int_0^x xf(t)\,\mathrm{d}t\mathrm{d}x\geqslant\int_0^1\int_0^x x\left(\frac{f(x)-1}{x}t+1\right)\mathrm{d}t\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^1 x^2(f(x)+1)\mathrm{d}x$$

因此

$$\int_0^1 x^2 f(x)\mathrm{d}x=F(1)-2\int_0^1 xF(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x-\int_0^1\left(x^2 f(x)+x^2\right)\mathrm{d}x$$

所以

$$2\int_0^1 x^2 f(x)\mathrm{d}x+\frac{1}{12}\leqslant\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x-\frac{1}{4}\leqslant\left(\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right)^2$$

注意：此题可推广为

$$\frac{p+2}{2}\int_0^1 x^p f(x)\mathrm{d}x+\frac{2pf(0)-(p+1)}{4(p+1)}\leqslant\left(\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right)^2\ (p>0)$$

定理 4.10. 方法 12：Chebyshev 不等式

若函数 $f(x),g(x)$ 是 $[a,b]$ 上的连续函数，且 $f(x),g(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调性一致，则有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\cdot\int_a^b g(x)\mathrm{d}x\leqslant(b-a)\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x$$

证明：对 $x,y\in[a,b]$，则 $[f(x)-f(y)][g(x)-g(y)]\geqslant 0$，即

$$f(x)g(x)+f(y)g(y)\geqslant f(x)g(y)+f(y)g(x)$$

对上式关于 x 在 $[a,b]$ 上积分得

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x+(b-a)f(y)g(y)\geqslant g(y)\int_a^b f(x)\mathrm{d}x+f(y)\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$$

对上式关于 y 在 $[a,b]$ 上积分得

$$(b-a)\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x+(b-a)\int_a^b f(y)g(y)\mathrm{d}y\geqslant\int_a^b g(y)\mathrm{d}y\int_a^b f(x)\mathrm{d}x+\int_a^b f(y)\mathrm{d}y\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$$

将上式中 y 改为 x 即证

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \cdot \int_a^b g(x)\mathrm{d}x \leqslant (b-a)\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x$$

注意: Chebyshev 不等式更一般的不等式形式为:若函数 $f(x), g(x), p(x)$ 是 $[a,b]$ 上的连续函数且 $\forall x \in [a,b], p(x) \geqslant 0$, 而 $f(x), g(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调性一致, 则有

$$\int_a^b p(x)f(x)\mathrm{d}x \int_a^b p(x)g(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b p(x)\mathrm{d}(x) \int_a^b p(x)f(x)g(x)\mathrm{d}x$$

1. 如果 $f(x), g(x)$ 单调性不一致, 则不等式变号;
2. 此不等式成立的条件可适当减弱, $f(x), g(x), p(x)$ 的连续性可弱化为可积.

例 4.36: 证明:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+x^2}\mathrm{d}x \leqslant \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1+x^2}\mathrm{d}x$$

证明: 考虑 $y=\sin x, y=\dfrac{1}{1+x^2}$ 在 $[0,\dfrac{\pi}{2}]$ 上单调性相反, 由 Chebyshev 不等式可得

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\mathrm{d}x \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x \geqslant \frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cdot \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$$

即

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+x^2}\mathrm{d}x \leqslant \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$$

同理考虑 $y=\cos x, y=\dfrac{1}{1+x^2}$ 在 $[0,\dfrac{\pi}{2}]$ 上单调性相同, 由 Chebyshev 不等式可得

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\mathrm{d}x \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x \leqslant \frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1+x^2}\mathrm{d}x$$

即

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x \leqslant \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1+x^2}\mathrm{d}x$$

因此

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+x^2}\mathrm{d}x \leqslant \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1+x^2}\mathrm{d}x$$

例 4.37: 设 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上连续, 且 $f(x)$ 单调递增, 证明:

$$\frac{\int_0^1 xf^2(x)\mathrm{d}x}{\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x} \geqslant \frac{\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x}{\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x}$$

证明: 此题可利用 Chebyshew 不等式的一般形式:

$$\int_a^b p(x)f(x)\mathrm{d}x \int_a^b p(x)g(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b p(x)\mathrm{d}(x) \int_a^b p(x)f(x)g(x)\mathrm{d}x$$

其中这里的 $p(x)=f(x),g(x)=x$，且 $f(x),g(x)$ 单调性相同，有

$$\int_0^1 p(x)f(x)\mathrm{d}x\int_0^1 p(x)g(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_0^1 p(x)\mathrm{d}x\int_0^1 p(x)f(x)g(x)\mathrm{d}x$$

即

$$\int_0^1 f'(x)\mathrm{d}x\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\int_0^1 xf^2(x)\mathrm{d}x$$

由于 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上恒正，两边同除以 $\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ 即证.

例 4.38: 设连续函数 $f,g:[0,1]\to(0,+\infty)$ 且 $f(x),\dfrac{g(x)}{f(x)}$ 单调递增，证明:

$$\int_0^1\left(\frac{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}{\int_0^x g(t)\mathrm{d}t}\right)\mathrm{d}x\leqslant 2\int_0^1\frac{f(x)}{g(x)}\mathrm{d}x$$

证明: 由 Chebyshew 不等式可得

$$\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\cdot\int_0^x\frac{g(t)}{f(t)}\mathrm{d}t\leqslant x\int_0^x g(t)\mathrm{d}t$$

即

$$\frac{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}{\int_0^x g(t)\mathrm{d}t}\leqslant\frac{x}{\int_0^x\frac{g(t)}{f(t)}\mathrm{d}t}$$

由 Cauchy 不等式得

$$\frac{x^4}{4}=\left(\int_0^x\sqrt{\frac{g(t)}{f(t)}}\sqrt{\frac{t^2f(t)}{g(t)}}\mathrm{d}t\right)^2\leqslant\int_0^x\frac{g(t)}{f(t)}\mathrm{d}t\int_0^x\frac{t^2f(t)}{g(t)}\mathrm{d}t$$

即

$$\frac{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}{\int_0^x g(t)\mathrm{d}t}\leqslant\frac{4}{x^3}\int_0^x\frac{t^2f(t)}{g(t)}\mathrm{d}t$$

因此

$$\begin{aligned}\int_0^1\left(\frac{\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t}{\int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t}\right)\mathrm{d}x&\leqslant\int_0^1\int_0^x\frac{4t^2f(t)}{x^3g(t)}\mathrm{d}t\mathrm{d}x=\int_0^1\int_t^1\frac{4t^2f(t)}{x^3g(t)}\mathrm{d}t\\&=2\int_0^1\frac{f(t)}{g(t)}\left(1-t^2\right)\mathrm{d}t\leqslant 2\int_0^1\frac{f(t)}{g(t)}\mathrm{d}t\end{aligned}$$

定理 4.11. 方法 13:Minkowski 不等式

设 $f(x)$ 是 $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$ 上的 Lebesgue 可测函数，则对任意 $1\leqslant p<+\infty$，由

$$\sqrt[p]{\int_{\mathbb{R}^n}\left|\int_{\mathbb{R}^n}f(x,y)\,\mathrm{d}y\right|^p\mathrm{d}x}\leqslant\int_{\mathbb{R}^n}\sqrt[p]{\int_{\mathbb{R}^n}|f(x,y)|^p\mathrm{d}x\mathrm{d}y}.$$

♡

例 4.39: 设 $f(x)$ 是 $[0,1]$ 上的连续可微函数，且 $f(0)=0$，试证明：

$$\int_0^1 \frac{|f(x)|^2}{x^2}\mathrm{d}x \leqslant 4\int_0^1 \left|f'(x)\right|^2 \mathrm{d}x$$

证明：

由闵可夫斯基不等式得

$$\begin{aligned}
\sqrt{\int_0^1 \frac{|f(x)|^2}{x^2}\mathrm{d}x} &= \sqrt{\int_0^1 \left(\frac{\int_0^x f'(t)\,\mathrm{d}t}{x}\right)^2 \mathrm{d}x} = \sqrt{\int_0^1 \left(\int_0^1 f'(xt)\,\mathrm{d}t\right)^2 \mathrm{d}x} \\
&\leqslant \int_0^1 \sqrt{\int_0^1 |f'(xt)|^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t} = \int_0^1 \sqrt{\frac{\int_0^t |f'(x)|^2 \mathrm{d}x}{t}}\mathrm{d}t \\
&\leqslant \sqrt{\int_0^1 |f'(x)|^2 \mathrm{d}x}\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t = 2\sqrt{\int_0^1 |f'(x)|^2 \mathrm{d}x}
\end{aligned}$$

两边平方即证.

例 4.40: 设 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的连续可微函数，且 $f(a)=0$，试证明：

$$\int_a^b \left|f(x)f'(x)\right|\mathrm{d}x \leq \frac{b-a}{2}\int_a^b \left|f'(x)\right|^2 \mathrm{d}x$$

证明： 注意到 $f(a)=0$，则有 $\left|f'(x)\right| = \dfrac{\mathrm{d}\left(\int_a^x |f'(t)|\mathrm{d}t\right)}{\mathrm{d}x}$，即

$$\begin{aligned}
\int_a^b |f(x)f'(x)|\mathrm{d}x &= \int_a^b \left|\int_a^x f'(t)\,\mathrm{d}t\right|\left|f'(x)\right|\mathrm{d}x = \int_a^b \left|\int_a^x f'(t)\,\mathrm{d}t\right|\mathrm{d}\left(\int_a^x |f'(t)|\mathrm{d}t\right) \\
&\leq \int_a^b \left(\int_a^x |f'(t)|\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}\left(\int_a^x |f'(t)|\mathrm{d}t\right) = \int_a^b \left|\int_a^x f'(t)\,\mathrm{d}t\right|\mathrm{d}\left(\int_a^x |f'(t)|\mathrm{d}t\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\int_a^x |f'(t)|\mathrm{d}t\right)^2\Bigg|_a^b = \frac{1}{2}\left(\int_a^b 1\cdot\left|f'(t)\right|\mathrm{d}t\right)^2 \\
&\leq \frac{1}{2}\int_a^b 1^2\mathrm{d}t\cdot\int_a^b \left|f'(t)\right|^2\mathrm{d}t = \frac{b-a}{2}\int_a^b \left|f'(t)\right|^2\mathrm{d}x
\end{aligned}$$