积分不等式

1. 证明:$\frac{1}{5} < \int_0^1 \sin x^2 \mathrm{d}x < \frac{1}{3}$.

2. 证明:$\int_0^{2\pi} e^{\sin x}\mathrm{d}x < 2\pi e^{\frac{1}{4}}$.

3. 证明:$\left|\int_{2003}^{2004} \sin t^2 \mathrm{d}t\right| < \frac{1}{2003}$. (tid=2211)

4. 试证:$\frac{16}{9} < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{\sin x}\mathrm{d}x < \frac{418}{225}$. (tid=14926), (tid=14858)

5. 证明: $0 < \frac{\pi}{2} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x < \frac{\pi^3}{144}$. (tid=21007)

6. 证明: $\int_0^{\infty} \left|\frac{\sin x}{x}\right|^a \mathrm{d}x \leqslant \frac{\pi}{\sqrt{2a}}, (a \geqslant 2)$. (tid=22254), (2037401620), (questionid=1326)

7. 对于 $n \in \mathbf{N}^*, n \geqslant 2$, 求证:
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left|\frac{\sin(2n+1)t}{\sin t}\right| \mathrm{d}t < \frac{2+\ln n}{2}\pi.$$
(tid=24721), (tid=16140), (tid=24846), (tid=21007)

8. 证明:$\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\left(\frac{\sin nt}{\sin t}\right)^4 \mathrm{d}t < \frac{\pi^2 n^2}{4}$. (tid=16140), (tid=24846), (tid=21007)

9. 设 $A > 0, b > a \geqslant 0$, 证明:
$$\left|\int_a^b \sin(nt - \frac{A}{t^2})\mathrm{d}t\right| < \frac{2}{n}.$$
(tid=22671)

10. 已知 c 为常数, 且 $|a_i| \leqslant 1$, 求证:
$$\int_0^{\pi} \left|\sum_{i=0}^{k} \frac{a_i \sin(i+\frac{1}{2})x}{2\sin\frac{1}{2}x}\right| \mathrm{d}x \leqslant c(k+1).$$
(tid=16054)

11. 设 $f(x)$,$g(x)$ 是 $[0,1] \longrightarrow [0,1]$ 的连续函数, 且 $f(x)$ 单调递增, 求证:
$$\int_0^1 f(g(x))\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x + \int_0^1 g(x)\mathrm{d}x.$$
(tid=22825)

12. 已知 $f(x) \in C^2[-l,l], f(0) = 0$ 证明:
$$\left(\int_{-l}^{l} f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2 \leqslant \frac{l^5}{10}\int_{-l}^{l} (f''(x))^2 \mathrm{d}x.$$
(thread-271), (tid=23028)

13. 若 $f(x)$ 在 (a,b) 上可微, 且 $|f'(x)| \leqslant M$, 则:
$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x - \frac{b-a}{2}(f(a)+f(b))\right| \leqslant \frac{(b-a)^2 M}{4} - \frac{(f(a)-f(b))^2}{4M}.$$
(1797960483)

14. 函数$f(x)$ 在$[0,2]$ 连续、可导, 且$f(0)=f(2)=1$. 如果$|f'|\leqslant 1$, 求证:

$$1\leqslant \int_0^2 f(x)\mathrm{d}x\leqslant 3.$$

(tid=24), (1309040327)

15. 函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续可导, 且满足 $p\leqslant f'(x)\leqslant q$. 记

$$k=\frac{f(a)-f(b)}{a-b}$$

则

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x-\frac{b-a}{2}[f(a)+f(b)]\right|\leqslant \frac{(p-k)(q-k)}{p-q}(b-a)^2.$$

(tid=54)

16. 设函数f 在$[-1,1]$ 上可导,$M=\sup|f'|$. 若存在$a\in(0,1)$, 使得$\displaystyle\int_{-a}^a f(x)\mathrm{d}x=0$, 求证:

$$\left|\int_{-1}^1 f(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant M(1-a^2).$$

(tid=25)

17. 已知 $\varphi:(0,+\infty)\to(0,+\infty)$ 是一个严格单调递减的连续函数, 满足

$$\lim_{t\to 0^+}\varphi(t)=+\infty.$$

若

$$\int_0^{+\infty}\varphi(t)\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}\varphi^{-1}(t)\mathrm{d}t=a<+\infty,$$

其中 φ^{-1} 表示 φ 的反函数. 求证:

$$\int_0^{+\infty}[\varphi(t)]^2\mathrm{d}t+\int_0^{+\infty}[\varphi^{-1}(t)]^2\mathrm{d}t\geqslant \frac{1}{2}a^{\frac{3}{2}}.$$

(tid=21706)

18. 函数 f Riemann 可积, 试证明下面两个不等式不能同时成立:

$$\int_0^{\pi}|f(x)-\sin x|^2\mathrm{d}x\leqslant\frac{3}{4}\text{和}\int_0^{\pi}|f(x)-\cos x|^2\mathrm{d}x\leqslant\frac{3}{4}$$

(tid=3510)

19. 设 $x>0$, 令 $R(x)=e^{\frac{x^2}{2}}\displaystyle\int_x^{+\infty}e^{\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t$, 证明: 当 $x\geqslant\sqrt{\dfrac{2}{\pi+2}}$ 时, 有

$$R(x)\leqslant\frac{2x}{\sqrt{x^4+6x^2+1}+x^2-1}.$$

(tid=3188)

20. 设函数 f 在区间 $[a,b]$ 上处处大于 0, 且对于 $L>0$ 满足 Lipschitz 条件 $|f(x_1)-f(x_2)|\leqslant L|x_1-x_2|$, 又已知对于 $a\leqslant c\leqslant d\leqslant b$ 有

$$\int_c^d\frac{\mathrm{d}x}{f(x)}=\alpha,\int_a^b\frac{\mathrm{d}x}{f(x)}=\beta$$

证明下列积分不等式:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leqslant\frac{e^{2L\beta}-1}{2L\alpha}\int_c^d f(x)\mathrm{d}x.$$

(tid=3588), (tid=23950)

21. 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上具有连续导数, 证明:

(a) 对任意的 $x\in[a,b]$, 有

$$|f(x)|\leqslant\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right|+\int_a^b|f'(x)|\mathrm{d}x.$$

(b) 当 $f(a)\neq f(b)$ 时,(a) 中成立严格不等式.

(tid=14747)

22. 已知函数 $f(x)\in C^{(1)}[a,b]$, 求证: 对于任意的 $x\in[a,b]$，有

(a)

$$|f(x)|\leqslant\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right|+\int_a^b|f'(x)|\mathrm{d}x$$

(b)

$$\left|f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|\leqslant\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right|+\frac{1}{2}\int_a^b|f'(x)|\mathrm{d}x$$

(tid=257)

23. 设函数 f 在 $[0,1]$ 上有二阶连续导数,$f(0)=f(1)=f'(0)=0,f'(1)=1$, 求证:

$$\int_0^1(f''(x))^2\mathrm{d}x\geqslant 4,$$

并指出等号成立的条件.

(tid=1036) 待定一个 $g(x)$，由柯西不等式, 有

$$\begin{aligned}\int_0^1(f''(x))^2\mathrm{d}x\int_0^1 g(x)^2\mathrm{d}x&\geqslant\left(\int_0^1 f''(x)g(x)\mathrm{d}x\right)^2\\&=\left(\int_0^1 g(x)\mathrm{d}(f'(x))\right)^2\\&=\left(g(x)f'(x)|_0^1-\int_0^1 f'(x)\mathrm{d}(g(x))\right)^2\\&=\left(g(1)-\int_0^1 f'(x)g'(x)\mathrm{d}x\right)^2\\&=\left(g(1)-\int_0^1 g'(x)\mathrm{d}(f(x))\right)^2\\&=\left(g(1)-g'(x)f(x)|_0^1+\int_0^1 f(x)\mathrm{d}(g'(x))\right)^2\\&=\left(g(1)+\int_0^1 f(x)g''(x)\mathrm{d}x\right)^2,\end{aligned}$$

为了把后面的积分弄掉, 尝试令 $g(x)=x+k$, 代入得到

$$\int_0^1(f''(x))^2\mathrm{d}x\geqslant\frac{(1+k)^2}{\int_0^1(x+k)^2\mathrm{d}x}=\frac{3(k+1)^2}{3k^2+3k+1},$$

令

$$\frac{3(k+1)^2}{3k^2+3k+1}=4,$$

解得 $k=-1/3$, 所以当 $g(x)=x-1/3$ 时就得到了原不等式. 等号成立的条件是 $f''(x)=p(x-1/3)$.
PS: 事实上 $3(k+1)^2/(3k^2+3k+1)$ 的最大值就是 4.

24. 若存在正整数 a, 使得连续函数 $f:[0,+\infty)\to[0,+\infty)$ 满足 $f[f(x)]=x^a,\forall x\in[0,+\infty)$. 求证:

$$\int_0^1 [f(x)]^2 \mathrm{d}x \geqslant \frac{2a-1}{a^2+6a-3}.$$

(tid=13892), (tid=21151), (1940822007)

25. 设 $f(x)$,$g(x)$ 在 $[0,1]$ 上单调, 导函数连续, 且 $f(0)=0$, 证明: 对任意的 $\alpha\in[0,1]$, 有

$$\int_0^\alpha g(x)f'(x)\mathrm{d}x+\int_0^1 f(x)g'(x)\mathrm{d}x \geqslant f(\alpha)g(1).$$

(tid=4031)

26. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有连续导数, 且 $f(0)=f(1)=0$, 证明:

   (a) 对于任意的 $\xi\in(0,1)$ 有 $|f(\xi)|^2\leqslant \frac{1}{4}\int_0^1 |f'(x)|^2\mathrm{d}x$. (tid=15287)

   (b) $\int_0^1 |f(x)|^2\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{4}\int_0^1 |f'(x)|^2\mathrm{d}x$. (tid=21433)

27. f 定义在 $(0,1)$ 上,f 的二阶导数连续,$f(0)=f(1)=0$, 证明:

$$\int_0^1 |f''|\mathrm{d}x \geqslant 4\max|f|.$$

(tid=22541)

28. 已知 f 在 $[0,T]$ 内二阶连续可导, 设 $M=\max f$,$m=\min f$, 证明:

$$M-m\leqslant T\int_0^T |f''|\mathrm{d}x$$

(tid=21705), (tid=23145), (tid=22044)

29. 已知恒正且单调增, 设 $\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x = s\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$, 求证:

$$\int_0^s f(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_s^1 f(x)\mathrm{d}x.$$

(tid=15651)

30. 设椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的周长为 s, 证明:

$$\pi(a+b)\leqslant s\leqslant \pi\sqrt{2a^2+2b^2}.$$

(tid=22091)

31. $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上二阶连续可微, 求证:

$$\int_0^1 |f'(x)|\mathrm{d}x \leqslant 9\int_0^1 |f(x)|\mathrm{d}x+\int_0^1 |f''(x)|\mathrm{d}x.$$

(tid=22148), (tid=22694)

32. 设 $f:R\to R$ 满足

$$0\leqslant f\leqslant M_1,$$
$$\int_R f(x)x^2\mathrm{d}x\leqslant M_2,$$

则

$$\int_R f(x)\mathrm{d}x \leqslant (\pi M_1)^{2/3}(3M_2)^{1/3}.$$

(tid=20620)

33. 设 $f(x)$ 是任意的实系数 n 次多项式且满足 $\int_{-1}^{1}[f(x)]^2\mathrm{d}x=1$, 求证:

$$|f(x)|\leqslant\frac{\sqrt{2}(n+1)}{2}.$$

(tid=22530)

34. 设函数在 $[a,b]$ 上可微,$|f'(x)|\leqslant M$. 且 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=0$, 对 $F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$, 证明:

$$|F(x)|\leqslant\frac{M(b-a)^2}{8}.$$

(tid=22703)

35. 函数 $f(x)$ 为 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 上的 Riemann 可积函数

$$\frac{1}{4}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)\mathrm{d}x\right)^2\leqslant\int_0^{\frac{\pi}{2}}[f(x)]^2\sin x\mathrm{d}x.$$

(tid=22747)

36. 设 $f(x)$ 是定义在 R 上的连续可微函数, 且周期为 $T>0$, $\int_0^T f(x)\,\mathrm{d}x=0$, 证明:

$$\int_0^T[f'(x)]^2\mathrm{d}x\geqslant\frac{4\pi^2}{T^2}\int_0^T f^2(x)\mathrm{d}x.$$

(tid=22930)

37. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续可导, 则当 $x\in[0,1]$ 时, 有

$$|f(\frac{1}{2})|\leqslant\int_0^1|f(x)|\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int_0^1|f'(x)|\mathrm{d}x.$$

(tid=23196)

38. 已知 $f(x)\geqslant 0$,$f\in C[a,b]$,$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=1$, 求证:

$$\left(\int_a^b f(x)\cos kx\mathrm{d}x\right)^2+\left(\int_a^b f(x)\sin kx\mathrm{d}x\right)^2\leqslant 1.$$

(tid=23126)

39. 设函数 f 在 $[a,b]$ 上可微,$|f'(x)|\leqslant M$, 且 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=0$. 对于函数 $F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$,

(a) 证明:$|F(x)|\leqslant\dfrac{M(b-a)^2}{8}$;

(b) 在增加条件 $f(a)=f(b)=0$ 时证明:$|F(x)|\leqslant\dfrac{M(b-a)^2}{16}$.

(tid=23869), (tid=23870)

40. 设 f 在 $[a,b]$ 上二阶可微,$f(a)=f(b)=0$,$|f''(x)|\leqslant M$, 证明:

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant\frac{M}{12}(b-a)^3.$$

(tid=23869), (tid=23870)

41. 设 $f \in C^1[a,b]$ 且 $f(a)=0$, 证明:

$$\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x \leqslant \frac{(b-a)^2}{2}\int_a^b (f'(x))^2\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int_a^b (f'(x))^2(x-a)^2\mathrm{d}x.$$

(tid=23923)

42. 已知 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续且递减, 证明:

$$\frac{\int_0^1 xf^2(x)\mathrm{d}x}{\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x} \leqslant \frac{\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x}{\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x}.$$

(tid=22400)

43. 已知函数 f 在 [0,1] 上连续可导, 且 $f(0)=f(1)=0$, 求证:

$$\int_0^1 |f'(x)f(x)|\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{4}\int_0^1 [f'(x)]^2\mathrm{d}x.$$

(tid=14237)

44. 已知函数 $f(x) \in C^{(1)}[a,b]$，且 $f(a)=0$, 求证:

$$\int_a^b |f(x)f'(x)|\mathrm{d}x \leqslant \frac{b-a}{2}\int_a^b |f'(x)|^2\mathrm{d}x$$

(tid=258)

45. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 且 $1 \leqslant f(x) \leqslant 2$. 证明:

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x \int_0^1 \frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x \leqslant \frac{9}{8}.$$

(tid=24780), (tid=21591)

46. 设 f 在 $[a,b]$ 上为上凸可微函数,$f(a)=f(b)=0, f'(a)=\alpha>0, f'(b)=\beta<0$, 证明:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{2}\alpha\beta \cdot \frac{(b-a)^2}{\beta-\alpha}.$$

(tid=24325), (tid=25200)

47. 设 Γ 为 Gamma 函数

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-s}s^{x-1}\mathrm{d}s, x>0$$

证明:

(a) 若 $0 \leqslant x \leqslant 1, y>0$, 则

$$\Gamma(x+y) \leqslant \Gamma(y)y^x.$$

(b) 若 $x \geqslant 1, y>0$, 则

$$\Gamma(x+y) \geqslant \Gamma(y)y^x.$$

(tid=24754)

48. $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶连续可导, 证明:

$$\max_{x\in[0,1]} |f'(x)| \leqslant |f(1)-f(0)| + \int_0^1 |f''(x)|\mathrm{d}x.$$

(tid=23611)

49. 已知 $f(x)$,$g(x)$,$h(x)$ 均为连续的非负函数,$g(t) < f(t)+\int_0^t g(x)h(x)\mathrm{d}x$, $f'(x) > 0$ 且 $\int_0^{\infty} g(x)\mathrm{d}x = A$, 证明:

$$g(x) < e^A f(x).$$

(tid=22958)

50. $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 并且有 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = 0$, $\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x = 1$, 证明: 存在 $\xi \in [0,1]$ 使得 $|f(\xi)| > 4$.
(tid=21452)

51. 设 f,g 都在 $[0,1]$ 上递增且连续, 证明

$$\int_0^1 f(x)g(x)\mathrm{d}x \geqslant \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x \int_0^1 g(x)\mathrm{d}x.$$

(tid=25183)

以下习题来自西西 (tian27546)

52. 设 $f(x)$ 是在 $[0,1]$ 上非负的连续凹函数, 且 $f(0) = 1$, 证明:

$$2\int_0^1 x^2 f(x)\mathrm{d}x + \frac{1}{12} \leqslant \left[\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right]^2.$$

(tid=23024)

53. 设 f 是一般二次函数形式, 证明:

$$\int_{-1}^1 (1-x^2)\left[f'(x)\right]^2 \mathrm{d}x \leqslant 6\int_{-1}^1 \left[f(x)\right]^2 \mathrm{d}x.$$

(tid=23024)

54. 设 $f:[0,1] \longrightarrow \mathbf{R}$ 的可积函数, 且 $|f(x)| \leqslant 1$, $\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x = 0$, 设 $F(x) = \int_0^x f(y)\mathrm{d}y \geqslant 0$, 证明:

$$\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x + 5\int_0^1 F^2(x)\mathrm{d}x \geqslant 6\int_0^1 f(x)F(x)\mathrm{d}x.$$

(tid=23883)

55. 设 $f:[0,1] \longrightarrow \mathbf{R}$ 的连续函数, $\int_0^1 f^3(x)\mathrm{d}x = 0$, 求证:

$$\int_0^1 f^4(x)\mathrm{d}x \geqslant \frac{27}{4}\left(\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right)^4.$$

(tid=23883)

56. 设 $f:[0,1] \longrightarrow \mathbf{R}$ 的可导函数, 且 $f(0) = f(1) = -\frac{1}{6}$, 求证:

$$\int_0^1 \left(f'(x)\right)^2 \mathrm{d}x \geqslant 2\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x + \frac{1}{4}.$$

(tid=23883)

57. 设 $f:[a,b] \longrightarrow \mathbf{R}$ 有二阶导数, 且 $f'(x)$,$f''(x)$ 都是连续函数, 若 $m = \min\limits_{x\in[a,b]} f''(x)$,$M = \max\limits_{x\in[a,b]} f''(x)$, 证明:

$$\frac{m\left(b^2-a^2\right)}{2} \leqslant bf'(b) - af'(a) - f(b) + f(a) \leqslant \frac{M\left(b^2-a^2\right)}{2}.$$

(tid=23883)

58. 设 f 是在 $[0,1]$ 上的可积实函数, 且 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=0$, $m=\min\limits_{x\in[0,1]} f(x)$,$M=\max\limits_{x\in[0,1]} f(x)$, 证明:

$$\int_0^1\left(\int_0^x f(y)\mathrm{d}y\right)^2\mathrm{d}x\leqslant-\frac{mM}{6(M-m)^2}\left(3M^2-8mM+3m^2\right).$$

(tid=23883)

59. 设 f 在 $[0,1]$ 上连续可导, 且 $\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} f(x)\mathrm{d}x=1$, 求证:

$$\int_0^1\left(f'(x)\right)^2\mathrm{d}x\geqslant 27\left(\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right)^2.$$

(1945551092)

60. 设 $f:[0,1]\longrightarrow\mathbf{R}$ 的连续可微函数, $\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)\mathrm{d}x=0$, 求证:

$$\int_0^1\left(f'(x)\right)^2\mathrm{d}x\geqslant 12\left(\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right)^2.$$

(1944866386)

61. 设 $F(x)$ 在 $[0,a]$ 上非负可积, 满足 $\left(\int_0^t F(x)\mathrm{d}x\right)^2\geqslant\int_0^t F^3(x)\mathrm{d}x$, $\forall t\in[0,a]$. 是否有: $\int_0^a |F(x)-x|^2\mathrm{d}x\leqslant\frac{a^3}{3}$. 并证明你的结论. (2045015936)

62. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有连续的导函数 $f'(x)$,$f(0)=0$, 证明:

$$\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x\leqslant\frac{1}{2}\int_0^1(f'(x))^2\mathrm{d}x$$

(tid=25690)

63. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上非负递增, 求证: 存在 $[0,1]$ 上的非负凸函数 $g(x)$ 满足 $g(x)\geqslant f(x)$ 且 $\int_0^1 g(x)\mathrm{d}x\geqslant\frac{1}{2}\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$. (thread-967)

64. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 有连续的导函数,$f(\frac{a+b}{2})=0$, 证明:

$$\int_a^b |f(x)f'(x)|\mathrm{d}x\leqslant\frac{b-a}{4}\int_a^b(f'(x))^2\mathrm{d}x$$

(tid=25778)

65. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上是可积的, 证明:

   (a) 著名的 Cauchy 不等式

$$\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x\geqslant\left(\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\right)^2$$

   (b) 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 连续可导且可积的, 对 $n\in N$, 若 $\int_{\frac{1}{2n+1}}^{\frac{2}{2n+2}} f(x)\mathrm{d}x=0$, 则积分不等式

$$\int_0^1(f'(x))^2\mathrm{d}x\geqslant C_n\left(\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right)^2$$

都恒成立, 求证:

$$C_n \leqslant \frac{3(2n+1)^2}{4n^2-2n+1}$$

.

66. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上二阶可导, 且 $f(a)=f(b)=0$, 证明:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \frac{f''(\xi)}{12}(a-b)^3$$

(2060648578)

67. $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上三阶可导, 且 $f(0)=-1, f(1)=0, f'(0)=0, |f''(x)| \leqslant 1$, 证明:

$$-\frac{7}{10} < \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x < -\frac{5}{8}.$$

(link)

68. $f(x)$ 在 $[-a,a]$ 上非负连续 $(a>0), \int_{-a}^a f(x)\mathrm{d}x = \int_{-a}^a x^2 f(x)\mathrm{d}x = 1, \int_{-a}^a xf(x)\mathrm{d}x = 0.$
求证:

$$\forall u \in [-a,0], \int_{-a}^u f(x)\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{1+u^2}$$

(link)

网友 Tesla35 编辑于 2013 年 2 月 15 日
修改建议请发送至 yunan8735@yahoo.com.cn