第 3 章　中值定理与导数的应用

内容概要

<table>
<tr><td>名称</td><td colspan="3">主要内容（3.1、3.2）</td></tr>
<tr><td rowspan="4">3.1
中值
定理</td><td>名称</td><td>条件</td><td>结论</td></tr>
<tr><td>罗尔
中值
定理</td><td>$y=f(x)$：（1）在$[a,b]$上连续；（2）在(a,b)内可导；（3）$f(a)=f(b)$</td><td>至少存在一点 $\xi\in(a,b)$ 使得 $f'(\xi)=0$</td></tr>
<tr><td>拉格
朗日
中值
定理</td><td>$y=f(x)$：（1）在$[a,b]$上连续；（2）在(a,b)内可导</td><td>至少存在一点 $\xi\in(\mathrm{a},\mathrm{b})$ 使得 $f'(\xi)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$</td></tr>
<tr><td>柯西
中值
定理</td><td>$f(x)$、$g(x)$：（1）在$[a,b]$上连续，在(a,b)内可导；（2）在(a,b)内每点处$g'(x)\neq 0$</td><td>至少存在一点 $\xi\in(a,b)$ 使得 $\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$</td></tr>
<tr><td rowspan="3">3.2
洛必
达
法则</td><td>基本形式</td><td colspan="2">$\dfrac{0}{0}$ 型与 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 型未定式</td></tr>
<tr><td>通分或取倒数化为基本形式</td><td colspan="2">1）$\infty-\infty$ 型：常用通分的手段化为 $\dfrac{0}{0}$ 型或 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 型；
2）$0\cdot\infty$ 型：常用取倒数的手段化为 $\dfrac{0}{0}$ 型或 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 型，即：
$0\cdot\infty\Rightarrow\dfrac{0}{1/\infty}\Rightarrow\dfrac{0}{0}$ 或 $0\cdot\infty\Rightarrow\dfrac{\infty}{1/0}\Rightarrow\dfrac{\infty}{\infty}$；</td></tr>
<tr><td>取对数化为
基本形式</td><td colspan="2">1）0^0 型：取对数得 $0^0\Rightarrow e^{0\cdot\ln 0}$，其中 $0\cdot\ln 0\Rightarrow 0\cdot\infty\Rightarrow\dfrac{0}{1/\infty}\Rightarrow\dfrac{0}{0}$
或 $0\cdot\ln 0\Rightarrow 0\cdot\infty\Rightarrow\dfrac{\infty}{1/0}\Rightarrow\dfrac{\infty}{\infty}$；
2）1^∞ 型：取对数得 $1^\infty\Rightarrow e^{\infty\cdot\ln 1}$，
其中 $\infty\cdot\ln 1\Rightarrow\infty\cdot 0\Rightarrow\dfrac{0}{1/\infty}\Rightarrow\dfrac{0}{0}$
或 $\infty\cdot\ln 1\Rightarrow\infty\cdot 0\Rightarrow\dfrac{\infty}{1/0}\Rightarrow\dfrac{\infty}{\infty}$；
3）∞^0 型：取对数得 $\infty^0=e^{0\cdot\ln\infty}$，
其中 $0\cdot\ln\infty\Rightarrow 0\cdot\infty\Rightarrow\dfrac{0}{1/\infty}\Rightarrow\dfrac{0}{0}$
或 $0\cdot\ln\infty\Rightarrow 0\cdot\infty\Rightarrow\dfrac{\infty}{1/0}\Rightarrow\dfrac{\infty}{\infty}$。</td></tr>
</table>

课后习题全解

习题 3-1

★1. 下列函数在给定区间上是否满足罗尔定理的所有条件？如满足，请求出满足定理的数值ξ。

（1） $f(x)=2x^2-x-3,[-1,1.5]$；　　（2） $f(x)=x\sqrt{3-x},[0,3]$。

知识点：罗尔中值定理。

思路：根据罗尔定理的条件和结论，求解方程$f^{/}(\xi)=0$，得到的根ξ便为所求。

解：（1）$\because f(x)=2x^2-x-3$在$[-1,1.5]$上连续，在$(-1,1.5)$内可导，且$f(-1)=f(1.5)=0$，

$\therefore f(x)=2x^2-x-3$在$[-1,1.5]$上满足罗尔定理的条件。令$f'(\xi)=4\xi-1=0$得

$\xi=\dfrac{1}{4}\in(-1,1.5)$即为所求。

（2）$\because f(x)=x\sqrt{3-x}$在$[0,3]$上连续，在$(0,3)$内可导，且$f(0)=f(3)=0$，

$\therefore f(x)=x\sqrt{3-x}$在$[0,3]$上满足罗尔定理的条件。令

$f'(\xi)=\sqrt{3-\xi}-\dfrac{\xi}{2\sqrt{3-\xi}}=0$，得$\xi=2\in(0,3)$即为所求。

★2. 验证拉格朗日中值定理对函数$y=4x^3-5x^2+x-2$在区间$[0,1]$上的正确性。

知识点：拉格朗日中值定理。

思路：根据拉格朗日中值定理的条件和结论，求解方程$f'(\xi)=\dfrac{f(1)-f(0)}{1-0}$，若得到的根$\xi\in[0,1]$则可验证定理的正确性。

解：$\because y=f(x)=4x^3-5x^2+x-2$在$[0,1]$连续，在$(0,1)$内可导，$\therefore y=4x^3-5x^2+x-2$在区间$[0,1]$上满足拉格朗日中值定理的条件。又$f(1)=-2,f(0)=-2$，$f'(x)=12x^2-10x+1$，

$\therefore$要使$f'(\xi)=\dfrac{f(1)-f(0)}{1-0}=0$，只要：$\xi=\dfrac{5\pm\sqrt{13}}{12}\in(0,1)$，

$\therefore \exists \xi = \dfrac{5 \pm \sqrt{13}}{12} \in (0,1)$，使 $f'(\xi) = \dfrac{f(1) - f(0)}{1 - 0}$，验证完毕。

★3. 已知函数 $f(x) = x^4$ 在区间 $[1,2]$ 上满足拉格朗日中值定理的条件，试求满足定理的 ξ。

解：要使 $f'(\xi) = \dfrac{f(2) - f(1)}{2 - 1}$，只要 $4\xi^3 = 15 \Rightarrow \xi = \sqrt[3]{\dfrac{15}{4}}$，从而 $\xi = \sqrt[3]{\dfrac{15}{4}} \in (1,2)$ 即为满足定理的 ξ。

★★4. 试证明对函数 $y = px^2 + qx + r$ 应用拉格朗日中值定理时所求得的点 ξ 总是位于区间的正中间。

证明：不妨设所讨论的区间为 $[a,b]$，则函数 $y = px^2 + qx + r$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，从而有 $f'(\xi) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$，即 $2\xi + q = \dfrac{(pb^2 + qb + r) - (pa^2 + qa + r)}{b - a}$，

解得 $\xi = \dfrac{b + a}{2}$，结论成立。

★5. 函数 $f(x) = x^3$ 与 $g(x) = x^2 + 1$ 在区间 $[1,2]$ 上是否满足柯西定理的所有条件？如满足，请求出满足定理的数值 ξ。

知识点：柯西中值定理。

思路：根据柯西中值定理的条件和结论，求解方程 $\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$，得到的根 ξ 便为所求。

解：$\because f(x) = x^3$ 及 $g(x) = x^2 + 1$ 在 $[1,2]$ 上连续，在 $(1,2)$ 内可导，且在 $(1,2)$ 内的每一点处有 $g'(x) = 2x \neq 0$，所以满足柯西中值定理的条件。要使 $\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \dfrac{f(2) - f(1)}{g(2) - g(1)}$，只要 $\dfrac{3\xi^2}{2\xi} = \dfrac{7}{3}$，解得 $\xi = \dfrac{14}{9} \in (1,2)$， ξ 即为满足定理的数值。

★★★6. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $f(1) = 0$。求证：

存在 $\xi \in (0,1)$，使 $f'(\xi) = -\dfrac{f(\xi)}{\xi}$。

知识点：罗尔中值定理的应用。

思路：从 $f'(\xi) = -\dfrac{f(\xi)}{\xi}$ 结论出发，变形为 $f'(\xi)\xi + f(\xi) = 0$，构造辅助函数使其导函数为

$f'(x)x+f(x)$， 然后再利用罗尔中值定理，便得结论。构造辅助函数也是利用中值定理解决问题时常用的方法。

证明：构造辅助函数 $F(x)=xf(x)$，$F'(x)=f(x)+xf'(x)$

根据题意 $F(x)=xf(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $F(1)=1\cdot f(1)=0$，

$F(0)=0\cdot f(0)=0$，从而由罗尔中值定理得：存在 $\xi\in(0,1)$，使

$F'(\xi)=f'(\xi)\xi+f(\xi)=0$，即 $f'(\xi)=-\dfrac{f(\xi)}{\xi}$。

注：辅助函数的构造方法一般可通过结论倒推，如：要使 $f'(x)=-\dfrac{f(x)}{x}$，只要

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=-\frac{1}{x}\Leftrightarrow[\ln f(x)]'=-[\ln x]'\Leftrightarrow[\ln xf(x)]'=0\Leftrightarrow\frac{[xf(x)]'}{xf(x)}=0\Leftarrow[xf(x)]'=0$$

$\therefore$ 只要设辅助函数 $F(x)=xf(x)$

★★7. 若函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内具有二阶导函数，且 $f(x_1)=f(x_2)=f(x_3)$

$(a<x_1<x_2<x_3<b)$，证明：在 (x_1,x_3) 内至少有一点 ξ，使得 $f''(\xi)=0$。

知识点：罗尔中值定理的应用。

思路：连续两次使用罗尔中值定理。

证明：$\because$ $f(x)$ 在 (a,b) 内具有二阶导函数，$\therefore$ $f(x)$ 在 $[x_1,x_2]$、$[x_2,x_3]$ 内连续，

在 (x_1,x_2)、(x_2,x_3) 内可导，又 $f(x_1)=f(x_2)=f(x_3)$，

$\therefore$ 由罗尔定理，至少有一点 $\xi_1\in(x_1,x_2)$、$\xi_2\in(x_2,x_3)$，

使得 $f'(\xi_1)=0$、$f'(\xi_2)=0$；又 $f'(x)$ 在 $[\xi_1,\xi_2]$ 上连续，在 (ξ_1,ξ_2) 内可导，

从而由罗尔中值定理，至少有一点 $\xi\in(\xi_1,\xi_2)\subset(x_1,x_3)$，使得 $f''(\xi)=0$。

★★8. 若 4 次方程 $a_0x^4+a_1x^3+a_2x^2+a_3x+a_4=0$ 有 4 个不同的实根，证明：

$$4a_0x^3+3a_1x^2+2a_2x+a_3=0$$

的所有根皆为实根。

知识点：罗尔中值定理的应用。

思路：讨论方程根的情况可考虑罗尔中值定理。

证明：令 $f(x)=a_0x^4+a_1x^3+a_2x^2+a_3x+a_4$

则由题意，$f(x)$ 有 4 个不同的实数零点，分别设为 x_1,x_2,x_3,x_4，

$\because f(x)$ 在 $[x_1,x_2]$、$[x_2,x_3]$、$[x_3,x_4]$ 上连续，在 (x_1,x_2)、(x_2,x_3)、(x_3,x_4) 上可导，

又 $f(x_1)=f(x_2)=f(x_3)=f(x_4)=0$，

$\therefore$ 由罗尔中值定理，至少有一点 $\xi_1\in(x_1,x_2)$、$\xi_2\in(x_2,x_3)$、$\xi_3\in(x_3,x_4)$

使得 $f'(\xi_1)=f'(\xi_2)=f'(\xi_3)=0$，即方程 $4a_0x^3+3a_1x^2+2a_2x+a_3=0$ 至少有 3 个实根，又三次方程最多有 3 个实根，从而结论成立。

★★★9. 证明：方程 $x^5+x-1=0$ 只有一个正根。

知识点：零点定理和罗尔定理的应用。

思路：讨论某些方程根的唯一性，可利用反证法，结合零点定理和罗尔定理得出结论。零点定理往往用来讨论函数的零点情况；罗尔定理往往用来讨论导函数的零点情况。

解：令 $f(x)=x^5+x-1$，$\because f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，且 $f(1)=1>0$，$f(0)=-1<0$，

$\therefore$ 由零点定理，至少有一点 $\xi\in(0,1)$，使得 $f(\xi)=\xi^5+\xi-1=0$；

假设 $x^5+x-1=0$ 有两个正根，分别设为 ξ_1、ξ_2（$\xi_1<\xi_2$），

则 $f(x)$ 在在 $[\xi_1,\xi_2]$ 上连续，在 (ξ_1,ξ_2) 内可导，且 $f(\xi_1)=f(\xi_2)=0$，

从而由罗尔定理，至少有一点 $\xi\in(\xi_1,\xi_2)$，使得 $f'(\xi)=5\xi^4+1=0$，这不可能。

$\therefore$ 方程 $x^5+x-1=0$ 只有一个正根。

★★10. 不用求出函数 $f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$ 的导数，说明方程 $f'(x)=0$ 有几个实根，并指出它们所在的区间。

知识点：罗尔中值定理的应用。

思路：讨论导函数的零点，可考虑利用罗尔中值定理。

解：$\because f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$ 在 $[1,2]$、$[2,3]$、$[3,4]$ 上连续，

在 $(1,2)$、$(2,3)$、$(3,4)$ 内可导，且 $f(1)=f(2)=f(3)=f(4)=0$，

$\therefore$由罗尔中值定理，至少有一点$\xi_1 \in (1,2)$、$\xi_2 \in (2,3)$、$\xi_3 \in (3,4)$，

使得$f'(\xi_1) = f'(\xi_2) = f'(\xi_3) = 0$，即方程$f'(x) = 0$至少有三个实根，

又方程$f'(x) = 0$为三次方程，至多有三个实根，

$\therefore f'(x) = 0$有 3 个实根，分别为$\xi_1 \in (1,2)$、$\xi_2 \in (2,3)$、$\xi_3 \in (3,4)$。

★★★11. 证明下列不等式：

（1） $|\arctan a - \arctan b| \le |a-b|$ ；　　（2） 当 $x > 1$时，$e^x > ex$ ；

（3） 设 $x > 0$，证明$\ln(1+x) < x$；　　（4） 当$x > 0$时，$\ln(1+\dfrac{1}{x}) > \dfrac{1}{1+x}$。

知识点：利用拉格朗日中值定理。

思路：用拉格朗日中值定理证明不等式的过程：寻找函数$y = f(x)$，通过式子$f'(\xi) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$（或$f(b)-f(a) = f'(\xi)(b-a)$）证明的不等式。

证明：（1）令$f(x) = \arctan x$， $\because$ $f(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)内可导，

$\therefore$由拉格朗日中值定理，得$|\arctan a - \arctan b| = |f'(\xi)(b-a)| = \left|\dfrac{1}{1+\xi^2}\right||b-a| \le |b-a|$。

（2）令$f(x) = e^x$ $(x > 1)$，$\because$ $f(x)$在$[1,x]$上连续，在$(1,x)$内可导，

$\therefore$由拉格朗日中值定理，得$e^x - e = e^{\xi}(x-1)$，

$\because 1 < \xi < x$，$\therefore e^x - e = e^{\xi}(x-1) > e(x-1) = ex - e$，从而当 $x > 1$时，$e^x > ex$。

（3）令$f(x) = \ln(1+x)$ $(x > 0)$，$\because$ $f(x)$在$[0,x]$上连续，在$(0,x)$内可导，

$\therefore$由拉格朗日中值定理，得$\ln(1+x) = \ln(1+x) - \ln(1+0) = f'(\xi)(x-0) = \dfrac{1}{1+\xi}x$，

$\because 0 < \xi < x$，$\therefore \dfrac{1}{1+\xi}x < x$，即$x > 0$， $\ln(1+x) < x$。

（4）令$f(x) = \ln x$ $(x > 0)$，$\because$ $f(x)$在$[x,1+x]$上连续，在$(x,1+x)$内可导，

$\therefore$由拉格朗日中值定理，得$\ln(1+\dfrac{1}{x}) = \ln(1+x) - \ln x = f'(\xi)(1-0) = \dfrac{1}{\xi}$，

$\because x<\xi<1+x$，$\therefore \frac{1}{\xi}>\frac{1}{1+x}$，即当 $x>0$ 时，$\ln(1+\frac{1}{x})>\frac{1}{1+x}$。

★★12. 证明等式：$2\arctan x+\arcsin\frac{2x}{1+x^2}=\pi(x\geq 1)$.

知识点：$f'(x)=0\Leftrightarrow f(x)=C$（$C$ 为常数）。

思路：证明一个函数表达式 $f(x)$ 恒等于一个常数，只要证 $f'(x)=0$

证明：令 $f(x)=2\arctan x+\arcsin\frac{2x}{1+x^2}(x\geq 1)$，

当 $x=1$ 时，有 $2\arctan 1+\arcsin 1=\pi$；当 $x>1$ 时，有

$$f'(x)=\frac{2}{1+x^2}+\frac{1}{\sqrt{1-(\frac{2x}{1+x^2})^2}}\cdot\frac{2(1+x^2)-2x\cdot 2x}{(1+x^2)^2}=\frac{2}{1+x^2}+\frac{1}{\left|1-x^2\right|}\cdot\frac{2-2x^2}{(1+x^2)}$$

$$=\frac{2}{1+x^2}+(-\frac{2}{1+x^2})=0，\therefore f(x)=C=f(1)=\pi；$$

$\therefore 2\arctan x+\arcsin\frac{2x}{1+x^2}=\pi(x\geq 1)$ 成立。

★★★13. 证明：若函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内满足关系式 $f'(x)=f(x)$，且 $f(0)=1$，则 $f(x)=e^x$。

知识点：$f'(x)=0\Leftrightarrow f(x)=C$

思路：因为 $f(x)=e^x\Leftrightarrow e^{-x}f(x)\equiv 1$，所以当设 $F(x)=e^{-x}f(x)$ 时，只要证 $F'(x)=0$ 即可

证明：构造辅助函数 $F(x)=e^{-x}f(x)$，

则 $F'(x)=e^{-x}f'(x)-e^{-x}f(x)=0$；

$\therefore F(x)=e^{-x}f(x)\equiv C=F(0)=1$

$\therefore f(x)=e^x$。

★★★14. 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内有二阶导数，且有

$$f(a)=f(b)=0, f(c)>0(a<c<b)，$$

试证在 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使 $f''(\xi)<0$。

知识点：拉格朗日中值定理的应用。

思路：关于导函数 $f^{(n)}(\xi)$ 在一点处符号的判断，根据已知条件和拉格朗日中值定理的结论，逐层分析

各层导函数改变量和自变量改变量的符号，得出结论。

证明：$\because$ $f(x)$ 在$[a,c]$、$[c,b]$上连续，在(a,c)、(c,b)内可导，

$\therefore$由拉格朗日中值定理，至少有一点$\xi_1\in(a,c)$、$\xi_2\in(c,b)$，

使得$f'(\xi_2)=\dfrac{f(c)-f(b)}{c-b}<0$，$f'(\xi_1)=\dfrac{f(a)-f(c)}{a-c}>0$；

又$f'(x)$在$[\xi_1,\xi_2]$上连续，在(ξ_1,ξ_2)内可导，从而至少有一点$\xi\in(\xi_1,\xi_2)$，

使得$f''(\xi)=\dfrac{f'(\xi_2)-f'(\xi_1)}{\xi_2-\xi_1}<0$。

★★★15. 设 $f(x)$ 在$[a,b]$上可微，且 $f'_+(a)>0, f'_-(b)>0, f(a)=f(b)=A,$ 试证明 $f'(x)$ 在(a,b)内至少有两个零点。

知识点：极限的保号性、介值定理、微分中值定理。

思路：要证明在某个区间(a,b)内导函数至少存在两个零点，只要证该函数在$[a,b]$上有三个零点，即可以利用罗尔中值定理，得出结论。

证明：$\because f'_+(a)=\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}>0$，由极限的保号性知，

$\exists\bigcup_+(a,\delta_1)$（不妨设$\delta_1<\dfrac{b\text{-}a}{2}$），对于$\forall x\in\bigcup_+(a,\delta_1)$，均有$\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}>0$，

特别地，$\exists x_1\in\bigcup_+(a,\delta_1)$，使得$\dfrac{f(x_1)-f(a)}{x_1-a}>0$，$\therefore$得$f(x_1)>f(a)=A$；

同理，由$f'_-(b)>0,$ 得$\exists x_2\in\bigcup_-(b,\delta_2)$（$\delta_2<\dfrac{b\text{-}a}{2}$），使得$\dfrac{f(x_2)-f(b)}{x_2-b}>0$，

从而得$f(x_2)<f(b)=A$；

又$\because$ $f(x)$在$[x_1,x_2]$上连续，$\therefore$由介值定理知，至少有一点$\xi\in(x_1,x_2)$使得$f(\xi)=A$；

$\because$ $f(x)$在$[a,\xi]$、$[\xi,b]$上连续，在(a,ξ)、(ξ,b)内可导，且$f(a)=f(\xi)=f(b)=A$，

$\therefore$由罗尔中值定理知，至少有一点$\xi_1\in(a,\xi)$、$\xi_2\in(\xi,b)$，使得$f'(\xi_1)=f'(\xi_2)=0$，结论成立。

★★★16. 设$f(x)$在闭区间$[a,b]$上满足$f''(x)>0$，试证明存在唯一的$c, a<c<b$，使得

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}。$$

知识点：微分中值定理或函数单调性的应用。

思路：证明唯一性的题目或考虑利用反证法；或正面论述。此题用反证法和罗尔中值定理，或利用函数的单调性得出结论。

证明：存在性。

$\because f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，$\therefore$ 由拉格朗日中值定理知，至少有一点 $c\in(a,b)$，使得 $f'(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$。

唯一性的证明如下：

方法一：利用反证法。假设另外存在一点 $d\in(a,b)$，使得 $f'(d)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$，

又 $\because f'(x)$ 在 $[c,d]$（或 $[d,c]$）上连续，在 (c,d)（或 (d,c)）内可导，

$\therefore$ 由罗尔中值定理知，至少存在一点 $\xi\in(c,d)\subset(a,b)$（或 $\xi\in(d,c)\subset(a,b)$），使得 $f''(\xi)=0$，

这与 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上满足 $f''(x)>0$ 矛盾。从而结论成立。

方法二：$\because f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上满足 $f''(x)>0$，$\therefore f'(x)$ 在 $[a,b]$ 单调递增，

从而存在存在唯一的 $c\in(a,b)$，使得 $f'(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$。结论成立。

★★★17. 设函数 $y=f(x)$ 在 $x=0$ 的某个邻域内具有 n 阶导数，且

$f(0)=f'(0)=\cdots=f^{(n-1)}(0)=0,$ 试用柯西中值定理证明：

$$\frac{f(x)}{x^n}=\frac{f^{(n)}(\theta x)}{n!}(0<\theta<1)。$$

知识点：柯西中值定理。

思路：对 $f(x)$、$g(x)=x^n$ 在 $[0,x]$ 上连续使用 n 次柯西中值定理便可得结论。

证明：$\because f(x)$、$g(x)=x^n$ 及其各阶导数在 $[0,x]$ 上连续，在 $(0,x)$ 上可导，

且在 $(0,x)$ 每一点处，$g^{(n-1)}(x)=n!x\neq 0$，又 $f(0)=f'(0)=\cdots=f^{(n-1)}(0)=0,$，

$\therefore$ 连续使用 n 次柯西中值定理得，

$$\frac{f(x)}{x^n}=\frac{f(x)-f(0)}{x^n-g(0)}=\frac{f'(\xi_1)}{n\xi_1^{n-1}}=\frac{f'(\xi_1)-f'(0)}{n\xi_1^{n-1}-g'(0)}=\cdots=\frac{f^{(n-1)}(\xi_{n-1})-f^{(n-1)}(0)}{n!\xi_{n-1}-g^{(n-1)}(0)}$$

$=\dfrac{f^{(n)}(\theta x)}{n!}(0<\theta<1)$，从而结论成立。

习题 3-2

★★1. 用洛必达法则求下列极限：

（1） $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{\sin x}$； （2） $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin x-\sin a}{x\text{-}a}$； （3） $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\ln\sin x}{(\pi\text{-}2x)^2}$； （4） $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(1+\frac{1}{x})}{arc\cot x}$；

（5） $\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{\ln\tan 7x}{\ln\tan 2x}$； （6） $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1+\ln x}{e^x-e}$； （7） $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-x}{x\text{-}\sin x}$； （8） $\lim\limits_{x\to 0}x\cot 2x$；

（9） $\lim\limits_{x\to 0}x^2e^{\frac{1}{x^2}}$； （10） $\lim\limits_{x\to\infty}x(e^{\frac{1}{x}}-1)$； （11） $\lim\limits_{x\to 0}(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1})$； （12） $\lim\limits_{x\to 1}(\dfrac{x}{x\text{-}1}-\dfrac{1}{\ln x})$；

（13） $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{a}{x})^x$； （14） $\lim\limits_{x\to 0^+}x^{\sin x}$； （15） $\lim\limits_{x\to 0^+}(\dfrac{1}{x})^{\tan x}$； （16） $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x+\ln(1-x)-1}{x\text{-}\arctan x}$；

（17） $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{1}{x}}$； （18） $\lim\limits_{x\to 0^+}(\ln\dfrac{1}{x})^x$； （19） $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+\sqrt{1+x^2})^{\frac{1}{x}}$； （20） $\lim\limits_{n\to+\infty^+}(n\tan\dfrac{1}{n})^{n^2}$。

知识点：洛必达法则。

思路：注意洛必达法则的适用范围。**该法则解决的是未定型的极限问题，基本形式为：$\frac{0}{0}$ 型与 $\frac{\infty}{\infty}$ 型未定式**，对于这种形式可连续使用洛必达法则；对于 $\infty-\infty$ 型与 $0\cdot\infty$ 型的未定式，可通过通分或者取倒数的形式化为基本形式；对于 0^0 型、1^∞ 型与 ∞^0 型的未定式，可通过取对数等手段化为未定式；此外，还可以结合等价无穷小替换、两个重要的极限、换元等手段使问题简化。

解： （1） $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x+e^{-x}}{\cos x}=2$；

（2） $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin x-\sin a}{x-a}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\cos x}{1}=\cos a$；

（3） $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\ln\sin x}{(\pi-2x)^2}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\frac{\cos x}{\sin x}}{4(2x-\pi)}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos x}{4(2x-\pi)}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{-\sin x}{8}=-\dfrac{1}{8}$；

（4） $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(1+\frac{1}{x})}{arc\cot x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-\frac{1}{x(x+1)}}{-\frac{1}{1+x^2}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1+x^2}{x(x+1)}=1$；

（5）$\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{\ln\tan 7x}{\ln\tan 2x}=\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{\dfrac{7\sec^2 7x}{\tan 7x}}{\dfrac{2\sec^2 2x}{\tan 2x}}=\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{7\cos^2 2x\cdot\tan 2x}{\tan 7x\cdot 2\cos^2 7x}=1$；

（6）$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3-1+\ln x}{e^x-e}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{3x^2+\dfrac{1}{x}}{e^x}=\dfrac{4}{e}$；

（7）$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x-x}{x-\sin x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sec^2 x-1}{1-\cos x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2\tan x\sec^2 x}{\sin x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2}{\cos^3 x}=2$；

（8）$\lim\limits_{x\to0}x\cot 2x=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{\tan 2x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{2\sec^2 2x}=\dfrac{1}{2}$；

（9）$\lim\limits_{x\to0}x^2e^{\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{\frac{1}{x^2}}}{\dfrac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{-\dfrac{2}{x^3}e^{\frac{1}{x^2}}}{-\dfrac{2}{x^3}}=\lim\limits_{x\to0}e^{\frac{1}{x^2}}=+\infty$；

（或解为：$\lim\limits_{x\to0}x^2e^{\frac{1}{x^2}}\overset{u=\frac{1}{x^2}}{=}\lim\limits_{u\to+\infty}\dfrac{e^u}{u}=\lim\limits_{u\to+\infty}\dfrac{e^u}{1}=+\infty$）

（10）$\lim\limits_{x\to\infty}x(e^{\frac{1}{x}}-1)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(e^{\frac{1}{x}}-1)}{\dfrac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-\dfrac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}}{-\dfrac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to\infty}e^{\frac{1}{x}}=1$；

（或解为：$\because$ 当 $x\to\infty$ 时，$e^{\frac{1}{x}}-1\sim\dfrac{1}{x}$，$\therefore\lim\limits_{x\to\infty}x(e^{\frac{1}{x}}-1)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^{1/x}-1}{1/x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1/x}{1/x}=1$）

（11）$\lim\limits_{x\to0}(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1})=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-1-x}{x(e^x-1)}\overset{(e^x-1)\sim x}{=}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-1-x}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-1}{2x}=\dfrac{1}{2}$；

（12）$\lim\limits_{x\to1}(\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{1}{\ln x})=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x\ln x-x+1}{(x-1)\ln x}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\ln x}{\ln x+\dfrac{x-1}{x}}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1+\ln x}{\ln x+2}=\dfrac{1}{2}$；

（或解为：$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x\ln x-x+1}{(x-1)\ln x}\overset{u=x-1}{=}\lim\limits_{u\to0}\dfrac{(u+1)\ln(u+1)-u}{u\ln(u+1)}\overset{\ln(u+1)\sim u}{=}\lim\limits_{u\to0}\dfrac{(u+1)\ln(u+1)-u}{u^2}$

$=\lim\limits_{u\to0}\dfrac{\ln(u+1)}{2u}=\dfrac{1}{2}$）

（13）$\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{a}{x})^x=e^{\lim\limits_{x\to\infty}x\ln(1+\frac{a}{x})}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln(1+\frac{a}{x})}{\frac{1}{x}}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{a}{x}}{\frac{1}{x}}}=e^a$；

（14）$\lim\limits_{x\to0^+}x^{\sin x}=e^{\lim\limits_{x\to0^+}\sin x\ln x}=e^{\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\ln x}{\csc x}}=e^{\lim\limits_{x\to0^+}\frac{1}{-x\cot x\csc x}}=e^{\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\tan x\sin x}{-x}}=e^0=1$；

（15）$\lim\limits_{x\to0^+}(\frac{1}{x})^{\tan x}=\lim\limits_{x\to0^+}e^{\lim\limits_{x\to0^+}\frac{-\ln x}{\cot x}}=\lim\limits_{x\to0^+}e^{\lim\limits_{x\to0^+}\frac{-\frac{1}{x}}{-\csc^2 x}}=\lim\limits_{x\to0^+}e^{\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\sin^2 x}{x}}=e^0=1$；

（16）$\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x+\ln(1-x)-1}{x-\arctan x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x+\frac{1}{x-1}}{1-\frac{1}{1+x^2}}=\lim\limits_{x\to0}\frac{(1+x^2)(xe^x-e^x+1)}{(x-1)x^2}$

$=-\lim\limits_{x\to0}\frac{(xe^x-e^x+1)}{x^2}=-\lim\limits_{x\to0}\frac{xe^x}{2x}=-\frac{1}{2}$；

（17）$\lim\limits_{x\to0}(1+\sin x)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to0}e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1+\sin x)}{x}}=\lim\limits_{x\to0}e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos x}{1+\sin x}}=e$；

（18）$\lim\limits_{x\to0^+}(\ln\frac{1}{x})^x=e^{\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\ln[-\ln x]}{\frac{1}{x}}}=e^{\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{-\ln x}\cdot(-\frac{1}{x})}{-\frac{1}{x^2}}}=e^{-\lim\limits_{x\to0^+}\frac{x}{\ln x}}=e^{-\lim\limits_{x\to0^+}\frac{1}{1/x}}=1$；

（19）$\lim\limits_{x\to+\infty}(x+\sqrt{1+x^2})^{\frac{1}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{x+\sqrt{1+x^2}}}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}}=1$；

（20）令 $f(x)=(x\tan\frac{1}{x})^{x^2}$，则 $\lim\limits_{x\to+\infty}(x\tan\frac{1}{x})^{x^2}\overset{t=\frac{1}{x}}{=}\lim\limits_{t\to0^+}(\frac{\tan t}{t})^{\frac{1}{t^2}}=e^{\lim\limits_{t\to0^+}\frac{\ln\tan t-\ln t}{t^2}}$

$=e^{\lim\limits_{t\to0^+}\frac{t\sec^2 t-\tan t}{2t^2\tan t}}=e^{\lim\limits_{t\to0^+}\frac{t\sec^2 t-\tan t}{2t^3}}=e^{\lim\limits_{t\to0^+}\frac{t-\sin t\cos t}{2t^3\cos^2 t}}=e^{\lim\limits_{t\to0^+}\frac{t-\frac{1}{2}\sin 2t}{2t^3}}$

$=e^{\lim\limits_{t\to0^+}\frac{1-\cos 2t}{6t^2}}\overset{(1-\cos x)\sim\frac{x^2}{2}}{==}e^{\lim\limits_{t\to0^+}\frac{2t^2}{6t^2}}=e^{\frac{1}{3}}$

$\therefore\lim\limits_{n\to+\infty^+}(n\tan\frac{1}{n})^{n^2}=e^{\frac{1}{3}}$

★★2. 验证极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+\sin x}{x}$ 存在，但不能用洛必达法则求出。

知识点：洛必达法则。

思路：求导后极限如果不存在，不能说明原式极限不存在，只能说洛必达法则失效。洛必达法则不能解决所有的未定型极限问题。

解：$\because\ \lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+\sin x}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{\sin x}{x})=1+0=1$，$\therefore$极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+\sin x}{x}$ 存在；

若使用洛必达法则，得 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\sin x}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+\cos x}{1}=1+\lim\limits_{x\to\infty}\cos x$，

而 $\lim\limits_{x\to\infty}\cos x$ 不存在，所以不能用洛必达法则求出。

★★★3. 若 $f(x)$ 有二阶导数，证明 $f''(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-2f(x)+f(x-h)}{h^2}$。

知识点：导数定义和洛必达法则。

思路：使用洛必达法则，对极限中的函数上下求关于 h 的导数，然后利用导数定义得结论。

证明：$\because\ \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-2f(x)+f(x-h)}{h^2}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f'(x+h)-f'(x-h)}{2h}$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f'(x+h)-f'(x)+f'(x)-f'(x-h)}{2h}$$

$=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f'(x+h)-f'(x)}{h}+\dfrac{1}{2}\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f'(x-h)-f'(x)}{-h}=f''(x)$，$\therefore$结论成立。

★★★4. 讨论函数 $f(x)=\begin{cases}\left[\dfrac{(1+x)^{1/x}}{e}\right]^{1/x}, & x>0\\ e^{-1/2}, & x\le 0\end{cases}$ 在点 $x=0$ 处的连续性。

知识点：函数在一点连续的概念。

思路：讨论分段函数在分段点处的连续性，要利用函数在一点处左、右连续的概念。

解：$\because\ \lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left[\dfrac{(1+x)^{1/x}}{e}\right]^{1/x}=e^{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{x}\ln\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}}=e^{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}}=e^{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{1+x}-1}{2x}}$

$=e^{\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{-1}{1+x}}=e^{-\frac{1}{2}}=f(0)$，$\therefore f(x)$ 在 $x=0$ 处右连续；

又$\because\ \lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=e^{-\frac{1}{2}}=f(0)$，$\therefore f(x)$ 在 $x=0$ 处左连续；

从而可知，$f(x)=\begin{cases}\left[\dfrac{(1+x)^{1/x}}{e}\right]^{1/x}, & x>0\\ e^{-1/2}, & x\le 0\end{cases}$ 在点 $x=0$ 处连续。

★★★5. 设 $g(x)$ 在 $x=0$ 处二阶可导，且 $g(0)=0$。试确定 a 的值使 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，并求

$f'(0)$，其中 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{g(x)}{x}, & x\ne 0\\ a, & x=0\end{cases}$。

知识点：连续和可导的关系、洛必达法则。

思路：讨论分段函数在分段点处的连续性、可导性，一般考虑利用定义。

解：要使 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，则必有 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，

又$\because$ $g(x)$ 在 $x=0$ 处 $g(0)=0$，$\therefore a=\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(x)-g(0)}{x-0}=g'(0)$；

由导数定义，$f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{g(x)}{x}-g'(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(x)-g'(0)x}{x^2}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g'(x)-g'(0)}{2x}=\dfrac{1}{2}g''(0)$。

内容概要

名称	主要内容（3.3）

3.3 泰勒公式	泰勒中值定理：如果 $f(x)$ 在含有 x_0 的某个开区间 (a,b) 内具有 $n+1$ 阶的导数，则对任一 $x\in(a,b)$，有 $f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\dfrac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x)$，此公式称为 n 阶泰勒公式； 其中 $R_n(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$（$\xi$ 介于 x_0 于 x 之间），称为拉格朗日型余项；或 $R_n(x)=o[(x-x_0)^n]$，称为皮亚诺型余项。
	n 阶麦克劳林公式： $f(x)=f(0)+f'(0)x+\dfrac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+R_n(x)$ 其中 $R_n(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}$（$0<\theta<1$）或 $R_n(x)=o(x^n)$。
	常用的初等函数的麦克劳林公式：1）$e^x=1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\cdots+\dfrac{x^n}{n!}+o(x^n)$ 2）$\sin x=x-\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^5}{5!}-\cdots+(-1)^n\dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+o(x^{2n+2})$ 3）$\cos x=1-\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^4}{4!}-\dfrac{x^6}{6!}+\cdots+(-1)^n\dfrac{x^{2n}}{(2n)!}+o(x^{2n+1})$ 4）$\ln(1+x)=x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}-\cdots+(-1)^n\dfrac{x^{n+1}}{n+1}+o(x^{n+1})$ 5）$\dfrac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots+x^n+o(x^n)$ 6）$(1+x)^m=1+mx+\dfrac{m(m-1)}{2!}x^2+\cdots+\dfrac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n+o(x^n)$

习题 3-3

★1. 按 $(x-1)$ 的幂展开多项式 $f(x)=x^4+3x^2+4$。

知识点：泰勒公式。

思路：直接展开法。求 $f(x)$ 按 $(x-x_0)$ 的幂展开的 n 阶泰勒公式，则依次求 $f(x)$ 直到 $n+1$ 阶的导数在 $x=x_0$ 处的值，然后带代入公式即可。

解：$f'(x)=4x^3+6x$，$f'(1)=10$；$f''(x)=12x^2+6$，$f''(1)=18$；

$f'''(x)=24x$，$f'''(1)=24$；$f^{(4)}(x)=24$；$f^{(4)}(1)=24$；$f^{(5)}(x)=0$；

将以上结果代入泰勒公式，得

$$f(x)=f(1)+\frac{f'(1)}{1!}(x-1)+\frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2+\frac{f'''(1)}{3!}(x-1)^3+\frac{f^{(4)}(1)}{4!}(x-1)^4$$

$$=8+10(x-1)+9(x-1)^2+4(x-1)^3+(x-1)^4。$$

★★2. 求函数 $f(x)=\sqrt{x}$ 按 $(x-4)$ 的幂展开的带有拉格朗日型余项的三阶泰勒公式。

知识点：泰勒公式。

思路：同 1。

解：$f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$，$f'(4)=\dfrac{1}{4}$；$f''(x)=-\dfrac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}$，$f''(4)=-\dfrac{1}{32}$；

$f'''(x)=\dfrac{3}{8}x^{-\frac{5}{2}}$，$f'''(4)=\dfrac{3}{256}$；$f^{(4)}(x)=-\dfrac{15}{16}x^{-\frac{7}{2}}$；将以上结果代入泰勒公式，得

$$f(x)=f(4)+\frac{f'(4)}{1!}(x-4)+\frac{f''(4)}{2!}(x-4)^2+\frac{f'''(4)}{3!}(x-4)^3+\frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(x-4)^4$$

$$=2+\frac{1}{4}(x-4)-\frac{1}{64}(x-4)^2+\frac{1}{512}(x-4)^3-\frac{5}{128\xi^{\frac{7}{2}}}(x-4)^4$$，（ξ 介于 x 与 4 之间）。

★★★3. 把 $f(x)=\dfrac{1+x+x^2}{1-x+x^2}$ 在 $x=0$ 点展开到含 x^4 项，并求 $f^{(3)}(0)$。

知识点：麦克劳林公式。

思路：间接展开法。$f(x)$ 为有理分式时通常利用已知的结论 $\dfrac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots+x^n+o(x^n)$。

解：$f(x)=\dfrac{1+x+x^2}{1-x+x^2}=\dfrac{1-x+x^2+2x}{1-x+x^2}=1+\dfrac{2x}{1-x+x^2}=1+2x(1+x)\dfrac{1}{1+x^3}$

$=1+2x(1+x)(1-x^3+o(x^3))=1+2x+2x^2-2x^4+o(x^4)$；

又由泰勒公式知 x^3 前的系数 $\dfrac{f'''(0)}{3!}=0$，从而 $f'''(0)=0$。

★★4. 求函数 $f(x)=\ln x$ 按 $(x-2)$ 的幂展开的带有皮亚诺型余项的 n 阶泰勒公式。

知识点：泰勒公式。

思路：直接展开法，解法同 1；或者间接展开法，$f(x)$ 为对数函数时，通常利用已知的结论

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}+o(x^{n+1})。$$

方法一：（直接展开）$f'(x)=\dfrac{1}{x}$，$f'(2)=\dfrac{1}{2}$；$f''(x)=-\dfrac{1}{x^2}$，$f''(2)=-\dfrac{1}{4}$；

$f'''(x)=\dfrac{2}{x^3}$，$f'''(2)=\dfrac{1}{4}$；$\cdots,f^{(n)}(x)=(-1)^{n-1}\dfrac{(n-1)!}{x^n}$，$f^{(n)}(2)=(-1)^{n-1}\dfrac{(n-1)!}{2^n}$；

将以上结果代入泰勒公式，得

$$\ln x=f(2)+\frac{f'(2)}{1!}(x-2)+\frac{f''(2)}{2!}(x-2)^2+\frac{f'''(2)}{3!}(x-2)^3+\frac{f^{(4)}(2)}{4!}(x-2)^4+\cdots$$

$$+\frac{f^{(n)}(2)}{n!}(x-2)^n+o((x-2)^n)=\ln 2+\frac{1}{2}(x-2)-\frac{1}{2^3}(x-2)^2+\frac{1}{3\cdot 2^3}(x-2)^3-\cdots$$

$$+(-1)^{n-1}\frac{1}{n\cdot 2^n}(x-2)^n+o((x-2)^n)。$$

方法二：$f(x)=\ln x=\ln(2+x-2)=\ln 2+\ln(1+\dfrac{x-2}{2})=\ln 2+\dfrac{x-2}{2}-\dfrac{1}{2}(\dfrac{x-2}{2})^2$

$$+\frac{1}{3}(\frac{x-2}{2})^3-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}(\frac{x-2}{2})^n+o((\frac{x-2}{2})^n)=\ln 2+\frac{1}{2}(x-2)-\frac{1}{2^3}(x-2)^2$$

$$+\frac{1}{3\cdot 2^3}(x-2)^3-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n\cdot 2^n}(x-2)^n+o((x-2)^n)。$$

★★5. 求函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 按 $(x+1)$ 的幂展开的带有拉格朗日型余项的 n 阶泰勒公式。

知识点：泰勒公式。

思路：直接展开法，解法同 1；或者间接展开法，$f(x)$ 为有理分式时通常利用已知的结论

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots+x^n+\frac{1}{(1-\xi)^{n+2}}x^{n+1}。$$

方法一：$f'(x)=-\dfrac{1}{x^2}$，$f'(-1)=-1$；$f''(x)=\dfrac{2}{x^3}$，$f''(-1)=-2$；$f'''(x)=-\dfrac{6}{x^4}$，

$f'''(-1)=-6\cdots,f^{(n)}(x)=(-1)^n\dfrac{n!}{x^{n+1}}$， $f^{(n)}(-1)=(-1)^n\dfrac{n!}{(-1)^{n+1}}=-n!$；

将以上结果代入泰勒公式，得

$$\frac{1}{x}=f(-1)+\frac{f'(-1)}{1!}(x+1)+\frac{f''(-1)}{2!}(x+1)^2+\frac{f'''(-1)}{3!}(x+1)^3+\cdots$$

$$+\frac{f^{(n)}(-1)}{n!}(x+1)^n+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x+1)^{n+1}$$

$=-1-(x+1)-(x+1)^2-(x+1)^3-\cdots-(x+1)^n+\dfrac{(-1)^{n+1}}{\xi^{n+2}}(x+1)^{n+1}$（$\xi$ 介于 x 与 -1 之间）。

方法二：$\dfrac{1}{x}=-\dfrac{1}{1-(x+1)}=-[1+(x+1)+(x+1)^2+(x+1)^3+\cdots+(x+1)^n$

$+\dfrac{(-1)^{n+1}}{\xi^{n+2}}(x+1)^{n+1}]=-1-(x+1)-(x+1)^2-(x+1)^3-\cdots-(x+1)^{\mathrm{n}}+\dfrac{(-1)^{n+1}}{\xi^{n+2}}(x+1)^{n+1}$

（ξ 介于 x 与 -1 之间）。

★★6. 求函数 $y=xe^x$ 的带有皮亚诺型余项的 n 阶麦克劳林展开式。

知识点：麦克劳林公式。

思路：直接展开法，解法同 1；间接展开法。$f(x)$ 中含有 e^x 时，通常利用已知结论

$e^x=1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\cdots+\dfrac{x^n}{n!}+o(x^n)$。

方法一：$y'=(x+1)e^x$， $y'(0)=1$； $y''=(x+2)e^x$， $y''(0)=2$； $\cdots,y^{(n)}=(x+n)e^x$，

$y^{(n)}(0)=n$，将以上结果代入麦克劳林公式，得

$$xe^x=f(0)++\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+o(x^n)$$

$=x+x^2+\dfrac{x^3}{2!}+\cdots+\dfrac{x^n}{(n-1)!}+o(x^n)$。

方法二：$xe^x=x(1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\cdots+\dfrac{x^{n-1}}{(n-1)!}+o(x^{n-1}))=x+x^2+\dfrac{x^3}{2!}+\cdots$

$+\dfrac{x^n}{(n-1)!}+o(x^n)$。

★★7. 验证当 $0 < x \le \frac{1}{2}$ 时，按公式 $e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$ 计算 e^x 的近似值时，所产生的误差小于 0.01，并求 $\sqrt{e}$ 的近似值，使误差小于 0.01。

知识点：泰勒公式的应用。

思路：利用泰勒公式估计误差，就是估计拉格朗日余项的范围。

解：$\left|R_3(x)\right| = \left|\frac{e^{\xi}}{4!}x^4\right| \le \left|\frac{e^{\frac{1}{2}}}{4!}x^4\right| \le \left|\frac{2}{4!}\frac{1}{2^4}\right| = \frac{1}{192} < 0.01$；$\sqrt{e} \approx 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{48} \approx 0.646$。

★★8. 用泰勒公式取 $n = 5$，求 $\ln 1.2$ 的近似值，并估计其误差。

知识点：泰勒公式的应用。

解：设 $f(x) = \ln(1 + x)$，则 $f(x) \approx f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(5)}(0)}{5!}x^5$

$= x - \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^5}{5}$，从而 $\ln 1.2 = f(0.2) \approx 0.2 - \frac{0.2^2}{2} + \frac{0.2^3}{3} - \frac{0.2^4}{4} + \frac{0.2^5}{5} \approx 0.1823$；其误差为：$\left|R_5(x)\right| = \left|-\frac{1}{6(1+\xi)^6}x^6\right| \le \frac{0.2^6}{6} \approx 0.0000107$。

★★★9. 利用函数的泰勒展开式求下列极限：

（1） $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt[3]{x^3 + 3x} - \sqrt{x^2 - x})$；　　（2）$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1 + \frac{1}{2}x^2 - \sqrt{1 + x^2}}{(\cos x - e^{x^2})\sin x^2}$。

知识点：泰勒展开式的应用。

思路：间接展开法。利用已知的结论将函数展开到适当的形式，然后利用极限的运算性质得到结果。

解：（1） $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt[3]{x^3 + 3x} - \sqrt{x^2 - x}) = \lim\limits_{x\to+\infty}[x(1 + \frac{3}{x^2})^{\frac{1}{3}} - x(1 - \frac{1}{x})^{\frac{1}{2}}]$

$= \lim\limits_{x\to+\infty}[x(1 + \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{x^2} + \mathrm{o}(\frac{1}{x^2}))] - x(1 + \frac{1}{2}\cdot(-\frac{1}{x}) + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2} - 1)}{2}\cdot\frac{1}{x^2} + o(\frac{1}{x^2}))]$

$= \lim\limits_{x\to+\infty}(\frac{1}{2} + \frac{9}{8x} + o(\frac{1}{x})) = \frac{1}{2}$。

（2）$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1+\frac{1}{2}x^2-\sqrt{1+x^2}}{(\cos x-e^{x^2})\sin x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1+\frac{1}{2}x^2-(1+x^2)^{\frac{1}{2}}}{(\cos x-e^{x^2})x^2}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{1+\frac{1}{2}x^2-(1+\frac{1}{2}x^2+\dfrac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)}{2})x^4+o(x^4))}{(1-\frac{x^2}{2}+o(x^2)-(1+x^2+o(x^2)))x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{8}x^4+o(x^4)}{-\frac{3x^4}{2}+o(x^4)}=-\frac{1}{12}。$$

★★10. 设 $x>0$，证明：$x-\dfrac{x^2}{2}<\ln(1+x)$ 。

知识点：泰勒公式。

思路：用泰勒公式证明不等式是常用的一种方法。特别是不等式的一边为某个函数，另一边为其幂级数展开的一部分时，可考虑用泰勒公式。

解：$\ln(1+x)=x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3(1+\xi)^3}$（$\xi$ 介于 0 与 x 之间），$\because$ $x>0$，$\therefore \dfrac{x^3}{3(1+\xi)^3}>0$，

从而 $\ln(1+x)=x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3(1+\xi)^3}>x-\dfrac{x^2}{2}$，结论成立。

（也可用§3.4 函数单调性的判定定理证明之）

★★11. 证明函数 $f(x)$ 是 n 次多项式的充要条件是 $f^{(n+1)}(x)\equiv0$ 。

知识点：麦克劳林公式。

思路：将 $f(x)$ 按照麦克劳林公式形式展开，根据已知条件，得结论。

解：必要性。易知，若 $f(x)$ 是 n 次多项式，则有 $f^{(n+1)}(x)\equiv0$ 。

充分性。$\because f^{(n+1)}(x)\equiv0$，$\therefore f(x)$ 的 n 阶麦克劳林公式为：$f(x)=f(0)+f'(0)x+\dfrac{f''(0)x^2}{2!}$

$+\dfrac{f'''(0)x^3}{3!}+\cdots+\dfrac{f^{(n)}(0)x^n}{n!}+\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)x^{n+1}}{(n+1)!}=f(0)+f'(0)x+\dfrac{f''(0)x^2}{2!}$

$+\dfrac{f'''(0)x^3}{3!}+\cdots+\dfrac{f^{(n)}(0)x^n}{n!}$，即 $f(x)$ 是 n 次多项式，结论成立。

★★★12. 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有 n 阶导数，且 $f(a)=f(b)=f'(b)=f''(b)=\cdots=f^{(n-1)}(b)=0$

证明在 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使 $f^{(n)}(\xi)=0(a<\xi<b)$ 。

知识点：泰勒中值定理、拉格朗日中值定理。

思路：证明 $f^{(n)}(\xi)=0(a<\xi<b)$，可连续使用拉格朗日中值定理，验证 $f^{(n-1)}(x)$ 在 $[a,b]$ 上满足罗尔中值定理；或者利用泰勒中值定理，根据 $f(x)$ 在 $x=b$ 处的泰勒展开式及已知条件得结论。

方法一：$\because$ $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导，且 $f(a)=f(b)$，

$\therefore$ 由罗尔中值定理知，在 (a,b) 内至少存在一点 ξ_1，使得 $f'(\xi_1)=0$；

$\because$ $f'(x)$ 在 $[\xi_1,b]\subset[a,b]$ 上可导，且 $f'(b)=0$，

$\therefore$ 由罗尔中值定理知，在 $(\xi_1,b)\subset(a,b)$ 内至少存在一点 ξ_2，使得 $f''(\xi_2)=0$；

依次类推可知，$f^{(n-1)}(x)$ 在 $[\xi_{n-1},b]$ $\subset[a,b]$ 上可导，且 $f^{(n-1)}(\xi_{n-1})=f^{(n-1)}(b)=0$，

$\therefore$ 由罗尔中值定理知，在 $(\xi_{n-1},b)\subset(a,b)$ 内至少存在一点 ξ，使得 $f^{(n)}(\xi)=0$。

方法二：根据已知条件，$f(x)$ 在 $x=b$ 处的泰勒展开式为：

$$f(x)=f(b)+f'(b)(x-b)+\frac{f''(b)}{2!}(x-b)^2+\cdots+\frac{f^{(n-1)}(b)}{(n-1)!}(x-b)^{n-1}+\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x-b)^n$$

$$=\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x-b)^n\ (x<\xi<b),$$

$\therefore f(a)=\dfrac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(a-b)^n=0$，从而得 $f^{(n)}(\xi)=0$，结论成立。

内容概要

名称	主要内容（3.4）
3.4 函数的单调性与曲线的凹凸性	函数单调性的判别法：设 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，则 （1）若在 (a,b) 内 $f'(x)>0$，则 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调增加； （2）若在 (a,b) 内 $f'(x)<0$，则 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调减少。
	1） 曲线凹凸性的概念：设 $f(x)$ 在区间 I 内连续，如果对 I 上任意两点 x_1,x_2，恒有 $f(\frac{x_1+x_2}{2})<\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$，则称 $f(x)$ 在 I 上的图形是凹的；如果恒有

	$f(\frac{x_1+x_2}{2}) > \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$，则称 $f(x)$ 在 I 上的图形是凸的。 2）拐点的概念：连续曲线上凹弧与凸弧的分界点成为曲线的拐点。
	曲线凹凸性的判别法：设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内具有一阶和二阶导数，则 （1）若在 (a,b) 内 $f''(x)>0$，则 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的图形是凹的； （2）若在 (a,b) 内 $f''(x)<0$，则 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的图形是凸的。

习题 3-4

★1. 证明函数 $y=x-\ln(1+x^2)$ 单调增加。

知识点：导数的应用。

思路：利用一阶导数符号判断函数的单调性是常用的方法。在某个区间 I 上，$f'(x)>0$（$f'(x)<0$），则 $f(x)$ 在 I 单调增加（减少）。

证明：$\because y'=1-\frac{2x}{1+x^2}=\frac{(1-x)^2}{1+x^2}\geq 0$（仅在 $x=1$ 处 $y'=0$），

$\therefore y=x-\ln(1+x^2)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内是单调增加的。

★2. 判定函数 $f(x)=x+\sin x(0\leq x\leq 2\pi)$ 的单调性。

解：$\because f'(x)=1+\cos x\geq 0$（仅在 $x=\pi$ 处 $f'(x)=0$），

$\therefore f(x)=x+\sin x(0\leq x\leq 2\pi)$ 是单调增加的。

★★3. 求下列函数的单调区间：

（1） $y=\frac{1}{3}x^3-x^2-3x+1$；（2）$y=2x+\frac{8}{x}(x>0)$；（3）$y=\frac{2}{3}x-\sqrt[3]{x^2}$；

（4）$y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$；（5）$y=(1+\sqrt{x})x$；（6）$y=2x^2-\ln x$。

知识点：导数的应用。

思路：利用一阶导数符号判断函数的单调性。求函数的单调区间，用导数为零的点及不可导点，将定义域划分成若干个区间，然后在每个区间上判断函数的单调性；如果划分定义域的点有两个或以上，可列表讨论，使得思路更清晰一些。

解：（1） $y=\frac{1}{3}x^3-x^2-3x+1$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$；令 $y'=x^2-2x-3=0$，

得 $x_1=-1$，$x_2=3$。列表讨论如下：

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,3)$	3	$(3,+\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗		↘		↗

由上表可知，$y=\frac{1}{3}x^3-x^2-3x+1$ 在 $(-\infty,-1)$、$(3,+\infty)$ 内严格单增，而在 $(-1,3)$ 内严格单减。

（2） 在 $(0,+\infty)$ 内，令 $y'=2-\frac{8}{x^2}=0$，得 $x=2$；

当 $x\in(0,2)$ 时，有 $y'<0$；当 $x\in(2,+\infty)$ 时，有 $y'>0$；

$\therefore y=2x+\frac{8}{x}(x>0)$ 在 $(0,2)$ 内严格单增，在 $(2,+\infty)$ 内严格单减。

（3） $y=\frac{2}{3}x-\sqrt[3]{x^2}$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$；令 $y'=\frac{2}{3}-\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}=\frac{2(\sqrt[3]{x}-1)}{3\sqrt[3]{x}}=0$，

得 $x=1$；$x=0$ 为不可导点。列表讨论如下：

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗		↘		↗

由上表可知，$y=\frac{2}{3}x-\sqrt[3]{x^2}$ 在 $(-\infty,0)$、$(1,+\infty)$ 内严格单增，而在 $(0,1)$ 内严格单减。

（4） $y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，

$$y'=\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}(1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}})=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}>0,$$

$\therefore y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内严格单增。

（5） $y=(1+\sqrt{x})x$ 的定义域为 $[0,+\infty)$，$\because y'=(x+x^{\frac{3}{2}})'=1+\frac{3}{2}\sqrt{x}>0$，

$\therefore y=(1+\sqrt{x})x$ 在 $[0,+\infty)$ 上严格单增。

（6）$y=2x^2-\ln x$的定义域为$(0,+\infty)$，令$y'=4x-\frac{1}{x}=\frac{4x^2-1}{x}=0$，得$x=\frac{1}{2}$；

当$x\in(0,\frac{1}{2})$时，$y'<0$；当$x\in(\frac{1}{2},+\infty)$时，$y'>0$；

$\therefore y=2x^2-\ln x$在$(0,\frac{1}{2})$内严格单增，在$(\frac{1}{2},+\infty)$内严格单减。

★★4. 证明下列不等式：

（1） 当$x>0$时，$1+\frac{1}{2}x>\sqrt{1+x}$；　（2）当$x>4$时，$2^x>x^2$；

（3）当$x\ge 0$时，$(1+x)\ln(1+x)\ge \arctan x$；　（4）$0<x<\frac{\pi}{2}$时，$\tan x>x+\frac{1}{3}x^3$。

知识点：导数的应用或者泰勒公式的应用。

思路：利用泰勒公式可以证明一些不等式（见习题 3-3 第 10 题），利用函数单调性也是证明不等式常用的方法。

解：（1）**方法一**：令$f(x)=1+\frac{1}{2}x-\sqrt{1+x}$，

则当$x>0$时，$f'(x)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2\sqrt{1+x}}=\frac{1}{2}(1-\frac{1}{\sqrt{1+x}})>0$，

$\therefore f(x)=1+\frac{1}{2}x-\sqrt{1+x}$在$[0,+\infty)$上严格单增；从而$f(x)>f(0)=0$，

即$1+\frac{1}{2}x>\sqrt{1+x}$，结论成立。

方法二：由泰勒公式，得

$$f(x)=1+\frac{1}{2}x-\sqrt{1+x}=1+\frac{1}{2}x-(1+\frac{1}{2}x-\frac{x^2}{8(1+\xi)^{\frac{3}{2}}})=\frac{x^2}{8(1+\xi)^{\frac{3}{2}}}\quad(0<\xi<x),$$

$\therefore f(x)=\frac{x^2}{8(1+\xi)^{\frac{3}{2}}}>0$，从而得$1+\frac{1}{2}x>\sqrt{1+x}$，结论成立。

（2）**方法一**：令$f(x)=2^x-x^2$，则当$x>4$时，$f'(x)=2^x\ln 2-2x$，

$$f''(x)=2^x\ln^2 2-2>f''(4)=16\ln^2 2-2=(\ln 4^2)^2-2>(\ln e^2)^2-2>0,$$

$\therefore f'(x)=2^x\ln 2-2x$在$(4,+\infty)$内严格单增，

从而$f'(x)=2^x\ln 2-2x>f'(4)=16\ln 2-4=4(\ln 16-1)>0$，

$\therefore f(x)=2^x-x^2$在$(4,+\infty)$内严格单增，在$(4,+\infty)$内$f(x)=2^x-x^2>f(4)=8>0$，

$\therefore 2^x > x^2$，结论成立。

注：利用 $f''(x)$ 的符号判断 $f'(x)$ 的单调性，利用 $f'(x)$ 的单调性判断其在某区间上的符号，从而得出 $f(x)$ 在某区间上的单调性，也是常用的一种方法。

方法二：令 $f(x) = x\ln 2 - 2\ln x$，

当 $x > 4$ 时，$f'(x) = \ln 2 - \dfrac{2}{x} > \ln 2 - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}\ln 4 - \dfrac{1}{2} > 0$，

$\therefore f(x) = x\ln 2 - 2\ln x$ 在 $(4, +\infty)$ 内严格单增，

$\therefore f(x) = x\ln 2 - 2\ln x > f(4) = 4\ln 2 - 2\ln 4 = 0$，从而有，$x\ln 2 > 2\ln x$，

$\therefore e^{x\ln 2} > e^{2\ln x}$，即 $2^x > x^2$，结论成立。

（3）令 $f(x) = (1+x)\ln(1+x) - \arctan x$，

则当 $x \geq 0$ 时有 $f'(x) = \ln(1+x) + 1 - \dfrac{1}{1+x^2} \geq 0$（仅在 $x = 0$ 时，$f'(x) = 0$），

$\therefore f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上严格单增，从而有 $f(x) \geq f(0) = 0$，

即 $(1+x)\ln(1+x) \geq \arctan x$，结论成立。

（4）令 $g(x) = \tan x - x$，则当 $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ 时，有 $g'(x) = \sec^2 x - 1 = \tan^2 x > 0$

从而 $g(x) = \tan x - x$ 在 $(0, \dfrac{\pi}{2})$ 内严格单增，$\therefore g(x) > g(0) = 0$，即在 $(0, \dfrac{\pi}{2})$ 内 $\tan x > x$；

再令 $f(x) = \tan x - x - \dfrac{1}{3}x^3$，

则当 $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ 时，$f'(x) = \sec^2 x - 1 - x^2 = \tan^2 x - x^2 > 0$，

从而 $f(x) = \tan x - x - \dfrac{1}{3}x^3$ 在 $(0, \dfrac{\pi}{2})$ 内严格单增，$\therefore f(x) > f(0) = 0$，

即在 $(0, \dfrac{\pi}{2})$ 内 $\tan x > x + \dfrac{1}{3}x^3$，结论成立。

★★★5. 试证方程 $\sin x = x$ 只有一个实根。

知识点：导数的应用。

思路：利用导数的符号判断函数的单调性，进而讨论方程的根是常用的方法。

解：易知，$\sin 0 = 0$，即 $x = 0$ 是方程的一个根；

令 $f(x) = x - \sin x$，则 $f'(x) = 1 - \cos x \geq 0$（仅在 $x = 2k\pi (k \in Z)$ 处 $f'(x) = 0$），

$\therefore f(x)=x-\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内严格单增，从而 $f(x)$ 只有一个零点，

即方程 $\sin x=x$ 只有一个实根。

★★6. 单调函数的导函数是否必为单调函数？研究例子：$f(x)=x+\sin x$。

知识点：导数的应用。

思路：利用一阶导数符号判断单调性，从而证明结论。

解：单调函数的导函数不一定为单调函数。

$\because f'(x)=1+\cos x\geq 0$（仅在 $x=(2k+1)\pi(k\in Z)$ 处 $f'(x)=0$），

$\therefore f(x)=x+\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内严格单增；

而 $f'(x)=1+\cos x$ 在 $(2k\pi,(2k+1)\pi)$ 内严格单减，在 $((2k-1)\pi,2k\pi)$ 内严格单增，从而在 $(-\infty,+\infty)$ 上不单调。

★★7. 求下列函数图形的拐点及凹凸区间：

（1）$y=x+\dfrac{1}{x}(x>0)$；（2）$y=x+\dfrac{x}{x^2-1}$；（3）$y=x\arctan x$；

（4）$y=(x+1)^4+e^x$；（5）$y=\ln(x^2+1)$；（6）$y=e^{\arctan x}$。

知识点：导数的应用。

思路：利用二阶导数的符号判断函数的凹凸性；求拐点和凹凸区间，用二阶导数为零的点及不可导点，将定义域划分成若干个区间，然后在每个区间上判断函数的凹凸性；如果划分定义域的点有两个或以上，可列表讨论，使得思路更清晰一些。

解：（1）$y'=1-\dfrac{1}{x^2}$，$y''=\dfrac{2}{x^2}$，$\because$ 当 $x>0$ 时，$y''>0$，

$\therefore y=x+\dfrac{1}{x}$ 在 $[0,+\infty)$ 上为凹函数，没有拐点。

（2）$y=x+\dfrac{x}{x^2-1}$ 的定义域为 $(-\infty,-1)\cup(-1,1)\cup(1,+\infty)$；

$y'=1-\dfrac{1+x^2}{(x^2-1)^2}$，$y''=\dfrac{2x(x^2+3)}{(x^2-1)^3}$，令 $y''=0$，得 $x=0$；

当 $x<-1$ 或 $0<x<1$ 时，$y''<0$；当 $-1<x<0$ 或 $x>1$ 时，$y''>0$；

$\therefore y=x+\dfrac{x}{x^2-1}$ 的凹区间为 $(-1,0)$、$(1,+\infty)$，凸区间为 $(-\infty,-1)$、$(0,1)$；$\therefore$ 拐点为 $(0,0)$。

（3） $y = x\arctan x$ 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$， $y' = \arctan x + \dfrac{x}{1+x^2}$， $y'' = \dfrac{2}{(1+x^2)^2} > 0$，

$\therefore y = x\arctan x$ 在整个定义域上为凹函数，没有拐点。

（4） $y = (x+1)^4 + e^x$ 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$， $y' = 4(x+1)^3 + e^x$，

$y'' = 12(x+1)^2 + e^x > 0$， $\therefore y = (x+1)^4 + e^x$ 在整个定义域上为凹函数，没有拐点。

（5） $y = \ln(x^2+1)$ 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$， $y' = \dfrac{2x}{1+x^2}$， $y'' = \dfrac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$，

令 $y''=0$，得 $x_{1,2} = \pm 1$；列表讨论如下：

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,1)$	1	$(1,+\infty)$
$f''(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\cap$		$\cup$		$\cap$

由上表可知， $y = \ln(x^2+1)$ 的凸区间为 $(-\infty,-1)$、$(1,+\infty)$，凹区间为 $(-1,1)$，拐点为 $(-1,\ln 2)$ 及 $(1,\ln 2)$。

（6） $y = e^{\arctan x}$ 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$， $y' = \dfrac{e^{\arctan x}}{1+x^2}$， $y'' = \dfrac{e^{arcanx}(1-2x)}{(1+x^2)^2}$，

令 $y''=0$，得 $x = \dfrac{1}{2}$；当 $x < \dfrac{1}{2}$ 时， $y''>0$；当 $x > \dfrac{1}{2}$ 时， $y''<0$；

$\therefore y = e^{\arctan x}$ 的凹区间为 $(-\infty, \dfrac{1}{2}]$，凸区间为 $[\dfrac{1}{2}, +\infty)$，拐点为 $(\dfrac{1}{2}, e^{\arctan\frac{1}{2}})$。

★★★8. 利用函数图形的凹凸性，证明不等式：

（1） $\dfrac{e^x+e^y}{2} > e^{\frac{x+y}{2}}\ (x \neq y)$；　　（2） $\cos\dfrac{x+y}{2} > \dfrac{\cos x + \cos y}{2}, \forall x,y \in (-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2})$。

知识点：函数凹凸性的概念。

思路：利用函数凹凸性的概念可证明一些不等式，特别是不等式中含不同变量的线性组合及其函数值的线性组合时可考虑利用函数的凹凸性。

证明：（1）令 $y = e^x$，$\because y'' = e^x > 0$，$\therefore y = e^x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内是凹的。

利用凹函数的定义， $\forall x,y \in (-\infty, +\infty)\ (x \neq y)$，有 $\dfrac{e^x+e^y}{2} > e^{\frac{x+y}{2}}$，结论成立。

（2）令 $y=\cos x$，$\because$ 在 $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ 内，$y''=-\cos x<0$，$\therefore$ $y=\cos x$ 在 $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ 内是凸的。利用凸函数的定义，$\forall x,y\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ $(x\neq y)$，有 $\cos\frac{x+y}{2}>\frac{\cos x+\cos y}{2}$，结论成立。

★★★9. 求曲线 $y=\frac{x-1}{x^2+1}$ 的拐点。

知识点：导数的应用。

思路：同 7。

解：$y=\frac{x-1}{x^2+1}$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，$y'=\frac{1+2x-x^2}{(1+x^2)^2}$，

$$y''=\frac{(2-2x)(1+x^2)^2-(1+2x-x^2)\cdot 4x(1+x^2)}{(1+x^2)^4}=\frac{2(x+1)(x^2-4x+1)}{(1+x^2)^3}$$

令 $y''=0$，得 $x_1=-1$，$x_{2,3}=2\pm\sqrt{3}$；现列表讨论如下：

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,2-\sqrt{3})$	$2-\sqrt{3}$	$(2-\sqrt{3},2+\sqrt{3})$	$2+\sqrt{3}$	$(2+\sqrt{3},+\infty)$
$f''(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\cap$		$\cup$		$\cap$		$\cup$

由上表可知，拐点为 $(-1,-1)$、$(2-\sqrt{3},\frac{1-\sqrt{3}}{8-4\sqrt{3}})$、$(2+\sqrt{3},\frac{1+\sqrt{3}}{8+4\sqrt{3}})$。

★★10. 问 a 及 b 为何值时，点 $(1,3)$ 为曲线 $y=ax^3+bx^2$ 的拐点？

知识点：导数的应用。

思路：拐点通常是二阶导数的零点或者是不可导点。又**高阶可导的函数的拐点一定是二阶导数的零点。**

解：$y=ax^3+bx^2$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，$y'=3ax^2+2bx$，$y''=6ax+2b$；

将 $(1,3)$ 代入 $y=ax^3+bx^2$ 中，得：$3=a+b$①；

将 $(1,3)$ 代入 $y''=6ax+2b$ 中，得：$0=6a+2b$②；

由①②得，$a=-\frac{3}{2}$，$b=\frac{9}{2}$。

★★★11. 试确定曲线 $y=ax^3+bx^2+cx+d$ 中的 a、b、c、d，使得在 $x=-2$ 处曲线有水平切线，

$(1,-10)$ 为拐点，且点 $(-2,44)$ 在曲线上。

知识点：导数的几何意义及导数的应用。

思路：利用可导函数的拐点一定是二阶导数的零点，在某点处的导数值等于该点处切线的斜率，以及已知条件，建立方程组，确定函数中的待定参数。

解：$y'=3ax^2+2bx+c$，$y''=6ax+2b$；将 $(-2,44)$ 代入 $y=ax^3+bx^2+cx+d$，得

$$44=-8a+4b-2c+d \quad ①$$

将 $(1,-10)$ 分别代入 $y=ax^3+bx^2+cx+d$ 与 $y''=6ax+2b$ 中，得

$-10=a+b+c+d$ ②；　　　$0=6a+2b$ ③

将 $x=-2$ 代入 $y'=3ax^2+2bx+c$ 中，得 $0=12a-4b+c$ ④

由①②③④得，$a=1$，$b=-3$，$c=-24$，$d=16$。

★★★12. 试确定 $y=k(x^2-3)^2$ 中 k 的值，使曲线的拐点处的法线通过原点。

知识点：导数的应用。

思路：可导的拐点必为二阶导数为零的点；依此求出拐点坐标，写出法线方程，根据已知条件，求出 k 值。

解：$y=k(x^2-3)^2$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$；$y'=4kx(x^2-3)$，$y''=12k(x^2-1)$；

令 $y''=0$，得 $x_{1,2}=\pm1$。易知，当 x 的取值通过 $x_{1,2}=\pm1$ 的两侧时，$y''=12k(x^2-1)$ 会变号，

$\therefore (1,4k)$ 与 $(-1,4k)$ 均为 $y=k(x^2-3)^2$ 的拐点；$\because$ $y'\big|_{x=1}=-8k$，$y'\big|_{x=-1}=8k$，

$\therefore$两拐点处法线方程分别为：$y-4k=\dfrac{1}{8k}(x-1)$，$y-4k=-\dfrac{1}{8k}(x+1)$；

又两法线过原点，将 $(0,0)$ 代入法线方程，得 $32k^2=1$，解得 $k=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{8}$。

★★★★13. 设函数 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 的某邻域内具有三阶导数，如果 $f''(x_0)=0$，

而 $f'''(x_0)\neq0$，试问 $(x_0,f(x_0))$ 是否为拐点，为什么？

知识点：导数的应用。

思路：根据极限的保号性和拐点的定义得结论。

方法一：$f''(x_0)=0$，$f'''(x_0)\neq0$ 不妨设 $f'''(x_0)>0$，即

$$f'''(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f''(x)-f''(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to 0}\frac{f''(x)}{x-x_0}>0；$$

由极限的保号性知，必存在$\delta>0$，使得$\forall x\in\bigcup(x_0,\delta)$，均有$\dfrac{f''(x)}{x-x_0}>0$；

从而当$x_0-\delta<x<x_0$时，有$f''(x)<0$，当$x_0<x<x_0+\delta$时，有$f''(x)>0$；

$\therefore (x_0,f(x_0))$为拐点。

内容概要

<table>
<tr><td>名称</td><td colspan="2">主要内容（3.5）</td></tr>
<tr><td rowspan="4">3.5
函数的
极值与
最大值
最小值</td><td colspan="2">极值的概念：设函数$f(x)$在点x_0的某个邻域内有定义，若对该邻域内任意一点x（$x\neq x_0$），恒有$f(x)<f(x_0)$（或$f(x)>f(x_0)$），则称$f(x)$在点x_0处取得极大值（或极小值），而x_0成为函数$f(x)$的极大值点（或极小值点）。</td></tr>
<tr><td rowspan="2">函数极值的
判别法</td><td>第一充分条件：设函数$f(x)$在点x_0的某个邻域内连续且可导（$f'(x_0)$可以不存在），
（1）若在x_0的左邻域内，$f'(x)>0$；在在x_0的右邻域内，$f'(x)<0$，则$f(x)$在x_0处取得极大值$f(x_0)$；
（2）若在x_0的左邻域内，$f'(x)<0$；在在x_0的右邻域内，$f'(x)>0$，则$f(x)$在x_0处取得极小值$f(x_0)$；
（3）若在x_0的左邻域内，$f'(x)$不变号，则$f(x)$在x_0处没有极值。
注：第一充分条件利用一阶导数符号判断函数单调性。</td></tr>
<tr><td>第二充分条件：设$f(x)$在x_0处具有二阶导数，且$f'(x_0)=0$，$f''(x_0)\neq 0$，则
（1）当$f''(x_0)<0$时，函数$f(x)$在x_0处取得极大值；
（2）当$f''(x_0)>0$时，函数$f(x)$在x_0处取得极小值。
注：利用驻点处二阶导数符号判断驻点是否为极值点。</td></tr>
<tr><td colspan="2">函数的最大值和最小值：注意函数极值和最值的区别和联系</td></tr>
</table>

习题 3-5

★★1. 求下列函数的极值：

（1） $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2-3x$； （2） $y=x-\ln(1+x)$； （3） $y=\frac{\ln^2 x}{x}$；

（4） $y=x+\sqrt{1-x}$； （5） $y=e^x\cos x$； （6） $f(x)=(x-1)\cdot\sqrt[3]{x^2}$ 。

知识点：极值的充分条件。

思路：求 $y'=0$ 的点或者 y' 不存在的点，然后利用极值的第一或者第二充分条件进行判断。当所有的极值可疑点多于两个时，若利用第一充分条件，可列表讨论；第二充分条件仅用来对驻点是否为极值点进行判断。

解：（1）**方法一**： $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2-3x$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，

令 $f'(x)=x^2-2x-3=0$，得 $x_1=3$， $x_2=-1$；现列表讨论如下：

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,3)$	3	$(3,+\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	极大值点	↘	极小值点	↗

由上表知，$f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2-3x$ 在 $x=-1$ 处取得极大值为 $f(-1)=\frac{5}{3}$，在 $x=3$ 处取得极小值为 $f(3)=-9$。

方法二：令 $f'(x)=x^2-2x-3=0$，得 $x_1=3$， $x_2=-1$；

由 $f''(x)=2x-2$ 得，$f''(-1)=-4<0$， $f''(3)=4>0$，

∴由极值的第二充分条件知， $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2-3x$ 在 $x=-1$ 处取得极大值为 $f(-1)=\frac{5}{3}$，

在 $x=3$ 处取得极小值为 $f(3)=-9$。

（2）**方法一**：$y=x-\ln(1+x)$ 的定义域为 $(-1,+\infty)$，令 $y'=1-\frac{1}{1+x}=\frac{x}{1+x}=0$，得 $x=0$；

当 $-1<x<0$ 时，有 $y'<0$；当 $x>0$ 时，有 $y'>0$，

∴由极值的第一充分条件知， $y=x-\ln(1+x)$ 在 $x=0$ 处取得极小值为 $f(0)=0$。

方法二：$y=x-\ln(1+x)$ 的定义域为 $(-1,+\infty)$，令 $y'=1-\dfrac{1}{1+x}=\dfrac{x}{1+x}=0$，得 $x=0$；

又由 $y''=\dfrac{1}{(1+x)^2}$，得 $y''(0)=1>0$，

$\therefore$ 由极值的第二充分条件知，$y=x-\ln(1+x)$ 在 $x=0$ 处取得极小值为 $f(0)=0$。

（3）**方法一**：$y=\dfrac{\ln^2 x}{x}$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，令 $y'=\dfrac{2\ln x-\ln^2 x}{x^2}=0$，得 $x_1=1$，$x_2=e^2$；

现列表讨论如下：

x	$(0,1)$	1	$(1,e^2)$	e^2	$(e^2,+\infty)$
$f'(x)$	－	0	＋	0	－
$f(x)$	↘	极小值点	↗	极大值点	↘

由上表知，$y=\dfrac{\ln^2 x}{x}$ 在 $x=1$ 处取得极小值为 $y(1)=0$，在 $x=e^2$ 处取得极大值为 $f(e^2)=\dfrac{4}{e^2}$。

方法二：$y=\dfrac{\ln^2 x}{x}$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，令 $y'=\dfrac{2\ln x-\ln^2 x}{x^2}=0$，得 $x_1=1$，$x_2=e^2$；

由 $y''=\dfrac{2-6\ln x+2\ln^2 x}{x^3}$，得 $y''(1)=2>0$，$y''(e^2)=-\dfrac{2}{e^6}<0$；

$\therefore$ 由极值的第二充分条件知，$y=\dfrac{\ln^2 x}{x}$ 在 $x=1$ 处取得极小值为 $y(1)=0$，在 $x=e^2$ 处取得极大值为

$f(e^2)=\dfrac{4}{e^2}$。

（4）$y=x+\sqrt{1-x}$ 的定义域为 $(-\infty,1]$，令 $y'=\dfrac{2\sqrt{1-x}-1}{2\sqrt{1-x}}=0$，得 $x=\dfrac{3}{4}$；

当 $x<\dfrac{3}{4}$ 时，有 $y'>0$；当 $\dfrac{3}{4}<x<1$ 时，有 $y'<0$，

$\therefore$ 由极值的第一充分条件知，$y=x+\sqrt{1-x}$ 在 $x=\dfrac{3}{4}$ 处取得极大值为 $f(\dfrac{3}{4})=\dfrac{5}{4}$。

注：此题中 y'' 的表达式比较繁琐，所以优先考虑第一充分条件。

（5）$y=e^x\cos x$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，

令 $y'=e^x(\cos x-\sin x)=0$，得 $x=k\pi+\dfrac{\pi}{4}$，$(k\in Z)$；由 $y''=-2e^x\sin x$，得

$y''(2k\pi+\frac{\pi}{4})=-\sqrt{2}e^{2k\pi+\frac{\pi}{4}}<0$， $y''((2k+1)\pi+\frac{\pi}{4})=\sqrt{2}e^{(2k\pi+1)+\frac{\pi}{4}}>0$， $k\in Z$；

∴由极值的第二充分条件知，

$y=e^{x}\cos x$ 在 $x=2k\pi+\frac{\pi}{4}$ 处取得极大值为 $y(2k\pi+\frac{\pi}{4})=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{2k\pi+\frac{\pi}{4}}$，

在 $x=(2k+1)\pi+\frac{\pi}{4}$ 处取得极小值为 $y((2k+1)\pi+\frac{\pi}{4})=-\frac{\sqrt{2}}{2}e^{(2k+1)\pi+\frac{\pi}{4}}$， $k\in Z$ 。

注：此题的单调区间有无穷多个，所以优先考虑第二充分条件。

（6） $f(x)=(x-1)\cdot\sqrt[3]{x^2}$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，令 $f'(x)=\frac{5x-2}{3\sqrt[3]{x}}=0$，得 $x_1=\frac{2}{5}$；

$x_2=0$ 为不可导点；现列表讨论如下：

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,\frac{2}{5})$	$\frac{2}{5}$	$(\frac{2}{5},+\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	极大值点	↘	极小值点	↗

由上表知， $f(x)=(x-1)\cdot\sqrt[3]{x^2}$ 在 $x=0$ 处取得极大值为 $f(0)=0$，在 $x=\frac{2}{5}$ 处取得极小值为

$f(\frac{2}{5})=-\frac{3}{5}\sqrt[3]{\frac{4}{25}}$ 。

注：此题中的函数具有不可导点，所以用第一充分条件。

★★★2. 试证：当 $a+b+1>0$ 时， $f(x)=\frac{x^2+ax+b}{x-1}$ 取得极值。

知识点：函数取得极值的条件。

思路：在定义区间内求 $f'(x)=0$ 的点，然后利用极值的充分条件进行判断。

证明： $f(x)=\frac{x^2+ax+b}{x-1}$ 的定义域为 $(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$，令 $f'(x)=\frac{x^2-2x-a-b}{(x-1)^2}=0$，

∵方程 $x^2-2x-a-b=0$ 根的判别式： $\Delta=4+4(a+b)=4(a+b+1)$

∴当 $a+b+1>0$ 时，得驻点为 $x_{1,2}=1\pm\sqrt{1+a+b}$；由 $f''(x)=\frac{2(1+a+b)}{(x-1)^3}$，得

$$f''(1+\sqrt{1+a+b})=\frac{2(1+a+b)}{(\sqrt{1+a+b})^3}=\frac{2}{\sqrt{1+a+b}}>0\ ,$$

$$f''(1-\sqrt{1+a+b})=\frac{2(1+a+b)}{(-\sqrt{1+a+b})^3}=-\frac{2}{\sqrt{1+a+b}}<0\ ,$$

$\therefore f(x)=\dfrac{x^2+ax+b}{x-1}$ 在 $x=1+\sqrt{1+a+b}$ 处取得极小值，在 $x=1-\sqrt{1+a+b}$ 处取得极大值。

★★3. 试问 a 为何值时，函数 $f(x)=a\sin x+\dfrac{1}{3}\sin 3x$ 在 $x=\dfrac{\pi}{3}$ 处取得极值，并求出极值。

知识点：取得极值的条件。

思路：利用极值的必要条件，确定 a 的值，然后利用充分条件，判断是极大值还是极小值。

解：根据题意，得 $f'(x)\Big|_{x=\frac{\pi}{3}}=(a\cos x+\cos 3x)\Big|_{x=\frac{\pi}{3}}=a\cos\dfrac{\pi}{3}+\cos\pi=0$ ，

即 $\dfrac{a}{2}-1=0$ ， $a=2$ ；

由 $f''(x)=-2\sin x-3\sin 3x$ ，得 $f''(\dfrac{\pi}{3})=-\sqrt{3}<0$ ，

$\therefore f(x)$ 在 $x=\dfrac{\pi}{3}$ 处取得极大值 $f(\dfrac{\pi}{3})=\sqrt{3}$ 。