仲英学业辅导中心出品

高　数

2021秋季学期版

期 末 小 助 手

学辅公众号

学粉群7.1

前言

致各位亲爱的学辅资料读者：

万物冬藏待春来，时光即在弹指间。仲英学辅在平静又不平凡中度过了一年时光；脚下行程千里远，腹中贮书万卷多。仲英学辅工作人员们在大家的追梦路上，一如既往的送去了温暖。

本资料由仲英书院学业辅导中心的工作人员编写，对高数学习及考试内容进行了全面及详细的总结，列举典型例题，以帮助同学们夯实、巩固和提高。在此，郑重感谢各位编者同学的努力，可以使本资料顺利完成。由于时间精力限制，难免有疏漏之处，如果在阅读使用过程中发现错误，欢迎同学们反馈，我们会记录，并在下一版中予以修正。（反馈请邮件联系学辅邮箱：xjtuzyxf@163.com）

资料版次及编者信息：
2021 年 9月版
编写人员：自动化 002 曹家熙、越杰 81 唐智亿、力学理 81 叶义晨、
金禾 001 聂博佩、ACCA 92 聂雨馨、自动化 006 贾浚源、
计算机 006 唐培元
排版人员：金融工程 001 孙语新

仲英学业辅导中心

2021 年 10 月 6 日

目录

1 函数、极限、连续

1.1 函数

1.1.1 函数的四大基本性质

函数的四大基本性质包括奇偶性、单调性、有界性、周期性。奇偶性常用于简化积分运算。

1.1.2 函数的有关运算

函数的有关运算包括四则基本运算、复合运算、反函数运算。

1.1.3 几个特殊函数

1)分段函数:对于自变量的不同的取值范围，有着不同的解析式的函数。

2)取整函数:取整函数一般指向下取整函数，其满足:

$$x-1<[x]\le x<[x]+1$$

3)Dirichlet函数:常用于作为反例来否定一些命题。

$$D(x)=\begin{cases}1\ ，x\text{为有理数}\\0\ ，x\text{为无理数}\end{cases}$$

4）初等函数和双曲函数:

1. 基本初等函数有6类，分别是幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数和常数函数。由这6类基本初等函数经过有限次的有理运算与复合运算所产生并能用一个解析式表达的函数被称为初等函数。

2. 由于初等函数在定义域的区间上是连续的，一般的，求初等函数在x_0的极限值，只要x_0属于该函数的定义域，就可用直接代入法求得。

3. 双曲函数由指数函数e^x与e^{-x}构成（定义域为全域），主要包括：双曲正弦$shx=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$奇函数）双曲余弦$chx=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$（偶函数）双曲正切$thx=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$其与三角函数有着许多类似性质，如：$thx=\frac{shx}{chx}$, $ch^2x-sh^2x=1$, $ch2x=2shxchx$。

1.1.4 典型例题

例[1.1]

已知$f(x)$满足等式$2f(x)+x^2f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{x^2+2x}{x+1}$，求$f(x)$的表达式。

思路：将x用$\frac{1}{x}$替换，然后消去$f\left(\frac{1}{x}\right)$

解：用$\frac{1}{x}$替换x，$2f\left(\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{x^2}f(x)=\frac{2x+1}{x^2+x}$ ，消去$f\left(\frac{1}{x}\right)$得$f(x)=\frac{x}{1+x}$

例[1.2]

设$f(0)=0$且$x\neq0$时，$af(x)+bf\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{c}{x}$，其中$a,b,c$为常数，且$|a|=|b|$，证明$f(x)$为奇函数。

思路：要证明$f(x)$为奇函数只需要证明在定义域中$f(-x)=-f(x)$，且若0在定义域内，则有$f(0)=0$。

解：与例1思路一样，求得$f(x)=\frac{c}{b^2-a^2}\left(bx-\frac{c}{x}\right)$，观察得$f(-x)=-f(x)$

因为$f(0)=0$，故$f(x)$为奇函数。

1.2 极限

1.2.1 数列的极限

数列的极限主要涉及内容包括求极限、根据极限等式确定参数、极限存在与否的判断及求值。

1.2.2 函数的极限

函数的极限主要涉及的问题就是求极限

1.2.3 极限常用方法

1)根据数列极限的$\varepsilon - N$定义，具体做法如下：
a放大法：有时$|a_n - A| < \varepsilon$很难解出n，此时可将$|a_n - A|$放大，使之成为n的一个新函数（记为H_n），即$|an - A| < H_n$，进而由$H_n < \varepsilon$可解出$n > N(\varepsilon)$.
b分步法：有时$|an - A|$特别复杂，只有在n大于某个数N_1可以放大成H_n，此时解出$n > N(\varepsilon)$，取$N = maxN_1, N(\varepsilon)$, 当$n > N$时，有$|an - A| < \varepsilon$.
2）夹逼准则及单调有界原理（重点）
3）定积分定义
4）导数的定义
5）等价无穷小
6）洛必达法则
7）微分中值定理及泰勒公式（难点）
8）已知结论（两个重要极限等）
除此之外，要掌握初等变形法对极限式进行化简得方法，这里不再赘述.

1.2.4 典型例题

例[1.3]
求证$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.
解：设$\sqrt[n]{n} = 1 + x_n$
则有$n = (1 + x_n)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k {x_n}^k \geq C_n^2 {x_n}^2 = \frac{n(n-1)}{2}{x_n}^2$
因此$0 < x_n < \sqrt{\frac{2}{n-1}}$
$\therefore 1 < \sqrt[n]{n} < 1 + \sqrt{\frac{2}{n-1}}$
又$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{\frac{2}{n-1}} = 0$
由夹逼准则知$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$
例[1.4]
设序列$x_1 = 1, x_n = 1 + \frac{1}{1+x_{n-1}}, (n = 2,3, \ldots)$.证明$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$存在，并求其极限.
解：如果$x_n \in [1,2]$, 则$x_{n+1} = 1 + \frac{1}{1+x_n} \in \left[\frac{4}{3}, \frac{3}{2}\right] \subseteq [1,2]$
并且当$n = 1$时成立
$x_n - x_{n-1} = \frac{1}{1+x_{n-1}} - \frac{1}{1+x_{n-2}} = \frac{x_{n-2}-x_{n-1}}{(1+x_{n-1})(1+x_{n-2})} = \frac{x_{n-2}-x_{n-3}}{(1+x_{n-1})(1+x_{n-2})^2(1+x_{n-3})}$
又$x_1 = 1, x_2 = \frac{3}{2}, x_3 = \frac{7}{5}, x_4 = \frac{17}{12} x_3 - x_1 > 0, x_4 - x_2 < 0$
$\therefore x_{2\mathrm{n}} - x_{2\mathrm{n}-2} < 0, x_{2\mathrm{n}+1} - x_{2\mathrm{n}-1} > 0$
即序列奇数项递增，偶数项递减，且序列有界
由单调有界原则，序列奇数项、偶数项皆收敛
设$x_{2\mathrm{n}}$收敛于a, $x_{2\mathrm{n}+1}$收敛于b
当n为奇数$b = 1 + \frac{1}{1+\mathrm{a}}$
当n为偶数a=$1 + \frac{1}{1+\mathrm{b}}$
解得$a = b = \sqrt{2}(a, b \in [1,2])$
例[1.5]
求极限$\lim\limits_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} (n - k + 1)\left(nC_n^k\right)^{-1}$.
解：由二项式公式$C_n^k = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}$

$$\therefore (n+1-k)\left(nC_n^k\right)^{-1} = n^{-2}\frac{k!}{(n-1)(n-2)\ldots(n-k-2)} \le 2n^{-2}(k<n)$$

$\therefore 0 < \sum_{k=1}^{n}(n-k+1)\left(nC_n^k\right)^{-1} \le \frac{1}{n} + \sum_{k=1}^{n-1}2n^{-2} < \frac{3}{n} \to 0(n\to\infty)$

由夹逼准则$\lim\limits_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(n-k+1)\left(nC_n^k\right)^{-1} = 0$

例[1.6]

求证$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} = 0.$

证明：首先$0 \le \frac{2k-1}{2k} < \sqrt{\frac{(2k-1)^2}{(2k)^2-1}} = \sqrt{\frac{2k-1}{2k+1}}(k\in N_+)$

$\therefore 0 < \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} < \sqrt{\frac{1}{3}.\frac{3}{5}\ldots\frac{2n-1}{2n+1}} = \sqrt{\frac{1}{2n+1}}$

又$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{\frac{1}{2n+1}} = 0$

由夹逼准则知$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} = 0$

例[1.7]

求$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{sin\frac{\pi}{n}}{n+1} + \frac{sin\frac{2\pi}{n}}{n+\frac{1}{2}} + \ldots + \frac{sin\pi}{n+\frac{1}{n}}\right).$

解：首先$\frac{sin\frac{k\pi}{n}}{n+1} < \frac{sin\frac{k\pi}{n}}{n+\frac{1}{k}} < \frac{sin\frac{k\pi}{n}}{n}(k\in N_+, 0<k<n+1)$

$\therefore \frac{n}{n+1}\sum_{k=1}^{n}\frac{sin\frac{k\pi}{n}}{n} < \sum_{k=1}^{n}\frac{sin\frac{k\pi}{n}}{n+\frac{1}{k}} < \sum_{k=1}^{n}\frac{sin\frac{k\pi}{n}}{n}$

由定积分定义

$\sum_{k=1}^{n}\frac{sin\frac{k\pi}{n}}{n} = \int_0^1 sin\pi x dx = \frac{1}{\pi}cos\pi x|_1^0 = \frac{2}{\pi}$

又$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+1} = 1$

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}\sum_{k=1}^{n}\frac{sin\frac{k\pi}{n}}{n} = \frac{2}{\pi}, \lim\limits_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{sin\frac{k\pi}{n}}{n} = \frac{2}{\pi}$

由夹逼准则知

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{sin\frac{\pi}{n}}{n+1} + \frac{sin\frac{2\pi}{n}}{n+\frac{1}{2}} + \ldots + \frac{sin\pi}{n+\frac{1}{n}}\right) = \frac{2}{\pi}$

例[1.8]

求$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n} - sin\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{3}}\sqrt[n]{n!}.$

解：$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x-sinx}{x^3} = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{1-cosx}{3x^2} = \frac{1}{6}$

$\therefore x - sinx \sim \frac{1}{6}x^3, \sqrt[3]{x-sinx} \sim \frac{1}{\sqrt[3]{6}}x$

$\therefore \left(\frac{1}{n} - sin\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{3}} \sim \frac{1}{\sqrt[3]{6}n}$

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n} - sin\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{3}}\sqrt[n]{n!} = \frac{1}{\sqrt[3]{6}}e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}ln\frac{k}{n}} = \frac{1}{\sqrt[3]{6}}e^{\int_0^1 lnxdx} = \frac{1}{\sqrt[3]{6}e}$

例题[1.9]

$$\lim_{x\to 0}(2^x + sinx)^{\frac{1}{x}}$$

解：提供以下几种求解方法：

i．$\lim\limits_{x\to 0}(2^x + sinx)^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to 0}exp\frac{ln(2^x+sinx)}{x} = \lim\limits_{x\to 0}exp\frac{2^x+sinx-1}{x} = \lim\limits_{x\to 0}exp\left(\frac{sinx}{x} + \frac{e^{xln2}-1}{x}\right) = exp(1+ln2) = 2e$

ii．$\lim\limits_{x\to 0}(2^x + sinx)^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to 0}\left(e^{xln2} + sinx\right)^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to 0}(xln2 + 1 + o(x) + x)^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to 0}(x(ln2+1)+1)^{\frac{1+ln2}{x(1+ln2)}} = exp(1+ln2) = 2e$

iii．$\lim\limits_{x\to 0}(2^x + sinx)^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to 0}exp\frac{ln(2^x+sinx)}{x} = \lim\limits_{x\to 0}exp\frac{2^x+sinx-1}{x} = \lim\limits_{x\to 0}exp\frac{2^xlnx+cosx}{1} = exp(1+ln2) = 2e$

例题[1.10]

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{tanx}-e^{sinx}}{x-sinx}$（可利用三角函数相关的等价无穷小）

$\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{tanx}-e^{sinx}}{x-sinx}=\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{sinx}(e^{tanx-sinx}-1)}{x-sinx}=\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{sinx}(tanx-sinx)}{x-sinx}=\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{sinx}\frac{1}{2}x^3}{\frac{1}{6}x^3}=\lim\limits_{x\to0}3e^{sinx}=3$

其他解法提示：先消掉指数项，再利用secx、cosx、sinx和tanx之间的关系变换也可以导出最终结果。

例题[1.11]

$\lim\limits_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{n^3+k^2}$（可利用夹逼原理）

解：$\lim\limits_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{n^3+n^2}<\lim\limits_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{n^3+k^2}<\lim\limits_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{n^3}$

$\lim\limits_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{n^3+k^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1^2+2^2+3^2+\ldots+(n-1)^2+n^2}{n^3+n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)}{n^3+n^2}=\frac{1}{3}$

$\lim\limits_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{n^3}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1^2+2^2+3^2+\ldots+(n-1)^2+n^2}{n^3}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)}{n^3}=\frac{1}{3}$

由夹逼原理，原式$=\frac{1}{3}$

例题[1.12]

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{sin\frac{\pi}{n}}{n+1}+\frac{sin\frac{2\pi}{n}}{n+\frac{1}{2}}+\ldots+\frac{sin\pi}{n+\frac{1}{n}}\right)$$

解:由$\frac{sin\frac{k\pi}{n}}{n+1}<\frac{sin\frac{k\pi}{n}}{n+\frac{1}{k}}<\frac{sin\frac{k\pi}{n}}{n}$

$$\frac{n}{n+1}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}sin\frac{k\pi}{n}<\sum_{k=1}^{n}\frac{sin\frac{k\pi}{n}}{n+\frac{1}{k}}<\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}sin\frac{k\pi}{n}$$

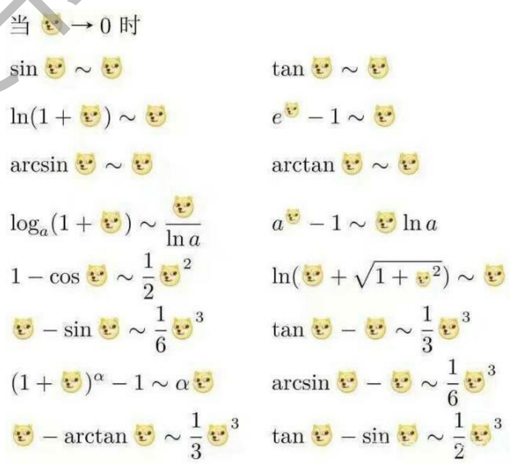
由定积分定义，有$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}sin\frac{k\pi}{n}=\int_0^1 sin\pi xdx=\frac{1}{\pi}(con\pi x)|_1^0=\frac{2}{\pi}$

即$\frac{2}{\pi}\frac{n}{n+1}<\sum_{k=1}^{n}\frac{sin\frac{k\pi}{n}}{n+\frac{1}{k}}<\frac{2}{\pi}$

又$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1$

由夹逼原理，原式$=\frac{2}{\pi}$

做题提示：注意根据题目所示的极限条件和形式先判断求解方法，除了几乎万能的泰勒展开，题目往往会对方法进行一些提示，如上例中的分母有$x-\sin x\frac{1}{6}x^3$（x趋于0），就应该联想到等价无穷小x−相应对分子做出变换也利用无穷小规则。常用的等价无穷小公式如著名的狗头图所示，记忆常用的无穷小有利于快速辨别题目是否有简单快捷的解法。



1.3 连续

1.3.1 相关概念

1)连续和间断的概念间断点的分类★★★

2)初等函数的连续性★★★

3)闭区间上连续函数的性质★★★

相关性质往往和之后学的微分中值定理一起用于一些证明题，需要技巧，较有难度，一般作为压轴题.

1.3.2 典型例题

[例1.13]

求函数$f(x)=\frac{x-x^3}{\sin(\pi x)}$的间断点，并判断其类型.

分析：考虑间断点及其类型时，先考虑定义域，找出无定义的点，再看两端极限，最后看极限值与定★★义值是否相等.

解：设n=0,±1,±2,...由定义可知f(x)在每个区间(n,n+1)内连续.又

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{x-x^3}{\sin(\pi x)}=\lim_{x\to 0}\frac{x(1-x^2)}{\pi x}=\frac{1}{\pi}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x-x^3}{\sin(\pi x)}$$

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{x-x^3}{\sin(\pi x)}=\lim_{x\to 1}\frac{1-3x^2}{\pi\cos(\pi x)}=\frac{2}{\pi}=\lim_{x\to 1^+}\frac{x-x^3}{\sin(\pi x)}$$

$$\lim_{x\to n}\frac{x-x^3}{\sin(\pi x)}=\infty(n=\pm 2,\pm 3,\cdots\cdots)$$

故x1=−1，x2=0，x3=1为f(x)的可去间断点，xn=n(n=±2,±3……)为f(x)的无穷间断点.

注：判断间断点类型题目较为基础，几乎必考，但不注意也容易丢分.

[例1.14]

设$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x^{2n-1}+ax^2+bx}{x^{2n}+1}$为连续函数，试确定a和b的值.

分析：首先应根据所给极限表达式求出函数的表达式，再根据特殊点左右极限进行求解解：原函数可化简为：

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x},\ x<-1\\ \frac{a-b-1}{2},\ x=-1\\ ax^2+bx,-1<x<1\\ \frac{a+b+1}{2},\ x=1\\ \frac{1}{x},\ x>1\end{cases}$$

利用−1，1的左右极限得到(a−b−1)/2=−1，(a+b+1)/2=1，解得a=0,b=1.

注：与函数连续性有关的求参数的题型也较为重要，本质上还是考察极限运算，以及极限存在的定义.

[例1.15]

设f(x)为连续函数，且0≤f(x)≤1，证明在[0,1]上方程$2x-\int_0^x f(t)dt=1$有唯一实根.

分析：首先利用零点存在定理证明根的存在性，然后利用单调性证明根的唯一性.证明：首先证明根的存在性：设函数 $2x-\int_0^x f(t)dt=1$

由于$F(0)=-1<0,F(1)=2-\int_0^1 f(t)dt>1-\int_0^1 dt=0$

若f(x)=1,则F(x)=0零点为1;若f(x)<1,则F(1)>0,由零点存在定理,存在c∈(0,1),使得F(c)=0.由此可知在区间[0,1]上存在根.

之后证明根的唯一性：

由于F′(x)=2−f(x)≥1>0，故F(x)在[0,1]单调递增.综上，F(x)在[0,1]上有唯一实根，原命题得证.

[例1.16]

设f(x)，g(x)在[a,b]上连续，且g(x)>0.试证明存在一点ξ∈[a,b]，使得：

$$\int_a^b f(x)g(x)dx=f(\xi)\int_a^b g(x)dx$$

分析：利用闭区间连续函数的介值定理.

证明:由于f(x)在[a,b]上连续，故∃m,M使得m≤f(x)≤M而在[a,b]上，g(x)>0.有

mg(x)≤f(x)g(x)≤Mg(x)，两边同时积分有

$$m\int_a^b g(x)dx \le \int_a^b f(x)\,g(x)dx \le M\int_a^b g(x)dx$$

因此有：

$$m\frac{\int_a^b f(x)\,g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx} \le M$$

由闭区间上连续函数的介值定理可知，存在一点 ξ ∈[a,b]，使得原等式成立，得证.

[例1.17]

设f(x)在[0,n]（n为自然数，n>1）上连续，f(0)=f(n)，证明存在 ε，ε+1∈[0,n]，使得f(ε)=f(ε+1).

证明：设$g(x)=f(x+1)-f(x)$,即证明$g(x)$在[0,n-1]上存在零点

$g(0)=f(1)-f(0)$，$g(1)=f(2)-f(1)\cdots\cdots g(n-1)=f(n)-f(n-1)$

将以上n个等式相加，得到 $nm \le \sum_{i=0}^{n-1} g(i) \le nM$ ，$m \le \frac{\sum_{i=0}^{n-1} g(i)}{n} \le M$

由于函数连续，则存在$\varepsilon \in (0,n-1)$,使得$g(\varepsilon)=\frac{\sum_{i=0}^{n-1} g(i)}{n}=0$,即$f(\varepsilon)=f(\varepsilon)+1$

注：与闭区间上连续函数性质有关的证明题往往技巧性较高，容易和后面学到的罗尔定理，微分中值定理结合来考察，需要假设函数在闭区间上的极值，有时还需要用到极值点一阶导为0的性质，在考试中也属于拉开差距的题目.

2 一元函数微分学及其应用

2.1 导数的概念

2.1.1 导数定义应用

第一小节的主要考试重点为通过导数的的极限定义式证明一些特殊的函数在特定点的函数是否连续，导数是否存在，应熟练掌握导数可导的定义概念及表达式.

题型一：★★★函数f(x)在X0处可导=f(x)在X0处左，右导数存在且相等

[例2.1]

设f(x)在点x = a的某邻域内有定义，则f(x)点x = a处可导的一个充分条件是

$(A)\ \lim\limits_{h\to+\infty} h[f(a+\frac{1}{h})-f(a)]$ 存在

$(B)\ \lim\limits_{h\to0} \frac{[f(a+2h)-f(a+h)]}{h}$ 存在

$(C)\ \lim\limits_{h\to0} \frac{[f(a+h)-f(a-h)]}{2h}$ 存在

$(D)\ \lim\limits_{h\to0} \frac{[f(a)-f(a-h)]}{h}$ 存在

答案:(D)，A项只能说明有导数存在，不能说明f(x)点x = a可导，因为$f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x0)}{\Delta x}$要求Δx任意，使得x可以连续靠近x=$x_0$；而$\frac{1}{h}$是有理数，变化不连续，x只能从有理点靠近x=$x_0$。B、C分子两点函数的差与f(x)在xo处的值无关，可能出现极限存在而f(x)在xo处不连续，必不可导的情况。

如：$f(x)=\begin{cases}0,x\neq0\\1,x=0\end{cases}$

在x = 0处不连续，必不可导，但极限存在.

题型二：★★★★★分段函数在分界点的求导问题

[例2.2]

$f(x)=\begin{cases}x^2, & x\ge1\\2x, & x<1\end{cases}$，求$f'(x)$

此题型通常用定义法对分界点处函数求解

[错解] $x>1, f'(x)=2x$；$x<1, f'(x)=2$

又因为$f_+'(1)=f_-'(1)=2$

故$f'(1)=2$

$$f'(x)=\begin{cases}2x,\ x\geq 1\\ 2, x<1\end{cases}$$

[分析]

注意分界点处是否可导：由题干，只能得出x>1时$f'(x)=2x$，x<1时$f'(x)=2$，不能由此求出$x=1$的导数值（需要用定义法求解）

分段函数要特别注意函数在分界点处的可导性，常与连续性一起考察。由$f(x)$在x=1处不连续可直接得出$f(x)$在x=1处不可导（可导必定连续和不连续必定不可导互为逆否命题）

[正解] $f_+'(1)=\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}(x+1)=2$

$f_-'(1)=\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{2x-1}{x-1}=\infty$，不存在，故$f(x)$在x=1不可导

$$f'(x)=\begin{cases}2x,\ x>1\\ 2, x<1\end{cases}$$

另一种常见题型为已知f（x）在分界点处可导，求相关参数

[例2.3]

$f(x)=\begin{cases}x^2,\ x\leq 1\\ ax+b, x>1\end{cases}$在x=1处可导，求a和b

由$f(x)$在x=1可导：

由连续性：$\lim\limits_{x\to 1^+}(ax+b)=\lim\limits_{x\to 1^-}x^2=1$

由$f_+'(1)=f_-'(1)$: $\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\left(\frac{ax+b-1}{x-1}\right)=2$

解得，a=2，b=-1

题型三：★★★★★连续与可导的概念

考察导数的定义时，经常将连续和可导的概念结合在一起考察，常见题型为辨析型选择题或含参数分类讨论的解答题

［例2.4］

设f(x)在x=0处连续，下列命题**错误**的是：

若$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}$存在，则f(0)=0

若$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)+f(-x)}{x}$存在，则f(0)=0

若$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}$存在，则f(0)存在

若$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)+f(-x)}{x}$存在，则f'(0)存在

答案：（D）

提示:若$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}$存在，则可得$\lim\limits_{x\to 0}f(x)$=0。由题干f(x)在x=0连续，可得：

$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=f(0)$，$\lim\limits_{x\to 0}f(-x)=f(0)$

从而证明A、B、C选项正确

D选项，对于$f(x)=\begin{cases}8x,\ x\geq 0\\ 0,\ x<0\end{cases}$，极限$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)+f(-x)}{x}$存在，但f(x)在x=0不可导，因此f'(0)不存在

［例2.5］

$f(x)=\begin{cases}|x|^\alpha\sin\frac{1}{x},\ x\neq 0\\ 0,\ x=0\end{cases}$，当$f(x)$满足什么条件时：

$f(x)$在x=0连续

$f(x)$在x=0可导

$f'(x)$在x=0连续

解：(1)若$f(x)$在x=0连续，则x0时，$f(x)=|x|^\alpha\sin\frac{1}{x}0$

因为$\sin\frac{1}{x}$有界，则x0时，$|x|^\alpha\to 0$

故$\alpha > 0$

(2) 若$f(x)$在x=0可导，则:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{|x|^{\alpha}\sin\frac{1}{x}}{x-0}=\begin{cases}\lim\limits_{x\to 0}x^{\alpha-1}\sin\frac{1}{x}, & x>0\\ \lim\limits_{x\to 0}(-x)^{\alpha-1}\sin\frac{1}{x}, & x<0\end{cases}\text{存在}$$

故$\alpha > 1$

(3)由于$f'(x)$存在，故$\alpha > 1$

$$f'(x)=\begin{cases}\alpha x^{\alpha-1}\sin\frac{1}{x}-x^{\alpha-2}\cos\frac{1}{x}, & x>0\\ -\alpha x^{\alpha-1}\sin\frac{1}{x}+x^{\alpha-2}\cos\frac{1}{x}, & x<0\\ \lim\limits_{x\to 0}\frac{|x|^{\alpha}\sin\frac{1}{x}}{x-0}=0, & x=0\end{cases}$$

若$f'(x)$在$x=0$处连续，则$f'_-(0)$与$f'_+(0)$存在且相等，$f'_-(0)=f'_+(0)=f'(0)=0$

故$\lim\limits_{x\to 0}x^{\alpha-2}\cos\frac{1}{x}$存在，所以$\alpha-2>0$，$\alpha>2$

题型四：★★★★已知某一点可导，用定义证明性质

［例2.6］

如果$f(x)$为偶函数，且$f'(0)$存在，请证明:$f'(0) = 0$

证明：

$$f'(x)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{f(-x)-f(0)}{-x-0}$$

由偶函数 $f(x)=f(-x)$得：$f'(0)=-f'(0)$,故$f'(0)=0$

[例2.7]

（课本P96）设函数f:(0,+∞)R在x=1处可导，且

$f(xy)=yf(x)+xf(y)$，$x,y\in$（0,+∞）

证明：函数f在（0,+∞）内处处可导，并且$f'(x)=\frac{f(x)}{x}+f'(1)$

证：$f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f[x(1+\frac{\Delta x}{x})]-f(x)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{(1+\frac{\Delta x}{x})f(x)+xf(1+\frac{\Delta x}{x})-f(x)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}[\frac{f(x)}{x}+\frac{f(1+\frac{\Delta x}{x})}{\frac{\Delta x}{x}}]$

取x=y=1，易得$f(1)=0$

可得$f'(x)=\frac{f(x)}{x}+f'(1)$

题型五：★★★★★求分式的极限

[例2.8]

求$\lim\limits_{h\to 0}\frac{|f(x+ah)-f(x-bh)|}{h}$

解：$\lim\limits_{h\to 0}\frac{|f(x+ah)-f(x-bh)|}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{[f(x+ah)-f(x)]-[f(x-bh)-f(x)]}{h}$

$=a\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x+ah)-f(x)}{h}+b\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x-bh)-f(x)}{h}$

$=(a+b)f'(x)$

拆项法，第三行第二项分母-bh应特别注意.

2.1.2 判定可导性

题型一：★★已知$f(x)$在x_0处可导，讨论$|f(x)|$在x_0处可导性

$f(x_0)>0$，在点x_0的ε邻域内有$f(x)>0$（保号性）

$f(x_0)<0$，同理可得导数为$-f'(x_0)$

$f(x_0)=0$，

$$\lim_{x\to x_0^+}\frac{|f(x)|-|f(x0)|}{x-x0}=\lim_{x\to x_0^+}\left|\frac{f(x)}{x-x0}\right|=|f'(x_0)|$$

$$\lim_{x\to x_0^-}\frac{|f(x)|-|f(x0)|}{x-x0}=-\lim_{x\to x_0^+}\left|\frac{f(x)}{x-x0}\right|=-|f'(x_0)|$$

当$f'(x)\neq 0$,左右导数异号，不可导；当$f'(x)=0$，可导.

题型二：★★★★★ $f(x)=(x-a)^k|x-a|$类型函数在$x=a$处可导性讨论.

结论：
$k = 0$，$f(x)$在$x = a$处不可导
$k = m(m\in N^*)$，$f(x)$在$x = a$处m阶可导，$m + 1$阶不可导.
［例2.9］
求函数$f(x) = (x^2 - x - 2)|x^3 - x|$不可导点的个数.
解:因式分解得 $f(x) = (x - 2)(x + 1)|x(x + 1)(x - 1)|$
利用上述结论：
$x = 0$，$x = 1$时$k = 0$不可导，$x = -1$时$k = 1$，一阶可导。其余零点均为可导零点。

2.1.3 ★★★★★可导必定连续

常利用其逆否命题判定不可导，即不连续的函数在不连续点必定不可导，上述题目中已经涉及本知识点.

2.1.4 求导的基本法则

本节前半部分与高中部分类似，需新掌握
1. 正余割函数，双曲函数，反三角函数，反双曲函数的导数(一定要熟练背诵，很常用)

$(\sec x)' = \tan x\cdot\sec x$　　$(\csc x)' = -\cot x\cdot\csc x$.　　$(\mathrm{sh}x)' = \mathrm{ch}x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

$(\mathrm{ch}x)' = \mathrm{sh}x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$　　$(\mathrm{th}x)' = (\frac{shx}{thx})' = \frac{1}{ch^2x}$　　$\arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$　　$\arccos x = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$　　$\arctan x = \frac{1}{1+x^2}$　　$\mathrm{arccot}x = \frac{-1}{1+x^2}$

$\mathrm{arsh}x = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$　　$\mathrm{arch}x = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$　　$\mathrm{artan}x = \frac{1}{1-x^2}$

2. 幂指函数及对数求导法

幂指函数求导的常用方法：

1) 写成指数形式：将$f(x) = u(x)^{v(x)}$写作$f(x) = e^{v(x)\ln u(x)}$

2) 对数求导法:$\ln f(x) = v(x)\ln u(x)$

3. 高阶函数求导(常用公式+Leibniz 公式)

高阶导常用公式:

$(sinx)^{(n)} = \sin(x + \frac{n\pi}{2})$　　$(cosx)^{(n)} = \cos(x + \frac{n\pi}{2})$　　$(\frac{1}{ax+b})^{(n)} = \frac{(-1)^n a^n}{(ax+b)^{n+1}}(a\neq 0)$

Leibniz 公式：$(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(k)} v^{(n-k)}$，其中 u 和 v　n 阶可导

2.1.5 ★★★★★复合函数链式求导

熟练度是最关键的，采取逐层“扒皮”方法.
例［2.10］
$y = \cos^2(\frac{1-\ln x}{x})$
设$u = \cos(\frac{1-\ln x}{x})$，$v = \frac{1-\ln x}{x}$，则$y = u^2$.
可求得： $v' = -\frac{2-ln x}{x^2}$，$u' = -v' \sin v$
因此： $y' = 2u\cdot u' = 2\frac{2-ln x}{x^2}\cos\frac{1-ln x}{x}\sin\frac{1-ln x}{x}$

2.1.6 ★★反函数求导

公式如下：$\begin{cases} x = \psi(y) \\ y = f(x) \end{cases}$　$f'(x) = \frac{1}{\psi'(y)}$

或$y_x'=\frac{1}{x_y'}$

[例 2.11]

证明$(\arctan x)'=\frac{1}{1+x^2}$

证明： 令 $y=\arctan x$, $x=\tan y$

$x_y'=\sec^2 y$，$y_x'=\frac{1}{x_y'}=\frac{1}{\sec^2 y}=\frac{1}{1+\tan^2 y}=\frac{1}{1+x^2}$

2.1.7 ★★★对数求导法

常用于多项乘积或多次方情况

例 [2.12]

求$y=\sqrt{x\ln x\sqrt{1-\sin x}}$中 y对x一阶导数

解：等式两边取对数$\ln y=\frac{1}{2}[\ln x+\ln(\ln x)+\frac{1}{2}\ln(1-\sin x)]$，再两边同时对x求导即可，计算量比链式求导减少了不少.

[总结]对数求导法常见题型：

1.多项乘积（三项及以上）：采用对数求导法化积为和

eg. $|f(x)|=2^x|sinx|\sqrt{1+x^2}$

对数求导：$(\ln|f(x)|)'=[x\ln 2+\ln|\sin x|+\frac{1}{2}\ln(1+x^2)]'$

2.幂指函数求导：见前

3.根式：见例2.11

2.1.8 ★★ Leibniz 公式高次求导

与多项式展开形式很像

多数应用于乘积$(uv)^{(n)}=u^{(n)}v^{(0)}+C_n^1u^{(n-1)}v'+C_n^2u^{(n-2)}v''+\cdots+u^{(0)}v^{(n)}$中有$x^m$，m 为正整数的情况.

[例2.13]

求$y=x\ln x$的n阶导数.

解：由于x的二阶及以上导数为0，利用公式可得$=x\ln x^{(n)}+C_n^1\ln x^{(n-1)}$，再代入$\ln x$的高阶求导结果即可.

2.1.9 ★★★★★隐函数求导

法一：方程两边同时对x求导

[例 2.14]

$y=\tan(x+y)$，求$\frac{d^2y}{dx^2}$.

解：两边对x求导：

$y'=\frac{1}{\cos^2(x+y)}(1+y')$

$y'=\frac{\sec^2(x+y)}{1-\sec^2(x+y)}$，$\sec^2(x+y)=1+\tan^2(x+y)$

$$y'=\frac{1+\tan^2(x+y)}{-\tan^2(x+y)}=\frac{1+y^2}{-y^2}=-\frac{1}{y^2}-1$$

$y''=-\frac{2}{y^3}(\frac{1}{y^2}+1)$

法二：对数求导法

[例 2.15]

求由xy=yx确定的隐函数y的导数$\frac{dy}{dx}$

解：取对数可得：$y\ln x=x\ln y$

$y'\ln x+\frac{y}{x}=\ln y+\frac{1}{y}y'x$

$$y' = \frac{\ln y - \frac{y}{x}}{\ln x - \frac{x}{y}}$$

2.1.10 ★★★★参数方程求导公式如下：

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}}{\dot{x}^3}$$

［例2. 16］

（双组函数求导）$r^2 = a^2 cos2\theta$，求在$\rho\left(\frac{a}{\sqrt{2}},\frac{\pi}{6}\right)$的切线方程

解：将方程写作$(x^2 + y^2)^4 = r^4 = a^2r^2(cos^2\theta - sin^2\theta) = a^2(x^2 - y^2)$

通过隐函数求导可得：$y' = \frac{x^2(a^2 - 2x^2 - 2y^2)}{y(a^2 + 2x^2 + 2y^2)}$

在$\rho\left(\frac{a}{\sqrt{2}},\frac{\pi}{6}\right)$处：$x = r\cos\theta = \frac{\sqrt{6}}{4}a$，$y = r\sin\theta = \frac{\sqrt{2}}{4}a$

代入可得，在$\rho\left(\frac{a}{\sqrt{2}},\frac{\pi}{6}\right)$处，$y'=0$

切线方程为：$y = \frac{\sqrt{2}}{4}a$

2.2 微分

可微分与可求导等价，本节主要需要掌握微分的运算法则与近似计算应用，以上节求导的知识和计算为基础.

2.2.1 ★★★★★求函数微分

可以先求导得到$\frac{dy}{dx}$，然后将 dx 乘到等式右边即可.

[例 2.17]

$$y = x \sin 2x$$

$$\frac{dy}{dx} = \sin 2x + 2x \cos 2x\, dx$$

$$dy = (\sin 2x + 2x \cos 2x)\, dx$$

2.2.2 ★★微分在近似计算中的应用

$$f(X) \approx f(x_o) + f'(x_o)(x - x_o)$$

［例 2.18］

求 $ln1.01$ 的近似值解：

取 $f(x) = \ln(x)$,

$$\ln(x) \approx \ln(x_0) + \frac{1}{x0}(x - x_0)$$

令 $x_0=1$, $x = 1.01$

$$\ln(1.01) \approx \ln(1) + \frac{1}{1}(0.01) = 0.01$$

2.2.3 ★★★ 区分Δy 与 dy

大前提：可微，公式如下：

$$y=f(x),$$
$$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$$
$$dy=f'(x)dx$$

［例2.19］

已知$y = x^3-x$，计算在点$x=2$处当Δx分别等于1，0.1，0.01时的Δy与dy.

解：

$$\Delta y = [(x+\Delta x)^3-(x+\Delta x)]-(x^3-x)$$
$$=(3x^2-1)\Delta x+3x(\Delta x)^2+(\Delta x)^3$$
$$f'(x)=(3x^2-1)$$
$$dy=(3x^2-1)dx$$

再将各值代入即可.

2.2.4 微分中值定理及其应用

本节的主要内容为三个中值定理及洛必达法则的应用，中值定理的应用灵活性，技巧性很强，需要多加练习总结题型和思路，经常作为压轴题考察. 洛必达法则不能盲目使用，需要明确前提条件和使用技巧.

2.2.5 ★★★★★ 罗尔定理应用

罗尔定理:若函数 f 满足如下条件：

1 在闭区间[a,b]上连续；

2 f 在开区间(a,b)上可导；

3 f(a)=f(b)

则在(a,b)上至少存在一点ξ，使f'(ξ)=0.

在罗尔定理的应用中，常常需要构造函数，现将几个常用的辅助函数列表如下：

表1 罗尔定理常见辅助函数表

中值等式 $G(\varepsilon)=0$	$F'(x)=0$
$f'(\varepsilon)+A\varepsilon^k+B=0$	$(f(x)+\frac{Ax^{k+1}}{k+1}+Bx)'=0$
$f(a)g'(\varepsilon)-f'(\varepsilon)g(a)-k=0$	$[f(a)g(x)-f(x)g(a)-kx]'=0$
$f(\varepsilon)g''(\varepsilon)-f''(\varepsilon)g'(\varepsilon)$	$[f(x)g'(x)-f'(x)g(x)]'=0$
$(\varepsilon-1)f'(\varepsilon)+kf(\varepsilon)=0$	$[(x-1)^kf(x)]'=0$
$f'(\varepsilon)+\lambda f(\varepsilon)=0$	$[e^{\lambda x}f(x)]'=0$
$f'(\varepsilon)-f(\varepsilon)g'(\varepsilon)=0$	$[e^{g(x)}f(x)]'=0$

［例 2.14］

设 f(x)、g(x) 在 [a,b] 上连续，在 (a,b) 内可导，且 f(b)−f(a) = g(b)−g(a)，试证明

在（a,b）内至少存在一点 c，使得 f’（c）= f’（c）

证明：构造 $F(x) = f(x) - g(x)$，$F(a) = F(b)$，利用罗尔定理即可得证.

变式：柯西定理证明

设 $f(x)$、$g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且当 $x \in (a,b), g'(x) = 0$ 试证明在 (a,b) 内至少有一点 c，使得 $\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$

证明：构造

$m(x) = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} g(x)$

$\Rightarrow f(b) - f(a) = m(b) - m(a)$

故，由罗尔定理 $\exists c \in (a,b)$，使得

$f'(c) = m'(c)$ 即：

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} g'(c)$$

2.2.6 ★★★★拉格朗日定理应用

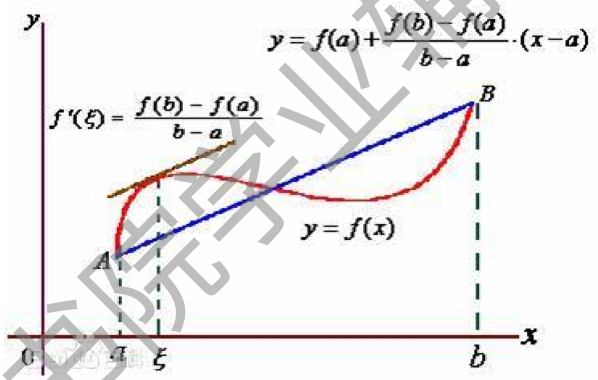
如果函数f(x)满足：

(1)在闭区间[a,b]上连续；

(2)在开区间(a,b) 内可导；

那么在(a,b)内至少有一点ξ(a<ξ<b)，使等式f(b)-f(a)=f’(ξ)(b-a)成立。

可借助下面的图像理解：



常见题型：

题型一：证明不等式（求导对其中一个进行有界（一般是 1）分析）

[例 2.15]（基础题）求证：$|\sin x-\sin y|\leq|x-y|$

由拉格朗日中值定理可得：$\sin x-\sin y=(x-y)\cos\xi$

故：$|\sin x-\sin y|\leq|\cos\xi|\,|x-y|$

又 $|\cos\xi|\leq 1$

故有 $|\sin x-\sin y|\leq|x-y|$

[例 2.16]（略难）设 $f(x)$ 在 $[0,c]$ 上具有单调减小的导函数 $f'(x)$，且 $f(0)=0$，求证：

对于满足不等式 $0<a<b<a+b$ 的 a,b，$f(a+b)<f(a)+f(b)$

证明：两次应用拉格朗日中值定理：

$$f(a)-f(0)=f'(\xi_1)(a-0),\xi_1\in(0,a)$$

$$f(a+b)-f(b)=f'(\xi_2)(a+b-b),\xi_2\in(b,a+b)$$

两式相减可得：$f(a+b)-f(b)-f(a)=a[f'(\xi_2)-f'(\xi_1)]$

又 $\xi_2>\xi_1$，导函数单调减小

有：$[f'(\xi_2)-f'(\xi_1)]<0$

$f(a+b)<f(a)+f(b)$ 得证.

2.2.7 ★★ 柯西定理

设函数f(x),g(x)　满足：

⑴在闭区间[a,b]上连续；

⑵在开区间(a,b)　内可导；

⑶对任意x∈(a,b),g’(x)≠0,

那么在(a,b)内至少有一点ξ，使得$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$成立。

与拉格朗日中值定理的联系：

在柯西中值定理中，若取g(x)=x时，则其结论形式和拉格朗日中值定理的结论形式相同。因此，拉格朗日中值定理为柯西中值定理的一个特例；柯西中值定理可看作是拉格朗日中值定理的推广。

几何意义理解：用参数方程表示的曲线上至少有一点，它的切线平行于两端点所在的弦。

[例 2.17] 设 0 ⩽ a ＜ b，f(x) 在 [a,b] 上连续，在 (a,b) 内可导，试证在 (a,b) 内存在三点 x1,x2,x3，使得 $f'(x_1)=(b+a)\frac{f'(x_2)}{2x_2}=(b^2+ab+a^2)\frac{f'(x_3)}{3x_3^2}$

分析：观察第二、三式分母，可以看出他们分别是 x22、x33 求导后的结果，因此，

第一式分母可以看成是 x1 求导后的结果. 化简后就成了一道比较简单的 Cauchy 定理的题目.

证明：由分析可得：

$f'(x_1)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

$\dfrac{f'(x_2)}{2x_2}=\dfrac{f(b)-f(a)}{b^2-a^2}$

$\dfrac{f'(x_3)}{3{x_3}^2}=\dfrac{f(b)-f(a)}{b^3-a^3}$

联立三式，原式得证.

2.2.8 ★★★★洛必达法则

应用条件：f (x),g (x)在区间 (x0,x0 +δ),(δ > 0)满足：

(1) $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+} g(x)=0$ 或 ∞

(2)f,g 在 $(x_0,x_0+\delta)$ 内可导，且 $g'(x)\neq 0$

(3) $\lim\limits_{x\to x_0^+}\frac{f(x)}{g(x)}=a$，（$a$ 为有限实数或无穷大）.

[例 2.18]

正例：

$$\lim_{x\to 0}\frac{x+\sin(x)}{x-\sin(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{1+\cos(x)}{1-\cos(x)}=\infty$$

错例：

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n}}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}}{1}}=1$$

注意:1) "$\frac{0}{0}$"型

2)当 $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ 不存在且不为无穷大时，

并不能说明 $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}$ 不存在。

例如:$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\tan x}$

注意：数列不能直接用洛必达法则，需要先将 n 化为 x 的函数求极限，再利用海涅定理得到数列同样为此极限。

2.2.9 Taylor 定理及其应用

本节介绍了带两种余项的泰勒公式，并给出了常用函数的麦克劳林展开式（一定要牢记，很常用，在以后的级数学习中也会有类似形式），需要同学们根据不同的题灵活选用不同形式的余项.

2.2.10 ★★★★★带皮亚诺余项的泰勒公式应用

题型一：常用于求极限

[例 2.19] 求 $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt[6]{x^6+x^5}-\sqrt[6]{x^6-x^5})$

解：提公因式 x，得到麦克劳林展式中常用的 $(1+x)^\alpha$ 形式.

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt[6]{x^6+x^5}-\sqrt[6]{x^6-x^5})$$

$$=\lim_{x\to\infty}x(\sqrt[6]{1+\frac{1}{x}}-\sqrt[6]{1-\frac{1}{x}})$$

$$=\lim_{x\to\infty}x((1+\frac{1}{6x}+o_1(\frac{1}{x}))-(1-\frac{1}{6x}+o_2(\frac{1}{x})))$$

$$=\frac{1}{3}$$

题型二：等价无穷小应用

[例 2.20] 见 [例 1.14(2)]

2.2.11 ★★★★★带拉格朗日余项的泰勒公式应用

[例 2.21] 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 二阶可导，且 $f'(a)=f'(b)=0$，试证：$\exists\xi\in(a,b)$，使得 $|f''(\xi)|\geq\frac{4}{(b-a)^2}|f(b)-f(a)|$

证明：本题采用在 a,b 分别展开，再进行联立的技巧

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(\xi_1)}{2}(x-a)^2\xi_1\in(a,x)$$

$$f(x)=f(b)+f'(b)(x-b)+\frac{f''(\xi_2)}{2}(x-b)^2\xi_2\in(x,b)$$

将 $x=\frac{a+b}{2}$ 代入

$$\Rightarrow\begin{cases}f(\frac{a+b}{2})=f(a)+f'(a)\frac{b-a}{2}+\frac{f''(\xi_1)}{2}(\frac{b-a}{2})^2,\xi_1\in(a,\frac{a+b}{2})\\ f(\frac{a+b}{2})=f(b)+f'(b)\frac{a-b}{2}+\frac{f''(\xi_2)}{2}(\frac{b-a}{2})^2,\xi_2\in(\frac{a+b}{2},b)\end{cases}$$

两式相减可得：

$$\Rightarrow f(b)-f(a)=\frac{f''(\xi_1)}{2}(\frac{b-a}{2})^2-\frac{f''(\xi_2)}{2}(\frac{b-a}{2})^2$$

$$\Rightarrow\frac{4}{(b-a)^2}|f(b)-f(a)|=\left|\frac{f''(\xi_1)-f''(\xi_2)}{2}\right|\leq\left|\frac{f''(\xi_1)}{2}\right|+\left|\frac{f''(\xi_2)}{2}\right|\leq\max(f''(\xi_1),f''(\xi_2))$$

证毕.

2.2.12 函数性态的研究

本节主要内容有单调性，极值，最值，凹凸性和拐点，整体难度不大，根据定义判断即可，但根据是否连续和是否可导判断极值是一个难点。

2.2.13 判断单调性

利用函数求导法则判断。

2.2.14 ★★★极值点的讨论

在 x_0 处：

1) 连续

①可导，且 $f(x_0)=0$

导数在左右变号，取极值.

导数在左右不变号，不取极值.

②不可导

导数在左右变号，取极值.

导数在左右不变号，不取极值.

2) 不连续

利用定义：$f:I\to R, x_0\in R$, 若 $\exists\delta>0$, 使得 $\forall x\in U(x_0,\delta)\subseteq I$，恒有 $f(x)\geq f(x_0)$（或 $\leq$），则 f 在 x_0 处取极小（大）值.

[例 2.22] 求由方程 $x^3 + y^3 - 3xy = 0$ 所确定的函数在 $x > 0$ 且 $x \neq y^2$ 的极值点.

分析：属于隐函数求极值，需要对两边同时求导.

解：方程两边同时求导可得：

$$3x^2 + 3y^2\frac{dy}{dx} - 3y - 3x\frac{dy}{dx} = 0 \to \frac{dy}{dx} = \frac{y - x^2}{y^2 - x}$$

令 $\frac{dy}{dx} = 0$，得到 $y = x^2$.

代入原方程得到：$x^6 - 2x^3 = 0$

因此，驻点为 $(\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{4})$，又有 $\frac{d^2y}{dx^2}\Big|_{x=\sqrt[3]{2}} < 0$

故函数的极大值点为 $\sqrt[3]{2}$.

自我检测习题：

1. 证明题：

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上正值，连续，则在 (a,b) 内至少存在一点 ξ，

使 $\int_a^\xi f(x)dx = \int_\xi^b f(x)dx = \frac{1}{2}\int_a^b f(x)dx$ 。

解答_

证：令 $F(x) = \int_a^x f(t)dt - \int_x^b f(t)dt$

由于 $x \in [a,b]$ 时，$f(x) > 0$

$\therefore F(a) = -\int_a^b f(t)dt < 0$

$F(b) = \int_a^b f(t)dt > 0$

由根的存在性定理，存在一点 $\xi \in (a,b)$ 使

$F(\xi) = 0$

即 $\int_a^\xi f(t)dt = \int_\xi^b f(t)dt$

又 Q $\int_a^b f(t)dt = \int_a^\xi f(x)dx + \int_\xi^b f(x)dx$

$= \int_a^\xi f(x)dx + \int_\xi^b f(x)dx$

$= 2\int_a^\xi f(x)dx$

从而原式成立。

2. 证明题

设k为正整数，证明：

$(1)\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 kxdx=\pi$ ；

$(2)\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 kxdx=\pi$ 。

解答_

$(1)\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 kxdx$

$=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1+\cos 2kx}{2}dx$

$=[\frac{1}{2}x+\frac{1}{4k}\sin 2kx]\Big|_{-\pi}^{\pi}$

$=(\frac{\pi}{2}+0)-(-\frac{\pi}{2}+0)$

$=\pi$。

$(2)\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 kxdx$

$=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1-\cos 2kx}{2}dx$

$=[\frac{1}{2}x-\frac{1}{4k}\sin 2kx]\Big|_{-\pi}^{\pi}$

$=(\frac{\pi}{2}-0)-(-\frac{\pi}{2}-0)$

$=\pi$。

3. 证明题

设函数$f(x)$在$[0,1]$上连续,

证明:$\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(|\cos x|)dx=\frac{1}{4}\int_0^{2\pi}f(|\cos x|)dx$ 。

解答_

证:显然$f(|\cos x|)$是以π为周期的函数

$\therefore\int_0^{2\pi}f(|\cos x|)dx$

$=2\int_0^{\pi}f(|\cos x|)dx$

$=2[\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(|\cos x|)dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}f(|\cos x|)dx]$

在后一积分中,令$x=\pi-t$则

$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}f(|\cos x|)dx$

$=-\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}f(|\cos(\pi-t)|)dt$

$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(|\cos t|)dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(|\cos x|)dx$

$\therefore\int_0^{2\pi}f(|\cos x|)dx$

$=2[\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(|\cos x|)dx+\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(|\cos x|)dx]$

$=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(|\cos x|)dx$

得证$\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(|\cos x|)dx=\frac{1}{4}\int_0^{2\pi}f(|\cos x|)dx$。

4.证明题

设 $f(x)$是以π 为周期的连续函数，

证明:$\int_0^{2\pi}(\sin x+x)f(x)dx=\int_0^{\pi}(2x+\pi)f(x)dx$ 。

解答_

证明：由于

$$\int_0^{2\pi}(\sin x+x)f(x)dx$$
$$=\int_0^{\pi}(\sin x+x)f(x)dx+\int_{\pi}^{2\pi}(\sin t+t)f(t)dt$$

令$t=\pi+x$，则

$$\int_{\pi}^{2\pi}(\sin t+t)f(t)dt$$
$$=\int_0^{\pi}[(\sin(\pi+x)+\pi+x]f(\pi+x)dx$$
$$=\int_0^{\pi}(x+\pi-\sin x)f(x)dx$$
$$\therefore\int_0^{2\pi}(\sin x+x)f(x)dx$$
$$=\int_0^{\pi}(\sin x+x)f(x)dx+\int_0^{\pi}(x+\pi-\sin x)f(x)dx$$
$$=\int_0^{\pi}(2x+\pi)f(x)dx。$$

5.证明题

设$f(x)$在$[a,b]$上单调增加且$f''(x)>0$.

证明:$(b-a)f(a)<\int_a^b f(x)dx<(b-a)\dfrac{f(a)+f(b)}{2}$。

解答_

证明:由假设$\forall x\in[a,b].x>a$时$f(x)>f(a)$

$$\therefore\int_a^b f(x)dx>(b-a)f(a)$$

$\forall t\in[a,b].f(t)$在x点处的展式为

$$f(t)=f(x)+f'(x)(t-x)+\frac{1}{2!}f''(\xi)(t-x)^2$$

(ξ在t与x之间)

又因$f''(\xi)>0$故

$$f(t)>f(x)+f'(x)(t-x)$$

设$f(x)$在$[a,b]$上二阶可导且$f''(x)<0$,

证明: $\int_a^b f(x)dx\le(b-a)f(\dfrac{a+b}{2})$ 。

解答_

$\forall x\in(a,b)$将 $f(x)$在$\dfrac{a+b}{2}$处展开,有

$$f(x)=f(\frac{a+b}{2})+f'(\frac{a+b}{2})(x-\frac{a+b}{2})+\frac{1}{2!}f''(\xi)(x-\frac{a+b}{2})^2$$

(ξ 介于x与$\dfrac{a+b}{2}$之间.)

6.证明题

由题设知$f''(\xi)<0$

$$\therefore f(x)\le f(\frac{a+b}{2})+f'(\frac{a+b}{2})(x-\frac{a+b}{2})$$

$$\int_a^b f(x)dx\le(b-a)f(\frac{a+b}{2})+\frac{1}{2}f^1(\frac{a+b}{2})(x-\frac{a+b}{2})^2\Big|_a^b$$

$$=(b-a)f(\frac{a+b}{2})。$$

7. 证明题

试证：如果$f(x)$在$[a,b]$上连续，且对于一切$x\in[a,b]$，$f(x)\geq 0$

同时至少存在一点$\xi\in[a,b]$，使$f(\xi)>0$，则$\int_a^b f(x)dx>0$。

解答_

证明：由$f(x)$在ξ点连续，且$f(\xi)>0$，$\xi\in[a,b]$

则存在$\delta>0$，当$x\in(\xi-\delta,\xi+\delta)$时，有

$f(x)>0$

于是

$$\int_a^b f(x)dx\geq\int_{\xi-\delta}^{\xi+\delta} f(\xi)dx=2\delta f(\xi)>0$$

$\therefore\int_a^b f(x)dx>0$。

8. 证明题

试证$\int_a^b f(c-x)dx=\int_{c-b}^{c-a} f(x)dx$。

解答_

令$t=c-x$则$x=c-t, dx=-dt$

且$x=a$时, $t=c-a$

$x=b$时, $t=c-b$

$\therefore\int_a^b f(c-x)dx$

$=\int_{c-a}^{c-b} f(t)(-dt)$

$=-\int_{c-a}^{c-b} f(t)dt$

$=\int_{c-b}^{c-a} f(x)dx$。

3 一元函数积分学及其应用

3.1 定积分的概念和存在条件★

对于工科学生而言，定积分的存在条件通常考试并不作太高要求，只需要简要了解即可，一般也只有mooc题目中会有相关的问题，详情可参考课本175-180页. 定积分的概念往往会在求极限中

考察，例如$\lim\limits_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}=\int_0^1\frac{dx}{1+x}$，求这些极限的关键是先提取出一个1/n，然后把求和符号$\sum$ 里的式子写成$f(\frac{n}{k})$的样子.

3.2 定积分的性质

3.2.1 知识点

定积分的性质比较多，课本上一共列出了6条.（详情参考课本p180-p184）

以下设出现的函数均在给定的区间上可积.

1. 线性性质：$\int_a^b[\alpha f(x)+\beta g(x)]dx=a\int_a^b f(x)dx+\beta\int_a^b g(x)dx$.★★★

2. 单调性：若对于$[a,b]$上的可积函数f, g恒有$f(x)\leqslant g(x)$，那$\int_a^b f(x)dx\leqslant\int_a^b g(x)dx$，这个结论有一个直接推论：若在区间$[a,b]$内m$\leqslant f(x)\leqslant$M，则有m(b−a)$\leqslant\int_a^b f(x)dx\leqslant$M(b−a).

3. （有界性）★★★

4. $|\int_a^b f(x)dx|\leqslant\int_a^b|f(x)|dx$★★★

5. 对区间的可加性：$\int_a^b f(x)dx$=$\int_a^c f(x)dx$+$\int_c^b f(x)dx$. ★★★

6. 乘积性质：若$f(x)$，$g(x)$均在区间$[a,b]$内可积，那么$f(x)g(x)$也是这个区间上的可积函数. ★

7. 积分中值定理：设$f(x)\in C[a,b]$，$g(x)$在$[a,b]$上可积且不变号，那么至少存在一点ξ$\in[a,b]$，使得$\int_a^b f(x)g(x)dx=f(\xi)\int_a^b g(x)dx$. ★★★★

此定理的一个直接推论就是取$g(x)=1$时至少存在一点ξ$\in[a,b]$，使得$\int_a^b f(x)dx$= $f(\xi)(b-a)$，通常这里的$f(\xi)$被称为积分均值. ★★★★

注：以上6条基本性质是课本上给出的，通常来说这些定理很少单独使用，都是组合在一起出现，性质1和4最为简单基础，使用时有一定技巧性的是性质2和6，在考试的较难的证明题里会出现. 这两个性质体现的是在不具体计算的情况下对积分值的估计.

3.2.2 性质补充

1. 设$f(x)$在$[-a,a]$上可积，那么：

当$f(x)$为奇函数时：$\int_{-a}^{a}\mathrm{f(x)}dx=0$，

当$f(x)$为偶函数时：$\int_{-a}^{a}\mathrm{f(x)}dx=2\int_0^a\mathrm{f(x)}dx$. ★★★

★★2. （Cauchy不等式）设f，$g\in C[a,b]$，则$\int_a^b f(x)g(x)dx\le(\int_a^b f^2(x)dx)^{\frac{1}{2}}(\int_a^b g^2(x)dx)^{\frac{1}{2}}$

3.2.3 例题

［例3.1］（性质4的使用）设f是周期为T的周期函数，且在任一有限区间上可积, 求证：$\int_a^{a+T}f(x)dx=\int_0^T f(x)dx$

解析：为了利用周期函数这样一个条件，我们将其转化为$f(x)=f(x+T)$，再写成积分形式就是$\int_a^{a+T}f(x)dx=\int_0^T f(x)dx$那么我们只要利用性质4构造出这样一个式子即可

证明：$\int_a^{a+T}f(x)dx=\int_a^T f(x)dx+\int_T^{a+T}f(x)dx=\int_0^a f(x)dx+\int_a^T f(x)dx=\int_0^T f(x)dx$

［例3.2］（比较积分值）比较$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{sinx}{1+x^2}dx$和$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{cosx}{1+x^2}dx$的大小

解：$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{sinx}{1+x^2}dx-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{cosx}{1+x^2}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{sinx-cosx}{1+x^2}dx=\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}{1+x^2}dx=\sqrt{2}(\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}{1+x^2}dx+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}{1+x^2}dx)$ 接下来在第二项中用$\frac{\pi}{2}-x$ 替代 x：$=\sqrt{2}\left(\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}{1+x^2}dx-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}{1+(\frac{\pi}{2}-x)^2}dx\right)=\sqrt{2}\left(\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\frac{\pi}{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)}{(1+x^2)(1+(\frac{\pi}{2}-x)^2)}dx<0\right)$于是：$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{sinx}{1+x^2}dx<\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{cosx}{1+x^2}dx$

评注：在比较积分值的题目中本题稍微有些难度，在课本上遇到的那些（例如比较 $\int_0^1\frac{arctanx}{1+x}dx$和 $\int_0^1\ln(1+x)dx$，详情参见课本 p185）两个函数之间的大小关系都比较容易建立，本题是另一种情况：给定区间里前一半第二个大，后一半第一个大，那么我们试图看看：哪个大的部分更多，由于$\frac{sinx}{1+x^2}$ 和 $\frac{cosx}{1+x^2}$的大小分界点是在$\frac{\pi}{4}$，因此想到以这个点作为积分区域的拆分点. 考

试中遇到比较积分值的题目时应首先考虑两个被积函数在给定区间里的大小是否可以直接进行比较，再考虑本题里的情况.

[例3.3]（估计积分值的大小）求证：$2e^{-\frac{1}{4}} < \int_0^2 e^{x^2-x}dx < 2e^2$

解析：估计积分值可以用积分的单调性，我们先考虑e^{x^2-x}在$[0,2]$上的范围.

证明：$x^2-x=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}$，于是当$x\in[0,2]$时，$-\frac{1}{4}\le x^2-x\le 2$，故有：$e^{-\frac{1}{4}}\le e^{x^2-x}\le e^2$

直接得到：$2e^{-\frac{1}{4}} < \int_0^2 e^{x^2-x}dx < 2e^2$

评注：对于考试中出现的估计积分值大小的题目通常我们只要求出被积函数在给定区间上的最大值和最小值然后直接放缩即可.

[例3.4]（罗尔定理和积分中值定理）设函数f在[0,a]上连续，在(0,a)上可导，且$8\int_{\frac{7}{8}a}^{a} f(x)dx = af(0)$,求证：∃ξ∈[a,b]，使得f′（ξ）=0.

解析：目标是证明区间内存在一点使得导数为0，很容易联想到罗尔定理，为了使用该定理的条件，我们需要在区间内找到两个函数值相等的点，从题中给出的这个积分值的条件为突破口.

证明：根据积分中值定理，存在$\eta\in(\frac{7}{8}a,a)$，使得$\int_{\frac{7}{8}a}^{a} f(x)dx = f(\eta)$，再根据已知$8\int_{\frac{7}{8}a}^{a} f(x)dx = af(0)$，可得f(η)=f(0)，由洛尔定理可知存在ξ∈(0, η)使得f′（ξ)=0.

评注：积分中值定理常常与微分学中的拉格朗日定理，洛尔定理相联系构成组合题，更多类似的题目会在下一小节给出.

3.3 微积分基本公式和基本定理

3.3.1 Newton-Leibniz 公式★★★★★

设f(x)在区间[a,b]上可积且有原函数F(x)（即F′(x)=f(x)），那么：

$$\int_a^b f(x)dx = F(a)-F(b) = F(x)|_a^b$$

推论：原函数F(x)一定在这个区间上连续.

评注：此公式非常重要，它将积分和导数联系到了一起，同样也简化了求积分值的过程.它把求积分归结为求导的逆运算，是微积分的基本公式.同学们务必要熟悉理解这个公式.

[例3.5]若$f(x)=\begin{cases}x^2, x\in[0,1]\\ x+1, x\in[1,2]\end{cases}$求：$\int_0^2 f(x)dx$

解：由于x=1是该函数的间断点，我们不能直接利用Newton-Leibniz公式计算，将函数分段之后再进行计算.

$$\int_0^2 f(x)dx=\int_0^1 f(x)dx+\int_1^2 f(x)dx=\int_0^1 x^2dx+\int_1^2(x+1)dx=\frac{1}{3}x^3|_0^1+\left(x+\frac{x^2}{2}\right)|_1^2=\frac{17}{6}$$

评注：当被积函数在区间上不连续时，我们需要在间断点处对积分进行分段，这样才能使用牛莱公式.

3.3.2 微积分第一基本定理★★★★

设f∈C[a,b]，则Φ(x)=$\int_a^x f(x)\,dx$在[a,b]上可导（且导数连续），且Φ′(x)=f(x)，相应的也有dΦ(x)=f(x)dx.

评注：此公式实际上还是牛莱公式的推论，它把积分的原函数也函数化，也就是把变上限的积分看成一个函数，该公式主要运用在变上限积分的求导上，它的一个推论是连续函数一定存在原函数.注意这里的dx里的x是被积数，而积分符号上的x则是积分上限，两个x的意义不同，不要混淆.

[例 3.6] 设 $f(x)$ 是 $[a,+\infty)$ 上的连续函数，$F(x)=\int_a^x (x-t)^2 f(t)\,dt$，求 $F'(x)$.

解析：积分式子内部除了 t 还有 x，不适合直接用第一定理，我们先考虑展开对各项分别求导，注意到对于 t 来说 x 是一个常数，因此在写积分式子的时候 x 可以提到积分符号的外面.

解：

$$F(x)=\int_a^x (x-t)^2 f(t)dt=\int_a^x x^2 f(t)dt-\int_a^x 2txf(t)dt+\int_a^x t^2 f(t)dt$$

$$=x^2\int_a^x f(t)dt-2x\int_a^x tf(t)dt+\int_a^x t^2 f(t)dt$$

$$F'(x)=x^2 f(x)+2x\int_a^x f(t)dt-2\int_a^x tf(t)dt-2x^2 f(x)+x^2 f(x)$$

$$=\int_a^x 2(x-t)f(t)dt$$

评注：在解决这种表达式未给出的函数的求导时，我们先要把积分符号内部的式子化成只有 一个变量，将相对的常数变量提取到积分号外面．再进行求导．本题中细心的人会发现$F'(x)=\int_a^x [(x-t)^2]' f(t)\,dt$,其中这里的求导符号指对 x 的求导，在学习了多重积分之后同学们会对这个结论有更深的理解

[例 3.7] 求$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^{\sqrt{x}} cost^2 dt}{\sqrt{x}}$

解析：本题考察用洛必达法则求极限和变上限积分求导的方法.

解：$\Phi(x)=\int_0^{\sqrt{x}} cost^2 dt$可以看成是$g(u)=\int_0^u cost^2 dt$和$u=\varphi(x)=\sqrt{x}$复合而成的函数，因此：

根据洛 $\Phi'(x)=g'(u)\varphi'(x)=\frac{d}{du}(\int_0^u \cos t^2 dt)\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{\cos x}{2\sqrt{x}}$ 必达法则，原式$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^{\sqrt{x}} cost^2 dt}{\sqrt{x}}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{cosx}{2\sqrt{x}}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}}=$ 1

评注：求极限是变上限积分求导的一个重要应用，做题的时候心里明白要把$f(t)dt$看成一个函数即可，一般来说，容易证明以下的式子：

$$\frac{d}{dx}(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(t)dt)=f(\psi(x))\psi'(x)-f(\varphi(x))\varphi'(x)$$

3.3.1 微积分第二基本定理★★★

设 F 是 f 在区间 I 上的一个原函数，C 是任意常数，那么 $F+C$ 是 f 在 I 上的所有原函数.

评注：该定理是不定积分的理论基础，它说明了不定积分的结果实际上是一个集合，因此我们在写不定积分的结果时必须要加上常数 C. 考试时对于该定理主要是考察常数 C 的确定，通常是依据给出的等式和初值.

[例 3.8] 若函数$f(x)$满足 $f(x)=x^2+\int_0^1 xf(x)dx$，求 $f(x)$的表达式

解析：题中所给的条件看似复杂，但一个关键信息就是 $f(x)$ 一定具有

x^2+C的形式，其中 C 是一个待定的常数，于是我们只要把这个形式代入到已知的等式里就可以得到一个关于 C 的方程，解出 C 确定表达式.

解：设 f(x) = x^2+ C，代入已知等式得： $C=\int_0^1 x(x^2+C)dx=\frac{1}{3}+\frac{1}{2}C$

解得：C = $\frac{2}{3}$，因此$f(x)=x^2+\frac{2}{3}$

3.4 不定积分 ★★★★★

不定积分是考试对于积分这一块的考试重点，属于必考题型，在复习备考时应在熟练掌握基本积分表的基础上大量练习，这一块往往有很强的技巧性，平时练习必须多加总结. 对于工科学生来说考试中求不定积分也往往是求定积分的唯一途径. 这部分的计算对细心也有一定要求.

3.4.1 基本积分表

在此处不再给出，详见课本 p192-p193，下面给出对于积分表的一些补充：

表 1: 积分表的一些补充

$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \ln(x+\sqrt{1+x^2})+C$	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \ln(x+\sqrt{x^2-1})+C$
$\int \frac{dx}{x^2-1} = -\frac{1}{2}\ln\left\lvert\frac{1+x}{1-x}\right\rvert+C$	$\int \tan x dx = \ln\lvert\sec x\rvert+C$
$\int \cot x dx = \ln\lvert sinx\rvert+C$	$\int \sec x dx = \ln\lvert\sec x+\tan x\rvert+C$
$\int \csc x dx = \ln\lvert\csc x+\cot x\rvert+C$	$\int \ln x dx = x\ln x - x + C$

3.4.2 基本的积分方法

1) 拆分后各个积分：
理论依据 $\int [\alpha f(x)+\beta g(x)]dx = \alpha\int f(x)dx + \beta\int g(x)dx$
作用：将被积式子拆分成几个相对容易直接积分的式子，更便于观察.
[例 3.9] 求$\int \frac{1+x^{\frac{1}{3}}+x^{\frac{7}{3}}}{x^2}dx$

$$\int \frac{1+x^{\frac{1}{3}}+x^{\frac{7}{3}}}{x^2}dx = \int\frac{dx}{x^2}+\int x^{-\frac{5}{3}}dx+\int x^{\frac{1}{3}}dx = -\frac{1}{x}-\frac{3}{2}x^{-\frac{2}{3}}+\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}+C$$

解：

2) 换元积分法

a) 换元法则 1：

理论依据（课本 p197）：设 f 是连续函数，φ 有连续的导数，且 φ 的值域含于 f 的定义域，那么：$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \left(\int f(u)du\right)_{u=\varphi(x)}$

评注：这个法则是通过代换 $u=\varphi(x)$ 来简化被积式. 通常为了使用该法则我们需要把待求的 $\int f(x)dx$ 中的 $f(x)$ 变成两个式子的乘积，使得其中一个因子与 dx 的乘积可以凑成 $d\varphi(x)$ 的形式，实际计算时往往要凑微分.

［例 3.10］求 (1) $\int \frac{dx}{x\ln^2 x}$ (2) $\int \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}}dx$

解：

$$(1)\int\frac{dx}{x\ln^2 x} = \int\frac{d\ln x}{\ln^2 x} = -\frac{1}{\ln x}$$

$$(2)\int\frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}}dx = 2\int\frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}d\sqrt{x} = 2\left(\int\frac{\arcsin u}{\sqrt{1-u^2}}du\right)_{u=\sqrt{x}}$$

$$=2\int \arcsin u d(\arcsin u) = (\arcsin u)^2+C = (\arcsin\sqrt{x})^2+C$$

评注：在用换元法则 1 求解积分时，务必要对一些微分式十分熟悉，例如

$$\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = d\arcsin x \qquad \frac{dx}{x} = d\ln x \qquad \frac{dx}{1+x^2} = d\arctan x$$

等，掌握这些等式的基础是记住基本积分表，在解题时也需要有意识的创造这些式子的出现.

［例 3.11］求 (1) $\int\frac{\sin x dx}{5+\sin^2 x}$ (2) $\int\frac{dx}{\sin x\cos^2 x}$

解：

$$(1)\int\frac{\sin x dx}{5+\sin^2 x} = -\int\frac{d\cos x}{6-\cos^2 x} = \left(\int\frac{du}{u^2-6}\right)_{u=\cos x} = \int\frac{1}{2\sqrt{6}}\left(\frac{du}{u-\sqrt{6}}-\frac{du}{u+\sqrt{6}}\right)$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{6}}\ln\left|\frac{u-\sqrt{6}}{u+\sqrt{6}}\right|+C = \frac{1}{2\sqrt{6}}\ln\left|\frac{\cos x-\sqrt{6}}{\cos x+\sqrt{6}}\right|+C$$

$$(2)\int\frac{dx}{\sin x\cos^2 x} = \int\frac{(\sin^2 x+\cos^2 x)dx}{\sin x\cos^2 x} = \int\frac{\sin x}{\cos^2 x}dx+\int\frac{dx}{\sin x}$$

$$= -\int\frac{d\cos x}{\cos^2 x}-\int\frac{d\cos x}{1-\cos^2 x}$$

$$=\frac{1}{\cos x}+\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\right)+C$$

评注：在处理由三角函数组成的积分式时，注意$sinx$和$cosx$之间的求导周期关系，在分子 分母上同时乘上一个$sinx$或$cosx$, 有意识的凑出$dsinx$或$dcosx$, 然后使用换元。尤其是在求$\int sin^m xcos^n xdx(m,n \in Z)$这种积分时，通过凑出$dsinx$或$dcosx$往往可以把三角积分化成多项式的积分（多项式积分是所有积分中最简单的一种）

b) 换元法则 2：

理论依据（课本 p202）：我们将换元法则 1 的式子反过来写就变成了

$\int f(x)dx = (\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt)_{t=\varphi^{-1}(x)}$

与法则1里我们把$f(x)$的一部分放进微分里不同,法则2里我们是通过代换使得被积式里出现了新的乘积项 $\varphi'(t)$. 两种换元法则的最终目的都是简化被积式,使其变成容易积分的形式. 换元法则2这部分需要记忆几个常用的换元情况. 下面作出介绍：

- 被积式中含有根式：

*根式形如 $\sqrt{ax^2+bx+c}(a \neq 0)$

由于可以通过代换 $t = x + \frac{b}{2a}$使得根式变成 $\sqrt{at^2+l}$的形式,我们接下来只讨论一次项不存在的情况，用表格形式给出：三角代换是常用的代换，同学们务必熟记，采用这种代换方法往往可以把难以处理的根式化成三角有理式.

［例 3.12］求：

表 2: 换元法则 2 的部分代换方法

根式的形式	代换方法
$\sqrt{x^2+a^2}$	$x = a\tan\theta, \theta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 或 $x = a\cot\theta, \theta \in [-\frac{\pi}{2}, 0) \cup (0, \frac{\pi}{2}]$
$\sqrt{x^2-a^2}$	$x = a\sec\theta, \theta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 或 $x = a\csc\theta, \theta \in [-\frac{\pi}{2}, 0) \cup (0, \frac{\pi}{2}]$
$\sqrt{a^2-x^2}$	$x = a\cos\theta, \theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ 或 $x = a\sin\theta, \theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

(1) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+x+1}}$ (2) $\int \sqrt{1-x^2}dx$ (3) $\int \frac{dx}{(x^2-1)^{\frac{3}{2}}}$

解：(1) $\sqrt{ax^2+bx+c}$的形式，我们先化成$\sqrt{at^2+l}$ $x^2+x+1 = (x+\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}, x = \frac{\sqrt{3}}{2}\tan\theta - \frac{1}{2}$

原积分可化简为:

$$\int \frac{d\theta}{cos\theta} = \int \frac{cos\theta d\theta}{1-sin^2\theta} = \int \frac{dsin\theta}{1-sin^2\theta} = \frac{1}{2}\int (\frac{1}{1+sin\theta} + \frac{1}{1-sin\theta})\, dsin\theta = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1-sin\theta}{1+sin\theta}\right) + C$$

再作逆代换 $\theta = \arctan(\frac{2\sqrt{3}}{3}(x+\frac{1}{2}))$,原积分为

$$\ln(\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + \sqrt{\frac{1}{3}(2x+1)^2+1}) + C$$

(2) 直接作代换 $x = cos\theta$:

(3) 直接作代换: $x =$

$$\int \sqrt{1-x^2}dx = \int \sin\theta d\cos\theta = -\int \sin^2\theta d\theta = \frac{\int(\cos 2\theta - 1)d\theta}{2} = \frac{\sin 2\theta}{4} - \frac{\theta}{2} + C$$

$$= \frac{x\sqrt{1-x^2} - \arccos x}{2} + C$$

$sec\theta$

$$\int \frac{dx}{(x^2-1)^{\frac{3}{2}}} = \int \frac{d\sec\theta}{\tan^3\theta} = \int \frac{\cos\theta d\theta}{\sin^2\theta} = \frac{1}{\sin\theta} + C = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} + C$$

* 根式形如 $\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}(n \in N^+)$

使用三角代换的局限性是只能处理根式是二次根式的情况,当根式次数超过二次时,对于 $\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}(a \neq 0, n \in N^+)$ 这种特殊形式我们可以令 $t = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$，将被积函数化成用 t 表示的有理式.

这种形式的两种特殊情况是形如 $\sqrt[n]{ax+b}$ 和 $\sqrt[n]{\frac{1}{cx+d}}$，处理方法相同.

[例 3.13] 求: $\int \frac{dx}{x+\sqrt{x+2}}(2)\int \sqrt{\frac{1-x}{2+x}}dx(3)\int \frac{dx}{1+\sqrt[4]{x+1}}$

解:

(1) 令 $t=\sqrt{x+2}$，那么 $x=t^2-2$，因此：

$$\int \frac{dx}{x+\sqrt{x+2}}=\int \frac{2tdt}{t^2+t-2}=\int \frac{2}{3}(\frac{1}{t-1}+\frac{2}{t+2})dt=\frac{2}{3}\ln(\left|(t-1)(t+2)^2\right|)+C$$

$$=\frac{2}{3}\ln(\left|\sqrt{x+2}-1\right|)+\frac{4}{3}\ln(\sqrt{x+2}+2)+C$$

(2) 令 $t=\sqrt{\frac{1-x}{x+2}}$，那么 $x=\frac{1-2t^2}{t^2+1}$ 因此：

$$\int \sqrt{\frac{1-x}{2+x}}dx=-\int \frac{6t^2dt}{(t^2+1)^2}=-(\int \frac{6\tan^2\theta d\theta}{(\tan^2\theta+1)})_{t=\tan\theta}$$

$$=-6\int \sin^2\theta d\theta=3\sin 2\theta-6\theta+C$$

这里化成第二步的形式之后用了三角代换，其目的是简化分母上的 $(t^2+1)^2$，接下来我们只要用 $x=\cos^2\theta-2\sin^2\theta=\frac{3\cos 2\theta-1}{2}$ 的逆代换，即可得到最终的结果：

$$\sqrt{9-(2x+1)^2}-3\arccos\frac{2x+1}{3}+C$$

(3) 令 $t=\sqrt[4]{x+1}$，那么 $x=t^4-1$，因此：

$$\int \frac{dx}{1+\sqrt[4]{x+1}}=\int \frac{4t^3dt}{1+t}=\int (\frac{4(t^3+1)}{t+1}-\frac{4}{1+t})dt$$

$$=\int 4(t^2-t+1)dt-\int \frac{4dt}{1+t}=\frac{4}{3}t^3-2t^2+4t-4\ln(1+t)+C$$

$$=\frac{4}{3}(x+1)^{\frac{3}{4}}-2\sqrt{x+1}+4\sqrt[4]{x+1}-4\ln(1+\sqrt[4]{x+1})+C$$

评注：对于 (2)，我们实际上历经了两次代换，其等价于一步的代换 $x=\cos^2\theta-2\sin^2\theta$

上对于形如 $\sqrt{\frac{b-x}{x+c}}$ 的式子，我们还可以使用 $x=b\cos^2\theta-c\sin^2\theta$ 这种代换来简化根式，不过这也只适用于根式是二次的情况，如果原题里被积函数是 $\sqrt[3]{\frac{1-x}{2+x}}$，那么这种代换就不再适用了. 代换后我们只能用下面的待定系数法处理.

在用三角变换处理时我们也会发现，三角代换不仅仅可以用来消除根式，它的根本作用是缩项，在消去根式的时候，它是把形如 $\sqrt{at^2+l}$ 的式子变成了 $\sqrt{au^2}$ 使得根式被去掉了，在没有根式的式子里，例如对形如 $\int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^n}$ 进行积分，我们也可以用三角代换使其变成 $\int \sin^m\theta\cos^l\theta d\theta$ 这种相对容易处理的形式.

- 被积式中含有三角函数：

在对被积式进行三角代换之后往往根式可能消除了，但是随之而来的就是大量 $sinx, cosx$ 的出现，很多时候积分并没有简化，这时我们可以用万能代换把三角有理式化成代数有理式. 通常使用这种代换方法总是可以把目标变成可以处理的有理式积分，但是之后的计算往往可能很繁琐，因此用这种代换做积分往往是被积式无从下手之后的下下策.

令 $t=\tan\frac{\theta}{2}$ 那么 $\sin\theta=\frac{2t}{1+t^2}$，$\cos\theta=\frac{1-t^2}{1+t^2}$，$\tan\theta=\frac{2t}{1-t^2}$ 这样所有的三角式都变成了有理分式.

$(1)\int \frac{d\theta}{1+2\sin\theta}(2)\int \frac{\cos\theta d\theta}{1+3\sin\theta}$

[例 3.14] 求

(1) 令 $t=\tan\frac{\theta}{2}$，则 $\sin\theta=\frac{2t}{1+t^2}$，于是原式变为：

$$\int\frac{d\theta}{1+2\sin\theta}=\int\frac{2d\arctan t}{1+\frac{4t}{1+t^2}}=\int\frac{2dt}{t^2+4t+1}$$

$$=\int\frac{2dt}{(t+2)^2-3}=\int\frac{1}{\sqrt{3}}(\frac{1}{t+2-\sqrt{3}}-\frac{1}{t+2+\sqrt{3}})dt$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\ln(|\frac{t+2-\sqrt{3}}{t+2+\sqrt{3}}|)+C=\frac{1}{\sqrt{3}}\ln(|\frac{\tan\frac{\theta}{2}+2-\sqrt{3}}{\tan\frac{\theta}{2}+2+\sqrt{3}}|)+C$$

(2) 令 $t=\tan\frac{\theta}{2}$，则 $\sin\theta=\frac{2t}{1+t^2}$、$\cos\theta=\frac{1-t^2}{1+t^2}$，于是原式变为：

$$\int\frac{\sin\theta d\theta}{1+3\cos\theta}=\int\frac{\frac{2t}{1+t^2}\frac{2}{1+t^2}dt}{1+\frac{3-3t^2}{1+t^2}}=\int\frac{4tdt}{(t^2+1)(4-2t^2)}$$

$$=\int\frac{dt^2}{(t^2+1)(2-t^2)}=\frac{1}{3}\int(\frac{1}{1+t^2}-\frac{1}{t^2-2})dt^2=\frac{2}{3}\ln|\frac{1+t^2}{t^2-2}|+C$$

$$=\frac{1}{3}\ln|1+3\cos\theta|+C$$

评注：对于（2），也可以采用凑微分的方法.

3) 分部积分法

理论依据：（课本 p208 页）（条件略写）

$$\int udv=uv-\int vdu$$

这个公式

定积分相互转

在实际应

它写成 $d\int\varphi($

$\ln x,\sin x,e^x$

(1) $\int x^3\ln xdx$(2) $\int\arctan xdx$

[例 3.15] 求

解：

(1)

$$\int x^3\ln xdx=\int\ln xd\frac{x^4}{4}=\frac{x^4\ln x}{4}-\int\frac{x^4d\ln x}{4}=\frac{x^4\ln x}{4}-\int\frac{x^3dx}{4}$$

$$=\frac{x^4\ln x}{4}-\frac{x^4}{16}+C$$

(2)

$$\int\arctan xdx=x\arctan x-\int\frac{xdx}{1+x^2}=x\arctan x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C$$

评注：如果被积式可以写成 $P(x)q(x)$，其中 $q(x)$ 是 $arcsinx, arccosx, arctanx, lnx$ 之一，$P(x)$ 的积分较易求得，那么我们分部时就会尽量写成 $\int P(x)q(x)dx=\int q(x)d\int P(x)dx=q(x)\int P(x)dx-\int P(x)dq(x)$，这是因为像 $arcsinx, arccosx, arctanx, lnx$ 这样较难处理的超越式，在通过一次求导之后就会变成形如 $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \frac{1}{x}, \frac{1}{1+x^2}$ 这样的代数（有理）式，积分会相对容易一些.

当然，仅对于含有反三角函数的积分而言，我们也可以直接令 $t=arcsinx$，然后将积分式化为关于 t 的三角积分.

[例 3.16] 求

$$(1)\int x^2\sin xdx(2)\int x^2e^xdx(3)\int e^x\sin xdx$$

解:

$$(1)\int x^2\sin xdx=-\int x^2d\cos x=\int 2x\cos xdx-x^2\cos x=\int 2xd\sin x-x^2\cos x$$

$$=2x\sin x-2\int\sin xdx-x^2cosx=2x\sin x+2\cos x-x^2\cos x+C$$

$$(2)\int x^2e^xdx=\int x^2de^x=x^2e^x-2\int xe^xdx=x^2e^x-2\int xde^x$$

$$=x^2e^x+2\int e^xdx-2xe^x=(x^2-2x+2)e^x+C$$

$$(3)\int e^x\sin xdx=\int\sin xde^x=\sin xe^x-\int e^x\cos xdx=e^x\sin x-\int\cos xde^x$$

$$=e^x(\sin x-\cos x)-\int e^x\sin xdx$$

移项可得:

$$\int e^x\sin xdx=\frac{1}{2}e^x(\sin x-\cos x)+C$$

评注:无论是哪种积分方法最终目的都是简化积分,像 $e^x,\sin x,\cos x$ 这种式子它们的 n 重积分和 n 阶导数都很容易求得,如果当我们遇到 $\int P(x)q(x)dx$ 这样的积分(其中 $P(x)$ 是多项式,$q(x)$ 是 $e^x,\sin x,\cos x$ 之一),那么我们可以考虑对这个式子分部积分使得多项式被多次求导最后化为常数.

如果遇到的式子是形如上面例题(3)中 $e^x,\sin x,\cos x$ 的组合,我们也要利用好这类函数导数的周期性,一直对其中一项进行分部直到出现与初始式子相同的式子.

•定积分里的分部

定积分里的分部常常被用来作一些定积分等式的推导,在求递推时也很有用.(课本 p211 页)设u,v 均在区间 $[a,b]$ 上有连续导数,那么:

$$\int_a^b udv=uv|_a^b-\int_a^b vdu$$

此部分主要是先求不定积分再用牛莱公式,例题不再赘述,课本 p212 页给出了一个重要结论(建议记忆,可以加速求定积分):

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n xdx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n xdx$$

当 n 为奇数时,原式 $=\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdot\ldots\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}$
当 n 为偶数时,原式 $=\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdot\ldots\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}$

4) 其他积分方法(待定系数法 ⋆⋆⋆)

(课本上没有明确提及)在用万能公式对三角积分进行代换时,常常会遇到被积函数变成了 $\int\frac{P(x)}{Q(x)}dx$ 的形式,其中 $P(x),Q(x)$ 都是多项式,一般来说这种式子总是可积的,处理的一种一般方法就是将 $Q(x)$ 进行因式分解(写成一次式的乘积).由于该方法有多种情况,会涉及复数范围的因式分解,我们只讨论最简单的一种情况:若 $Q(x)=a(x+b_1)(x+b_2)\ldots(x+b_n)$,那么我们可设:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{c_1}{x+b_1}+\frac{c_2}{x+b_2}+\ldots+\frac{c_n}{x+b_n}$$

其中 $c_1,c_2,\ldots,c_n$ 是待定的常数,具体的值会根据最后通分之后的式子分子应该与 $P(x)$ 完全相等来确定.

[例 3.17]求

解: $(1)\int\frac{x+4}{(x+1)(x-3)}dx(2)\int\frac{dx}{x(x+1)^2}$

设 $\frac{x+4}{(x+1)(x-3)}=\frac{a}{x+1}+\frac{b}{x-3}=\frac{(a+b)x+b-3a}{(x+1)(x-3)}$

根据恒等式可得：
因此：

$$\begin{cases} a+b=1 \\ b-3a=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-\frac{3}{4} \\ b=\frac{7}{4} \end{cases}$$

$$\int \frac{x+4}{(x+1)(x-3)}dx = \int (\frac{7}{4(x-3)} - \frac{3}{4(x+1)})dx = \frac{7}{4}\ln|x-3| - \frac{3}{4}\ln|x+1| + C$$

(2) 设 $\frac{1}{x(x+1)^2} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{(x+1)^2} = \frac{(a+b)x^2+(2a+b+c)x+a}{x(x+1)^2}$
根据恒等式可得：

$$\begin{cases} a+b=0 \\ 2a+b+c=0 \\ a=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-1 \\ c=-1 \end{cases}$$

因此：

$$\int \frac{dx}{x(x+1)^2} = \int (\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2})dx = \ln|\frac{x}{x+1}| + \frac{1}{x+1} + C$$

评注：对形如（2）中的式子进行待定系数时，如果出现了类似 $(x+1)^2$ 这样的重根，待定系数时我们考虑将其看成 $\frac{1}{x+1}, \frac{1}{(x+1)^2}$ 两个因子构成，同理，如果是 $\frac{1}{(x+1)^3}$，那就是 $\frac{1}{x+1}, \frac{1}{(x+1)^2}, \frac{1}{(x+1)^3}$ 三个因子.

不定积分方法总结

1) 先观察有没有根式，有的话试试能不能用代换将其消去.

2) 如果原式中明显可以凑出一个微分式出来先把微分式写上，例如：看到 $\frac{dx}{\sqrt{x}}$，就要想到 $\frac{dx}{\sqrt{x}} = 2d\sqrt{x}$.

3) 对于代换处理后的式子，如果是分子分母全部由多项式组成，尝试用待定系数法将原式拆成几个简单的式子之和.

4) 如果式子符合分部积分的几种特殊情况之一，尝试分部.

5) 实在无从下手看看能不能猜一下最终结果的形式，尝试待定系数.

6) 将中间的代换代回原来的式子，注意我们最终结果是要求一个关于 x 的式子，中途若有 $x=\varphi(t)$ 的代换最后 t 也不可以出现在结果里.

7) 对结果进行求导检验（可省略），看看有没有少某一项或者常数 C.

注：求解定积分的方法和不定积分类似，只是我们要注意定积分式子里的范围，因为求解不定积分的最终结果里常常有绝对值，而定积分里必须要注意去这些绝对值. 为了避免错误，事先可以先大概估计一下目标定积分的大概范围（是否大于 0 或是否大于 1）这样就不会出现一些奇葩的错误.

3.5 定积分的应用

1) 建立积分表达式的微元法：分、匀、合、精（⋆⋆），详情参考课本 p217-218
2) 求解平面曲线的长度，旋转体的面积，体积，曲线围成图形的面积.
具体公式以表格形式给出：（⋆⋆⋆）

表 3: 定积分的应用常见公式

几何量（设曲线都在 x 轴上方）	积分表示的结果
$y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上和 x 轴围成图形的面积	$\int_a^b y dx$
$y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 这段的长度	$\int_a^b \sqrt{1+(y')^2}dx$
$y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上一段绕 x 轴旋转形成几何体的体积	$\int_a^b \pi y^2 dx$
$y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上一段绕 x 轴旋转形成几何体的侧面积	$\int_a^b 2\pi y\sqrt{1+(y')^2}dx$

注意当曲线方程是以参数方程形式给出时，以上公式依然成立，导数的求法请参考第二章里对参数方程的求导. 极坐标可以看成特殊的参数方程.

3) 掌握定积分在物理中的应用，例如求解力做的功，物体的质量等等.（⋆⋆）

这部分知识点比较难说清，关键在于合理使用微元法，认识到在 dx 的微元里，作用在各部分的力，质量都近似看成相等.

3.5.1 知识点

3.5.2 例题

[例 3.18]

求曲线 $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}$ 与坐标轴围成图形的面积.
解析：给出的方程直接写成的形式较繁琐，我们用参数方程来表示.
解：考虑这个方程的参数方程：

$$\begin{cases} x = am^2 \\ y = a(1-m)^2 \end{cases}$$

其中参数满足 $0 \le m \le 1$.
因此面积为：

$$S=\int_0^a ydx=\int_0^1 a(1-m)^2 d(am^2)=2a^2\int_0^1 m(1-m)^2dm=\frac{a^2}{6}$$

评注：很多时候曲线的方程是以隐函数的形式给出的，如果写成 $y=f(x)$ 的形式很繁琐甚至不可以写出. 这时就需要我们引入参数用参数方程来刻画这个曲线，参数的选取具有较强的技巧性，但 这超出了本小册子讨论的范围. 我们只需要对简单的几种参数选取有一定印象即可. 另外取 $y=tx$（然后选取 t 为参数）是一种常用的参数表示法.

[例 3.19] 求心形线 $\rho=4(1+\cos\theta)$ 被射线 $\theta=0$ 和射线 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 所夹的那部分围绕极轴旋转产生的旋转体的体积.

解析：极坐标方程是特殊的参数方程，$\rho=\rho(\theta)$ 等价于：

$$\begin{cases} x = \rho(\theta)\cos\theta \\ y = \rho(\theta)\sin\theta \end{cases}$$

这是一个关于 θ 的参数方程.
解：考虑该曲线用 θ 表示的参数方程：

$$\begin{cases} x = 4(1+\cos\theta)\cos\theta \\ y = 4(1+\cos\theta)\sin\theta \end{cases}$$

即可得到：

评注：在求解一些不知名曲线的旋转体积，长度问题时有时画一个草图会对解题很有帮助.（草图可以用描点法来画，选取上面 5 个点，结合对称性.） 这些问题的关键还是写出参数方程，然后把参数方程直接带入即可.

$$V=\int_0^4 \pi y^2 dx=|\int_0^{\frac{\pi}{2}} 16\pi\sin^2\theta(1+\cos\theta)^2 d(4\cos\theta+4\cos^2\theta)|$$

$$=64\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\theta(1+2\cos\theta)(1+\cos\theta)^2 d\theta$$

$$=-64\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos^2\theta)(1+2\cos\theta)(1+\cos\theta)^2 d\cos\theta$$

$$=64\pi(\int_0^1 (1-t^2)(1+2t)(1+t)^2 dt)_{t=\cos\theta}=160\pi$$

[例 3.20] 有一直角三角形板，其直角顶点到斜边高的距离是 h. 两条直角边长分别是 a 和 b，将

其铅直放入水中.

（1）如果直角顶点在水面，斜边在水下且与水面平行

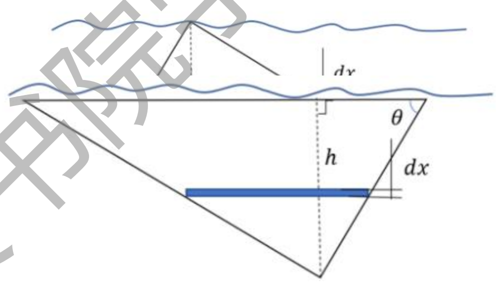
（2）如果斜边与水面相齐.

分别求出这两种情况下该板一侧受到的水压力.

解析: 问题中板受到的压力不可以直接用公式“压强 × 受力面积”来计算，主要是板上不同深度的点随水下深度的不同而变化，我们可以把板分成许多水平细条，由于各细条上的点到水面的距离近似相等，所以细条上个点处压强也近似相等，可用公式“压强 × 受力面积”算出各细条受到压力的近似值，将其积分即可得到整块板所受的压力. 题目要求求解两种不同摆法的板受到的压力，先依题意画出草图.

解：我们设该直角三角形其中一个直角大小是 θ.

此时板在水中的情况如图 1（见下页）所示：



我们考虑把整块板分成宽为 dx 的一个个小矩形，对于每个小矩形，当 $dx\to 0$ 时可以近似看成矩形上的压力处处相等，设矩形对应的深度是 x，那么每个点受到的压强都是ρgx，其中ρ是水的

$$dF=pS=\rho gx\cdot x(\tan\theta+\cot\theta)dx=\rho gx^2(\frac{a}{b}+\frac{b}{a})dx$$

$$F=\int dF=\int_0^h \rho gx^2(\frac{a}{b}+\frac{b}{a})dx=\frac{\rho gh^3(a^2+b^2)}{3ab}$$

密度，g 是重力加速度，矩形受到的力：

于是整个矩形受到的力：(2) 此时板在水中的情况如图 2 所示：

与（1）类似，只是深度为 x 的矩形受到的压强变成了 $\rho g(h-x)$，因此每个矩形受到的力变成了$dF=\rho gx(h-x)\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)dx$,那么整个板受到的力：

此处答案与课本答案略有不同，原因是 h 和 a,b 之间本身存在等式关系.

$$F=\int dF=\int_0^h \rho gx(h-x)(\frac{a}{b}+\frac{b}{a})dx=\frac{\rho gh^3(a^2+b^2)}{6ab}$$

3.6 反常积分

3.6.1　　知识点

1）

了解两种反常积分的概念（★★★）：

（考试时常常出判断题，判别反常积分一个重要方法就是根据定义）

具体概念请参照课本 p228 和 p230

无穷积分是否存在关键看 $\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim\limits_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx$ 这个极限是否不存在，而无界函数的积分是否存在看 $\int_a^b f(x)dx = \lim\limits_{\varepsilon\to 0+}\int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx + \lim\limits_{\varepsilon\to 0+}\int_{c+\varepsilon}^b f(x)dx$（如果 c 是奇点）这两个极限是否都存在，注意对于无穷积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$，如果它要求收敛必须要 $\lim\limits_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx$ 和 $\lim\limits_{c\to+\infty}\int_b^c f(x)dx$ 两个极限同时存在，这里的　b　是任意选取的两个常数.

特别注意的是设 $f(x)$ 的原函数是 $F(x)$，那么 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ 不存在不等价于 $\lim\limits_{x\to\infty}(F(x)-F(-x))$ 存在（课本 p240 页第 7 题），同样对于奇点是 c 的反常积分 $\int_a^b f(x)dx$，$\int_a^b f(x)dx$ 存在不等价于 $\lim\limits_{\varepsilon\to 0+}(\int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx + \int_{c+\varepsilon}^b f(x)dx)$ 存在（课本 p241 页 B 组第 1 题）. 这两种情况常常被用来出判断敛散性的判断题.

2) 理解几种收敛比较准则

（这是判断一个给定函数是否收敛的主要方法，也是考试常考简答题的）

摘自课本 p234 和 p233，由于无穷积分和无界函数积分比较准则表达类似，所以我们这里只列出一种.

比较准则 I（★★★★）：

设 f,g 在 $[a,+\infty)$ 上连续，并且 $0\le f(x)\le g(x), \forall x\in[a,+\infty)$，那么：

（1）当 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 发散时，$\int_a^{+\infty} g(x)dx$ 发散.

（2）当 $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ 收敛时，$\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛.

比较准则 II（★★★★）：

设 f,g 在 $[a,+\infty)$ 上非负连续，而且 $g(x)>0$，设 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lambda$（有限或无穷），那么：

（1）当 $\lambda>0$ 时，$\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 和 $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ 同敛散.

（2）当 $\lambda=0$ 时，当 $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ 收敛时，$\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 也收敛.

（3）当 $\lambda=+\infty$ 时，当 $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ 发散时，$\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 发散.

绝对收敛准则（★★★）

设 $f\in C[a,+\infty)$，如果 $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ 发散，那 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 发散收敛（此时称 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 绝对收敛）

3.6.2 三种准则的相互对比

比较准则 I 是根本的比较准则，另外两种准则都是根据它推导出来的.

比较准则 II 的实现需要一个极限的存在，但是在我们遇到的题目中往往比比较准则 I 更加好用，因为它考虑的是除法的结果，复杂的函数作减法往往比较难判断符号，但是除法之后求极限比较就相对容易一些.

两种准则都有两个要求：

（1）必须要有一把“尺子“函数 $g(x)$，它与 $f(x)$ 之间的大小极限关系要容易判断，且 $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ 的敛散性已知.

（2）无论是 $f(x)$ 还是 $g(x)$，它在目标区间上的符号都不能改变.

但是两种准则的优势也很明显，它将判断 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 的敛散性归结于另一个已知敛散性的积分（我们甚至不需要计算 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 的值），这在 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 的表达式很复杂时十分有效.

对于在给定区间上符号会改变的函数，只能用绝对收敛准则，由于取绝对值之后的函数始终是正数，因此我们可以对 $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$ 应用比较准则 I 和比较准则 II （注意 $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$ 收敛并不是 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛的必要条件）. 对于考试中的题目而言，这三种比较准则已经基本够用.

在使用比较准则 I 和比较准则 II 寻找“尺子“时，一种经常找的比较函数就是 $x^p(p \neq 0, p \in R)$，对于它的反常积分我们有有如下结论：

表 4: p 积分相关结论

积分名	参数 p 的范围	敛散性
$\int_1^{+\infty} x^p dx$	$p \geq -1$	发散
$\int_1^{+\infty} x^p dx$	$p < -1$	收敛
$\int_0^1 x^p dx$	$p > -1$	收敛
$\int_0^1 x^p dx$	$p \leq -1$	发散

由于 $\int x^p dx$ 的反常积分比较容易判断，是我们首先考虑的“尺子”.

3.6.3 关于$\int x^p dx$的反常积分（★★★★）

3.6.4 例题

［例 3.21］判断下列反常积分的敛散性：

(1) $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x-1}}$(2) $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2}dx$(3) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$

解：

(1) 取 $f(x) = \frac{1}{x\sqrt{x-1}}, g(x) = x^{-\frac{3}{2}}$，则

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-1}} = 1$$

(2) 被积函数在给定区间上符号不断改变，考虑用绝对收敛准则.

由于 $|\sin x| \leq 1$，因此 $\int_1^{+\infty} |\frac{\sin x}{x^2}|dx < \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ 而 $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ 收敛，根据比较准则 I，原反常积分收敛.

(3) 明显可以看出 $\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C$，直接根据定义：

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{x\to\infty} \arctan x - \lim_{x\to-\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$$

那么原反常积分收敛.

评注：当遇到（3）这种原函数很容易求出的，优先考虑求出原函数然后用定义求，虽然（1）的原函数也可以求，但表达形式较复杂，用比较准则更好. 当然（3）也可以与 $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ 作比较.

解：此题中奇点有两个，要分开讨论.

$$\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} = \int_a^{\frac{a+b}{2}} \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} + \int_{\frac{a+b}{2}}^b \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}$$

对于左边的奇点 $x=a$，我们取 $f(x)=\frac{1}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}, g(x)=\frac{1}{\sqrt{x-a}}$，那么

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{1}{\sqrt{b-x}} = \frac{1}{\sqrt{b-a}}$$

而 $\int_a^{\frac{a+b}{2}} \frac{dx}{\sqrt{x-a}}$ 收敛，因此 $\int_a^{\frac{a+b}{2}} \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}$ 收敛（比较准则 II）.

对于右边的奇点 $x=b$，我们取 $f(x)=\frac{1}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}, g(x)=\frac{1}{\sqrt{b-x}}$，那么

$$\lim_{x\to b}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to b}\frac{1}{\sqrt{x-a}} = \frac{1}{\sqrt{b-a}}$$

而 $\int_{\frac{a+b}{2}}^b \frac{dx}{\sqrt{b-x}}$ 收敛，因此 $\int_{\frac{a+b}{2}}^b \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}$ 收敛（比较准则 II）.

综上可知，原积分收敛.

为了求 $\int^b \frac{dx}{}$ 的值，我们当然可以直接积分求出它的原函数然后代入 a 和 b 的值来求极限

判断 $\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}(b>a>0)$ 的敛散性，如果收敛，求其值. 那么考虑令 $x=a\cos^2 t+b\sin^2 t$，这里 $0<t<\frac{\pi}{2}$（这时 x 的范围也恰好是 (a,b)）

故有：

$$\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2(b-a)\sin t\cos t dt}{\sqrt{(b-a)\sin^2 t}\cdot\sqrt{(b-a)\cos^2 t}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2dt = \pi$$

评注：这里求值的代换 $x=a\cos^2 t+b\sin^2 t$ 并非空穴来风，之前我们针对 $\sqrt{\frac{b-x}{x+c}}$ 使用过类似的代换，通过代换去除了根号之后积分式明显简化了.

［例 3.22］

1) 首先判断这个积分里的“反常”之处有哪些，如果奇点不止一个或者既有奇点又有无穷区间那么要分段来考虑.

2) 再观察这个式子的不定积分是不是可以直接积出，若可以，直接用定义解决.（这种情况比较少见）

3) 然后看它在给定区间上是否变号，若不变号，先试试可不可以用合适的 p 积分来进行比较. 若不断变号，那么考虑用绝对收敛准则.（考试不会很为难你，一般这种变号的取绝对值之后都很好判断）

4) 当 p 积分难以充当“尺子”时，再根据经验选取其他函数（如 $\int \frac{dx}{x\ln^p x}$ 等）.

3.6.5 反常积分方法总结

4 常微分方程

4.1几类简单的微分方程

4.1.1 常微分方程的基本定义 ★

微分方程：含有未知函数导数（或微分）的方程为微分方程

常微分方程：微分方程中未知函数y是自变量x的一元函数，则该方程称为常微分方程.

阶：微分方程中所含未知函数的最高阶导数（或微分）的阶数

通解：微分方程中含有等于该方程阶数个相互独立的常数的解称为微分方程的通解（注意通解不一定包含所有解）

特解：微分方程不含任意常数的解称为特解

定解条件：确定通解中任意常数的附加条件

4.1.2 可分离变量的一阶微分方程 ★★★

形如$\frac{dy}{dx}=f(x)g(y)$方程，化为$\dfrac{dy}{g(y)}=f(x)dx$，然后分别对两边积分，即可求出通解，此方法称为分离变量法.注意对$g(y)=0$的情况单独讨论，若该情况可以包含在通解中，则无需单独列出，否则需要将此情况单独写出.

注意：注意题目要求，若题目中要求求解通解，则无需考虑$g(y)=0$的情况.

[例 4.1] 解微分方程 $(xy^2+x)dx+(y-x^2y)dy=0$

解：等式两边除以x^2-1和y^2-1变为：

$$\frac{x\cdot dx}{x^2-1}=\frac{y\cdot dy}{y^2+1}$$

等式两边分别积分得到：

$$1+y^2=C\left(1-x^2\right)$$

由于y^2+1恒不为0，因此该解即为该方程的解.

4.1.3 一阶线性微分方程 ★★★★

未知函数及其导数都是一次的一阶微分方程称为一阶线性微分方程，其一般形式为$y'+P(x)y=Q(x)$，称为非齐次线性微分方程. 当$Q(x)=0$时，该方程变为$y'+P(x)y=0$，称为齐次线性微分方程.

一阶线性齐次方程是可分离变量的方程. 对于形如$y'+P(x)y=0$的方程，分离变量得到

$\frac{dy}{y} = - P(x)dx$，两边积分得到通解，通解形式为 $y = C \cdot e^{-\int P(x)dx}$

对于形如 $y' + P(x)y = Q(x)$ 的方程，解的一般形式为

$y = e^{-\int P(x)dx}\left(\int Q\left(x\right)e^{\int P(x)dx}dx + C\right)$

（C 是任意常数）.

上述公式记住最好，如果记不住，求解此方程也可使用常数变易法，主要方法为

1. 先求出非齐次微分方程对应齐次微分方程的通解
2. 再将通解中的常数 C 用$h(x)$代换
3. 带入原方程即可求出$h(x)$

但此方法计算量略大

[例 4.2] 求微分方程$xy' - y = \frac{x}{\ln x}$的通解

解：两边同除x即可化为一阶线性微分方程的一般形式

两边同除x得：

$$y' - \frac{y}{x} = \frac{1}{\ln x}$$

先求齐次方程$y' - \frac{y}{x} = 0$的解，利用分离变量法不难得到解为

$$y = Cx$$

令非齐次方程的解为

$$y = h(x) \cdot x$$

代入微分方程得：

$$h'(x) \cdot x + h(x) - h(x) = \frac{1}{\ln x}$$

解得：

$$h(x) = \ln(\ln x) + C$$

所以原微分方程的解为：

$$y = x\ln(\ln x) + Cx$$

[例 4.3] 求解方程 $xy' - y\ln y = x^2y$

解：出现$\ln y$，不属于学过的任何一种形式. 目标是对方程进行处理，使它成为学过的形式.

等式两边除以xy，得到：

$$\frac{y'}{y} - \frac{\ln y}{x} = x$$

注意$\ln y$的导数是$\frac{1}{y} \cdot y'$，方程可变为：

$$(\ln y)' - \frac{1}{x}(\ln y) = x$$

原方程变成了一阶非齐次微分方程. 解得$\ln y = x(x+C)$，即 $y = e^{x(x+C)}$

4.1.4 变量代换法 ★★★★

1) 齐次微分方程

形如$\dfrac{dy}{dx} = f\left(\dfrac{y}{x}\right)$的一阶微分方程称为齐次微分方程.

此方程的求解方法：令$u = \dfrac{y}{x}$，即可转化为一个可分离变量的方程，求解得到 u 之后代入$u = \dfrac{y}{x}$得原方程通解.

[例 4.4] 解微分方程$y' = \dfrac{y}{x} + \dfrac{x}{y}$，$y|_{x=-1} = 2$

解：令$u = \dfrac{y}{x}$，则$y' = \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{d(ux)}{dx} = u + x\dfrac{du}{dx}$.

代入原方程得：

$$u + x\frac{du}{dx} = u + \frac{1}{u}$$

即

$$u \cdot du = \frac{dx}{x}$$

等式两边积分得：$\dfrac{1}{2}u^2 = \ln x + C$，即 $y^2 = 2x^2(\ln x + C)$

将定解条件带入可得：$C = 2$.

2)*Bernoulli* 方程

形如$\dfrac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^{\alpha}(\alpha \neq 0, 1)$的方程

解法：

1. 等式两边同除以y^{α}得到：$y^{-\alpha}\dfrac{dy}{dx} + P(x)y^{1-\alpha} = Q(x)$

2. 令$u = y^{1-\alpha}$，则$\dfrac{du}{dx} = (1-\alpha)y^{-\alpha}\dfrac{dy}{dx}$

3. 代入原方程得：$\dfrac{du}{dx} + (1-\alpha)P(x)u = (1-\alpha)Q(x)$. 原方程变为一阶微分非齐次方程.

4. 求解出 u，进而求解 y.

[例 4.5]求微分方程$x\dfrac{dy}{dx} + y = x^2y^2$的通解

解：两边除 x 后就化为典型的 *Bernoulli* 方程

两边同除 x 得：

$$\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = xy^2$$

两边同除y^2，得：　　　　　　$y^{-2}\frac{dy}{dx}+\frac{1}{xy}=x$

令$u=\frac{1}{y}$，则$\frac{du}{dx}=-\frac{1}{y^2}\frac{dy}{dx}$，方程化为：　$-\frac{du}{dx}+\frac{u}{x}=x$

解得：　　　　　　　　　　$u=(-x+C)x$

所以：　　　　　　　　　　$y=\frac{1}{(-x+C)x}$

.

3) 其他可用变量代换法的一阶微分方程

[例 4.6] 求解微分方程$(3x^2+x+y^2)dx+ydy=0$

解：原方程变形可得：

$$(3x^2+x+y^2)dx+\frac{dy^2}{2}=0$$

令$u=y^2$

$$(3x^2+x+u)dx+\frac{du}{2}=0$$

变形为一阶非齐次微分方程：

$$\frac{du}{dx}+2u=-(2x+6x^2)$$

解得：

$$y^2=-3x^2+\frac{5}{2}x-\frac{5}{4}+Ce^{-2x}$$

[例 4.7] 求解微分方程$(x+y)(xdy+ydx)=xy(dx+dy)$

解：注意到$d(x+y)=dx+dy$，$d(xy)=xdy+ydx$

原微分方程化为：

$$(x+y)d(xy)=xyd(x+y)$$

令$u=x+y,v=xy$，得

$$udv=vdu$$

解得：

$$xy=C(x+y)$$

小结：当题目中的方程不属于所给的任何一种形式时，注意对方程进行转化，绝大部分题目均可转化为常见类型，然后套用公式即可求解.

4.1.5　可降阶的高阶微分方程 ★★★

1) $y^{(n)}=f(x)$型，积分 n 次即可，较为简单.

2) $y''=f(x,y')$型，不显含 y，此类题型的一般求解方法是令$y'=p$，则$y''=\frac{dp}{dx}$，原方程化为以 p 为未知函数的一阶微分方程$\frac{dp}{dx}=f(x,p)$，求解此方程可解出 y.

[例 4.8] 求微分方程 $(1+x^2)y''=2xy'$ 的通解

解：此方程属于不含y的类型

令$p=y'$原方程变为：

$$(1+x^2)\,p' - 2xp = 0$$

分离变量得：

$$\frac{dp}{p} = \frac{2x}{1+x^2}dx$$

解得：

$$p = C_1\left(1+x^2\right), y' = C_1\left(1+x^2\right)$$

两端再次积分可得：

$$y = C_1\left(x+\frac{x^3}{3}\right)+C_2$$

3) $y''=f(y,y')$ 型，不显含 x，令 $p=y'$，则 $y''=\frac{dp}{dx}=\frac{dp}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}=p\frac{dp}{dy}$，原方程可化为 p 与 y 的一阶微分方程 $p\frac{dp}{dy}=f(y,p)$，由此方程求解 p 之后代入原方程可解得 y.

[例 4.9] 求微分方程 $yy''-(y')^2=0$ 的通解

解：此方程属于不含 x 的类型令 $y'=p$，则 $y''=\frac{pdp}{dy}$

代入原方程可得：

$$yp\frac{dp}{dy}-p^2=0$$

当 $p=0$ 时，y=C.

当 $y\frac{dp}{dy}-p=0$ 时，解得 $p=\frac{dy}{dx}=C_1y$，即 $y=C_2e^{C_1x}$

4.2 高阶线性微分方程

4.2.1 线性微分方程的基本定义与解的存在唯一性定理 ★

定义：一个 n 阶微分方程，如果其中的未知函数及其导数都是一次的，称其为 n 阶线性微分方程一般形式为：

$$p_0(t)x^{(n)}(t)+p_1(t)x^{(n-1)}(t)+\cdots+p_{n-1}(t)\dot{x}(t)+p_n(t)x(t)=f(t)$$

当 $f(t)$ 不恒为 0，称为 n 阶线性非齐次方程

当 $f(t)$ 恒为 0，称为 n 阶线性齐次方程

若该方程中的系数 $p_1(t),p_2(t),\cdots,p_n(t)$ 均在区间 (a,b) 内连续，则该方程存在唯一的满足初值条件的解 $x(t)$，称为解的存在唯一性定理.

4.2.2 解的叠合性，线性相关与线性无关，n 阶线性齐次方程解的线性无关判别法 ★★

若 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 均为该线性齐次方程的解，则这些解的任意线性组合仍为该齐次方程的解，称为解的叠合性.

线性相关与线性无关：与线性代数中的相关定义相同.

解的线性无关判别法：设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 均为该线性齐次方程定义在区间 I 内的解，则它们线性无关的充要条件是：在 I 上存在一点使这 n 个解及其各阶导数在 t_0 处构成的

$$\omega(t_0)=\begin{vmatrix} x_1(t_0) & x_2(t_0) & \cdots & x_n(t_0) \\ \dot{x}_1(t_0) & \dot{x}_2(t_0) & \cdots & \dot{x}_n(t_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ {x_1}^{(n-1)}(t_0) & {x_2}^{(n-1)}(t_0) & \cdots & {x_n}^{(n-1)}(t_0) \end{vmatrix}$$

Wronski 行列式 $\omega(t_0)$ 的值不为 0.

4.2.3　线性微分方程解的结构 ★★★

1.线性微分算子

记 $L(x)=\dfrac{d^n x}{dt^n}+P_1(t)\dfrac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+\cdots+P_{n-1}(t)\dfrac{dx}{dt}+P_n(t)x$

那么 n 阶线性齐次方程与 n 阶线性非齐次方程分别改写为：$L(x)=0, L(x)=F_1$

其中 $L(\ )=\dfrac{d^n}{dt^n}+P_1(t)\dfrac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}+\cdots+P_{n-1}(t)\dfrac{d}{dt}+P_n(t)$ 称为线性微分算子

线性微分算子的两个重要性质：

（1）$L(0)=0$；

（2）$L(C_1x_1+C_2x_2+\cdots+C_nx_n)=C_1L(x_1)+C_2L(x_2)+\cdots+C_nL(x_n)$

2.线性齐次方程的通解结构

n 阶线性齐次方程的通解可以表示为其 n 个线性无关的特解的线性组合

3.线性非齐次方程的通解结构

n 阶线性非齐次方程的通解可以表示为其任一特解与其对应的 n 阶线性齐次方程的通解的和

4.两个比较重要的结论

结论 1：若 x_1，x_2 是线性非齐次微分方程的解，则 x_1-x_2 必是对应的线性齐次微分方程的解

证明：若 x_1，x_2 是 $L(x)=F_1$ 的解，则 $L(x_1)=F_1, L(x_2)=F_1$

相减得：$L(x_1)-L(x_2)=0$，即 $L(x_1-x_2)=0$

所以 x_1-x_2 是 $L(x)=0$ 的解

结论 2：若 x_1，x_2 分别是线性非齐次微分方程 $L(x)=F_1, L(x)=F_2$ 的解，则 x_1+x_2 必是线性非齐次微分方程 $L(x)=F_1+F_2$ 的解

结论 2 的意义就在于求解线性非齐次微分方程的特解时可以把它化为两个便于求解的线性非齐次微分方程，再分别求特解，最后原方程的特解为二者之和。进一步的，可以直接设非齐次微分方程的特解形式为两个便于求解的线性非齐次微分方程的特解形式的和。

［例 4.10］已知 $y_1=e^{3x}-xe^{2x}, y_2=e^x-xe^{2x}, y_3=-xe^{2x}$ 是某二阶非齐次线性微分方程的 3 个解，则该微分方程的通解为_______

解：先求齐次方程的通解，由于线性非齐次方程的两个特解必为对应的线性齐次方程的解，

所以 $y_2-y_3=e^x, y_1-y_3=e^{3x}$ 必为齐次方程的解，并且二者线性无关

所以对应的齐次方程的通解为：$y=C_1e^x+C_2e^{3x}$

根据 n 阶线性非齐次方程的通解可以表示为其任一特解与其对应的 n 阶线性齐次方程的通解的和

选取特解$y_3=-xe^{2x}$，故答案为：$C_1e^x+C_2e^{3x}-xe^{2x}$

4.2.4　高阶常系数线性齐次微分方程的解法 ★★★★★

当该方程中的系数$p_1(t),p_2(t),\cdots,p_n(t)$均为常数时，该方程称为常系数微分方程. 该类方程的求解方式是：1. 先求解该方程对应的特征方程　2. 求出其特征根与特征值　3. 根据特征根的情况代入下表求解.

表 5: 特征根与对应通解

特征根	通解中的对应项
单实根λ	$Ce^{\lambda t}$
k 重实根λ	$e^{\lambda t}(C_1+C_2t+\cdots+C_kt^{k-1})$
一对共轭单复根 $\lambda_{1,2}=\alpha\pm i\beta$	$e^{\alpha t}(C_1\cos\beta t+C_2\sin\beta t)$
一对k 重共轭复根$\alpha\pm i\beta$	$e^{\alpha t}[(C_{11}+C_{12}t+\cdots+C_{1k}t^{k-1})\cos\beta t+(C_{21}+C_{22}t+\cdots+C_{2k}t^{k-1}\sin\beta$

4.2.5 高阶常系数线性非齐次微分方程的解法 ★★★★★

非齐次微分方程的求解方法为：1. 先求出该方程对应的齐次方程的通解 2. 求出该非齐次微分方程的任一特解 3. 两者之和为所求方程的解. 特解的求解方法见下表：表中 Z,Z_1,Z_2 均为与 φ 同次数的多项式.

表 6: 特解的求法

$f(t)$的类型	特征根的情况	应设特解$x^*(t)$的形式
m 次多项式$\varphi(t)$	0 不是特征根	$x^*=Z(t)$
m 次多项式$\varphi(t)$	0 是 k 重特征根	$x^*=t^kZ(t)$
$\varphi(t)e^{\mu t}$	μ 不是特征根	$x^*=Z(t)e^{\mu t}$
$\varphi(t)e^{\mu t}$	μ 是 k 重特征根	$x^*=t^kZ(t)e^{\mu t}$
$\varphi(t)e^{\mu t}\cos vt$或$\varphi(t)e^{\mu t}\sin vt$	$\mu+iv$不是特征根	$x^*=e^{\mu t}[Z_1(t)\cos vt+Z_2(t)\sin vt]$
$\varphi(t)e^{\mu t}\cos vt$或$\varphi(t)e^{\mu t}\sin vt$	$\mu+iv$是k 重特征根 $\left(1\leq k\leq\left[\frac{n}{2}\right]\right)$	$x^*=t^ke^{\mu t}[Z_1(t)\cos vt+Z_2(t)\sin vt]$

有关常系数线性微分方程，建议以课本为基础，通过大量做课后习题对此部分公式加以记忆，也建议在考前晚上对此部分公式加以重点记忆，防止混淆.

[例 4.11]

求 $y''-4y'+4y=3e^{2x}$ 的通解

解：与方程对应的齐次方程为$y''-4y'+4y=0$，特征方程为$\lambda^2-4\lambda+4=0$

特征方程的根为$\lambda_1=\lambda_2=2$

从而特征方程的解为C1(x + 1)e2x

由于2是重特征根，因此原方程的特解可以写为$y^*=kx^2e^{2x}$，代入原方程求得$k=\dfrac{3}{2}$，因此原方程的通解为：

$$y=C_1(x+1)e^{2x}+\frac{3}{2}x^2e^{2x}$$

[例 4.12] 求微分方程$\ddot{x}-5\dot{x}+6x=te^{2t}$的通解

解：特征方程的特征根 $\lambda_1=2,\lambda_2=3$，因此齐次方程的通解为 $x=C_1e^{2t}+C_2e^{3t}$由于 $\mu=2$ 是该特征方程的单根，因此设$x=t(B_0+B_1t)e^{2t}$，代入该方程可解得 $B_0=-1,B_1=-1/2$，因此特解 $x^*=-\left(t+\dfrac{1}{2}t^2\right)e^{2t}$，原方程通解为：$x=C_1e^{2t}+C_2e^{3t}-\left(t+\dfrac{1}{2}t^2\right)e^{2t}$

[例 4.13] 求微分方程$y''+9y=18\cos 3x-30\sin 3x$的通解

解：特征方程为$r^2+9=0$，其根为$r_{1,2}=\pm 3i$

对应的齐次方程的通解为： $y=C_1\cos 3x+C_2\sin 3x$

由于$3i$为特征方程的单根，因此设非齐次方程的特解为

$$y^*=x(a\cos 3x+b\sin 3x)$$

代入方程，比较系数求得：$a=5,b=3$

因此特解为： $y^*=x(5\cos 3x+3\sin 3x)$

所求通解为： $y=C_1\cos 3x+C_2\sin 3x+x(5\cos 3x+3\sin 3x)$

4.2.6 常见的高阶变系数线性微分方程的解法（Euler 方程 ★★★）

Euler 方程的一般形式：

$$t^n\frac{d^nx}{dt^n}+a_1t^{n-1}\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+\ldots+a_{n-1}t\frac{dx}{dt}+a_nx=f(t)$$

求解方法：通过变换$t=e^\tau$或$\tau=\ln t$ ($t>0$) 化为常系数线性微分方程.

[例 4.14] 求微分方程 $t^2\ddot{x}-t\dot{x}+x=0$的通解

解：此方程符合 *Euler* 方程形式，直接套用基本步骤即可令$t=e^\tau$，则有：

$$\frac{dx}{dt}=\frac{dx}{d\tau}\cdot\frac{d\tau}{dt},\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{1}{t^2}\left(\frac{d^2x}{d\tau^2}-\frac{dx}{d\tau}\right)$$

代入原方程，化简可得：

$$\frac{d^2x}{d\tau^2}-2\frac{dx}{d\tau}+x=0$$

可求得其通解为$x=(C_1\tau+C_2)e^\tau$，代入$\tau=\ln t$可求得其通解：

$$x=(C_1\ln t+C_2)t$$

4.3 线性微分方程组

4.3.1 线性微分方程组的概念 ★

形如 $\dfrac{dx_i(t)}{dt}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}(t)x_j(t)+f_i(t), i=1,2,\cdots,n, j=1,2,\cdots,n$ 的常微分方程组称为关于未知函数组的 n 阶线性常微分方程，简称为线性方程组

矩阵形式为: $\dfrac{d\vec{x}(t)}{dt}=A(t)\vec{x}(t)+\vec{f}(t)$

若 $\vec{f}(t)$ 恒为 0，称为齐次线性微分方程组

若 $\vec{f}(t)$ 不恒为 0，称为非齐次线性微分方程组

4.3.2 齐次线性微分方程组的基本性质 ★

1. $\vec{x}(t)\equiv 0$ 是该方程组的解，称为零解或平凡解.
2. 若解 $\vec{x}(t)$ 满足初值条件 $\vec{x}(t_0)=0$，则有 $\vec{x}(t)\equiv 0$.
3. 满足解的叠合性.

4.3.3 基解矩阵以及线性无关判别法 ★

此部分概念较为繁琐，且考察较少，在复习时可有选择的对课本知识进行复习.

4.3.4 常系数线性齐次微分方程组的求解方法 ★★★★

1) 基本理论：

对于形如 $\dfrac{dx_i}{dt}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j(i=1,2,\cdots,n)$ 的方程，记系数矩阵为 A，向量形式为 $\dfrac{d\vec{x}}{dt}=A\vec{x}$.

假设有形如 $\vec{x}=\vec{r}e^{\lambda t}$ 的解，代入上式得：

$\vec{r}\cdot\lambda\cdot e^{\lambda t}=\vec{r}\cdot\vec{A}\cdot e^{\lambda t}\Rightarrow(\vec{A}-\lambda\vec{E})\vec{r}=0$

λ 为 A 的特征值，r 为 λ 对应的的特征向量.

有三个解题必须用到的定理，分别对应解题中出现的三种情况

【定理 1】设 n 阶矩阵，A 有 n 个线性无关的特征向量 $\vec{r}_1,\vec{r}_2,\cdots,\vec{r}_n$，它们对应特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$，则矩阵 $\vec{X}(t)=(\vec{r}_1e^{\lambda_1 t},\vec{r}_2e^{\lambda_2 t},\cdots,\vec{r}_ne^{\lambda_n t})$ 为原方程组的一个基解矩阵.

【定理 2】设 λ_i 是矩阵 A 的 n_i 重特征向量，则该方程组必存在 n_i 个形如

$\vec{X}(t)=e^{\lambda_i t}(\vec{r}_0+\dfrac{t}{1!}\vec{r}_1+\dfrac{t^2}{2!}\vec{r}_2+...+\dfrac{t^{n_i-1}}{(n_i-1)!}\vec{r}_{n_i-1})$

的线性无关特解，其中 $\vec{r}_0$ 为

$$(A-\lambda_iE)^{n_i}\vec{r}=0$$

的非零解，$\vec{r}_1,\vec{r}_2,\cdots,\vec{r}_n$,可由下列关系式确定：

$$\vec{r}_1=(A-\lambda_i E)\vec{r}_0,$$
$$\vec{r}_2=(A-\lambda_i E)\vec{r}_1,$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$\vec{r}_{n_i-1}=(A-\lambda_i E)\vec{r}_{n_i-2}$$

【定理 3】设 $\dfrac{dx_i}{dt}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\,(i=1,2,\cdots,n)$有复值解

$$\vec{x}_1(t)=\vec{u}(t)+i\vec{v}(t)$$

则

$$\vec{x}_2(t)=\vec{u}(t)-i\vec{v}(t)$$

也是原方程的解，并且其实部$\vec{u}(t)$，虚部$\vec{v}(t)$也是原方程的解

定理 3 说明对于有复特征根的情形, 可以先求其复值解, 复值解的实部与虚部就是要找的实值解

2) 解题方法

首先求解系数矩阵特征值，对应三种情况：

1. 有 n 个线性无关的特征向量，即特征值均为单特征值或者重特征值的特征向量数等于特征重数. 利用定理一求解
2. 没有 n 个线性无关的特征向量，即特征向量数不等于特征重数. 利用定理二求解
3. 有特征值为复数，利用定理三求解

[例 4.15] 求下列方程组的通解：

$$\frac{d\vec{x}}{dt}=\begin{pmatrix}1&-3&3\\3&-5&3\\6&-6&4\end{pmatrix}\vec{x}$$

解：系数矩阵的特征值与特征向量为：

$$\lambda_1=4,\quad \vec{x}_1=\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix}$$

$$\lambda_2=\lambda_3=-2,\quad \vec{x}_2=\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix},\vec{x}_3=\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}$$

通解为：

$$\vec{x}=C_1\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix}e^{4t}+C_2\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}e^{-2t}+C_3\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}e^{-2t}$$

注：限于篇幅，这里只举一个简单的例子，对于线性齐次微分方程组的三种情况，必须熟练掌握课本 304-309 页例题 3.3-3.6.

4.3.5 常系数线性非齐次微分方程组的求解方法 ★★

对于：

$$\frac{d\vec{X}}{dt} = \vec{A}\vec{x} + \overrightarrow{f(t)}$$

其通解为：

$$X(t) = X(t)C + \int_{t_0}^{t} X(t-\tau)f(\tau)d\tau$$

满足$\overrightarrow{x(t_0)} = \overrightarrow{x_0}$的特解为：

$\overrightarrow{X(t)} = \overrightarrow{X(t-t_0)}\overrightarrow{X_0} + \int_{t_0}^{t} \overrightarrow{X(t-\tau)}\overrightarrow{f(\tau)}d\tau$

其中$\overrightarrow{X(t)}$为所对应的齐次方程组满足$\overrightarrow{X(0)} = \vec{E}$的基解矩阵.

此公式形式较为复杂，建议在考前对此公式进行记忆，考试时直接套用公式即可.

5　各章习题举例

5.1 第一章习题

1. 设 $f(1-\cos x)=\sin^2 x$，$f(x)=$

$A.x^2+2x$

$B.x^2-2x$

$C.-x^2+2x$

$D.-x^2-2x$

2. 函数 $f(x)=\ln(\sqrt{1+x^2}-x)$ 为

$A.$ 奇函数

$B.$ 偶函数

$C.$ 非奇非偶函数

$D.$ 既是奇函数又是偶函数

3. 下列函数是有界函数的是

$A.x^{-\frac{1}{2}}$

$B.e^{-x^2}$

$C.\frac{\cos x}{x}$

$D.x\sin x$

4.$f(x)=(2+\sqrt{3})^x+(2-\sqrt{3})^x$ 为

$A.$ 奇函数

$B.$ 偶函数

$C.$ 非奇非偶函数

$D.$ 周期函数

5. 若 $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2+ax+b}{1-x}=5$，则 a,b 的值分别为

$A.-7,5$

$B.5,-7$

$C.-7,6$

$D.6,-7$

5.1.1　选择题

6. $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+2-1}} =$

$A.1$

$B.-1$

$C.-\infty$

$D.0$

7. 下列说法正确的是

$A.$ 若 $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = A$，且 $x_n > 0$，则必有 $A > 0$

$B.$ 当 $x \to 0$ 时，$f(x) = e^{1/x}$ 的左右极限均存在

$C. f(x) = \frac{e^x-1}{e^x+1}$ 有两条水平渐近线

$D. \lim\limits_{x \to \infty} e^{-x} = 0$

$E.$ 若 $\lim\limits_{n \to \infty} f(n) = A$，则必有 $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = A$

8. 设 $x \to 0$ 时，$\frac{e^{x\cos^2 x^2} - e^x}{x^n}$ 为一非零常数，则 n 为

$A.5$

$B.3$

$C.2$

$D.4$

9. 设 $f(x) = \lim\limits_{t \to x} (\frac{\sin t}{\sin x})^{\frac{x}{\sin t - \sin x}}$，则 $x = k\pi (k \in \{0, \pm 1 ...\})$ 为 $f(x)$ 的

$A.$ 第二类间断点

$B.$ 无穷间断点

$C.$ 跳跃间断点

$D.$ 可去间断点

10. $\lim\limits_{n \to \infty} \sin^2(\sqrt{n^2+n}\pi)$=

$A.1$

$B.$ 不存在

$C.0$

$D.\infty$

11. 已知 $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x + f(x)}{x^3} = 2$，则 $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x+f(x)}{x^3}$ 为

$A.1$

$B.2$

$C.11/6$

$D.13/6$

5.1.2 **填空题**

1. 画出 $y=arcsin(sinx)$ 与 $y=arccos(cosx)$ 的图像
2. 若函数 $f(x)$ 的定义域为 $[0,1]$，则 $f(arctan(2x))$ 的定义域为
3. 设 $\alpha>0,\beta\neq0$，且 $\lim\limits_{x\to+\infty}[(x^{2\alpha}+x^{\alpha})^{\frac{1}{\alpha}}-x^2]=\beta$，则 $(\alpha,\beta)=$
4. 若极限 $\lim\limits_{x\to0}\frac{x}{f(2x)}=2$，则极限 $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(4x)}{x}=$
5. 已知 $\frac{f(x)}{x^2}=2$，$f(x)$ 二阶可导，求 $f(0)=,f'(0)=,f''(0)=$
6. 设以下函数在 $x=0$ 处可导，则 a,b,c 的值为

$$f(x)=\begin{cases}\frac{\ln(1+x)}{x}+\frac{x}{2},x>0\\ a,x=0\\ \frac{\sin bx}{x}+cx,x<0\end{cases}$$

7. $\lim\limits_{n\to\infty}\tan^n(\frac{\pi}{4}+\frac{2}{n})=$
8. 设 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln[1+\frac{f(x)}{\sin x}]}{a^x-1}=A$，则 $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x^2}=$
9. 设 $f(x)+f(\frac{x-1}{x})=2x$，其中 $x\neq0,x\neq1$，则 $f(x)=$

1. 画出 $y=arcsin(sinx)$ 与 $y=arccos(cosx)$ 的图像
2. 若函数 $f(x)$ 的定义域为 $[0,1]$，则 $f(arctan(2x))$ 的定义域为
3. 设 $\alpha>0,\beta\neq0$，且 $\lim\limits_{x\to+\infty}[(x^{2\alpha}+x^{\alpha})^{\frac{1}{\alpha}}-x^2]=\beta$，则 $(\alpha,\beta)=$
4. 若极限 $\lim\limits_{x\to0}\frac{x}{f(2x)}=2$，则极限 $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(4x)}{x}=$
5. 已知 $\frac{f(x)}{x^2}=2$，$f(x)$ 二阶可导，求 $f(0)=,f'(0)=,f''(0)=$
6. 设以下函数在 $x=0$ 处可导，则 a,b,c 的值为

$$f(x)=\begin{cases}\frac{\ln(1+x)}{x}+\frac{x}{2},x>0\\ a,x=0\\ \frac{\sin bx}{x}+cx,x<0\end{cases}$$

7. $\lim\limits_{n\to\infty}\tan^n(\frac{\pi}{4}+\frac{2}{n})=$
8. 设 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln[1+\frac{f(x)}{\sin x}]}{a^x-1}=A$，则 $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x^2}=$
9. 设 $f(x)+f(\frac{x-1}{x})=2x$，其中 $x\neq0,x\neq1$，则 $f(x)=$

3.1.3 **计算题**

1. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}(a^n+b^n+c^n)^{\frac{1}{n}}$，（$a,b,c$ 为非负常数）

3.1.4 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1^2+2^2+...+n^2}{n^3}$ **证明题**

求 $\lim\limits_{x\to-8}\frac{\sqrt{1-x}-3}{2+x^{\frac{1}{3}}}$

1. 设 $x_1=1,x_2=2,x_{n+2}=\sqrt{x_nx_{n+1}}(n=1,2,...)$，证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，并求其值

2. 设 $0<x_1<3,x_{n+1}=\sqrt{x_n(3-x_n)}(n=1,2,...)$，证明数列 $\{x_n\}$ 的极限存在，并求极限

3. 设数列 $\{x_n\}$ 满足 $0<x_1<\pi$，$x_{n+1}=\sin x_n(n=1,2,...)$

1) 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，并求其值

2) 计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n^2}}$

3.2 第二章习题

1.$f(x)=x(x+1)(x+2)\cdots(x+n)$,，求 $f'(0)$

2. 函数 $f(x)=(x^2-x-2)\left|x^3-x\right|$ 不可导点的个数为

3. 设周期函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上可导，周期为4，又有 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(1)-f(1-x)}{2x}=-1$，则曲线 $y=f(x)$ 在点 $(5,f(5))$ 处的切线斜率为

4.$f(t)=\lim\limits_{x\to\infty}t(1+\frac{1}{x})^{2tx}$，则 $f'(t)=$

5. 设可导函数 $f(x)$ 满足 $af(x)+bf(\frac{1}{x})=\frac{c}{x}$，式中 a,b,c 为常数，且 $|a|\neq|b|$，求 $f'(x)$

6. 确定常数 a,b 的值，使以下函数在 $x=0$ 处可导，并求出此时的 $f'(x)$

$$f(x)=\begin{cases}1+\ln(1-2x), x\leq 0\\ a+be^x, x>0\end{cases}$$

7. 求函数 $f(x)=x^2\ln(1+x)$ 在 $x=0$ 处的 n 阶导数 $f^{(n)}(0)(n>3)$

8. 方程 $\sqrt[x]{y}=\sqrt[y]{x}(x>0,y>0)$ 确定函数 $y=f(x)$，求 $\frac{d^2y}{dx^2}$

9. 设函数 $y=y(x)$ 由以下参数方程确定，求 $\frac{d^2y}{dx^2}$

$$\begin{cases}x=t-\ln(1+t)\\ y=t^3+t^2\end{cases}$$

10. 设 $y=f(\ln(x))e^{f(x)}$，其中 f 可微，则 $dy=$

11. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 上可导，且 $f(1)=0$，求证：至少存在一点 $\xi\in(0,1)$，使得 $f'(\xi)=-\frac{2f(\xi)}{\xi}$

12. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 上可导，且 $f(0)=f(1)=0, f(1/2)=1$，证明：

(1) 存在 $\eta\in(\frac{1}{2},1)$，使得 $f(\eta)=\eta$

(2) 对任意实数 λ，必定存在 $\xi\in(0,\eta)$，使得 $f'(\xi)-\lambda[f(\xi)-\xi]=1$

13.$(0,1)$ 是曲线 $y=ax^3+bx^2+c$ 的拐点，则 a,b,c 应满足什么条件

14. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上具有二阶导数，且满足条件 $|f(x)|\leq a, |f''(x)|\leq b$，其中 a,b 都是非负常数，c 是 $(0,1)$ 内任意一点，证明：$|f'(c)|\leq 2a+\frac{b}{2}$

15. 曲线 $y=\frac{1}{x}+\ln(1+e^x)$ 的渐近线条数为

16. 设 $0 \le a < b$，$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 上可导，证明在 (a,b) 内必有 ξ 和 η，使得 $f'(\xi) = \frac{a+b}{2\eta} \cdot f'(\eta)$

17. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且 $f(a) = f(b) = 1$，证明：存在 $\xi, \eta \in (a,b)$，使得 $e^{\eta-\xi}[f(\eta) + f'(\eta)] = 1$

18. 设函数 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上具有三阶连续导数，且 $f(-1) = 0, f(1) = 1, f'(0) = 0$，证明：在 $(-1,1)$ 内至少存在一点 ξ，使得 $f'''(\xi) = 3$

四、答案及难题详解

4.1 第一章

4.1.1 选择题

$1 \sim 5: CABBC \quad 6 \sim 10: BCAAA \quad 11 \sim 13: DCB$

4.1.2 填空题

1. 略.
2. $[0, \frac{\pi}{8}]$.
3. $(2, \frac{1}{2})$.
4. 1.
5. 0,0,4.
6. 1,1,0.
7. e^4.
8. $Alna$
9. $x + \frac{1}{x} + \frac{1}{1-x} - 1$

4.1.3 计算题

1.

$$\max\{a,b,c\}^n \le a^n + b^n + c^n \le 3\max\{a,b,c\}^n$$

$$\lim_{n\to\infty} 3^{\frac{1}{n}} = 1$$

故有：

$$\lim_{n\to\infty} (a^n + b^n + c^n)^{\frac{1}{n}} = \max\{a,b,c\}$$

2. 原极限可化简为：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)^{2}=\int_{0}^{1}x^{2}=\frac{1}{3}$$

3.

$$\lim_{x\to-8}\frac{\sqrt{1-x}-3}{2+x^{\frac{1}{3}}}=\lim_{x\to-8}\frac{(\sqrt{1-x}-3)(\sqrt{1-x}+3)(4-2x^{\frac{1}{3}}+x^{\frac{2}{3}})}{(2+x^{\frac{1}{3}})(\sqrt{1-x}+3)(4-2x^{\frac{1}{3}}+x^{\frac{2}{3}})}$$

$$=-\lim_{x\to-8}\frac{(4-2x^{\frac{1}{3}}+x^{\frac{2}{3}})}{(\sqrt{1-x}+3)}=-2$$

4.1.4 证明题

1. 证明：令 $y_n=lnx_n$，由于 $x_1=1,x_2=2,x_{n+2}=\sqrt{x_nx_{n+1}}$

$\to x_n>0$，且 $y_{n+2}=\frac{y_n+y_{n+1}}{2}$

$\to y_{n+2}-y_{n+1}=-\frac{1}{2}(y_{n+1}-y_n)=...=(-\frac{1}{2})^n\ln 2$

根据累加法并结合等比数列求和公式可得：

$$y_{n+2}-y_1=\frac{1-(-\frac{1}{2})^n}{1-(-\frac{1}{2})}\ln 2$$

$$\lim y_n=\frac{2}{3}\ln 2\Rightarrow\lim_{n\to\infty}x_n=\sqrt[3]{4}$$

2. 证明：1) 先证明存在性：

当 $0<x<3$ 时，$0<f(x)=\sqrt{x(3-x)}<\frac{1}{2}(x+3-x)=\frac{3}{2}$

故 $\{x_n\}$ 有界

又 $x_{n+1}-x_n=\sqrt{x_n(3-x_n)}-x_n=\sqrt{x_n}(\sqrt{(3-x_n)}-\sqrt{x_n})$

结合 $0<x_n<\frac{3}{2}$，得 $x_{n+1}-x_n>0$

根据单调有界准则，该数列单调增有上界，故极限存在.

2) 求极限：

设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，则有 $a=\sqrt{a(3-a)}$. 可得 $a=frac32$ 或 $a=0$（舍去）.

综上：$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\frac{3}{2}$.

3. 证明：

1) 证：由于 $0<x_1<\pi,x_{n+1}=sinx_n$，参照上题或用数学归纳法，不难证明数列单调有界，因此数列收敛，再用同样的套路可得极限为 0.

2) 由于 $n\to 0$ 等价于 $x_n\to 0$，所以：

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n^2}} = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}} = e^{-\frac{1}{6}}$$

4.2 第二章

1. 直接套公式求导较为困难，考虑用定义求解：

$$f'(0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h-0} = \lim_{h\to 0}(h+1)(h+2)(h+3)\cdots(h+n) = n!$$

2. 法一：将函数变为分段函数去绝对值，讨论每个分段点的左右导数是否相等.

法二：由于 $f(x)=(x-2)(x+1)\cdot|x|\cdot|x+1|\cdot|x-1|$ 含有因子 $(x+1)|x+1|$，故分界点处可导点为 $x=-1$，不可导点为 $x=0$ 和 $x=1$，在这两个点会出现尖点型不可导.

3. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(1)-f(1-x)}{2x}=\frac{1}{2}$，$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(1)-f(1-x)}{2x}=\frac{1}{2}f'(1)=-1$

$f'(1)=-2$，由周期性可知 $f'(5)=-2$.

4. $f(t)=\lim\limits_{x\to\infty}t(1+\frac{1}{x})^{2tx}=t[\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^{x}]^{2t}=te^{2t}$，$f'(t)=e^{2t}+2te^{2t}$.

5. 要求其导数得先求得表达式，故令 $x=1/x$，解方程组：

$$\begin{cases} af(x)+bf(\frac{1}{x})=\frac{c}{x} \\ af(\frac{1}{x})+bf(x)=cx \end{cases}$$

$$f(x)=\frac{\frac{ac}{x}-bcx}{a^2-b^2}$$

$$f'(x)=\frac{1}{a^2-b^2}\left(-\frac{ac}{x^2}-bc\right)=-\frac{bcx^2+ac}{x^2(a^2-b^2)}$$

6. 因要使函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，故 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，且左导数要等于右导数，即 $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=f(0)=1$，得 $a+b=1$.

又由于左导数要等于右导数

$$\begin{cases} f_-'(0)=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{[1+\ln(1-2x)]-1}{x}=-2 \\ f_+'(0)=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{(a+be^x)-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{b(e^x-1)}{x}=b \end{cases}$$

故 $b=-2, a=3$. 此时 $f(x)$ 在定义域内可导.

$$f'(x)=\begin{cases} -\frac{2}{1-2x}, x\le 0 \\ -2e^x, x>0 \end{cases}$$

总结：对于确定参数的值使分段函数可导的问题，通常利用在分段点处左导数等于右导数且都存在，二要利用在分段点处左极限等于右极限且等于该点函数值，抓住这两点来求解参数确定函数的值.

7. 法一：利用牛顿莱布尼兹公式

$$(uv)_{(n)} = u_{(n)}v_{(0)} + C_n1u_{(n-1)}v' + C_n2u_{(n-2)}v'' + \cdots + u_{(0)}v_{(n)}$$

又$[ln\,(1+x)]^k = \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{(1+x)^k}$（$k$为整数）可求得：

$$f^{(n)}(x) = x^2\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}+2nx\frac{(-1)^{n-2}(n-2)!}{(1+x)^{n-1}}+n(n-1)\frac{(-1)^{n-3}(n-3)!}{(1+x)^{n-2}}$$

所以有：

$$f^{(n)}(0) = (-1)^{n-3}n(n-1)(n-3)! = \frac{(-1)^{n-1}n}{n \quad 2}$$

法二：将 $ln(x+1)$ 用麦克劳林展开式展开，然后逐个求导，发现前面大部分的项都是 0，只留下了最后几项.

再对 x 求导，可得：

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{y(\ln y+1)^2 - x(\ln x+1)^2}{xy(\ln y+1)^3}$$

9.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{3t^2+2t}{1-\frac{1}{1+t}} = (t+1)(3t+2)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{d}{dt}(\frac{dy}{dx})}{\frac{dx}{dt}} = \frac{(6t+5)(t+1)}{t}$$

10.

$$y' = f'(\ln x)\cdot\frac{1}{x}\cdot e^{f(x)} + f(\ln x)e^{f(x)}\cdot f'(x)$$

$$dy = y'dx = e^{f(x)}[\frac{1}{x}f'(\ln x) + f'(x)f(\ln x)]dx$$

11. 解：显然 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上满足拉格朗日中值定理（闭区间连续，开区间可导），但却不是拉格朗日中值定理的形式，故考虑用罗尔定理，即找原函数，先将等式变形.

$$\xi f'(\xi) + 2f(\xi) = 0$$

找其原函数 $F(x) = x^2f(x)$，故只需要将两端点代入，发现 $F(0) = 0F(1) = 0$，故依据罗尔定理可知存在一点等式成立.

12. 证明：

1) 令 $\Phi(x) = f(x) - x$，则 $\Phi(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，又$\Phi(1) = -1 < 0, \Phi(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2} > 0$，由闭区间上的介值定理可知，存在$\eta \in (\frac{1}{2}, 1)$，使得 $\Phi(\eta) = f(\eta) - \eta = 0 \Rightarrow f(\eta) = \eta$.

2) 设 $F(x) = e^{-\lambda x}\Phi(x) = e^{-\lambda x}[f(x)-x], F(0) = 0, F(\eta) = 0$ 又 $F(X)$ 在区间范围内连续可导，故由罗尔定理可知原式得证.

13. 因为 $y''|_{x=0}=0$，而 $y''=6ax+2b$，故 $b=0$.

为保证 y'' 在 $x=0$ 左右两侧符号变化，故 $a\neq 0$，故有 $a\neq 0, b=0, c=1$.

14.

$$f(x)=f(c)+f'(c)(x-c)+\frac{f''(\xi)(x-c)^2}{2!}$$

分别令 $x=0, x=1$ 可得：

$$\begin{cases} f(0)=f(c)+f'(c)(0-c)+\frac{f''(\xi_1)(0-c)^2}{2!}, 0<\xi_1<c<1 \\ f(1)=f(c)+f'(c)(1-c)+\frac{f''(\xi_2)(1-c)^2}{2!}, 0<c<\xi_2<1 \end{cases}$$

以上两式作差可得：

$$f(1)-f(0)=f'(c)+\frac{1}{2!}[f''(\xi_2)(1-c)^2-f''(\xi_1)c^2]$$

$$|f'(c)|=\left|f(1)-f(0)-\frac{1}{2!}[f''(\xi_2)(1-c)^2-f''(\xi_1)c^2]\right|$$

$$|f'(c)|\leq|f(1)|+|f(0)|+\frac{1}{2}|f''(\xi_2)|(1-c^2)+\frac{1}{2}|f''(\xi_1)|c^2\leq a+a+\frac{b}{2}[(1-c)^2+c^2]$$

又因为 $c\in(0,1),(1-c)^2+c^2\leq 1$，故有 $|f'(c)|\leq 2a+\frac{b}{2}$.

15. 先分析间断点只有 $x=0$

$\lim\limits_{x\to 0} y=\infty$，故 $x=0$ 为垂直渐近线.

$\lim\limits_{x\to -\infty} y=0+\ln 1=0$，故有水平渐近线 $y=0$.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to+\infty}[\frac{1}{x^2}+\frac{\ln(1+e^x)}{x}]=0+\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{e^x+1}=1$$

$$\lim_{x\to+\infty}(y-x)=\lim_{x\to+\infty}[\frac{1}{x}+\ln(1+e^x)-\ln e^x]=0$$

故在 $x\to+\infty$ 时有斜渐近线 $y=x$.

故总共有 3 条渐近线.

16. 证明：首先，由拉格朗日中值定理，必有 $f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$，问题转化为须证：存在 $\eta\in(a,b)$，使得 $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{a+b}{2\eta}\cdot f'(\eta)$

整理上式：

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\eta-\frac{a+b}{2}f'(\eta)=0$$

令 $F(x)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\frac{x^2}{2}-\frac{a+b}{2}f(x)$，再根据罗尔定理，即可得证.

17. 证明：令 $F(x)=e^xf(x)$，则 $f(x)$ 满足拉格朗日中值定理的条件，存在 $\eta\in(a,b)$，使得 $\frac{e^bf(b)-e^af(a)}{b-a}=e^\eta[f(\eta)+f'(\eta)]$

由已知条件 $f(a)=f(b)=1$，有以下等式：

$$\frac{e^b-e^a}{b-a}=e^\eta[f(\eta)+f'(\eta)]$$

再令 $\varphi(x)=e^x$，再利用一次拉格朗日中值定理可得：存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $\frac{e^b-e^a}{b-a}=e^\xi$综上，得证.

18. 证明：在解决高阶导数的函数值问题时，一般用泰勒展开解题：

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{1}{2!}f''(0)x^2+\frac{1}{3!}f'''(\eta)x^3$$

$\eta\in(0,x)$，分别令 $x=-1,x=1$，并结合已知条件可得：

$$0=f(-1)=f(0)+\frac{1}{2}f''(0)-\frac{1}{6}f'''(\eta_1),-1<\eta_1<0$$

$$1=f(1)=f(0)+\frac{1}{2}f''(0)+\frac{1}{6}f'''(\eta_2),0<\eta_2<1$$

两式相减可得：

$$f'''(\eta_1)+f'''(\eta_2)=6$$

由于存在三阶连续导数，故 $f'''(x)$ 在闭区间 $[\eta_1,\eta_2]$ 上有最大值和最小值，设为 M 和 m，则有：

$$m\le\frac{1}{2}[f'''(\eta_1)+f'''(\eta_2)]\le M$$

再由连续函数的介值定理可知，至少存在一点 $\xi\in[\eta_1,\eta_2]$，使得

$$f'''(\xi)=\frac{1}{2}[f'''(\eta_1)+f'''(\eta_2)]=3$$

证毕.