仲英学业辅导中心出品

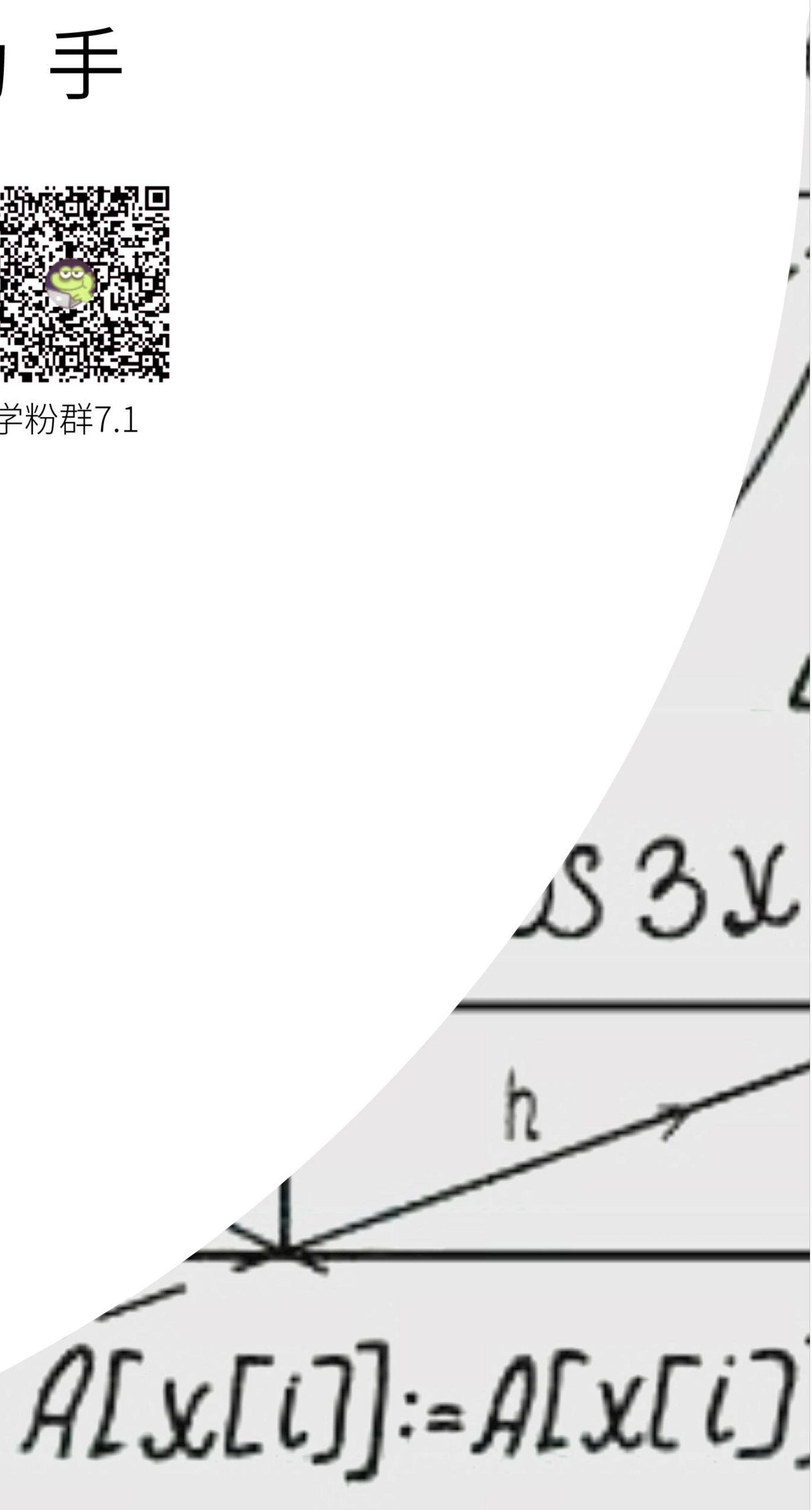
高　数

2021秋季学期版

期中小助手

学辅公众号

学粉群7.1



前言

致各位亲爱的学辅资料读者：

万物冬藏待春来，时光即在弹指间。仲英学辅在平静又不平凡中度过了一年时光；脚下行程千里远，腹中贮书万卷多。仲英学辅工作人员们在大家的追梦路上，一如既往的送去了温暖。

本资料由仲英书院学业辅导中心的工作人员编写，对高数学习及考试内容进行了全面及详细的总结，列举典型例题，以帮助同学们夯实、巩固和提高。在此，郑重感谢各位编者同学的努力，可以使本资料顺利完成。由于时间精力限制，难免有疏漏之处，如果在阅读使用过程中发现错误，欢迎同学们反馈，我们会记录，并在下一版中予以修正。（反馈请邮件联系学辅邮箱：xjtuzyxf@163.com）

资料版次及编者信息：

2021 年 9月版

编写人员：自动化 002 曹家熙、越杰 81 唐智亿、力学理 81 叶义晨、
金禾 001 聂博佩、ACCA 92 聂雨馨、自动化 006 贾浚源、
计算机 006 唐培元

排版人员：金融工程 001 孙语新

仲英学业辅导中心

2021 年 10 月 6 日

目录

1 函数、极限、连续

1.1 函数

1.1.1 函数的四大基本性质

函数的四大基本性质包括奇偶性、单调性、有界性、周期性。奇偶性常用于简化积分运算。

1.1.2 函数的有关运算

函数的有关运算包括四则基本运算、复合运算、反函数运算。

1.1.3 几个特殊函数

1)分段函数:对于自变量的不同的取值范围，有着不同的解析式的函数。

2)取整函数:取整函数一般指向下取整函数，其满足:

$$x-1<[x]\le x<[x]+1$$

3)Dirichlet函数:常用于作为反例来否定一些命题。

$$D(x)=\begin{cases}1\ ,\ x\text{为有理数}\\0\ ,\ x\text{为无理数}\end{cases}$$

4）初等函数和双曲函数:

1. 基本初等函数有6类，分别是幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数和常数函数。由这6类基本初等函数经过有限次的有理运算与复合运算所产生并能用一个解析式表达的函数被称为初等函数。

2. 由于初等函数在定义域的区间上是连续的，一般的，求初等函数在x_0的极限值，只要x_0属于该函数的定义域，就可用直接代入法求得。

3. 双曲函数由指数函数e^x与e^{-x}构成（定义域为全域），主要包括：双曲正弦$shx=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$奇函数）双曲余弦$chx=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$（偶函数）双曲正切$thx=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$其与三角函数有着许多类似性质，如：$thx=\frac{shx}{chx}$, $ch^2x-sh^2x=1$, $ch2x=2shxchx$。

1.1.4 典型例题

例[1.1]

已知$f(x)$满足等式$2f(x)+x^2f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{x^2+2x}{x+1}$，求$f(x)$的表达式。

思路：将x用$\frac{1}{x}$替换，然后消去$f\left(\frac{1}{x}\right)$

解：用$\frac{1}{x}$替换x，$2f\left(\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{x^2}f(x)=\frac{2x+1}{x^2+x}$ ，消去$f\left(\frac{1}{x}\right)$得$f(x)=\frac{x}{1+x}$

例[1.2]

设$f(0)=0$且$x\neq0$时，$af(x)+bf\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{c}{x}$，其中$a,b,c$为常数，且$|a|=|b|$，证明$f(x)$为奇函数。

思路：要证明$f(x)$为奇函数只需要证明在定义域中$f(-x)=-f(x)$，且若0在定义域内，则有$f(0)=0$。

解：与例1思路一样，求得$f(x)=\frac{c}{b^2-a^2}\left(bx-\frac{c}{x}\right)$，观察得$f(-x)=-f(x)$

因为$f(0)=0$，故$f(x)$为奇函数。

1.2 极限

1.2.1 数列的极限

数列的极限主要涉及内容包括求极限、根据极限等式确定参数、极限存在与否的判断及求值。

1.2.2 函数的极限

函数的极限主要涉及的问题就是求极限

1.2.3 极限常用方法

1)根据数列极限的$\varepsilon-N$定义，具体做法如下：

a放大法：有时$|a_n-A|<\varepsilon$很难解出n，此时可将$|a_n-A|$放大，使之成为n的一个新函数（记为H_n），即$|an-A|<H_n$，进而由$H_n<\varepsilon$可解出$n>N(\varepsilon)$.

b分步法：有时$|an-A|$特别复杂，只有在n大于某个数N_1可以放大成H_n，此时解出$n>N(\varepsilon)$，取$N=maxN_1,N(\varepsilon)$, 当$n>N$时，有$|an-A|<\varepsilon$.

2）夹逼准则及单调有界原理（重点）

3）定积分定义

4）导数的定义

5）等价无穷小

6）洛必达法则

7）微分中值定理及泰勒公式（难点）

8）已知结论（两个重要极限等）

除此之外，要掌握初等变形法对极限式进行化简得方法，这里不再赘述.

1.2.4 典型例题

例[1.3]

求证$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$.

解：设$\sqrt[n]{n}=1+x_n$

则有$n=(1+x_n)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k{x_n}^k\geq C_n^2{x_n}^2=\frac{n(n-1)}{2}{x_n}^2$

因此$0<x_n<\sqrt{\frac{2}{n-1}}$

$\therefore 1<\sqrt[n]{n}<1+\sqrt{\frac{2}{n-1}}$

又$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{\frac{2}{n-1}}=0$

由夹逼准则知$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$

例[1.4]

设序列$x_1=1, x_n=1+\frac{1}{1+x_{n-1}}, (n=2,3,\ldots)$.证明$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在，并求其极限.

解：如果$x_n\in[1,2]$, 则$x_{n+1}=1+\frac{1}{1+x_n}\in\left[\frac{4}{3},\frac{3}{2}\right]\subseteq[1,2]$

并且当$n=1$时成立

$x_n-x_{n-1}=\frac{1}{1+x_{n-1}}-\frac{1}{1+x_{n-2}}=\frac{x_{n-2}-x_{n-1}}{(1+x_{n-1})(1+x_{n-2})}=\frac{x_{n-2}-x_{n-3}}{(1+x_{n-1})(1+x_{n-2})^2(1+x_{n-3})}$

又$x_1=1, x_2=\frac{3}{2}, x_3=\frac{7}{5}, x_4=\frac{17}{12}x_3-x_1>0, x_4-x_2<0$

$\therefore x_{2\mathrm{n}}-x_{2\mathrm{n}-2}<0, x_{2\mathrm{n}+1}-x_{2\mathrm{n}-1}>0$

即序列奇数项递增，偶数项递减，且序列有界

由单调有界原则，序列奇数项、偶数项皆收敛

设$x_{2\mathrm{n}}$收敛于a, $x_{2\mathrm{n}+1}$收敛于b

当n为奇数$b=1+\frac{1}{1+\mathrm{a}}$

当n为偶数a=$1+\frac{1}{1+\mathrm{b}}$

解得$a=b=\sqrt{2}(a,b\in[1,2])$

例[1.5]

求极限$\lim\limits_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(n-k+1)\left(nC_n^k\right)^{-1}$.

解：由二项式公式$C_n^k=\frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}$

$$\therefore (n+1-k)\left(nC_n^k\right)^{-1} = n^{-2}\frac{k!}{(n-1)(n-2)\dots(n-k-2)} \le 2n^{-2}(k<n)$$

$$\therefore 0 < \sum_{k=1}^{n}(n-k+1)\left(nC_n^k\right)^{-1} \le \frac{1}{n} + \sum_{k=1}^{n-1} 2n^{-2} < \frac{3}{n} \to 0(n\to\infty)$$

由夹逼准则$\lim\limits_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(n-k+1)\left(nC_n^k\right)^{-1} = 0$

例[1.6]

求证$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} = 0.$

证明：首先$0\le \frac{2k-1}{2k} < \sqrt{\frac{(2k-1)^2}{(2k)^2-1}} = \sqrt{\frac{2k-1}{2k+1}}(k\in N_+)$

$\therefore 0 < \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} < \sqrt{\frac{1}{3}.\frac{3}{5}\dots\frac{2n-1}{2n+1}} = \sqrt{\frac{1}{2n+1}}$

又$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{\frac{1}{2n+1}} = 0$

由夹逼准则知$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} = 0$

例[1.7]

求$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{sin\frac{\pi}{n}}{n+1} + \frac{sin\frac{2\pi}{n}}{n+\frac{1}{2}} + \dots + \frac{sin\pi}{n+\frac{1}{n}}\right).$

解：首先$\frac{sin\frac{k\pi}{n}}{n+1} < \frac{sin\frac{k\pi}{n}}{n+\frac{1}{k}} < \frac{sin\frac{k\pi}{n}}{n}(k\in N_+, 0<k<n+1)$

$\therefore \frac{n}{n+1}\sum_{k=1}^{n}\frac{sin\frac{k\pi}{n}}{n} < \sum_{k=1}^{n}\frac{sin\frac{k\pi}{n}}{n+\frac{1}{k}} < \sum_{k=1}^{n}\frac{sin\frac{k\pi}{n}}{n}$

由定积分定义

$\sum_{k=1}^{n}\frac{sin\frac{k\pi}{n}}{n} = \int_0^1 sin\pi x dx = \frac{1}{\pi}cos\pi x|_1^0 = \frac{2}{\pi}$

又$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+1} = 1$

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}\sum_{k=1}^{n}\frac{sin\frac{k\pi}{n}}{n} = \frac{2}{\pi}, \lim\limits_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{sin\frac{k\pi}{n}}{n} = \frac{2}{\pi}$

由夹逼准则知

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{sin\frac{\pi}{n}}{n+1} + \frac{sin\frac{2\pi}{n}}{n+\frac{1}{2}} + \dots + \frac{sin\pi}{n+\frac{1}{n}}\right) = \frac{2}{\pi}$

例［1.8］

求$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n} - sin\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{3}}\sqrt[n]{n!}.$

解：$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x-sinx}{x^3} = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{1-cosx}{3x^2} = \frac{1}{6}$

$\therefore x - sinx \sim \frac{1}{6}x^3, \sqrt[3]{x-sinx} \sim \frac{1}{\sqrt[3]{6}}x$

$\therefore \left(\frac{1}{n} - sin\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{3}} \sim \frac{1}{\sqrt[3]{6}n}$

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n} - sin\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{3}}\sqrt[n]{n!} = \frac{1}{\sqrt[3]{6}}e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}ln\frac{k}{n}} = \frac{1}{\sqrt[3]{6}}e^{\int_0^1 lnxdx} = \frac{1}{\sqrt[3]{6}e}$

例题[1.9]

$$\lim_{x\to 0}(2^x + sinx)^{\frac{1}{x}}$$

解：提供以下几种求解方法：

ⅰ. $\lim\limits_{x\to 0}(2^x + sinx)^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to 0}exp\frac{ln(2^x+sinx)}{x} = \lim\limits_{x\to 0}exp\frac{2^x+sinx-1}{x} = \lim\limits_{x\to 0}exp\left(\frac{sinx}{x} + \frac{e^{xln2}-1}{x}\right) = exp(1+ln2) = 2e$

ⅱ. $\lim\limits_{x\to 0}(2^x + sinx)^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to 0}\left(e^{xln2} + sinx\right)^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to 0}(xln2 + 1 + o(x) + x)^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to 0}(x(ln2+1)+1)^{\frac{1+ln2}{x(1+ln2)}} = exp(1+ln2) = 2e$

ⅲ. $\lim\limits_{x\to 0}(2^x + sinx)^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to 0}exp\frac{ln(2^x+sinx)}{x} = \lim\limits_{x\to 0}exp\frac{2^x+sinx-1}{x} = \lim\limits_{x\to 0}exp\frac{2^x lnx + cosx}{1} = exp(1+ln2) = 2e$

例题[1.10]

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{tanx}-e^{sinx}}{x-sinx}$（可利用三角函数相关的等价无穷小）

$\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{tanx}-e^{sinx}}{x-sinx}=\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{sinx}(e^{tanx-sinx}-1)}{x-sinx}=\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{sinx}(tanx-sinx)}{x-sinx}=\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{sinx}\frac{1}{2}x^3}{\frac{1}{6}x^3}=\lim\limits_{x\to0}3e^{sinx}=3$

其他解法提示：先消掉指数项，再利用secx、cosx、sinx和tanx之间的关系变换也可以导出最终结果。

例题[1.11]

$\lim\limits_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{n^3+k^2}$（可利用夹逼原理）

解：$\lim\limits_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{n^3+n^2}<\lim\limits_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{n^3+k^2}<\lim\limits_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{n^3}$

$\lim\limits_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{n^3+k^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1^2+2^2+3^2+\dots+(n-1)^2+n^2}{n^3+n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)}{n^3+n^2}=\frac{1}{3}$

$\lim\limits_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{n^3}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1^2+2^2+3^2+\dots+(n-1)^2+n^2}{n^3}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)}{n^3}=\frac{1}{3}$

由夹逼原理，原式$=\frac{1}{3}$

例题[1.12]

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{sin\frac{\pi}{n}}{n+1}+\frac{sin\frac{2\pi}{n}}{n+\frac{1}{2}}+\dots+\frac{sin\pi}{n+\frac{1}{n}}\right)$$

解：由$\frac{sin\frac{k\pi}{n}}{n+1}<\frac{sin\frac{k\pi}{n}}{n+\frac{1}{k}}<\frac{sin\frac{k\pi}{n}}{n}$

$$\frac{n}{n+1}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}sin\frac{k\pi}{n}<\sum_{k=1}^{n}\frac{sin\frac{k\pi}{n}}{n+\frac{1}{k}}<\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}sin\frac{k\pi}{n}$$

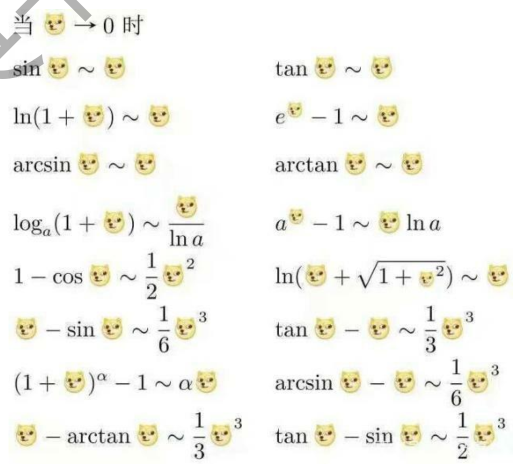
由定积分定义，有$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}sin\frac{k\pi}{n}=\int_0^1 sin\pi x dx=\frac{1}{\pi}(con\pi x)|_1^0=\frac{2}{\pi}$

即$\frac{2}{\pi}\frac{n}{n+1}<\sum_{k=1}^{n}\frac{sin\frac{k\pi}{n}}{n+\frac{1}{k}}<\frac{2}{\pi}$

又$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1$

由夹逼原理，原式$=\frac{2}{\pi}$

做题提示：注意根据题目所示的极限条件和形式先判断求解方法，除了几乎万能的泰勒展开，题目往往会对方法进行一些提示，如上例中的分母有$x-sinx\frac{1}{6}x^3$（x趋于0），就应该联想到等价无穷小x−相应对分子做出变换也利用无穷小规则。常用的等价无穷小公式如著名的狗头图所示，记忆常用的无穷小有利于快速辨别题目是否有简单快捷的解法。



1.3 连续

1.3.1 相关概念

1)连续和间断的概念间断点的分类★★★

2)初等函数的连续性★★★

3)闭区间上连续函数的性质★★★

相关性质往往和之后学的微分中值定理一起用于一些证明题，需要技巧，较有难度，一般作为压轴题.

1.3.2 典型例题

［例1.13］

求函数$f(x)=\frac{x-x^3}{\sin(\pi x)}$的间断点，并判断其类型.

分析：考虑间断点及其类型时，先考虑定义域，找出无定义的点，再看两端极限，最后看极限值与定★★义值是否相等.

解：设n=0,±1,±2,... 由定义可知f(x)在每个区间(n,n+1)内连续.又

$$\lim_{x\to0^-}\frac{x-x^3}{\sin(\pi x)}=\lim_{x\to0}\frac{x(1-x^2)}{\pi x}=\frac{1}{\pi}=\lim_{x\to0^+}\frac{x-x^3}{\sin(\pi x)}$$

$$\lim_{x\to1^-}\frac{x-x^3}{\sin(\pi x)}=\lim_{x\to1}\frac{1-3x^2}{\pi\cos(\pi x)}=\frac{2}{\pi}=\lim_{x\to1^+}\frac{x-x^3}{\sin(\pi x)}$$

$$\lim_{x\to n}\frac{x-x^3}{\sin(\pi x)}=\infty(n=\pm2,\pm3,\cdots\cdots)$$

故x1=−1，x2=0，x3=1为f(x)的可去间断点，xn=n(n=±2,±3……)为f(x)的无穷间断点.

注：判断间断点类型题目较为基础，几乎必考，但不注意也容易丢分.

［例1.14］

设$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n-1}+ax^2+bx}{x^{2n}+1}$为连续函数，试确定a和b的值.

分析：首先应根据所给极限表达式求出函数的表达式，再根据特殊点左右极限进行求解解：原函数可化简为：

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x},\ x<-1\\ \frac{a-b-1}{2},\ x=-1\\ ax^2+bx,-1<x<1\\ \frac{a+b+1}{2},\ x=1\\ \frac{1}{x},\ x>1\end{cases}$$

利用−1，1的左右极限得到(a−b−1)/2=−1，(a+b+1)/2=1，解得a=0,b=1.

注：与函数连续性有关的求参数的题型也较为重要，本质上还是考察极限运算，以及极限存在的定义.

［例1.15］

设f(x)为连续函数，且0≤f(x)≤1，证明在[0,1]上方程$2x-\int_0^x f(t)dt=1$有唯一实根.

分析：首先利用零点存在定理证明根的存在性，然后利用单调性证明根的唯一性.证明：首先证明根的存在性：设函数 $2x-\int_0^x f(t)dt=1$

由于$F(0)=-1<0,F(1)=2-\int_0^1 f(t)dt>1-\int_0^1 dt=0$

若f(x)=1,则F(x)=0零点为1;若f(x)<1,则F(1)>0,由零点存在定理,存在c∈(0,1),使得F(c)=0.由此可知在区间[0,1]上存在根.

之后证明根的唯一性：

由于F′(x)=2−f(x)≥1>0，故F(x)在[0,1]单调递增.综上，F(x)在[0,1]上有唯一实根，原命题得证.

［例1.16］

设f(x)，g(x)在[a,b]上连续，且g(x)>0.试证明存在一点ξ∈[a,b]，使得：

$$\int_a^b f(x)g(x)dx=f(\xi)\int_a^b g(x)dx$$

分析：利用闭区间连续函数的介值定理.

证明:由于f(x)在[a,b]上连续，故∃m,M使得m≤f(x)≤M而在[a,b]上，g(x)>0.有

mg(x)≤f(x)g(x)≤Mg(x)，两边同时积分有

$$\mathrm{m}\int_a^b g(x)dx \le \int_a^b f(x)\,g(x)dx \le \mathrm{M}\int_a^b g(x)dx$$

因此有：

$$\mathrm{m}\frac{\int_a^b f(x)\,g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx} \le \mathrm{M}$$

由闭区间上连续函数的介值定理可知，存在一点ξ∈[a,b]，使得原等式成立，得证.

[例1.17]

设f(x)在[0,n]（n为自然数，n>1）上连续，f(0)=f(n)，证明存在ε，ε+1∈[0,n]，使得f(ε)=f(ε+1).

证明：设$g(x) = f(x+1) - f(x)$,即证明$g(x)$在[0,n-1]上存在零点

$g(0) = f(1) - f(0)$，$g(1) = f(2) - f(1)$……$g(n-1) = f(n) - f(n-1)$

将以上n个等式相加，得到 $nm \le \sum_{i=0}^{n-1} g(i) \le nM$ ，$m \le \frac{\sum_{i=0}^{n-1} g(i)}{n} \le M$

由于函数连续，则存在$\varepsilon \in (0, \mathrm{n}-1)$,使得$g(\varepsilon) = \frac{\sum_{i=0}^{n-1} g(i)}{n} = 0$,即$f(\varepsilon) = f(\varepsilon) + 1$

注：与闭区间上连续函数性质有关的证明题往往技巧性较高，容易和后面学到的罗尔定理，微分中值定理结合来考察，需要假设函数在闭区间上的极值，有时还需要用到极值点一阶导为0的性质，在考试中也属于拉开差距的题目.

2 一元函数微分学及其应用

2.1 导数的概念

2.1.1 导数定义应用

第一小节的主要考试重点为通过导数的的极限定义式证明一些特殊的函数在特定点的函数是否连续，导数是否存在，应熟练掌握导数可导的定义概念及表达式.

题型一：★★★函数f(x)在X0处可导=f(x)在X0处左，右导数存在且相等

[例2.1]

设f(x)在点x = a的某邻域内有定义，则f(x)点x = a处可导的一个充分条件是

(A) $\lim\limits_{h\to+\infty} h[f(a+\frac{1}{h}) - f(a)]$ 存在

(B) $\lim\limits_{h\to 0} \frac{[f(a+2h)-f(a+h)]}{h}$ 存在

(C) $\lim\limits_{h\to 0} \frac{[f(a+h)-f(a-h)]}{2h}$ 存在

(D) $\lim\limits_{h\to 0} \frac{[f(a)-f(a-h)]}{h}$ 存在

答案：(D)，A项只能说明有导数存在，不能说明f(x)点x = a可导，因为$f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x0)}{\Delta x}$要求Δx任意，使得x可以连续靠近x=$x_0$；而$\frac{1}{h}$是有理数，变化不连续，x只能从有理点靠近x=$x_0$。B、C分子两点函数的差与f(x)在xo处的值无关，可能出现极限存在而f(x)在xo处不连续，必不可导的情况。

如：$f(x) = \begin{cases}0, x \ne 0\\ 1, x = 0\end{cases}$

在x = 0处不连续，必不可导，但极限存在.

题型二：★★★★★分段函数在分界点的求导问题

[例2.2]

$\mathrm{f(x)}=\begin{cases}\mathrm{x}^2, & \mathrm{x} \ge 1\\ 2\mathrm{x}, \mathrm{x} < 1\end{cases}$，求$f'(\mathrm{x})$

此题型通常用定义法对分界点处函数求解

[错解] $x>1, f'(x)=2x$；$x < 1, f'(x)=2$

又因为$f_+'(1)=f_-'(1)=2$

故$f'(1)=2$

$f'(x)=\begin{cases}2x,\ x\geq 1\\ 2,x<1\end{cases}$

[分析]

注意分界点处是否可导：由题干，只能得出x>1时$f'(x)=2x$，x<1时$f'(x)=2$，不能由此求出$x=1$的导数值（需要用定义法求解）

分段函数要特别注意函数在分界点处的可导性，常与连续性一起考察。由$f(x)$在x=1处不连续可直接得出$f(x)$在x=1处不可导（可导必定连续和不连续必定不可导互为逆否命题）

[正解] $f_+'(1)=\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}(x+1)=2$

$f_-'(1)=\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{2x-1}{x-1}=\infty$，不存在，故$f(x)$在x=1不可导

$f'(x)=\begin{cases}2x,\ x>1\\ 2,x<1\end{cases}$

另一种常见题型为已知f（x）在分界点处可导，求相关参数

[例2.3]

$f(x)=\begin{cases}x^2,\ x\leq 1\\ ax+b,x>1\end{cases}$在x=1处可导，求a和b

由$f(x)$在x=1可导：

由连续性：$\lim\limits_{x\to 1^+}(ax+b)=\lim\limits_{x\to 1^-}x^2=1$

由$f_+'(1)=f_-'(1)$: $\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\left(\frac{ax+b-1}{x-1}\right)=2$

解得，a=2，b=-1

题型三：★★★★★连续与可导的概念

考察导数的定义时，经常将连续和可导的概念结合在一起考察，常见题型为辨析型选择题或含参数分类讨论的解答题

［例2.4］

设f(x)在x=0处连续，下列命题**错误**的是：

若$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}$存在，则f(0)=0

若$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)+f(-x)}{x}$存在，则f(0)=0

若$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}$存在，则f'(0)存在

若$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)+f(-x)}{x}$存在，则f'(0)存在

答案：（D）

提示:若$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}$存在，则可得$\lim\limits_{x\to 0}f(x)$=0。由题干f(x)在x=0连续，可得：

$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=f(0)$，$\lim\limits_{x\to 0}f(-x)=f(0)$

从而证明A、B、C选项正确

D选项，对于$f(x)=\begin{cases}8x,\ x\geq 0\\ 0,\ x<0\end{cases}$，极限$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)+f(-x)}{x}$存在，但f(x)在x=0不可导，因此f'(0)不存在

［例2.5］

$f(x)=\begin{cases}|x|^\alpha\sin\frac{1}{x},\ x\neq 0\\ 0,\ x=0\end{cases}$，当$f(x)$满足什么条件时：

$f(x)$在x=0连续

$f(x)$在x=0可导

$f'(x)$在x=0连续

解：(1)若$f(x)$在x=0连续，则x0时，$f(x)=|x|^\alpha\sin\frac{1}{x}0$

因为$\sin\frac{1}{x}$有界，则x0时，$|x|^\alpha\to 0$

故$\alpha > 0$
(2) 若$f(x)$在x=0可导，则：

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0}\frac{|x|^{\alpha}\sin\frac{1}{x}}{x-0}=\begin{cases}\lim\limits_{x\to0}x^{\alpha-1}\sin\frac{1}{x}, & x>0\\ \lim\limits_{x\to0}(-x)^{\alpha-1}\sin\frac{1}{x}, & x<0\end{cases}$$存在

故$\alpha > 1$
(3)由于$f'(x)$存在，故$\alpha > 1$

$$f'(x)=\begin{cases}\alpha x^{\alpha-1}\sin\frac{1}{x}-x^{\alpha-2}\cos\frac{1}{x}, & x>0\\ -\alpha x^{\alpha-1}\sin\frac{1}{x}+x^{\alpha-2}\cos\frac{1}{x}, & x<0\\ \lim\limits_{x\to0}\frac{|x|^{\alpha}\sin\frac{1}{x}}{x-0}=0, & x=0\end{cases}$$

若$f'(x)$在$x=0$处连续，则$f'_-(0)$与$f'_+(0)$存在且相等，$f'_-(0)=f'_+(0)=f'(0)=0$
故$\lim\limits_{x\to0}x^{\alpha-2}\cos\frac{1}{x}$存在，所以$\alpha-2>0$，$\alpha>2$

题型四：★★★★已知某一点可导，用定义证明性质

［例2.6］
如果$f(x)$为偶函数，且$f'(0)$存在，请证明:$f'(0) = 0$
证明：

$$f'(x)=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0}\frac{f(-x)-f(0)}{-x-0}$$

由偶函数 $f(x)=f(-x)$得：$f'(0)=-f'(0)$,故$f'(0)=0$
[例2.7]
（课本P96）设函数f:(0,+∞)R在x=1处可导，且
$f(xy)=yf(x)+xf(y)$，$x,y\in$（0,+∞）
证明：函数f在（0,+∞）内处处可导，并且$f'(x)=\frac{f(x)}{x}+f'(1)$

证：$f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to0}\frac{f[x\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)]-f(x)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to0}\frac{\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)f(x)+xf\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)-f(x)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to0}[\frac{f(x)}{x}+\frac{f(1+\frac{\Delta x}{x})}{\frac{\Delta x}{x}}]$

取x=y=1，易得$f(1)=0$
可得$f'(x)=\frac{f(x)}{x}+f'(1)$

题型五：★★★★★求分式的极限

[例2.8］
求$\lim\limits_{h\to0}\frac{|f(x+ah)-f(x-bh)|}{h}$
解：$\lim\limits_{h\to0}\frac{|f(x+ah)-f(x-bh)|}{h}=\lim\limits_{h\to0}\frac{[f(x+ah)-f(x)]-[f(x-bh)-f(x)]}{h}$
$=a\lim\limits_{h\to0}\frac{f(x+ah)-f(x)}{h}+b\lim\limits_{h\to0}\frac{f(x-bh)-f(x)}{h}$
$=(a+b)f'(x)$
拆项法，第三行第二项分母-bh应特别注意.

2.1.2 判定可导性

题型一：★★已知$f(x)$在x_0处可导，讨论$|f(x)|$在x_0处可导性

$f(x_0)>0$，在点x_0的ε邻域内有$f(x)>0$（保号性）
$f(x_0)<0$，同理可得导数为$-f'(x_0)$
$f(x_0)=0$，

$$\lim_{x\to x_0^+}\frac{|f(x)|-|f(x0)|}{x-x0}=\lim_{x\to x_0^+}\left|\frac{f(x)}{x-x0}\right|=|f'(x_0)|$$

$$\lim_{x\to x_0^-}\frac{|f(x)|-|f(x0)|}{x-x0}=-\lim_{x\to x_0^+}\left|\frac{f(x)}{x-x0}\right|=-|f'(x_0)|$$

当$f'(x)\neq0$,左右导数异号，不可导；当$f'(x)=0$，可导.

题型二：★★★★★ $f(x)=(x-a)^k|x-a|$类型函数在$x=a$处可导性讨论.

结论：
$k=0$，$f(x)$在$x=a$处不可导
$k=m(m\in N^*)$，$f(x)$在$x=a$处m阶可导，$m+1$阶不可导.
[例2.9]
求函数$f(x)=(x^2-x-2)|x^3-x|$不可导点的个数.
解:因式分解得 $f(x)=(x-2)(x+1)|x(x+1)(x-1)|$
利用上述结论：
$x=0$，$x=1$时$k=0$不可导，$x=-1$时$k=1$，一阶可导。其余零点均为可导零点。

2.1.3 ★★★★★可导必定连续

常利用其逆否命题判定不可导，即不连续的函数在不连续点必定不可导，上述题目中已经涉及本知识点.

2.1.4 求导的基本法则

本节前半部分与高中部分类似，需新掌握
1. 正余割函数，双曲函数，反三角函数，反双曲函数的导数(一定要熟练背诵，很常用)

$(\sec x)'=\tan x\cdot\sec x$　　$(\csc x)'=-\cot x\cdot\csc x$.　　$(\mathrm{sh}x)'=\mathrm{ch}x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$

$(\mathrm{ch}x)'=\mathrm{sh}x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$　　$(\mathrm{th}x)'=(\frac{shx}{thx})'=\frac{1}{ch^2x}$　　$\arcsin x=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$　　$\arccos x=\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$　　$\arctan x=\frac{1}{1+x^2}$　　$\mathrm{arccot}x=\frac{-1}{1+x^2}$

$\mathrm{arsh}x=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$　　$\mathrm{arch}x=\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$　　$\mathrm{artan}x=\frac{1}{1-x^2}$

2. 幂指函数及对数求导法

幂指函数求导的常用方法：

1) 写成指数形式：将$f(x)=u(x)^{v(x)}$写作$f(x)=e^{v(x)\ln u(x)}$

2) 对数求导法:$\ln f(x)=v(x)\ln u(x)$

3. 高阶函数求导(常用公式+Leibniz 公式)

高阶导常用公式:

$(sinx)^{(n)}=\sin(x+\frac{n\pi}{2})$　　$(cosx)^{(n)}=\cos(x+\frac{n\pi}{2})$　　$(\frac{1}{ax+b})^{(n)}=\frac{(-1)^n a^n}{(ax+b)^{n+1}}(a\neq0)$

Leibniz 公式：$(uv)^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}C_n^k u^{(k)}v^{(n-k)}$，其中 u 和 v　n 阶可导

2.1.5 ★★★★★复合函数链式求导

熟练度是最关键的，采取逐层“扒皮”方法.
例 [2.10]
$y=\cos^2(\frac{1-\ln x}{x})$
设$u=\cos(\frac{1-\ln x}{x})$，$v=\frac{1-\ln x}{x}$，则$y=u^2$.
可求得：$v'=-\frac{2-ln x}{x^2}$，$u'=-v'\ sin\ v$
因此：$y'=2u\cdot u'=2\frac{2-ln x}{x^2}cos\frac{1-ln x}{x}sin\frac{1-ln x}{x}$

2.1.6 ★★反函数求导

公式如下：$\begin{cases}x=\psi(y)\\y=f(x)\end{cases}$　$f'(x)=\frac{1}{\psi'(y)}$

或$y_x'=\frac{1}{x_y'}$

[例 2.11]

证明$(\arctan x)'=\frac{1}{1+x^2}$

证明： 令 $y=\arctan x$, $x=\tan y$

$x_y'=\sec^2 y$，$y_x'=\frac{1}{x_y'}=\frac{1}{\sec^2 y}=\frac{1}{1+\tan^2 y}=\frac{1}{1+x^2}$

2.1.7 ★★★对数求导法

常用于多项乘积或多次方情况

例 [2.12]

求$y=\sqrt{x\ln x\sqrt{1-\sin x}}$中 y对x一阶导数

解：等式两边取对数$\ln y=\frac{1}{2}[\ln x+\ln(\ln x)+\frac{1}{2}\ln(1-\sin x)]$，再两边同时对x求导即可，计算量比链式求导减少了不少.

[总结]对数求导法常见题型：

1.多项乘积（三项及以上）：采用对数求导法化积为和

eg. $|f(x)|=2^x|sinx|\sqrt{1+x^2}$

对数求导：$(\ln|f(x)|)'=[x\ln 2+\ln|\sin x|+\frac{1}{2}\ln(1+x^2)]'$

2.幂指函数求导：见前

3.根式：见例2.11

2.1.8 ★★ Leibniz 公式高次求导

与多项式展开形式很像

多数应用于乘积$(uv)^{(n)}=u^{(n)}v^{(0)}+C_n^1u^{(n-1)}v'+C_n^2u^{(n-2)}v''+\cdots+u^{(0)}v^{(n)}$中有$x^m$，m 为正整数的情况.

[例2.13]

求$y=x\ln x$的n阶导数.

解：由于x的二阶及以上导数为0，利用公式可得$=x\ln x^{(n)}+C_n^1\ln x^{(n-1)}$，再代入$\ln x$的高阶求导结果即可.

2.1.9 ★★★★★隐函数求导

法一：方程两边同时对 x 求导

[例 2.14]

$y=\tan(x+y)$，求$\frac{d^2y}{dx^2}$.

解：两边对x求导：

$y'=\frac{1}{\cos^2(x+y)}(1+y')$

$y'=\frac{\sec^2(x+y)}{1-\sec^2(x+y)}$，$\sec^2(x+y)=1+\tan^2(x+y)$

$$y'=\frac{1+\tan^2(x+y)}{-\tan^2(x+y)}=\frac{1+y^2}{-y^2}=-\frac{1}{y^2}-1$$

$y''=-\frac{2}{y^3}(\frac{1}{y^2}+1)$

法二：对数求导法

[例 2.15]

求由xy=yx确定的隐函数y的导数$\frac{dy}{dx}$

解：取对数可得：$y\ln x=x\ln y$

$y'\ln x+\frac{y}{x}=\ln y+\frac{1}{y}y'x$

$$y' = \frac{\ln y - \frac{y}{x}}{\ln x - \frac{x}{y}}$$

2.1.10 ★★★★参数方程求导公式如下：

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}}{\dot{x}^3}$$

［例2.16］

（双组函数求导）$r^2 = a^2 cos2\theta$，求在$\rho\left(\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{\pi}{6}\right)$的切线方程

解：将方程写作$(x^2 + y^2)^4 = r^4 = a^2r^2(cos^2\theta - sin^2\theta) = a^2(x^2 - y^2)$

通过隐函数求导可得：$y' = \frac{x^2(a^2 - 2x^2 - 2y^2)}{y(a^2 + 2x^2 + 2y^2)}$

在$\rho\left(\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{\pi}{6}\right)$处：$x = r\cos\theta = \frac{\sqrt{6}}{4}a$，$y = r\sin\theta = \frac{\sqrt{2}}{4}a$

代入可得，在$\rho\left(\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{\pi}{6}\right)$处，$y' = 0$

切线方程为：$y = \frac{\sqrt{2}}{4}a$

2.2 微分

可微分与可求导等价，本节主要需要掌握微分的运算法则与近似计算应用，以上节求导的知识和计算为基础.

2.2.1 ★★★★★求函数微分

可以先求导得到$\frac{dy}{dx}$，然后将 dx 乘到等式右边即可.

[例 2.17]

$$y = x \sin 2x$$

$$\frac{dy}{dx} = \sin 2x + 2x \cos 2x\, dx$$

$$dy = (\sin 2x + 2x \cos 2x)\, dx$$

2.2.2 ★★微分在近似计算中的应用

$$f(X) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

［例 2.18］

求 $ln1.01$ 的近似值解：

取 $f(x) = \ln(x)$,

$$\ln(x) \approx \ln(x_0) + \frac{1}{x0}(x - x_0)$$

令 $x_0 = 1$, $x = 1.01$

$$\ln(1.01) \approx \ln(l) + \frac{1}{1}(0.01) = 0.01$$

2.2.3 ★★★ 区分Δy 与 dy

大前提：可微，公式如下：

$$y=f(x),$$
$$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$$
$$dy=f'(x)dx$$

［例2.19］
已知$y = x^3-x$,计算在点$x=2$处当Δx分别等于1，0.1，0.01时的Δy与dy.
解：

$$\Delta y = [(x+\Delta x)^3-(x+\Delta x)] -(x^3-x)$$
$$=(3x^2-1)\Delta x+3x(\Delta x)^2+(\Delta x)^3$$
$$f'(x)=(3x^2-1)$$
$$dy=(3x^2-1)dx$$

再将各值代入即可.

2.2.4 微分中值定理及其应用

本节的主要内容为三个中值定理及洛必达法则的应用，中值定理的应用灵活性，技巧性很强，需要多加练习总结题型和思路，经常作为压轴题考察.洛必达法则不能盲目使用，需要明确前提条件和使用技巧.

2.2.5 ★★★★★ 罗尔定理应用

罗尔定理:若函数 f 满足如下条件：

1 在闭区间[a,b]上连续；

2 f 在开区间(a,b)上可导；

3 f(a)=f(b)

则在(a,b)上至少存在一点ξ，使f'（ξ)=0.
在罗尔定理的应用中，常常需要构造函数，现将几个常用的辅助函数列表如下：

表1 罗尔定理常见辅助函数表

中值等式 $G(\varepsilon)=0$	$F'(x)=0$
$f'(\varepsilon)+A\varepsilon^k+B=0$	$(f(x)+\frac{Ax^{k+1}}{k+1}+Bx)'=0$
$f(a)g'(\varepsilon)-f'(\varepsilon)g(a)-k=0$	$[f(a)g(x)-f(x)g(a)-kx]'=0$
$f(\varepsilon)g''(\varepsilon)-f''(\varepsilon)g'(\varepsilon)$	$[f(x)g'(x)-f'(x)g(x)]'=0$
$(\varepsilon-1)f'(\varepsilon)+kf(\varepsilon)=0$	$[(x-1)^k f(x)]'=0$
$f'(\varepsilon)+\lambda f(\varepsilon)=0$	$[e^{\lambda x}f(x)]'=0$
$f'(\varepsilon)-f(\varepsilon)g'(\varepsilon)=0$	$[e^{g(x)}f(x)]'=0$

［例 2.14］
设 f(x)、g(x) 在 [a,b] 上连续，在 (a,b) 内可导，且 f(b)−f(a) = g(b)−g(a)，试证明

在（a,b）内至少存在一点 c，使得 f’（c）= f’（c）

证明：构造 $F(x) = f(x) - g(x)$，$F(a) = F(b)$，利用罗尔定理即可得证.

变式：柯西定理证明

设 $f(x)$、$g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且当 $x \in (a,b), g'(x) = 0$ 试证明在 (a,b) 内至少有一点 c，使得 $\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$

证明：构造

$m(x) = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} g(x)$

$\Rightarrow f(b) - f(a) = m(b) - m(a)$

故，由罗尔定理 $\exists c \in (a,b)$，使得

$f'(c) = m'(c)$ 即：

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} g'(c)$$

2.2.6 ★★★★拉格朗日定理应用

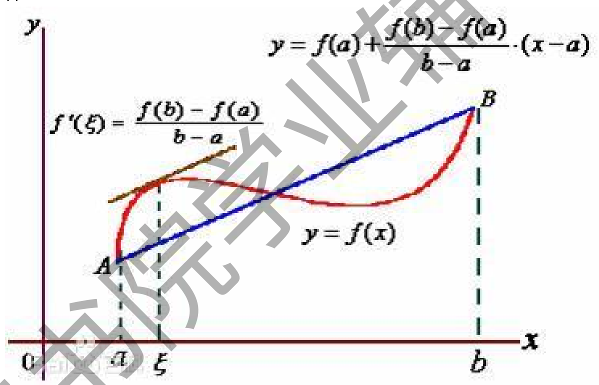
如果函数f(x)满足：

(1)在闭区间[a,b]上连续；

(2)在开区间(a,b)　内可导；

那么在(a,b)内至少有一点ξ(a<ξ<b)，使等式f(b)-f(a)=f’(ξ)(b-a)成立。

可借助下面的图像理解：



常见题型：

题型一：证明不等式（求导对其中一个进行有界（一般是 1）分析）

[例 2.15]（基础题）求证：$|\sin x - \sin y| \leq |x - y|$

由拉格朗日中值定理可得：$\sin x - \sin y = (x - y)\cos\xi$

故：$|\sin x - \sin y| \leq |\cos\xi|\,|x - y|$

又 $|\cos\xi| \leq 1$

故有 $|\sin x - \sin y| \leq |x - y|$

[例 2.16]（略难）设 $f(x)$ 在 $[0, c]$ 上具有单调减小的导函数 $f'(x)$，且 $f(0) = 0$，求证：

对于满足不等式 $0 < a < b < a + b$ 的 a, b，$f(a + b) < f(a) + f(b)$

证明：两次应用拉格朗日中值定理：

$$f(a) - f(0) = f'(\xi_1)(a - 0), \xi_1 \in (0, a)$$

$$f(a+b) - f(b) = f'(\xi_2)(a + b - b), \xi_2 \in (b, a + b)$$

两式相减可得：$f(a+b) - f(b) - f(a) = a[f'(\xi_2) - f'(\xi_1)]$

又 $\xi_2 > \xi_1$，导函数单调减小

有：$[f'(\xi_2) - f'(\xi_1)] < 0$

$f(a + b) < f(a) + f(b)$ 得证.

2.2.7 ★★ 柯西定理

设函数f(x), g(x) 满足:

(1)在闭区间[a, b]上连续；

(2)在开区间(a, b) 内可导；

(3)对任意x∈(a, b), g’(x)≠0,

那么在(a, b)内至少有一点ξ，使得$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$成立。

与拉格朗日中值定理的联系：

在柯西中值定理中，若取g(x)=x时，则其结论形式和拉格朗日中值定理的结论形式相同。因此，拉格朗日中值定理为柯西中值定理的一个特例；柯西中值定理可看作是拉格朗日中值定理的推广。

几何意义理解：用参数方程表示的曲线上至少有一点，它的切线平行于两端点所在的弦。

[例 2.17] 设 0 ≤ a < b，f(x) 在 [a,b] 上连续，在 (a,b) 内可导，试证在 (a,b) 内存在三点 x1, x2, x3，使得 $f'(x_1) = (b + a)\frac{f'(x_2)}{2x_2} = (b^2 + ab + a^2)\frac{f'(x_3)}{3x_3^2}$

分析：观察第二、三式分母，可以看出他们分别是 x22、x33 求导后的结果，因此，

第一式分母可以看成是 x1 求导后的结果. 化简后就成了一道比较简单的 Cauchy 定理的题目.

证明：由分析可得：

$$f'(x_1) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

$$\frac{f'(x_2)}{2x_2} = \frac{f(b) - f(a)}{b^2 - a^2}$$

$$\frac{f'(x_3)}{3{x_3}^2} = \frac{f(b) - f(a)}{b^3 - a^3}$$

联立三式，原式得证.

2.2.8 ★★★★洛必达法则

应用条件：f (x), g (x)在区间 (x0, x0 +δ), (δ > 0)满足：

(1) $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+} g(x)=0$ 或 ∞

(2)f,g 在 $(x_0,x_0+\delta)$ 内可导，且 $g'(x)\neq 0$

(3) $\lim\limits_{x\to x_0^+}\frac{f(x)}{g(x)}=a$，（$a$ 为有限实数或无穷大）.

[例 2.18]

正例：

$$\lim_{x\to 0}\frac{x+\sin(x)}{x-\sin(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{1+\cos(x)}{1-\cos(x)}=\infty$$

错例：

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n}}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}}{1}}=1$$

注意:1) "$\frac{0}{0}$"型

2)当 $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ 不存在且不为无穷大时，

并不能说明 $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}$ 不存在。

例如:$\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\tan x}$

注意：数列不能直接用洛必达法则，需要先将 n 化为 x 的函数求极限，再利用海涅定理得到数列同样为此极限。

2.2.9　Taylor 定理及其应用

本节介绍了带两种余项的泰勒公式，并给出了常用函数的麦克劳林展开式（一定要牢记，很常用，在以后的级数学习中也会有类似形式），需要同学们根据不同的题灵活选用不同形式的余项.

2.2.10　★★★★★带皮亚诺余项的泰勒公式应用

题型一：常用于求极限

[例 2.19] 求 $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt[6]{x^6+x^5}-\sqrt[6]{x^6-x^5})$

解：提公因式 x，得到麦克劳林展式中常用的 $(1+x)^\alpha$ 形式.

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to\infty}(\sqrt[6]{x^6+x^5}-\sqrt[6]{x^6-x^5})\\&=\lim_{x\to\infty}x(\sqrt[6]{1+\frac{1}{x}}-\sqrt[6]{1-\frac{1}{x}})\\&=\lim_{x\to\infty}x((1+\frac{1}{6x}+o_1(\frac{1}{x}))-(1-\frac{1}{6x}+o_2(\frac{1}{x})))\\&=\frac{1}{3}\end{aligned}$$

题型二：等价无穷小应用

[例 2.20] 见 [例 1.14(2)]

2.2.11 ★★★★★带拉格朗日余项的泰勒公式应用

[例 2.21] 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 二阶可导，且 $f'(a)=f'(b)=0$，试证：$\exists\xi\in(a,b)$，使得 $|f''(\xi)|\geq\frac{4}{(b-a)^2}|f(b)-f(a)|$

证明：本题采用在 a,b 分别展开，再进行联立的技巧

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(\xi_1)}{2}(x-a)^2\xi_1\in(a,x)$$
$$f(x)=f(b)+f'(b)(x-b)+\frac{f''(\xi_2)}{2}(x-b)^2\xi_2\in(x,b)$$

将 $x=\frac{a+b}{2}$ 代入

$$\Rightarrow\begin{cases}f(\frac{a+b}{2})=f(a)+f'(a)\frac{b-a}{2}+\frac{f''(\xi_1)}{2}(\frac{b-a}{2})^2,\xi_1\in(a,\frac{a+b}{2})\\ f(\frac{a+b}{2})=f(b)+f'(b)\frac{a-b}{2}+\frac{f''(\xi_2)}{2}(\frac{b-a}{2})^2,\xi_2\in(\frac{a+b}{2},b)\end{cases}$$

两式相减可得：

$$\Rightarrow f(b)-f(a)=\frac{f''(\xi_1)}{2}(\frac{b-a}{2})^2-\frac{f''(\xi_2)}{2}(\frac{b-a}{2})^2$$

$$\Rightarrow\frac{4}{(b-a)^2}|f(b)-f(a)|=\left|\frac{f''(\xi_1)-f''(\xi_2)}{2}\right|\leq\left|\frac{f''(\xi_1)}{2}\right|+\left|\frac{f''(\xi_2)}{2}\right|\leq\max(f''(\xi_1),f''(\xi_2))$$

证毕.

2.2.12 函数性态的研究

本节主要内容有单调性，极值，最值，凹凸性和拐点，整体难度不大，根据定义判断即可，但根据是否连续和是否可导判断极值是一个难点。

2.2.13 判断单调性

利用函数求导法则判断。

2.2.14 ★★★极值点的讨论

在 x_0 处：

1) 连续

①可导，且 $f'(x_0)=0$

导数在左右变号，取极值.

导数在左右不变号，不取极值.

②不可导

导数在左右变号，取极值.

导数在左右不变号，不取极值.

2) 不连续

利用定义：$f:I\to R,x_0\in R$, 若 $\exists\delta>0$, 使得 $\forall x\in U(x_0,\delta)\subseteq I$，恒有 $f(x)\geq f(x_0)$（或 $\leq$），则 f 在 x_0 处取极小（大）值.

[例 2.22] 求由方程 $x^3 + y^3 - 3xy = 0$ 所确定的函数在 $x > 0$ 且 $x \neq y^2$ 的极值点.

分析：属于隐函数求极值，需要对两边同时求导.

解：方程两边同时求导可得：

$$3x^2 + 3y^2\frac{dy}{dx} - 3y - 3x\frac{dy}{dx} = 0 \to \frac{dy}{dx} = \frac{y - x^2}{y^2 - x}$$

令 $\frac{dy}{dx} = 0$，得到 $y = x^2$.

代入原方程得到：$x^6 - 2x^3 = 0$

因此，驻点为 $(\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{4})$，又有 $\frac{d^2y}{dx^2}\big|_{x=\sqrt[3]{2}} < 0$

故函数的极大值点为 $\sqrt[3]{2}$.

自我检测习题：

1. 证明题：

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上正值，连续，则在 (a,b) 内至少存在一点 ξ，

使 $\int_a^\xi f(x)dx = \int_\xi^b f(x)dx = \frac{1}{2}\int_a^b f(x)dx$ 。

解答_

证：令 $F(x) = \int_a^x f(t)dt - \int_x^b f(t)dt$

由于 $x \in [a,b]$ 时，$f(x) > 0$

$\therefore F(a) = -\int_a^b f(t)dt < 0$

$F(b) = \int_a^b f(t)dt > 0$

由根的存在性定理，存在一点 $\xi \in (a,b)$ 使

$F(\xi) = 0$

即 $\int_a^\xi f(t)dt = \int_\xi^b f(t)dt$

又 Q $\int_a^b f(t)dt = \int_a^\xi f(x)dx + \int_\xi^b f(x)dx$

$= \int_a^\xi f(x)dx + \int_\xi^b f(x)dx$

$= 2\int_a^\xi f(x)dx$

从而原式成立。

2. 证明题

设k为正整数，证明：

$$(1)\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 kxdx=\pi\ ;$$

$$(2)\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 kxdx=\pi\ 。$$

解答_

$$(1)\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 kxdx$$

$$=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1+\cos 2kx}{2}dx$$

$$=[\frac{1}{2}x+\frac{1}{4k}\sin 2kx]\Big|_{-\pi}^{\pi}$$

$$=(\frac{\pi}{2}+0)-(-\frac{\pi}{2}+0)$$

$$=\pi。$$

$$(2)\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 kxdx$$

$$=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1-\cos 2kx}{2}dx$$

$$=[\frac{1}{2}x-\frac{1}{4k}\sin 2kx]\Big|_{-\pi}^{\pi}$$

$$=(\frac{\pi}{2}-0)-(-\frac{\pi}{2}-0)$$

$$=\pi。$$

3. 证明题

设函数$f(x)$在$[0,1]$上连续,

证明：$\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(|\cos x|)dx=\frac{1}{4}\int_0^{2\pi}f(|\cos x|)dx$ 。

解答_

证：显然$f(|\cos x|)$是以π为周期的函数

$$\therefore\int_0^{2\pi}f(|\cos x|)dx$$

$$=2\int_0^{\pi}f(|\cos x|)dx$$

$$=2[\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(|\cos x|)dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}f(|\cos x|)dx]$$

在后一积分中,令$x=\pi-t$则

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}f(|\cos x|)dx$$

$$=-\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}f(|\cos(\pi-t)|)dt$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(|\cos t|)dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(|\cos x|)dx$$

$$\therefore\int_0^{2\pi}f(|\cos x|)dx$$

$$=2[\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(|\cos x|)dx+\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(|\cos x|)dx]$$

$$=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(|\cos x|)dx$$

得证$\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(|\cos x|)dx=\frac{1}{4}\int_0^{2\pi}f(|\cos x|)dx$。

4. 证明题

设 $f(x)$是以π 为周期的连续函数，

证明:$\int_0^{2\pi}(\sin x+x)f(x)dx=\int_0^{\pi}(2x+\pi)f(x)dx$ 。

解答_

证明：由于

$$\int_0^{2\pi}(\sin x+x)f(x)dx$$

$$=\int_0^{\pi}(\sin x+x)f(x)dx+\int_{\pi}^{2\pi}(\sin t+t)f(t)dt$$

令$t=\pi+x$，则

$$\int_{\pi}^{2\pi}(\sin t+t)f(t)dt$$

$$=\int_0^{\pi}[(\sin(\pi+x)+\pi+x]f(\pi+x)dx$$

$$=\int_0^{\pi}(x+\pi-\sin x)f(x)dx$$

$$\therefore\int_0^{2\pi}(\sin x+x)f(x)dx$$

$$=\int_0^{\pi}(\sin x+x)f(x)dx+\int_0^{\pi}(x+\pi-\sin x)f(x)dx$$

$$=\int_0^{\pi}(2x+\pi)f(x)dx。$$

5. 证明题

设$f(x)$在$[a,b]$上单调增加且$f''(x)>0$.

证明: $(b-a)f(a)<\int_a^b f(x)dx<(b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}$。

解答_

证明:由假设$\forall x\in[a,b].x>a$时$f(x)>f(a)$

$$\therefore\int_a^b f(x)dx>(b-a)f(a)$$

$\forall t\in[a,b].f(t)$在x点处的展式为

$$f(t)=f(x)+f'(x)(t-x)+\frac{1}{2!}f''(\xi)(t-x)^2$$

(ξ 在t与x之间)

又因$f''(\xi)>0$,故

$$f(t)>f(x)+f'(x)(t-x)$$

将$t=b,t=a$分别代入上式并相加,有

$$f(b)+f(a)>2f(x)+(a+b)f'(x)-2xf'(x)$$

$$\int_a^b[f(b)+f(a)]dx>2\int_a^b f(x)dx+(a+b)\int_a^b f'(x)dx-2\int_a^b xf'(x)dx$$

$$2[f(b)+f(a)](b-a)>4\int_a^b f(x)dx$$

$$\therefore\int_a^b f(x)dx<\frac{f(a)+f(b)}{2}(b-a)。$$

6. 证明题

设$f(x)$在$[a,b]$上二阶可导且$f''(x)<0$,

证明：$\int_a^b f(x)dx \le (b-a)f(\frac{a+b}{2})$ 。

解答_

$\forall x \in (a,b)$将 $f(x)$在$\frac{a+b}{2}$处展开,有

$$f(x)=f(\frac{a+b}{2})+f'(\frac{a+b}{2})(x-\frac{a+b}{2})+\frac{1}{2!}f''(\xi)(x-\frac{a+b}{2})^2$$

(ξ 介于x与$\frac{a+b}{2}$之间)

由题设知$f''(\xi)<0$

$$\therefore f(x)\le f(\frac{a+b}{2})+f'(\frac{a+b}{2})(x-\frac{a+b}{2})$$

$$\int_a^b f(x)dx \le (b-a)f(\frac{a+b}{2})+\frac{1}{2}f'(\frac{a+b}{2})(x-\frac{a+b}{2})^2\Big|_a^b$$

$$=(b-a)f(\frac{a+b}{2})。$$

7. 证明题

试证：如果$f(x)$在$[a,b]$上连续，且对于一切$x\in[a,b]$，$f(x)\ge 0$

同时至少存在一点$\xi\in[a,b]$，使$f(\xi)>0$，则$\int_a^b f(x)dx>0$ 。

解答_

证明：由$f(x)$在ξ点连续，且$f(\xi)>0$，$\xi\in[a,b]$

则存在$\delta>0$，当$x\in(\xi-\delta,\xi+\delta)$时，有

$f(x)>0$

于是

$$\int_a^b f(x)dx \ge \int_{\xi-\delta}^{\xi+\delta} f(\xi)dx = 2\delta f(\xi)>0$$

$$\therefore \int_a^b f(x)dx>0。$$

8. 证明题

试证$\int_a^b f(c-x)dx=\int_{c-b}^{c-a}f(x)dx$ 。

解答_

令$t=c-x$则$x=c-t, dx=-dt$

且$x=a$时,$t=c-a$

$x=b$时,$t=c-b$

$$\therefore \int_a^b f(c-x)dx$$

$$=\int_{c-a}^{c-b} f(t)(-dt)$$

$$=-\int_{c-a}^{c-b} f(t)dt$$

$$=\int_{c-b}^{c-a} f(x)dx。$$