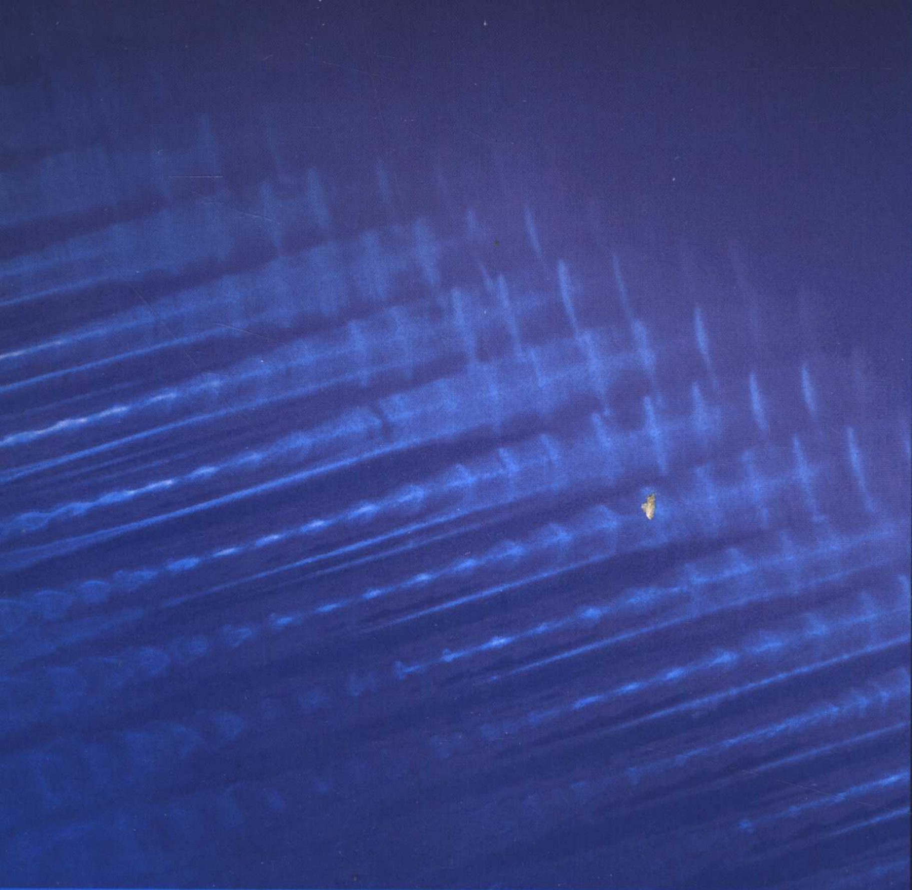
普通高等教育"十五"国家级规划教材配套参考书

工科数学分析基础教学辅导书

（上册）

武忠祥　主编

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS



ISBN 7-04-020052-X

9 787040 200522 >

定价 29.90 元

查询其他教学用书，敬请浏览
www.hep-st.com.cn

普通高等教育"十五"国家级规划教材配套参考书

工科数学分析基础
教学辅导书

（上册）

武忠祥　主编

高等教育出版社

内容提要

本书是“高等教育百门精品课程教材建设计划”(此计划作为整体已列入新闻出版总署“十五”国家重点图书规划)研究成果之一，是与西安交通大学马知恩和王绵森教授主编的普通高等教育“十五”国家级规划教材《工科数学分析基础》(第二版)(上册)相配套的教学辅导书。

本书每章内容分为三个部分：主要内容剖析；教学要求、典型例题与讨论题；习题选解。本书可作为工科学生学习高等数学课程的学习辅导书，并兼顾任课教师的教学需要，同时也可供其他非数学类专业的学生和教师参考。

图书在版编目(CIP)数据

工科数学分析基础教学辅导书. 上册/武忠祥主编.
—北京：高等教育出版社，2006. 9
ISBN 7-04-020052-X

Ⅰ. 工… Ⅱ. 武… Ⅲ. 数学分析-高等学校-教学参考资料 Ⅳ. O17

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 091930 号

出版发行	高等教育出版社	**购书热线**	010 - 58581118
社　　址	北京市西城区德外大街 4 号	**免费咨询**	800 - 810 - 0598
邮政编码	100011	**网　　址**	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010 - 58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
			http://www.landraco.com.cn
经　　销	蓝色畅想图书发行有限公司	**畅想教育**	http://www.widedu.com
印　　刷	高等教育出版社印刷厂		
开　　本	787 × 960　1/16	**版　　次**	2006 年 9 月第 1 版
印　　张	28.75	**印　　次**	2006 年 9 月第 1 次印刷
字　　数	540 000	**定　　价**	29.90 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换。

版权所有　侵权必究

物料号　20052 - 00

郑 重 声 明

高等教育出版社依法对本书享有专有出版权。任何未经许可的复制、销售行为均违反《中华人民共和国著作权法》,其行为人将承担相应的民事责任和行政责任,构成犯罪的,将被依法追究刑事责任。为了维护市场秩序,保护读者的合法权益,避免读者误用盗版书造成不良后果,我社将配合行政执法部门和司法机关对违法犯罪的单位和个人给予严厉打击。社会各界人士如发现上述侵权行为,希望及时举报,本社将奖励举报有功人员。

反盗版举报电话:(010) 58581897/58581896/58581879

传　　真:(010) 82086060

E - mail:dd@hep.com.cn

通信地址:北京市西城区德外大街4号

高等教育出版社打击盗版办公室

邮　　编:100011

购书请拨打电话:(010)58581118

策划编辑　马　丽

责任编辑　张耀明

封面设计　张　志

责任绘图　尹文军

版式设计　马静如

责任校对　姜国萍

责任印制　宋克学

前　　言

本书是与马知恩和王绵森教授主编的普通高等教育“十五”国家级规划教材《工科数学分析基础(第二版)》(上册)(本书中均简称《教材》)相配套的教学辅导书,是“高等教育百门精品课程教材建设计划”(此计划作为整体已列入新闻出版总署“十五”国家重点图书规划)研究成果之一,主要面向使用该《教材》的学生,也兼顾教师的教学需要,对于使用其他同类教材学习高等数学的学生和教师也是一本有益的教学参考书。

如何编写一本好的教学辅导书,是值得认真讨论和探索的。我们认为,教学辅导书不仅要分析解题思路、讲解解题方法、提高学生的解题能力,而且要通过对基本概念、基本理论和重要思想方法的深入剖析,加深学生对所学内容的理解,提高学生的能力和素养。教学辅导书既应成为传授知识的载体,又应成为提高能力和培养素质的载体。本书就是按照上述想法所作的初步尝试,按照《教材》中各章内容的顺序,每章均包含以下三部分内容。

一、主要内容剖析

对《教材》中各章的主要概念、主要定理和重要的思想方法以问题的形式进行深入的剖析,以便使读者更好地理解概念的本质和理论的含义,掌握一些常用的数学思想方法,提高分析问题的能力、应用能力和自主学习的能力。对某些内容,我们还作了适当的延伸,其中打 * 号的问题或段落属于要求较高的内容,可供教师和学有余力的学生选读。

二、教学要求、典型例题与讨论题

该部分按照《教材》中的顺序,将每章编写成若干讲,每一讲的内容大体相当于一次习题课或讨论课,并且包含以下四个方面:

1. 教学要求与学习注意点

我们在教育部高教司 1995 年颁布的《高等数学课程教学基本要求》的基础上,结合本《教材》的特点和我校的教学实践,进行了细化和补充,提出了基本要求,并指出学生在学习中应当特别注意和容易忽略、容易发生错误的地方,供学生和教师参考。

2. 典型例题

在《教材》中已有例题和习题的基础上,又精选了一些概念性,启发性和综合性较强的例题,通过“分析”、“解答”和“注释”,分析解题思路,阐述有关的思想方

法，指出常见错误，对问题的类型和解法进行归纳总结，以使读者能够举一反三，提高分析和解决问题的能力，这些例题也可供习题课选用。

3. 讨论题

针对学生在学习中遇到的带有普遍性的疑难问题，包括对某些主要概念的理解，重要定理的条件分析和使用、典型解题思路和方法的总结，以及某些似是而非论证的辨析等编写了一些讨论题，可供习题课或讨论课选用，也可供学生在课后思考和讨论，在书后的附录中对每个讨论题都给出了简要解答或提示。

4. 练习题

这部分练习题可供学生在习题课内或课后练习之用，每道题均在书后的附录中给出了答案或提示。

三、习题选解

对原《教材》中初学者感到比较困难或比较典型的部分习题（约占所配习题的三分之一）给出了解答或提示，供参考，对这些解答，希望读者按照“先做后看”的原则，坚持独立完成，只有这样，才能取得好的效果，现在市场上流行一种关于我们编写的《教材》中习题的全解，是未经过我们的授权编写的，不符合我们的意愿，对于其中的错误和问题应由其编者负责！

为了便于学生在期中和期末进行自我检查和复习，本书中编写了两套自我检测题，并在附录中给出了答案或提示。

参加本书编写的有马知恩、王绵森、武忠祥、高安喜和张娟，由武忠祥任主编。其中第一部分（主要内容剖析）由马知恩和王绵森编写，第二部分（教学要求、典型例题与讨论题）由武忠祥和高安喜编写，第三部分（习题选解）由张娟编写。在编写过程中，我们得到了高等教育出版社的资助和大力支持，在此表示衷心的感谢。

由于我们缺乏编写这类教学辅导书的经验，加之成书时间仓促，作者水平有限，不妥和错误之处在所难免，恳请同行与读者不吝赐教，批评指正。

编　者

2005 年 12 月于西安交通大学

目　　录

第一部分　主要内容剖析

第二部分 教学要求、典型例题与讨论题

第三部分　习 题 选 解

第一部分　主要内容剖析

第一章 函数、极限、连续

1. 从函数到映射

(1) 函数概念发展的历史概要

为了深刻理解函数的概念，我们简要地介绍一点关于函数概念发展的历史知识.

从 17 世纪 70 年代微积分的创立，大约经历了一个半世纪，人们才弄清楚函数的概念. 17 世纪欧洲工业革命的兴起，不但推动了社会生产力的发展，而且也加深了人类对自然界的认识. 客观世界的事物都处于运动变化之中，为了描述运动，就需要引入变量；为了研究运动变化的规律，就需要研究变量间相互联系相互依赖的关系，促成了函数概念的产生. 例如，天文学家 Galileo 首先用公式 $S=\frac{1}{2}gt^2$ 表示自由落体通过的路程与时间的关系；Descartes 与 Fermat 创立了解析几何，使运动可以通过曲线来表示（例如用抛物线表示弹道等）；Newton 用“流量”来表示随时间变化的量等. 最早提出“函数”这个词的是 Leibniz，他用函数表示任何随曲线上点变动而变动的量（例如点的纵坐标、切线和法线的长度等）. 1714 年他在《历史》一书中，用函数表示依赖于一个变量的量. J. Gregory 在 1667 年说过：“函数是这样一个量：它是从其他的量经过一系列代数运算而得到的，或者是经过任何其他可以想像的运算而得到的.”直到 1734 年 Euler 才在他的著作《引论》中首次用符号 $f(x)$ 来表示函数. 18 世纪初，微积分已得到迅速发展，但函数概念仍停留在变量间的依赖关系或由运算（甚至代数运算）得到的量这样含糊不清的表述中.

1750 年左右，由于没有精确的函数概念，引发了一场对 D'Alembert 所研究的弦振动问题的争论. 作为这场争论的一个结果，使得多数数学家对一个函数必须处处具有相同的解析表达式的看法受到了挑战，Euler 和 Largrange 允许函数在不同区域上具有不同的表达式. Fourier 关于热传导问题的研究进一步拓广了人们对函数概念的认识. 他一方面主张函数不必表示为任何解析表达式，另一方面，在某种程度上又同意函数的解析表达式可以是一个 Fourier 级数的观点. 从而动摇了 18 世纪初认为所有函数都应是代数函数推广的信念.

函数概念的更精确的描述是由 Cauchy 和 Dirichlet 给出的. 1821 年，Cauchy 在他的分析教科书中对函数概念给出了比较明确的表述：“当变量之间

这样联系起来的时候，即给定了这些变量中一个的值，就可以决定所有其他变量的值的时候，人们通常想像这些量是用其中的一个来表达的，这时这个量就取名为自变量，而由这个自变量表示的其他量就叫做这个自变量的函数."Cauchy 也清楚无穷级数是规定函数的一种方法，但是对函数来说不一定要有一个解析表达式. 1837 年，Dirichlet 在一篇名为《用正弦和余弦级数来表示完全任意的函数》论文中，给出了与现在的表述非常接近的函数定义：如果对于给定区间上的每一个 x 的值有唯一的一个 y 的值同它对应，那么 y 就是 x 的一个函数. 接着他还指出，至于在整个区间上 y 是否按照一种或多种规律依赖于 x，或者 y 依赖于 x 是否可用数学运算来表达，那都是无关紧要的. 事实上，他于 1829 年还给出了现在称为 Dirichlet 函数的著名例子(见《教材》第一章例 1.9)，说明他对函数概念的内涵已经认识得很清楚了.

(2) 函数概念的内涵

从函数概念发展的简要历史中可以看到，它是在人类对客观世界认识的不断深化中逐步完善和精确化的. 现在的教科书中对函数概念的数学定义都写得更加精练、更加广泛而严谨了，读者应当透过定义理解它的丰富内涵. 主要有以下几点：

1° 现实世界的各种事物在运动变化过程中不是孤立的、互不相关的，而是相依相随的，因此，描写事物变化的各个变量在变化过程中也是相互联系、相互依赖的. 函数就是刻画在变化过程中变量相互联系相互依赖的数量关系的一个重要的数学概念.

2° 函数定义中包含三个要素：定义域，即自变量的取值范围；自变量与因变量之间的对应法则；值域，即对于自变量在定义域内取得的每个值按照对应法则所得到的因变量对应值的全体. 由于值域是由定义域和对应法则确定的，因此，定义域与对应法则是函数定义中的两个基本要素.

3° 对应法则是因变量与自变量之间函数关系的具体表现，是函数定义中的本质要素. 对应法则必须是明确的，能由自变量的给定值唯一确定一个因变量的值. 至于对应法则是用什么方式表示的，是否能用一个数学公式来表达，都是无关紧要的.《教材》中介绍了表示对应法则的三种常用的方法(列表法、图示法和公式法)，其中公式法是在理论研究中最常用的. 由于这种表示法形式甚多，在《教材》中随着内容的逐步展开，也会出现许多与常见的基本初等函数不同的函数表达形式，读者应当特别注意理解它们的含义. 在函数的定义域上，可以用一个公式来表示对应法则，也可以在定义域的不同子集上用不同的公式来表示对应法则，例如像 Dirichlet 函数那样分段表示的函数；分段表示的函数既可以仅用有限个公式来表示，也可以将定义域分为无限多段来表示，如取整函数等；函数的表达式既可以是显式形式 $y=f(x)$，也可以是隐式形式，即由满足一定条件

的方程 $F(x,y)=0$ 来确定，还可以用参数方程 $x=x(t),y=y(t)(\alpha\leqslant t\leqslant\beta)$ 来表示（见《教材》第二章）.《教材》的第三章中，将用变上限的积分或反常积分（如 Γ 函数）来表示一个函数，第四章中用无穷级数（幂级数或 Fourier 级数）表示函数，第六章中还用含参变量的反常积分来表示函数等.

(3) 函数概念的发展——映射

把函数 f 的定义域 $D(f)$ 与值域 $R(f)$ 从实数集推广到一般的集合上，便得到映射的概念（《教材》第一章定义 1.3）. 映射是函数概念的重要发展，它比函数概念广泛得多. 不但包含了一元实变函数（即从实数集 $A\subseteq\mathbf{R}$ 到实数集 $\mathbf{R}$ 的映射 $f:A\subseteq\mathbf{R}\to\mathbf{R}$）、$n$ 元实变函数（即从集合 $A\subseteq\mathbf{R}^n$ 到 $\mathbf{R}$ 的映射 $f:A\subseteq\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$），而且包含了 n 元向量值函数，即从 $A\subseteq\mathbf{R}^n$ 到 $\mathbf{R}^m$ 的映射 $\boldsymbol{f}:A\subseteq\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^m$. 例如，空间曲线的参数方程

$$x=x(t),y=y(t),z=z(t)\quad(\alpha\leqslant t\leqslant\beta)$$

就可以表示为一元向量值函数 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)(\alpha\leqslant t\leqslant\beta)$，空间曲线就是在映射 $\boldsymbol{r}$ 下区间 $[\alpha,\beta]\subseteq\mathbf{R}$ 到三维空间 $\mathbf{R}^3$ 中的像；曲面的参数方程

$$x=x(u,v),y=y(u,v),z=z(u,v),(u,v)\in D\subseteq\mathbf{R}^2$$

可以表示为二元向量值函数 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u,v)((u,v)\in D\subseteq\mathbf{R}^2)$，曲面可以看成在映射 $\boldsymbol{r}$ 下从平面区域 D 到三维空间 $\mathbf{R}^3$ 中的像（见《教材》第五章）. 如果 $D(f)=A$ 与 $R(f)=B$ 都是复平面 $\mathbf{C}$ 上的复数集，那么映射 $f:A\to B$ 就称为**复变函数**，它是复变函数这一数学学科研究的对象.

* 实际上，正如函数是经典数学（特别是微积分）的研究对象一样，映射是现代数学（特别是现代分析）的研究对象. 当 $D(f)=A$ 与 $R(f)=B$ 是具有某种性质的函数集合时，映射 $f:A\to B$ 就包含了许多更为复杂的研究对象. 例如，设 $C[a,b]$ 表示闭区间 $[a,b]$ 上的连续函数全体构成的集合，$C^{(1)}[a,b]$ 表示 $[a,b]$ 上一阶连续可微函数的集合，则对函数 $\varphi\in C^{(1)}[a,b]$ 的求导运算 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\varphi(x)=\varphi'(x)$ 就定义了一个从 $C^{(1)}[a,b]$ 到 $C[a,b]$ 的映射 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}:C^{(1)}[a,b]\to C[a,b]$，称它为一个**算子**；若用 $\mathscr{R}[a,b]$ 表示 $[a,b]$ 上 Riemann 可积函数全体构成的集合，则对函数 $\varphi\in\mathscr{R}[a,b]$ 在 $[a,b]$ 上求定积分 $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 定义了一个从 $\mathscr{R}[a,b]$ 到 $\mathbf{R}$ 的映射 $\displaystyle\int_a^b\cdot\,\mathrm{d}x:\mathscr{R}[a,b]\to\mathbf{R}$，称它为一个**泛函**. 数学的很多领域中所研究的对象（例如，Laplace 变换、Fourier 变换、各种微分方程等）都可以看成是定义在一类函数集合上的映射（算子或泛函），它们是现代分析研究的对象（《教材》第八章）.《教材》中采用从映射的观点讲解函数，不但可以加深对函数概念的理解，还可以为读者进一步学习现代数学知识打下基础.

2. 关于实数的完备性

我们知道,一元函数微积分是研究一元函数变化的局部性质和整体性质的.一元函数是从实数集 $\mathbf{R}$ 的子集 A 到 $\mathbf{R}$ 的映射 $f:A\subseteq\mathbf{R}\to\mathbf{R}$,为了研究一元函数 f 的变化性质,就需要在实数集上对函数 f 作极限运算.因此,实数集是极限理论乃至一元函数微积分的基础.

实数是有理数与无理数的总称.从几何上看,有理数在数轴上是稠密的,任何两个有理点之间存在着无穷多个有理点.但有理点不能充满数轴,就是说,有理点在数轴上不是连续分布的.而实数与数轴上的点是一一对应的,它们在数轴上是连续分布的,数轴上不存在不是实数的点.这个性质称为实数的**连续性**或**完备性**.然而,直到 19 世纪中叶,人们对实数的理解大体上仍停留在这样的直观阶段.究竟什么是无理数,无理数与有理数有什么关系,怎样精确地刻画实数的完备性,当时的数学家还没有认真地考虑过.不少人也认为无需考虑,满足于在这样的基础上进行运算.美国著名的应用数学家和数学教育家 M. Kline 教授在他的著作《古今数学思想》的第 41 章一开始就感叹道:“数学史上最使人惊奇的事实之一,是实数系的逻辑基础竟迟至十九世纪后半叶才建立起来.”距微积分的创立有二百年之久!

随着数学分析严密化进程的不断加速,不少数学家认识到极限理论、微积分理论、无穷级数理论中出现的许多含糊不清甚至错误的问题都是因为对实数系的结构缺乏足够的理解.如果不能建立严密的实数系理论,极限理论乃至整个微积分大厦仍将建立在松软的地基之上! 1872 年前后,以 Dedekind、Cantor、Heine和 Weiestrass 为代表的一批著名的数学家从不同角度以不同形式完成了建立实数理论的这一历史使命.他们都以建立无理数理论这个难点为突破口,用有理数集来定义实数,其核心是刻画实数的完备性.这里不可能详细介绍他们的理论,仅简要地说明从极限运算封闭性的需要将有理数集扩充为实数集的思路和方法,揭示实数完备性的思想内涵.

为了便于理解,我们从数系的扩充说起.众所周知,人类在认识和改造客观世界的过程中,对数的认识是从正整数开始的.正整数集 $\mathbf{N}_+$ 关于加法和乘法运算是封闭的,对减法运算却不封闭.为了使减法运算封闭,必须引入负整数和数 0,这样,正整数集就扩充为整数集 $\mathbf{Z}$.然而,整数集对除法运算仍不封闭.为了使除法运算封闭,又必须引入分数,将整数集扩充为有理数集 $\mathbf{Q}=\left\{\frac{p}{q}\,\middle|\,p\in\mathbf{Z},q\in\mathbf{N}_+,|p|\text{与 }q\text{ 互质}\right\}$.有理数集对于有理运算(即加、减、乘、除)都是封闭的,并且每个有理数都可以统一用分数 $\frac{p}{q}$ 来表示.当 p 能被 q 整除时,它就表示整数;不能整除时,它就是有限小数或无限循环小数.所以,从 $\mathbf{Z}$ 扩

充到 $\mathbf{Q}$，增添的新数是有限小数或无限循环小数.

但是，人们早已发现不是有理数的数是客观存在的，例如大家熟知的$\sqrt{2}$就不是有理数，并且

$$\sqrt{2}=1.414\ 213\ 56\cdots$$

是一个无限不循环小数，把它叫做无理数. 无理数包括两大类，一类是代数数，它们是整系数代数方程的解，例如$\sqrt{2}$，$\sqrt{3}$，$\sqrt{5}$，$\sqrt[3]{2}$等；另一类就是所谓超越数，例如$\pi=3.141\ 592\ 6\cdots$，$e=2.718\ 281\ 8\cdots$等. 一个无理数可以用有理数列来无限逼近. 例如，将 2 开方得到的不足近似值构成的有理数列

$$1,1.4,1.41,1.414,1.414\ 2,1.414\ 21,1.414\ 213,\cdots$$

无限地逼近$\sqrt{2}$；有理数列

$$2,2.7,2.71,2.718,2.718\ 2,2.718\ 28,2.718\ 281,\cdots$$

无限逼近于无理数 e. 这表明，如果一个有理数列无限逼近（或收敛）于某个“数”，这个“数”可能不是有理数. 也就是说，极限运算在有理数集中是不封闭的. 这件事启示我们，为了保证极限运算的封闭性，需要对有理数集加以扩充，并且通过利用收敛的有理数列来表示数可望实现这种扩充. 基本思路如下.

* 由于收敛的有理数列是一个 Cauchy 数列（《教材》第一章第二节），所以就用 Cauchy 有理数列来表示扩充数集中的“数”. 当它收敛于有理数 a 时，就表示 a；当它不收敛于有理数时，就表示一种新的数——无理数. 用 $\mathbf{R}$ 表示扩充后的数集，不难说明：(1) $\mathbf{R}$ 包含了有理数集 $\mathbf{Q}$. 这是因为对任何有理数 r，都能用一个特殊的 Cauchy 有理数列（常数列 $r,r,\cdots,r,\cdots$）来表示；(2) 每个 Cauchy 有理数列只定义了一个数，因为收敛数列的极限是唯一的；(3) 由于存在着不同的 Cauchy 有理数列收敛于同一个数的情况，为使 $\mathbf{R}$ 中的数与 Cauchy 有理数列一一对应，上述用 Cauchy 有理数列表示“数”的想法还需作如下修改：定义收敛于同一个数的不同 Cauchy 有理数列是等价的（或等同的），用它将所有 Cauchy 有理数列构成的集合划分为等价类，并规定每个等价类中的 Cauchy 有理数列表示同一个数. 这样，所有等价的 Cauchy 有理数列就定义了一个数，称这个数为实数，由所有等价类构成的集合（称它为关于该等价关系的**商集**）就是实数集[①]. 因为每个实数是一类等价的 Cauchy 有理数列的极限，所以有理数的极限运算在实数中是封闭的；(4) 实数集对极限运算也是封闭的，也就是说，Cauchy

---

① 这种定义实数的方法实际上与定义有理数的方法是类似的. 例如，可以把商为$\frac{1}{2}$的分数$\frac{2}{4}$，$\frac{3}{6}$，$\frac{4}{8}$，…定义为等价的，所有这些分数构成一个等价类，表示同一个数. 按定义，这个数就是有理数$\frac{1}{2}$. 二者不同的只是等价关系的定义不同而已.

实数列的极限仍为实数. 事实上,Cauchy 收敛原理(《教材》第一章第二节)讲的就是这件事. 因此,为了保证极限运算的封闭性,使极限运算畅行无阻,实数集不需要再扩充了,实数集对极限运算来说是“完备”了,这个性质称为实数集的**完备性**.

Cauchy 收敛原理刻画了实数集的完备性. 实际上,还有几个与它等价的命题:确界存在定理、单调有界定理、区间套定理、Bolzano-Weiestrass 定理、有限覆盖定理,它们都从不同侧面刻画了实数集的完备性. 由于 Cauchy 收敛原理仅涉及极限,而极限只要利用距离或邻域就可以定义. 因此,在 n 维 Euclid 空间 $\mathbf{R}^n$ 中(《教材》第五章),在现代分析的许多抽象的无限维空间中(《教材》第八章),都利用 Cauchy 收敛原理来讨论空间的完备性.

3. 怎样理解极限的 $\varepsilon-N$ 与 $\varepsilon-\delta$ 定义

极限概念是微积分的基本概念,极限方法是研究函数变化性态的最重要思想方法. 因此 ,深刻理解极限的概念与方法对于学好微积分是至关重要的.

朴素的极限思想虽然早在二千多年前已经萌芽,然而,Newton 和 Leibniz 创立微积分时,人们还没有明确的极限概念. 直到 1821 年,Cauchy 才在《代数分析教程》中首先给出了极限的定义. 他说:“当一个变量逐次所取的值无限趋近一个定值,最终使变量的值与该定值之差要多小就多小,这个定值就叫做所有其他值的极限.”按照这个定义,当 n 无限增大时,a_n 无限接近于 a,称数列$\{a_n\}$的极限为 a;当 x 无限趋近于 x_0 时,$f(x)$无限接近于 a,称函数 $f(x)$当 x 无限趋近于 x_0 时的极限为 a. 极限定义的精确表述是 Weierstrass 于 19 世纪中叶给出的,就是现在的教材中普遍采用的数列极限的 $\varepsilon-N$ 定义与函数极限的 $\varepsilon-\delta$ 定义.

人们为什么不采用 Cauchy 的表述,而用 Weierstrass 的方法作为极限的定义呢? 事实上,Cauchy 的定义并没有错,它抓住了极限是刻画在一无限变化过程中一个变量随另一个变量变化趋势的基本内涵,易于理解. 但是这个定义是描述性的,由于对其中关键的“两个无限”(即“无限增大”和“无限趋近”)没有作进一步的刻画,因而,利用该定义只能通过直接观察得到某些简单函数与数列的极限$\left(\text{例如}, \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=0, \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n+1}=1\text{ 等}\right)$. 单凭直观的观察不但不可靠而且随着研究的不断深入,很难解决一些更复杂的理论与计算问题. 例如,数列 $a_n=\sqrt[n]{a}\,(a>0)$ 的极限存在与否? 若存在,如何求出它的极限值? 如何证明:若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=a$,则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=a$,Cauchy 的定义是无能为力的. Weierstrass 改善了 Cauchy 的定义,用 $\varepsilon-N$ 与 $\varepsilon-\delta$ 语言精确而简洁地刻画了 Cauchy 定义中的“两个无限”,很好地解决了极限理论和计算中所提出的问题,为微积分奠定了坚实的基础. 从表面上看,这个定义抽象难懂,但只要用心体会,就能理解抽象的表述形式下所蕴含的一些非常重要的思想方法. 下面来说明这个问题.

按照辩证唯物主义的观点，无限是由有限构成的，没有有限就没有无限. 因此，为了认识一个无限过程，常常借助于构成它的无限多个有限过程来实现. 例如，为了定量地描述数列极限 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=a$ 这个无限变化过程，需要定量地描述“n 无限增大”与“a_n 无限趋近于 a”这“两个无限”. Weierstrass 关于数列极限的 $\varepsilon-N$ 定义正是借助于 $\varepsilon>0$ 和 $N\in\mathbf{N}_+$ 将上述无限过程划分为无限多个有限过程来刻画它的. 事实上，$\lim\limits_{n\to\infty} a_n=a$ 的 $\varepsilon-N$ 定义是：对于任给的 $\varepsilon>0$，总存在正整数 N，当 $n>N$ 时，恒有 $|a_n-a|<\varepsilon$. 正是由于 $\varepsilon>0$ 具有任意性，不等式 $|a_n-a|<\varepsilon$ 才刻画了 a_n 趋近于 a 的无限性. 从整个变化过程来看，$\varepsilon>0$ 是任意的；但从过程变化的每个瞬间（即每个有限过程）来看，$\varepsilon>0$ 又是给定的有限常数，ε 的这种二重性与不等式 $|a_n-a|<\varepsilon$ 就精确而简洁地刻画了“a_n 无限趋近于 a”. 另一方面，由于“n 无限增大”是“a_n 无限趋近于 a”的条件，因此，在过程的每一瞬间，由给定的有限常数 $\varepsilon>0$，又确定了一个有限的正整数 N，使得 $n>N$ 的所有 a_n 都满足 $|a_n-a|<\varepsilon$. 一般，当 ε 任意变小时，N 也随之变大，由此又刻画了“n 无限增大”. 还应指出的是，在每个有限过程中，由于 $\varepsilon>0$ 是一个固定的数，所以能用形式逻辑的方法解不等式，求出使不等式 $|a_n-a|<\varepsilon$ 成立的 N. 综上所述，为了认识极限这个无限过程，要采用唯物辩证法与形式逻辑相结合的方法，通过有限来描述无限，在每个有限过程用形式逻辑进行逻辑推理，这就是辩证逻辑的思维方法. 数列极限的 $\varepsilon-N$ 定义蕴含了这种科学的思维方法. 读者不难看到，函数极限的 $\varepsilon-\delta$ 定义也蕴含了这种思维方法.

关于极限的定义，除了上述的 $\varepsilon-N$ 与 $\varepsilon-\delta$ 定义之外，还可以用邻域来定义. 若

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists N\in\mathbf{N}_+,\text{当 } n>N \text{ 时，恒有 } a_n\in U(a,\varepsilon),$$

则称 a 为当 $n\to\infty$ 时数列 $\{a_n\}$ 的极限.

极限的上述两种定义是等价的，前者采用分析的语言，后者采用几何的语言. 细心的读者会发现，在数列极限的 $\varepsilon-N$ 定义中，不等式 $|a_n-a|<\varepsilon$ 的左端在数轴上表示点 a_n 与点 a 之间的距离，记作

$$\rho(a_n,a)=|a_n-a|,$$

它刻画了 a_n 与 a 的接近程度. 因此，利用距离 $\rho(a_n,a)$ 或邻域 $U(a,\varepsilon)$ 都能将数列极限的定义推广到 n 维 Euclid 空间 $\mathbf{R}^n$ 中点列的极限（《教材》第五章）. 鉴于距离和邻域是定义极限概念的基础，因此，在现代分析中，人们用公理化的方法将距离与邻域的概念加以抽象，便可把极限的概念进一步从有限维空间推广到无限维空间（《教材》第八章），为现代分析奠定基础.

关于函数极限的概念，还有两个问题需要注意：

(1) 函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的极限与 $f(x)$ 在 x_0 处的取值情况无关，也就是说，与 $f(x)$ 在 x_0 处是否有定义无关，若有定义，与 $f(x_0)$ 的大小无关. 因此，讨

论 $f(x)$ 在 x_0 处极限时不必要求它在 x_0 处有定义. 但由于极限是描述当 $x\to x_0$ 时函数变化趋势的，所以又需要 $f(x)$ 在 x_0 的任意邻域内有定义，《教材》中对这些问题已作了详尽说明.

(2) 函数极限的类型比数列极限要多得多. 这是因为数列（看作整标函数）的自变量 n 只有 $n\to+\infty$ 一种变化状态，所以数列极限仅有四种类型（包括极限为 ∞，$\pm\infty$）：$\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=a$（有限值）、$\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=\infty$、$\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=+\infty$ 和 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=-\infty$. 而函数 $f(x)$ 的自变量 x 的变化包括 $x\to x_0$（有限值）、$x\to x_0^+$、$x\to x_0^-$、$x\to\infty$、$x\to+\infty$ 和 $x\to-\infty$ 六种状态，极限 a 包括有限值 a、∞、$+\infty$ 和 $-\infty$ 四种情况，因此，函数极限共有 $4\times6=24$ 种类型，如下表：

	$f(x)\to a$	$f(x)\to\infty$	$f(x)\to+\infty$	$f(x)\to-\infty$
$x\to x_0$	$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=a$	$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$	$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=+\infty$	$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=-\infty$
$x\to x_0^+$	$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=a$	$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=\infty$	$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=+\infty$	$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=-\infty$
$x\to x_0^-$	$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=a$	$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=\infty$	$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=+\infty$	$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=-\infty$
$x\to\infty$	$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=a$	$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty$	$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=+\infty$	$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=-\infty$
$x\to+\infty$	$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=a$	$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\infty$	$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$	$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$
$x\to-\infty$	$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=a$	$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\infty$	$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$	$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$

对于 24 种类型的函数极限，可以像数列极限一样去理解它们的定义，只是表述形式略有不同而已. 希望读者对每种类型，都能写出它们的 $\varepsilon-\delta$ 定义或用邻域表述的定义. 例如，当 $x\to x_0^+$ 时，$f(x)\to\infty$ 记为 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=\infty$，它的定义是：

$$\forall M>0,\exists\delta>0,\text{当 }0<x-x_0<\delta\text{ 时，恒有 }|f(x)|>M.$$

类似地，$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$ 的定义是：

$$\forall M>0,\exists X>0,\text{当 }x>X\text{ 时，恒有 }f(x)<-M.$$

4. 归并原理在极限理论中的意义

《教材》中介绍了两个归并原理，即数列极限的归并原理与函数极限的归并原理（Heine 定理），它们在极限理论中都有重要的作用.

数列极限的归并原理为判定数列 $\{a_n\}$ 的收敛性提供了一个充要条件，即 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$ 的充要条件是它的每个子数列都收敛，而且都收敛于 a. 从而建立了数列 $\{a_n\}$（整体）与它的子数列（部分）的极限之间密切的联系. 虽然我们很难用这个原理去直接证明一个数列是收敛的（因为证明它的所有子列都收敛于同一个常数 a 是很困难的），但是，它却提供了一个判断数列不收敛的有效方法. 只要找到其中有一个子列发散，或者找到两个极限不相等的收敛子列就可以了.《教材》中已给出了例子，此处不再举例说明.

函数极限的归并原理给出了函数极限存在的充要条件(《教材》第一章定理3.1),将函数极限的存在性问题转化为相应的数列极限问题,是沟通函数极限与数列极限联系的桥梁.它在函数极限理论中的作用主要有以下两个方面:

(1) 证明函数极限不存在.例如,为了证明当 $x\to x_0$ 时函数 $f(x)$ 的极限不存在,只要在 x_0 的去心邻域内找到一个数列 $\{x_n\}$,使 $x_n\to x_0$,而对应的函数值数列 $\{f(x_n)\}$ 发散,或者找到两个收敛于 x_0 的不同子列 $\{x_n\}$ 与 $\{\tilde{x}_n\}$,使对应的函数值数列 $\{f(x_n)\}$ 与 $\{f(\tilde{x}_n)\}$ 有不同的极限就行了.

例 1 证明 Dirichlet 函数

$$D(x)=\begin{cases}1, & x\text{ 为有理数},\\ 0, & x\text{ 为无理数}\end{cases}$$

在 $\mathbf{R}=(-\infty,+\infty)$ 中每一点都没有极限.

证 任取 $x_0\in\mathbf{R}$,根据有理数与无理数在 $\mathbf{R}$ 中的稠密性,在 x_0 的去心邻域中,必存在有理数列 $\{x_n\}$ 与无理数列 $\{\tilde{x}_n\}$,使 $x_n\to x_0$,且 $\tilde{x}_n\to x_0$.从而有

$$\lim_{n\to\infty}D(x_n)=1,\quad \lim_{n\to\infty}D(\tilde{x}_n)=0.$$

根据 Heine 定理,$D(x)$ 在 x_0 处的极限不存在.由于 x_0 的任意性,所以 $D(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 中每一点的极限都不存在.

[注] 由于 Heine 定理中的 a 可以为∞,并且对于 $x\to x_0^{\pm}$,$x\to\infty$ 及 $x\to\pm\infty$ 等情形也成立,因此,也可用它证明 $\lim f(x)\neq\infty$(极限符号 lim 下未写出 x 的变化状态,表明它适用于上述 6 种情形的任何一种).

(2) 将函数极限的性质和定理转化为数列极限的相应性质与定理来证明.这样,函数极限问题的处理就得以简化,而整个极限理论在系统上也更显得简洁而明了.《教材》中已利用 Heine 定理证明了函数极限的唯一性、夹逼性以及 Cauchy 收敛原理,为了加深对这种方法的理解,下面再用它证明另外两个定理.

例 2 用 Heine 定理证明函数极限的乘法运算法则:设 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=a$,$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=b$,则 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)g(x)=ab$.

证 在 x_0 的去心邻域中任取 $x_n\to x_0(n\to\infty)$,则由 Heine 定理和已知条件得知

$$\lim_{n\to\infty}f(x_n)=\lim_{x\to x_0}f(x)=a,\quad \lim_{n\to\infty}g(x_n)=\lim_{x\to x_0}g(x)=b.$$

根据数列极限的乘法运算法则,我们有

$$\lim_{n\to\infty}f(x_n)g(x_n)=\lim_{n\to\infty}f(x_n)\lim_{n\to\infty}g(x_n)=ab.$$

再由 Heine 定理知 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)g(x)=ab$.

例 3 用 Heine 定理证明:在区间 I 上的单调增(减)函数 f 在 I 内的任一点 x_0 处必存在单侧极限,并且

$$f(x_0-0)\leqslant f(x_0)\leqslant f(x_0+0).$$

证　不妨设 f 在 I 上单调增，仅证左极限 $f(x_0-0)$ 存在并且 $f(x_0-0)\leqslant f(x_0)$.

(1) 在 x_0 的左去心邻域 (α,x_0) 内任取单调增数列 $\{x_n\}$，使 $x_n\to x_0$，则对应的函数值数列 $\{f(x_n)\}$ 也单调增，且 $f(x_n)\leqslant f(x_0)$，故由数列极限的单调有界定理，$\{f(x_n)\}$ 收敛. 设 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=a$，则有 $f(x_n)\leqslant a\leqslant f(x_0)$.

(2) 在 (α,x_0) 内任取数列 $\{y_n\}$，使 $y_n\to x_0$，则当 n 充分大时，必有 $x_n\leqslant y_n\leqslant x_{n+1}$ $\left(\text{例如，取 } x_n=x_0-\dfrac{1}{n}\right)$，从而有

$$f(x_n)\leqslant f(y_n)\leqslant f(x_{n+1}).$$

由夹逼原理得 $\lim\limits_{n\to\infty}f(y_n)=a$. 根据 Heine 定理，$f(x_0-0)=\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=a\leqslant f(x_0)$.

同样的方法可证右极限 $f(x_0+0)$ 存在且 $f(x_0)\leqslant f(x_0+0)$.

利用 Heine 定理还可证明《教材》中习题 1.5(A)第 6 题.

5. 判别数列收敛的方法

无论是在理论的研究中还是在实际应用中，判别数列的收敛性比求极限都更为重要. 因为在求数列的极限之前，首先应当判别它是否收敛. 如果发散，那么对它无极限可求；如果收敛，即使无法求出极限的精确值，还可以设法求出近似值，何况在某些问题中只要知道收敛性就够了. 然而，如何判别数列的收敛性是极限理论中的难点之一. 下面仅就《教材》中介绍过的方法作一小结.

(1) 利用数列极限的定义

利用极限定义可以验证某个数是数列的极限，但在验证之前必须知道这个极限，这是困难所在. 除少数简单数列可以由观察得到极限外，对某些数列 $\{x_n\}$ 可在假定该数列收敛(记 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$)的条件下，先设法(例如，由递推关系)求得 a 的值，然后再用极限定义加以验证. 若能验证 a 确是 $\{x_n\}$ 的极限，则该数列收敛于 a.

(2) 利用夹逼性

夹逼性的优点是不但能证明数列收敛，而且还能求出极限的值. 应用这种方法的难点是需要通过不等式的放缩技巧将已知数列夹在具有相同极限的两个数列之间.

(3) 利用单调有界准则

无需借助于其他数列直接利用所给数列的自身的单调性和有界性来判别数列的收敛性是该准则的优点，它是判别数列收敛最常用的一种方法. 但读者必须掌握判断数列单调性和有界性的各种方法(包括《教材》第二章中利用导数来判

别可微函数单调性的方法).

(4) 利用 Cauchy 收敛原理

Cauchy 收敛原理给出了判别数列收敛的一个充要条件,因此,既能用来证明数列收敛,也能证明数列发散.它的优点与单调有界准则类似,判别数列的收敛性条件仅仅涉及数列自身的性态,只要检验它是否为 Cauchy 列.但在证明数列是否 Cauchy 列的过程中要用到技巧性较强的不等式方法.

(5) 其他方法

判别数列收敛的方法很多.例如,根据《教材》习题 1.2(A)中的第 9 题,只要证明数列$\{x_n\}$的偶数项组成的子列与奇数项组成的子列都收敛于同一个数 a,则$\{x_n\}$必收敛于 a;若能由给定数列的递推关系式求出数列 x_n 的表达式,则可由此表达式直接求出极限值,从而得知该数列必收敛.又如,还可利用收敛数列的四则运算性质来判别等.至于其他一些更特殊的方法和技巧就不再介绍了.

例 1　证明数列 $a_n=\dfrac{1+\sqrt[n]{2}+\sqrt[n]{3}+\cdots+\sqrt[n]{n}}{n}$收敛并求其极限值.

证　利用夹逼性.因为

$$1\leqslant a_n\leqslant\frac{n\sqrt[n]{n}}{n}=\sqrt[n]{n},$$

且 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$.由夹逼性知$\{a_n\}$收敛,并且 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=1$.

例 2　设 $x_1=1,x_n=1+\dfrac{x_{n-1}}{1+x_{n-1}}$,证明数列$\{x_n\}$收敛,并求其极限.

证法一　利用单调有界准则.因为

$$x_n=2-\frac{1}{1+x_{n-1}}<2,\quad x_n>0,$$

所以$\{x_n\}$有上界.又 $x_2-x_1=\dfrac{1}{2}>0$,假设 $x_k-x_{k-1}>0$,则

$$x_{k+1}-x_k=\frac{x_k-x_{k-1}}{(1+x_k)(1+x_{k-1})}>0,$$

故$\{x_n\}$是严格单调增的,所以$\{x_n\}$收敛.设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$,在已知递推关系式两边取极限得 $a=1+\dfrac{a}{1+a}$.解此方程可得 $a=\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}\left(因\ x_n>0,故舍去\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$,故

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\frac{\sqrt{5}+1}{2}.$$

证法二　利用极限定义.设数列$\{x_n\}$收敛,记 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.对递推关系式两边取极限并解方程得 $a=\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$.再用极限定义证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a=\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$.事实上,由于

$$|x_n-a|=\left|\left(1+\frac{x_{n-1}}{1+x_{n-1}}\right)-\left(1+\frac{a}{1+a}\right)\right|=\frac{|x_{n-1}-a|}{(1+a)(1+x_{n-1})}$$
$$\leqslant\frac{1}{1+a}|x_{n-1}-a|\leqslant\frac{1}{(1+a)^2}|x_{n-2}-a|$$
$$\leqslant\cdots\leqslant\frac{1}{(1+a)^{n-1}}|x_1-a|\leqslant\frac{1}{(1+a)^{n-2}},$$

故对任给的 $\varepsilon\in(0,1)$，由不等式 $|x_n-a|\leqslant\frac{1}{(1+a)^{n-2}}<\varepsilon$ 容易解得 $n>\frac{\ln\frac{1}{\varepsilon}}{\ln(1+a)}+2$.

取 $N=\left[\frac{\ln\frac{1}{\varepsilon}}{\ln(1+a)}\right]+2$，则当 $n>N$ 时，恒有 $|x_n-a|<\varepsilon$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.

证法三 利用 Cauchy 收敛原理. $\forall p\in\mathbf{N}_+$，注意到 $x_n\geqslant 1$，有

$$|x_{n+p}-x_n|=\frac{|x_{n+p-1}-x_{n-1}|}{(1+x_{n+p-1})(1+x_{n-1})}\leqslant\frac{1}{4}|x_{n+p-1}-x_{n-1}|$$
$$\leqslant\frac{1}{4^2}|x_{n+p-2}-x_{n-2}|\leqslant\cdots\leqslant\frac{1}{4^{n-1}}|x_{p+1}-x_1|<\frac{1}{4^{n-1}},$$

所以 $\{x_n\}$ 是 Cauchy 数列，故收敛. 用证法一中同样的方法可求出极限为 $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$.

例 3 设 $x_1=a, x_2=b(a<b), x_n=px_{n-1}+qx_{n-2}(p>0, q>0, p+q=1, n\geqslant 3)$，证明 $\{x_n\}$ 收敛，并求其极限.

证法一 利用 Cauchy 收敛原理（由通项的递推关系式易见该数列不单调）. 注意到

$$x_{n+1}-x_n=px_n+qx_{n-1}-x_n=-q(x_n-x_{n-1})$$
$$=(-q)^2(x_{n-1}-x_{n-2})=\cdots=(-q)^{n-1}(b-a),$$

所以，$\forall p\in\mathbf{N}_+$，有

$$|x_{n+p}-x_n|\leqslant|x_{n+p}-x_{n+p-1}|+|x_{n+p-1}-x_{n+p-2}|+\cdots+|x_{n+1}-x_n|$$
$$=[(-q)^{n+p-2}+(-q)^{n+p-3}+\cdots+(-q)^{n-1}](b-a)$$
$$=(-q)^{n-1}\frac{1+(-q)^p}{1+q}(b-a)\to 0(n\to\infty).$$

故 $\{x_n\}$ 是 Cauchy 列，因而收敛，设 $x_n\to\alpha(n\to\infty)$. 为求 α，将

$$x_{n+1}-x_n=-q(x_n-x_{n-1}),$$
$$x_n-x_{n-1}=-q(x_{n-1}-x_{n-2}),$$
$$\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots$$
$$x_3-x_2=-q(x_2-x_1)=-q(b-a)$$

两端相加得 $x_{n+1}-x_2=-q(x_n-a)$，取极限得 $\alpha=b-q(\alpha-a)$，解此方程易得 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\alpha=\frac{b+qa}{1+q}$.

证法二　证明$\{x_n\}$的奇数项子列与偶数项子列收敛于同一个常数. 事实上，由题中通项的递推关系式易见 $x_1<x_3<x_2$，$x_3<x_4<x_2$[①]，利用数学归纳法可证奇数项子列严格单调增，偶数项子列严格单调减，并且

$$x_1<x_3<x_5<\cdots<x_{2k-1}<\cdots<x_{2k}<\cdots<x_4<x_2.$$

根据单调有界准则，子列$\{x_{2k-1}\}$与$\{x_{2k}\}$均收敛. 设 $x_{2k-1}\to\alpha$，$x_{2k}\to\beta(k\to\infty)$，在递推关系式

$$x_{2k-1}=px_{2k-2}+qx_{2k-3},\quad x_{2k}=px_{2k-1}+qx_{2k-2}.$$

两边取极限得 $\alpha=p\beta+q\alpha$，$\beta=p\alpha+q\beta$，故 $\alpha=\beta$，所以数列$\{x_n\}$收敛，设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\alpha$，同证法一可求得 $\alpha=\dfrac{b+qa}{1+q}$.

证法三　由已知的递推关系式求得通项的表达式，直接求得极限. 事实上，在证法一中已经得知 $x_n-x_{n-1}=(-q)^{n-2}(b-a)$，从而有

$$\begin{aligned}x_n-x_1&=(x_n-x_{n-1})+(x_{n-1}-x_{n-2})+\cdots+(x_2-x_1)\\&=[(-q)^{n-2}+(-q)^{n-3}+\cdots+(-q)+1](b-a)\\&=\frac{1-(-q)^{n-1}}{1+q}(b-a),\end{aligned}$$

故有

$$x_n=\frac{1-(-q)^{n-1}}{1+q}(b-a)+a.$$

由已知 $q<1$，所以$\{x_n\}$收敛，且 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\dfrac{b+qa}{1+q}$.

例 4　若存在 $M>0$，使得对于每个 $n\in\mathbf{N}_+$，恒有

$$|x_2-x_1|+|x_3-x_2|+\cdots+|x_n-x_{n-1}|\leqslant M,$$

则称$\{x_n\}$为**有界变差数列**. 证明该数列收敛.

证　设 $a_n=|x_2-x_1|+|x_3-x_2|+\cdots+|x_n-x_{n-1}|$，易见$\{a_n\}$是单调增有上界的数列，所以$\{a_n\}$收敛. 为了证明$\{x_n\}$收敛，只要证明它是一个 Cauchy 数列. 事实上，$\forall\, p\in\mathbf{N}_+$，

$$\begin{aligned}|x_{n+p}-x_n|&\leqslant|x_{n+p}-x_{n+p-1}|+|x_{n+p-1}-x_{n+p-2}|+\cdots+|x_{n+2}-x_{n+1}|+|x_{n+1}-x_n|\\&=a_{n+p}-a_n.\end{aligned}$$

由于$\{a_n\}$收敛，所以它是一个 Cauchy 数列，故由上面的不等式知$\{x_n\}$也是一个 Cauchy 数列，因而$\{x_n\}$必收敛.

6. 无界量、发散量、无穷大量之间的关系

无界量、发散量和无穷大量是极限理论中经常遇到的三类重要变量. 在数列

---

① 从几何上易见，$x_3=px_2+qx_1$ 是以 x_1 与 x_2 为端点的直线段内的点，x_4 类似.

极限理论中它们分别是指无界数列、发散数列和无穷大(极限为无穷大)数列,在函数极限理论中指的是无界函数、极限不存在的函数和极限为无穷大的函数.这三类变量既有联系,又有区别.不少读者由于混淆不清而导致错误.为了说明它们的关系,仅对它们是数列的情形加以说明,并请读者仿此就它们都是函数的情形作类似的总结.

先回顾一下无界数列、发散数列和无穷大数列的定义.

若对任给的 $M>0$,存在正整数 n_0,使 $|x_{n_0}|>M$,则称 $\{x_n\}$ 为**无界数列**;若数列 $\{x_n\}$ 不收敛,则称 $\{x_n\}$ 是**发散数列**;若对任给的 $M>0$,存在 $N\in\mathbf{N}_+$,当 $n>N$ 时,恒有 $|x_n|>M$,则称 $\{x_n\}$ 为**无穷大数列**,记作 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\infty$.

(1) 无界数列与发散数列的关系

若数列 $\{x_n\}$ 无界,则 $\{x_n\}$ 必发散.事实上,若 $\{x_n\}$ 收敛,则由收敛数列的性质知 $\{x_n\}$ 必有界,与已知条件矛盾.反之,若 $\{x_n\}$ 发散,则 $\{x_n\}$ 不一定无界.例如,$\{(-1)^n\}$,$\left\{\sin\dfrac{n\pi}{4}\right\}$ 等都是发散数列,但它们却都是有界的.这就是说,发散数列包括无界数列,但比无界数列的范围更广.

(2) 无界数列和无穷大数列的关系

若 $\{x_n\}$ 为无穷大数列,则 $\{x_n\}$ 必为无界数列.事实上,若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\infty$,则由定义知,对任何 $M>0$,都存在 $N\in\mathbf{N}_+$,当 $n>N$ 时,恒有 $|x_n|>M$,从而数列 $\{x_n\}$ 是无界的.反之,无界数列不一定是无穷大数列.例如,$1,\dfrac{1}{2},2,\dfrac{1}{3},3,\cdots,\dfrac{1}{n}$,$n,\cdots$ 是一个无界数列,但不是无穷大数列,因为按照数列极限的归并原理(《教材》第一章定理 2.7 及其后面的说明),若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\infty$,则它的每个子列都以 ∞ 为极限,而此数列的偶数项子列收敛于 0.类似地,由于数列 $\{n^{(-1)^n}\}$ 的偶数项子列 $(2k)^{(-1)^{2k}}=2k$ 是无穷大数列,奇数项子列 $(2k+1)^{(-1)^{2k+1}}=\dfrac{1}{2k+1}\to 0$,所以它是无界数列,但不是无穷大子列.由这两个例子的启发不难推断下列结论.

定理　数列 $\{x_n\}$ 无界的充要条件是存在无穷大子列.

证　充分性是显然的.因为如果 $\{x_{n_k}\}$ 是 $\{x_n\}$ 的一个无穷大子列,那么前面已经证明它必是 $\{x_n\}$ 的无界子列,故 $\{x_n\}$ 也必是无界数列.下面证明必要性.

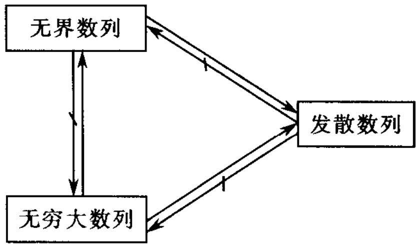
若 $\{x_n\}$ 无界,则由无界数列的定义,对于 $M_1=2$,必有 $n_1\in\mathbf{N}_+$,使 $|x_{n_1}|>M_1$;对 $M_2=2^2$,因 $\{x_n\}$ 中去掉前 n_1 项后仍为无界数列,故必有 $n_2\in\mathbf{N}_+$,$n_2>n_1$,使 $|x_{n_2}|>M_2$;如此继续类推下去,可得一子列 $\{x_{n_k}\}$,使 $|x_{n_k}|>M_k=2^k\to+\infty$,故 $\{x_{n_k}\}$ 为 $\{x_n\}$ 的一个无穷大子列.

因此,无界数列包括无穷大数列,但比无穷大数列的范围更广.

(3) 发散数列与无穷大数列的关系

按前面的定义，无穷大数列是发散数列的一种，而发散数列是所有不收敛数列的总称. 例如，无界但非无穷大的数列也属于发散数列，(1)中所举的两个有界数列也属于发散数列. 因此，发散数列包括无界数列，无穷大数列，有界或无界的振荡数列等，它是比无界数列和无穷大数列都更广的一类数列.

无界数列、发散数列和无穷大数列之间的关系可用下图表示：



7. 无穷小量在微积分中的地位与无穷小量的阶

(1) 无穷小量在微积分中的地位和作用

与极限一样，无穷小量在微积分中是一个基本概念，在微积分中占据着十分重要的地位.

无穷小量与极限有着密切的联系，各种类型的极限都可用无穷小量来进行刻画. 例如，《教材》第一章定理 4.1 已经证明，函数极限 $\lim f(x)=a$ 的充要条件为函数 $f(x)-a$ 是无穷小. 类似地，数列极限 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=a$ 的充要条件为数列 $\{a_n-a\}$ 是当 $n\to\infty$ 时的无穷小. 因此也可以无穷小为出发点来定义函数与数列的极限. 实际上，Newton 和 Leibniz 在创立微积分的时候就使用了无穷小概念. 由于当时还没有明确的极限概念，因此他们还不能说明无穷小的真正含义. 直到 Cauchy 提出了极限的定义之后，才把无穷小定义为以零为极限的变量. 无穷小不仅可以用来刻画极限概念，无穷小的等价代换还是求极限的一种常用方法，将在下面的问题 8 中详细说明.

读者在今后的学习中会看到，无穷小的思想和方法贯穿于微积分的许多重要概念和方法之中. 例如，第二章函数 $y=f(x)$ 的导数 $f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ 就是当 $\Delta x\to 0$ 时两个无穷小 $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$ 与 Δx 之比的极限；函数微分 $\mathrm{d}y$ 与函数改变量 Δy 之差 $\Delta y-\mathrm{d}y=o(\Delta x)$ 是 Δx 的高阶无穷小($\Delta x\to 0$ 时)，因而微分 $\mathrm{d}y(\mathrm{d}y\neq 0)$ 与函数改变量 Δy 是当 $\Delta x\to 0$ 时的等价无穷小. 第三章中的定积分

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\lim_{\substack{n\to\infty\\(d\to 0)}}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$$

可以看作无穷多个无穷小之和，或无穷小量的无限累加.第四章中介绍的常数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的收敛性首先取决于它的通项 a_n 是否为无穷小量，如果是，还需要进一步考察无穷小的阶数.因此，人们常把微积分（数学分析）称为无穷小分析.

(2) 关于无穷小量的阶

无穷小不但有高阶、低阶和同阶（含等价）之分，而且还有阶数的概念.它们都是用来刻画无穷小趋于零的“速度”的，其中同阶无穷小趋于零的“速度”的数量级相同.无穷小的阶数就是在同阶无穷小的基础上定义的.

设 $\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 都是当 $x\to x_0$（或 $x\to\infty$）时的无穷小，且 $\beta(x)\neq 0$.若 $\alpha(x)$ 与 $[\beta(x)]^k$（k 为正实数）是当 $x\to x_0$（或 $x\to\infty$）时的同阶无穷小，即

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} \frac{\alpha(x)}{[\beta(x)]^k}=c\neq 0,$$

则称 $\alpha(x)$ 是**关于 $\beta(x)$ 当 $x\to x_0$（或 $x\to\infty$）时的 k 阶无穷小**.特别地，若 $\beta(x)=x-x_0$，即若当 $x\to x_0$ 时 $\alpha(x)$ 是关于 $x-x_0$ 的 k 阶无穷小，则简称 $\alpha(x)$ 是**当 $x\to x_0$ 时的 k 阶无穷小**.若 $\beta(x)=\frac{1}{x}$，即若当 $x\to\infty$ 时 $\alpha(x)$ 是关于 $\frac{1}{x}$ 的 k 阶无穷小，则简称 $\alpha(x)$ 是**当 $x\to\infty$ 时的 k 阶无穷小**.

由上述无穷小阶数的定义不难验证：

$\sin\sqrt[3]{x^2}$ 是当 $x\to 0$ 时的 $\frac{2}{3}$ 阶无穷小；$\arctan\frac{2}{1+x^2}$ 是当 $x\to\infty$ 时的 2 阶无穷小；$\frac{1}{1+(\ln x)^3}$ 是当 $x\to+\infty$ 时关于 $\frac{1}{\ln x}$ 的 3 阶无穷小；$x^2\sqrt{|x|}$ 是当 $x\to 0^+$ 时关于 x 的 $\frac{5}{2}$ 阶无穷小，也是当 $x\to 0^-$ 时关于 $-x$ 的 $\frac{5}{2}$ 阶无穷小.

为了快速地判别无穷小的阶数，下述关于阶数的运算规律是很有用的，不妨写成定理的形式.

定理 设当 $x\to x_0$（或 $x\to\infty$）时，$\alpha(x)$ 是 m 阶无穷小，$\beta(x)$ 是 n 阶无穷小，则

i) 当 $m>n$ 时，$\alpha(x)\pm\beta(x)$ 为 n 阶无穷小；当 $m=n$ 时，$\alpha(x)\pm\beta(x)$ 为阶数不低于 n 的无穷小；

ii) $\alpha(x)\beta(x)$ 为 $m+n$ 阶无穷小；

iii) 当 $m>n$ 时，$\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ 为 $m-n$ 阶无穷小.

定理中的所有结论不难用无穷小阶数的定义来证明.下面仅以 i) 中的 $x\to x_0$ 情形为例说明证明的方法，其余留给读者.

由已知，

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{(x-x_0)^m}=c_1\neq 0,\quad \lim_{x\to x_0}\frac{\beta(x)}{(x-x_0)^n}=c_2\neq 0.$$

当 $m>n$ 时，我们有

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)\pm\beta(x)}{(x-x_0)^n}=\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{(x-x_0)^n}\pm\lim_{x\to x_0}\frac{\beta(x)}{(x-x_0)^n}$$

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{(x-x_0)^m}(x-x_0)^{m-n}\pm c_2=\pm c_2\neq 0,$$

所以 $\alpha(x)\pm\beta(x)$ 为当 $x\to x_0$ 时的 n 阶无穷小.

当 $m=n$ 时，按上述极限运算易得

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)\pm\beta(x)}{(x-x_0)^n}=c_1\pm c_2.$$

若 $c_1\pm c_2\neq 0$，即当 $c_1\neq\mp c_2$ 时，$\alpha(x)\pm\beta(x)$ 是当 $x\to x_0$ 时的 n 阶无穷小，否则其阶数比 n 高.

(3) 使用无穷小量中某些常见的错误

不少初学者由于对无穷小量阶的比较与阶数的定义（见《教材》定义 4.2）理解不深，因此，在应用时会产生一些错误，现举例如下.

1° 有人用下面的方法求极限：

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin\left(x^2\sin\frac{1}{x}\right)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{x}=\lim_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}=0,\qquad(1-1)$$

对不对呢？虽然答案正确，但方法却是错误的！错在第一个等式应用了无穷小等价代换 $\sin\left(x^2\sin\frac{1}{x}\right)\sim x^2\sin\frac{1}{x}\,(x\to 0)$. 因为在对无穷小 $\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 进行阶的比较时，要求分母 $\beta(x)\neq 0$，而此处 $\beta(x)=x^2\sin\frac{1}{x}$ 在 $x_n=\frac{1}{n\pi}(n\in\mathbf{N}_+)$ 处的值全为 0，故 $\beta(x)$ 在 $x=0$ 的任何邻域内都有零点.

2° 我们知道，当 $x\to 0$ 时，$x^2\sin\frac{1}{x}$ 是关于 x 的高阶无穷小，那么它的阶数是几呢？有人说是 2 阶的，有人说阶数无法确定. 实际上，这些说法都是不对的！因为如果 $\alpha(x)$ 是当 $x\to x_0$ 时的 k 阶无穷小，那么必存在 x_0 的去心邻域，在此邻域内 $\alpha(x)\neq 0$. 事实上，由阶数的定义，

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{(x-x_0)^k}=c\neq 0.$$

故对任给的 $\varepsilon\in(0,|c|)$，必存在 $\delta>0$，使得当 $x\in\mathring{U}(x_0,\delta)$ 时，恒有

$\left|\frac{\alpha(x)}{(x-x_0)^k}-c\right|<\varepsilon$，所以有$\left|\frac{\alpha(x)}{(x-x_0)^k}\right|>|c|-\varepsilon>0$，从而有 $\alpha(x)\neq 0$. 这就是说，无穷小 $\alpha(x)$ 阶数的定义中就蕴含了它在 x_0 的任何去心邻域内 $\alpha(x)$ 没有零点的条件. 如果这个条件不满足，则 $\alpha(x)$ 就没有阶数. 1°中已经看到，$x^2\sin\frac{1}{x}$ 在 $x=0$ 的任何邻域内都有零点，因此当 $x\to 0$ 时，$\alpha(x)=x^2\sin\frac{1}{x}$ 没有阶数.

3°　有人说，$o(x^n)-o(x^n)=0$，$o(x^m)/o(x^n)=o(x^{m-n})$，对吗？都不对. 例如，当 $x\to 0$ 时，$x^2\sin\frac{1}{x}=o(x)$，$x^3=o(x)$，$x^4=o(x^2)$，但 $x^2\sin\frac{1}{x}-x^3\neq 0$，$x^3/x^4$ 却趋于无穷大. 之所以产生这类错误是因为对小 o 符号没有完全理解清楚. $o(x^n)$ 仅定性地表示它是 x^n 的高阶无穷小，并未定量地说明它是 x 的几阶无穷小，更未给出具体计算表达式. 实际上，根据高阶无穷小的定义不难证明：

(i) $o(x^n)\pm o(x^n)=o(x^n)$；

(ii) 当 $m>n$ 时，$o(x^m)\pm o(x^n)=o(x^n)$；

(iii) $o(x^m)\cdot o(x^n)=o(x^{m+n})$；

(iv) 若 $\varphi(x)$ 有界，则 $\varphi(x)\cdot o(x^n)=o(x^n)$.

8. 求极限的方法

会求极限是学习微积分时应当具备的一项基本技能. 求极限的方法很多，下面仅就本章所讲解过的方法作一小结，至于分散在以后各章的方法由读者自己补充.

在问题 5 中曾指出，在某些情况下，极限的定义、夹逼性以及用审敛准则与递推公式相结合的方法也可用于求极限. 但常用的方法主要有：

(1) 利用极限的有理运算法则. 使用这种方法的条件是参与运算的函数(或数列)只能是有限多个，而且每个函数(或数列)的极限必须存在. 初学者切记不要忽略法则成立的条件，以免产生不应有的错误！对于经常遇到的 $\frac{0}{0}$、$\frac{\infty}{\infty}$、$0\cdot\infty$ 以及 $\infty-\infty$ 等不定式极限，可先通过代数和三角恒等变形消去其中极限为零的因子等方法将它们转化为可利用有理运算法则的形式，然后再求它们的极限.

(2) 利用变量代换方法. 变量代换方法本质上就是复合函数极限运算法则. 设有复合函数 $y=f(g(x))$ 定义在 x_0 的某去心邻域中，为求 $\lim\limits_{x\to x_0}f(g(x))$，可作变量代换 $u=g(x)$，只要已知或能求出 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=u_0$，$\lim\limits_{u\to u_0}f(u)=a$，并且在 x_0 的某去心邻域内 $g(x)\neq u_0$，那么就有 $\lim\limits_{x\to x_0}f(g(x))=\lim\limits_{u\to u_0}f(u)=a$.

(3) 利用两个重要极限：$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$，$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$. 后一极限公式也常

写成 $\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}$ 的形式. 前者常用于求 $\frac{0}{0}$ 型不定式的极限，后者常用于求 1^{∞} 型不定式的极限. 为便于使用，结合复合函数求极限方法将它们写成如下形式：

$$\lim_{\square\to0}\frac{\sin\square}{\square}=1,\ \lim_{\square\to\infty}\left(1+\frac{1}{\square}\right)^{\square}=\mathrm{e},$$

其中每个公式的□中的变量(都是自变量 x 的函数)必须相同且趋于 0.

(4) 利用无穷小的等价代换. 在无穷小等价代换定理(《教材》定理 4.4)的证明中我们看到，为了证明 $\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 之比 $\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ 的极限等于它们的等价无穷小 $\tilde{\alpha}(x)$ 与 $\tilde{\beta}(x)$ 之比 $\frac{\tilde{\alpha}(x)}{\tilde{\beta}(x)}$ 的极限，先将 $\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ 的分子分母同乘以它们的等价无穷小，变为等式 $\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\frac{\alpha(x)}{\tilde{\alpha}(x)}\cdot\frac{\tilde{\alpha}(x)}{\tilde{\beta}(x)}\cdot\frac{\tilde{\beta}(x)}{\beta(x)}$ 后，再取极限. 由于其中的等价无穷小因子之比的极限 $\lim\frac{\alpha(x)}{\tilde{\alpha}(x)}=\lim\frac{\tilde{\beta}(x)}{\beta(x)}=1$，从而得到所要证明的结论 $\lim\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim\frac{\tilde{\alpha}(x)}{\tilde{\beta}(x)}$. 因此，利用该法求函数(或数列)的极限时只能对其中所含的无穷小因子进行等价代换，绝不能对所含相加、减的无穷小项进行. 希望读者认真领会等价无穷小代换定理中的条件和证明方法，否则容易铸成大错!

(5) 利用函数的连续性. 根据函数 f 在 x_0 处连续的定义，$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$；按照复合函数的连续性定理又有 $\lim\limits_{x\to x_0}f(g(x))=f(g(x_0))$. 因此，求连续函数和连续函数的复合函数当 $x\to x_0$ 时的极限时，只要将 x_0 代入到函数中就可以了. 但常常碰到的是要求连续函数 $f(u)$ 与极限 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$ 存在的函数 $g(x)$($g(x)$ 在 x_0 不连续)构成的复合函数 $f(g(x))$ 当 $x\to x_0$ 时的极限. 对这类函数的极限，可利用函数 f 的连续性与复合函数的极限运算法则求得，即 $\lim\limits_{x\to x_0}f(g(x))=f(\lim\limits_{x\to x_0}g(x))$.

(6) 利用两个充要条件. 即

$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=a\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=a$ 和 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=a\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=a$. 这种方法常用于求分段表示函数在分界点处的极限或待求函数中含有绝对值、含有指数函数、正切与反正切、余切与反余切等情形.

在求函数(或数列)的极限时，同一道题往往有多种解法，同一种解法中往往需要综合应用多种方法和技巧. 希望读者在解题时要勤于思考，不断总结经验，开拓思路，努力提高解题能力.

例 1　求极限 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{3-x}-\sqrt{1+x}}{x^2+x-2}$.

解　此极限属于$\dfrac{0}{0}$型不定式. 为了利用有理运算法则,我们采用分子有理化的方法消去分子与分母中的零因子,从而有

$$原式=\lim_{x\to 1}\frac{2(1-x)}{(x-1)(x+2)}\cdot\frac{1}{\sqrt{3-x}+\sqrt{1+x}}=-\frac{2}{3}\lim_{x\to 1}\frac{1}{\sqrt{3-x}+\sqrt{1+x}}$$
$$=-\frac{\sqrt{2}}{6}.$$

例 2　求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos 3x}{1-\cos x}$.

解　此题也属于$\dfrac{0}{0}$型不定式. 由于待求极限的函数是三角有理式,所以先将分子和差化积,分母利用无穷小等价代换 $1-\cos x\sim\dfrac{x^2}{2}$,得

$$原式=\lim_{x\to 0}\frac{4\sin 2x\sin x}{x^2}.$$

再利用重要极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ 立即可得所求极限为 8.

例 3　求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\ln\left(1+\dfrac{3}{x}\right)$.

解　此题属于 $0\cdot\infty$型不定式. 对这种不定式,一般将它化为$\dfrac{0}{0}$或$\dfrac{\infty}{\infty}$型不定式,本题宜化为$\dfrac{0}{0}$型. 为此先利用代数恒等变换将函数变形为

$$x\sin\ln\left(1+\frac{3}{x}\right)=\frac{\sin\ln\left(1+\dfrac{3}{x}\right)}{\dfrac{1}{x}},$$

再利用等价无穷小:$u=\ln\left(1+\dfrac{3}{x}\right)\sim\dfrac{3}{x}(x\to 0)$,$\sin u\sim u(u\to 0)$,得

$$原式=\lim_{x\to 0}\frac{\sin\ln\left(1+\dfrac{3}{x}\right)}{\dfrac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{3}{x}}{\dfrac{1}{x}}=3.$$

例 4　求 $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x})$.

解　当 $x\to+\infty$时,圆括号内的两个函数极限均不存在,但它们之差的极限可能存在. 利用和差化积得

$$原式=2\lim_{x\to+\infty}\cos\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}\sin\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2}.$$

由于$\left|\cos\dfrac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}\right|\leqslant 1$，并且当$x\to+\infty$时，

$$\sin\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2}=\sin\frac{1}{2(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}\sim\frac{1}{2(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})},$$

所以

$$原式=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}\cos\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}=0.$$

例 5　求$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-\cos x}{\ln(1+x)}$.

解法一　此题也属于$\dfrac{0}{0}$型不定式. 由于$\ln(1+x)\sim x$，所以困难在于如何处理分子. 为此将分子恒等变形为$e^x-1+1-\cos x$，则

$$原式=\lim_{x\to0}\frac{e^x-1+1-\cos x}{x}.$$

又因为$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-1}{x}=1$，$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{x}=0$，所以

$$原式=\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}+\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x}=1.$$

解法二　我们知道，若$\alpha(x)$与$\beta(x)$是等价无穷小，则有等式$\alpha(x)=\beta(x)+o(\beta(x))$（见《教材》习题 1.4(A)第 5 题）. 例如，由于$e^x-1\sim x$，$1-\cos x\sim\dfrac{x^2}{2}$，所以$e^x=1+x+o_1(x)$，$\cos x=1-\dfrac{x^2}{2}+o_2(x^2)$，其中$o_1(x)$与$o_2(x^2)$分别是当$x\to0$时$x$与$x^2$的高阶无穷小. 本题也可将这些等式直接代入到函数中来求极限.

$$原式=\lim_{x\to0}\frac{1+x+o_1(x)-\left[1-\dfrac{x^2}{2}+o_2(x^2)\right]}{x}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{x+\dfrac{x^2}{2}+o_1(x)+o_2(x^2)}{x}=1.$$

有人用下面的方法求解：

$$原式=\lim_{x\to0}\frac{1+x-\left(1-\dfrac{x^2}{2}\right)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{x+\dfrac{x^2}{2}}{x}=1.$$

虽然答案正确，但方法却是错误的. 因为无穷小等价代换不能对待求极限的函数中所含的相加减的无穷小项进行，何况此处e^x与$\cos x$不是当$x\to0$时的无

穷小!

例 6 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{\sin^2 x}}$.

解法一 此题属于 1^∞ 型不定式,可直接利用重要极限 $\lim\limits_{\square\to 0}(1+\square)^{\frac{1}{\square}}=\mathrm{e}$.

$$原式=\lim_{x\to 0}[1+(\cos x-1)]^{\frac{1}{\cos x-1}\left(-\frac{1}{1+\cos x}\right)}$$

$$\underline{\underline{令\ u=\cos x-1}}\ \lim_{u\to 0}(1+u)^{\frac{1}{u}\left(-\frac{1}{u+2}\right)}=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}},$$

或者

$$原式=\lim_{x\to 0}(1-\sin^2 x)^{-\frac{1}{\sin^2 x}\left(-\frac{1}{2}\right)}=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}.$$

解法二 利用幂指函数求极限的一般方法.

$$原式=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\sin^2 x}\ln\cos x},$$

而 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\sin^2 x}\ln\cos x=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+\cos x-1)}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-1}{x^2}=-\dfrac{1}{2}$,

所以原式 $=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$.

解法二也可用于求 0^0 与 ∞^0 型不定式. 例如,读者可用此法求极限 $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^{\tan x}$.

例 7 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{1+\mathrm{e}^{\frac{4}{x}}}+\dfrac{\sin x}{|x|}\right)$.

解 由于待求极限的函数中不仅含有 $|x|$,而且含有指数函数 $\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$ 与 $\mathrm{e}^{\frac{4}{x}}$,它们在 $x=0$ 处的左、右极限都不相同,所以需要利用分别求其左、右极限的方法. 事实上,

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{2+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{1+\mathrm{e}^{\frac{4}{x}}}+\frac{\sin x}{|x|}\right)=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{2\mathrm{e}^{-\frac{4}{x}}+\mathrm{e}^{-\frac{3}{x}}}{\mathrm{e}^{-\frac{4}{x}}+1}+\frac{\sin x}{x}\right)=1,$$

$$\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{2+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{1+\mathrm{e}^{\frac{4}{x}}}+\frac{\sin x}{|x|}\right)=\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{2+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{1+\mathrm{e}^{\frac{4}{x}}}-\frac{\sin x}{x}\right)=1,$$

故极限之值为 1.

例 8 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{2^2}+\dfrac{5}{2^3}+\cdots+\dfrac{2n-1}{2^n}\right)$.

解 设 $x_n=\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{2^2}+\dfrac{5}{2^3}+\cdots+\dfrac{2n-1}{2^n}$. 如果能够直接求出 x_n 的表达式,那么可望求得其极限值. 由于

$$2x_n=1+\frac{3}{2}+\frac{5}{2^2}+\frac{7}{2^3}+\cdots+\frac{2n-1}{2^{n-1}},$$

将二式相减(分母相同的项相减)得

$$x_n=1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-2}}-\frac{2n-1}{2^n}=3-\frac{1}{2^{n-2}}-\frac{2n-1}{2^n},$$

故

$$\text{原式}=\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}\left(3-\frac{1}{2^{n-2}}-\frac{2n-1}{2^n}\right)=3.$$

9. 关于函数连续性的几个问题

(1) 函数的连续性必须用极限来刻画

函数的连续性(包括连续与间断)是刻画在客观世界中变量的渐变与突变两种基本变化性态的重要数学概念.

连续是渐变性态的数学抽象.通俗地讲,所谓渐变就是变量 $y=f(x)$ 随 x 的变化逐渐变化,接连不断地变化."接连不断变化"的意思是当 x"接连"变化时,对应的函数值 $f(x)$ 也"接连"着变化.也就是说,当 x 从点 x_0 接连地变到邻近点 $x_0+\Delta x$ 时,函数值 $f(x)$ 就从 $f(x_0)$ 接连地变到 $f(x_0+\Delta x)$.只要 $|\Delta x|$ 很小,$|\Delta y|=|f(x_0+\Delta x)-f(x_0)|$ 也很小,并且当 Δx 无限趋于 0 时,Δy 也无限趋于 0.因此,必须用极限 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim\limits_{\Delta x\to 0}[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)]=0$ 才能刻画这两个"无限趋近"过程.《教材》中给出了函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处连续的四种等价描述方式:设 f 在 x_0 的某邻域内有定义,若满足下列条件之一:

1° $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim\limits_{\Delta x\to 0}[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)]=0$;

2° $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$;

3° $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$,当 $x\in U(x_0,\delta)$ 时,恒有 $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$;

4° $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=f(x_0)$,

则函数 f 在 x_0 处连续.函数在 x_0 处连续实质上是实数连续性的反映.

间断是变量突变性态的数学抽象.由于突变是渐变的对立面,因此,自然可以用在点 x_0 连续的否定形式来定义间断点 x_0.也就是说,若 x_0 是函数 f 的不连续点,则说 x_0 是 f 的间断点.由于函数 f 在 x_0 处连续要求 f 在 x_0 处有定义,因此用上述方法定义的间断点包含了使 f 没有定义的所有点.例如,函数 $f(x)=\dfrac{1}{\ln x}$的定义域为

$$D(f)=\{x\in\mathbf{R}\,|\,x>0,x\neq 1\}=(0,1)\cup(1,+\infty),$$

所以,集合 $\mathbf{R}\backslash D(f)=(-\infty,0]\cup\{1\}$ 中的每个点都是它的间断点,除 0 与 1 外,在这些点处无法讨论函数的极限,对研究该函数的性质也没有任何价值,应当将它们从间断点中排除掉.为此,《教材》中对间断点 x_0 添加了要求函数 f 在 x_0 邻域(含单侧邻域)有定义的前提,把间断点 x_0 定义为使 f 在它的某个邻域或去心邻域(含单侧邻域)有定义的不连续点.这样,函数$\dfrac{1}{\ln x}$的间断点只有 0 与 1.

按照间断点的上述定义，为了判别点 x_0 是连续点还是间断点，只要讨论极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 就可以了，而且可以按照极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 的状况对间断点进行分类：左、右极限都存在的间断点是第一类间断点（包括可去和跳跃）；左、右极限中至少有一个不存在的间断点是第二类间断点（包括无穷、振荡以及其他有名称或无名称的间断点）. 当双侧极限没有意义而单侧极限有意义时，可按单侧极限存在与否进行分类. 例如，因为 $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{\ln x}=0$（$\ln x$ 在 $x=0$ 时无定义），$\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1}{\ln x}=\infty$，故 0 是 $\dfrac{1}{\ln x}$ 的可去间断点，1 是它的无穷间断点；因为 $\lim\limits_{x\to 0^+} \sqrt{x}=0=g(0)$，左极限无意义，故 $x=0$ 是 $g(x)=\sqrt{x}$ 的右连续点.

（2） 函数在一点 x_0 处连续能否推出在 x_0 的某邻域内连续

这是不少读者容易出错的一个问题，答案是不一定. 因为函数在点 x_0 处连续仅是刻画该函数在点 x_0 处变化性态的概念，一般不能由此推断出函数在 x_0 某邻域上连续的性质. 可以举出很多在一点连续而在该点的任何邻域内都存在间断点的函数. 例如，著名的 Riemann 函数

$$R(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{q}, & x=\dfrac{p}{q}(p\in \mathbf{Z}, q\in \mathbf{N}_+, p \text{ 与 } q \text{ 互质}),\\ 1, & x=0,\\ 0, & x \text{ 为无理数}\end{cases}$$

在任何无理点处连续，而有理点都是可去间断点.

* 现证明如下. 首先证明 $R(x)$ 在任何点处的极限为零. 事实上，任取实数 x_0. 为考察 $R(x)$ 在 x_0 处的极限，可限制 x 在 $\mathring{U}(x_0,1)$ 内变化. 当 x 为 $\mathring{U}(x_0,1)$ 内的无理数时，$R(x)=0$. 因而 $\forall \varepsilon>0$，恒有 $|R(x)-0|=0<\varepsilon$；当 $x=\dfrac{p}{q}\in \mathring{U}(x_0,1)$ 时，$|R(x)-0|=\dfrac{1}{q}$. 对上面的 $\varepsilon>0$，由于使 $\dfrac{1}{q}\geqslant\varepsilon$ 的 q 只有有限个，所以位于 $\mathring{U}(x_0,1)$ 中使 $\dfrac{1}{q}\geqslant\varepsilon$ 的有理数 $\dfrac{p}{q}$ 也只有有限个. 因此，只要适当选取 $\delta>0$，就能使 $\mathring{U}(x_0,\delta)$ 中没有上述有理数. 故当 $x\in \mathring{U}(x_0,\delta)$ 时，无论 x 是无理数还是有理数，恒有 $|R(x)|<\varepsilon$. 从而知 $R(x)$ 在任何点的极限为 0.

又因为当 x 为无理数时，$R(x)=0$，当 x 为有理数时，$R(x)\neq 0$，所以 $R(x)$ 在任何无理点处连续，而有理点是它的可去间断点.

（3） 初等函数的连续性

我们知道，基本初等函数在它们各自的定义域上是连续的，而初等函数在它

们定义域内的某些点上不一定连续，仅在它们的定义区间（即含于定义域内的区间）上连续. 这是什么道理呢？初等函数是由基本初等函数经过有限次的有理运算和复合运算得到的，它的定义域是经过上述运算后构成它的所有基本初等函数定义域的公共部分，其中可能包含一些孤立的点. 例如，初等函数 $f(x)=\sqrt{\cos x-1}$的定义域

$$D(f)=\{x\in\mathbf{R}\mid x=2k\pi,k\in\mathbf{Z}\},$$

其中的每个点都是定义域的孤立点（即每个点都存在一个邻域，除该点自身外，函数在邻域中的其余点都没有定义），因而不能讨论函数在这些点处的连续性. 但是，若初等函数定义域 $D(f)$ 中的某点属于 $D(f)$ 的一个区间（即定义区间），则由连续函数的有理与复合运算性质，$f(x)$ 在该点必连续. 所以初等函数在其定义区间上连续.

10. 闭区间上连续函数的几个重要性质

闭区间上的连续函数有几个在理论上和应用中非常重要的性质，它们可以概括为三个方面.

(1) 值域定理

所谓值域定理是指《教材》第一章中的推论 5.2，即若 f 是闭区间$[a,b]$上非常数的连续函数，则 f 的值域 $f([a,b])$ 等于闭区间$[m,M]$，其中 m 与 M 分别是 f 在$[a,b]$上的最小值与最大值. 虽然在《教材》中是先依次介绍闭区间上连续函数的有界性、最值性、零点定理和介值定理，然后将值域定理作为前几个定理的推论给出的，但值域定理的重要性并不亚于它们. 一方面，该定理表明连续函数 f 在闭区间$[a,b]$上的值连续不断地充满了闭区间$[m,M]$，换句话说，连续函数将闭区间映为闭区间. 这个性质也是实数连续性（完备性）的反映；另一方面，该定理还蕴含了上述几个定理，说明如下.

1° **有界性定理**：闭区间$[a,b]$上的连续函数必有界. 事实上，由值域定理可知，$\forall x\in[a,b]$，都有 $m\leqslant f(x)\leqslant M$，从而有 $|f(x)|\leqslant L$，其中 $L=\max\{m,M\}$.

2° **最值性定理**：闭区间$[a,b]$上的连续函数必能在$[a,b]$上取得最大值与最小值. 因为按值域定理，$M\in f([a,b])$，所以 $\exists x_1\in[a,b]$，使 $f(x_1)=M$. 又 $\forall x\in[a,b]$，都有 $f(x)\in[m,M]$，即 $f(x)\leqslant M$，故 M 是 f 在$[a,b]$上的最大值. 同理，$\exists x_2\in[a,b]$，使 $f(x_2)=m$，并且 m 是 f 在$[a,b]$上的最小值.

3° **介值定理**：闭区间$[a,b]$上的连续函数必能取得介于 m 与 M 之间（含 m 与 M）的一切值. 由值域定理这个结论是显然的. 读者由此也不难得到零点定理.

值域定理及其所包含的上述定理在微积分理论中起着重要的作用. 在后面几章中读者将会看到，它们是证明微分中值定理（例如 Rolle 定理）、积分中值定理、闭区间上连续函数的可积性定理的基础，还可用于研究函数的最值问题. 因此，它们在多元函数微积分甚至现代分析中都有各种推广的相应结果.

(2) 零点定理

零点定理虽然也能包含在值域定理中，但由于它在应用中的重要性，因此受到人们的特别的关注．它不但可以讨论方程 $f(x)=0$ 在某区间上根的存在性，而且它的常用证明方法(二分法)是构造性的，可以用来求出方程根的近似值．《教材》中已经举了不少例子，其中例 5.14 是著名的 Brouwer 定理的特例，它所采用的构造辅助函数的方法具有一般性，请读者注意．下面再举两个例子．

例 1　设 f 在闭区间 $[0,2a]\,(a>0)$ 上连续，$f(0)=f(2a)$．证明方程 $f(x)=f(x+a)$ 在 $(0,a)$ 内至少有一个根．

证　为了证明方程 $f(x)=f(x+a)$ 在 $(0,a)$ 内至少有一个根，只要证明函数 $f(x)-f(x+a)$ 在 $(0,a)$ 内至少有一个零点．为此，作辅助函数 $F(x)=f(x)-f(x+a)$．由已知条件，函数 $F(x)$ 在 $[0,a]$ 上连续，且 $F(0)=f(0)-f(a)$，$F(a)=f(a)-f(2a)=f(a)-f(0)=-F(0)$．根据零点定理易知 $F(x)$ 在 $(0,a)$ 内至少有一个零点．

由例 1 读者不难证明下面有趣的实际问题：在温度非均匀连续分布的铜质圆环上，至少存在两个关于圆心的对称点，使这两点的温度相等．

例 2　证明：任给面积为 A 的凸边形(即指连接其中任意两点的线段上的点全在它所包围的平面区域中)薄板，必可一刀将它剪裁成面积相等的两块．

证　建立平面直角坐标系，使薄片位于第一象限内由射线 OP_1 与 OP_2 围成的角形域中(图 1-1)．只要证明存在 $\theta_0\in(\alpha,\beta)$，使薄片在射线 OP 与 OP_1 间夹角为 θ_0 的角形域内的面积等于 $\frac{A}{2}$ 就行了．

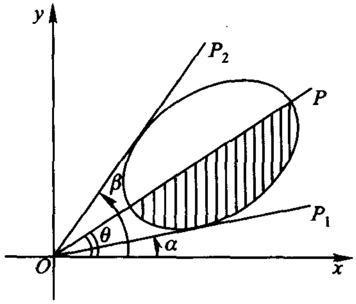


图 1-1

设 $s(\theta)$ 表示薄片位于射线 OP 与 OP_1 间夹角为 θ 的角形域内的面积，则 $S(\theta)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上连续，且 $S(\alpha)=0$，$S(\beta)=A$．令 $f(\theta)=S(\theta)-\frac{A}{2}$，则 $f(\theta)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上连续，且 $f(\alpha)=S(\alpha)-\frac{A}{2}=-\frac{A}{2}$，$f(\beta)=S(\beta)-\frac{A}{2}=\frac{A}{2}$．故由零点定理，必 $\exists\,\theta_0\in(\alpha,\beta)$，使 $f(\theta_0)=0$，即 $S(\theta_0)=\frac{A}{2}$．

(3) 函数的一致连续性与一致连续性定理

函数在区间 I 上的一致连续性与处处连续性是既有联系又有重要区别的两个不同概念．函数 f 在区间 I 上处处连续，是指它在该区间的每一点 x_0 都连续，即

$$\forall\,\varepsilon>0,\ \exists\,\delta>0,\ \text{当}\ |x-x_0|<\delta\ \text{时，恒有}\ |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon, \qquad (1-2)$$

其中 δ 不仅与 ε 有关，而且还常与 x_0 有关. 而 f 在 I 上一致连续则不同，它的定义是

$$\forall \varepsilon>0, \exists \delta>0, \forall x_1, x_2 \in I, \text{当} |x_1-x_2|<\delta \text{时，恒有} |f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon, \tag{1-3}$$

这里的 δ 仅与 ε 有关.

为了加深对一致连续性的理解，我们仍以《教材》中的函数 $f(x)=\frac{1}{x}$ 为例. 显然，它在区间 $(0,+\infty)$ 内处处连续. 从它的图形(图 1-2)可以看到，在与原点相距较近的地方，曲线陡峭，而在远离原点的地方，曲线平坦. 这就是说，该函数在 $(0,+\infty)$ 内的不同点处变化的快慢不同.

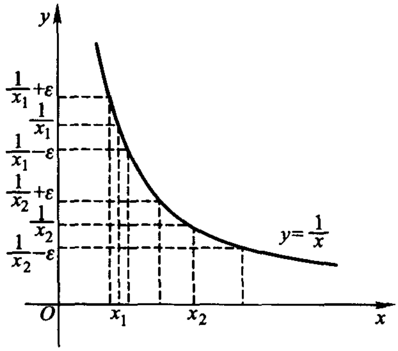


图 1-2

这件事用连续的定义可以说得更明白. 任取 $x_0 \in (0,+\infty)$，由于 $f(x)=\frac{1}{x}$ 在 x_0 处连续，所以，对任给的 $\varepsilon>0$，必能求得 $\delta>0$，使得当 $|x-x_0|<\delta$ 时，恒有 $\left|\frac{1}{x}-\frac{1}{x_0}\right|<\varepsilon$. 为了能从不等式 $\left|\frac{1}{x}-\frac{1}{x_0}\right|=\frac{|x-x_0|}{xx_0}<\varepsilon$ 求得 δ，限制 $|x-x_0|<\frac{1}{2}$，从而得 $x>x_0-\frac{1}{2}$. 代入得

$$\left|\frac{1}{x}-\frac{1}{x_0}\right|<\frac{|x-x_0|}{x_0\left(x_0-\frac{1}{2}\right)}.$$

由上式易知，只要取 $\delta=\min\left\{\frac{1}{2}, x_0\left(x_0-\frac{1}{2}\right)\varepsilon\right\}$，则当 $|x-x_0|<\delta$ 时，就有 $\left|\frac{1}{x}-\frac{1}{x_0}\right|<\varepsilon$. 由 δ 的表达式可见，它不仅随 ε 而变，而且与 x_0 有关. 即便对同一个 $\varepsilon>0$，当 x_0 不同时，δ 也不尽同. 这说明，在不同点 x_0 处，为使函数改变量的绝对值 $\left|\frac{1}{x}-\frac{1}{x_0}\right|$ 小于同一个 ε，自变量改变量的绝对值 $|x-x_0|$ 的大小也不尽相同. x_0 越小(即 x_0 越靠近原点)，δ 也越小. 由于 $(0,+\infty)$ 中有无穷多个点 x_0，所以也就有无穷多个 δ. 而且由 δ 的表达式易见，当 $x_0\to0$ 时，$\delta\to0$，因此在无穷多个 δ 中找不到一个最小的正数 δ. 故函数 $f(x)=\frac{1}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 内处处连续，但不一致连续. 但若将它的定义域缩小为 $[\alpha,+\infty)$，其中 $\alpha>0$，那么，它在 $[\alpha,+\infty)$ 是一致连续的. 因为在这种情况下，在无穷多个 δ 中能找得一个共同的最小的 $\delta=\min\left\{\frac{1}{2}, \alpha\left(\alpha-\frac{1}{2}\right)\varepsilon\right\}$，它仅与 ε 有关，使得对于任何两个不同点 x 与 $x_0 \in [\alpha,+\infty)$，

当$|x-x_0|<\delta$时，恒有$\left|\frac{1}{x}-\frac{1}{x_0}\right|<\varepsilon$.

由上面的分析不难看出，函数在区间上处处连续刻画了函数的局部变化性态，而一致连续则刻画了函数在区间上的整体变化性态. 显然若 f 在 I 上一致连续，则 f 必在 I 上处处连续；反之不一定成立. 然而，如果 I 是一个闭区间$[a,b]$，那么在$[a,b]$上处处连续的函数必定一致连续. 这个结论就是所谓**一致连续性定理**(《教材》定理 5.8). 由此，我们又有：函数 f 在闭区间$[a,b]$上一致连续与处处连续是等价的. 它揭示了闭区间上连续函数的一个重要特征.

《教材》的第三章中，一致连续性定理被用于证明闭区间上连续函数的可积性. 第五章中该定理被推广到，空间 $\mathbf{R}^n$ 中紧集(有界闭集)上的多元连续函数.

第二章　一元函数微分学及其应用

1. 关于导数概念

导数是微积分的最主要的概念之一，也是研究函数变化性态的一种基本方法. 只有深刻理解导数概念的本质及其所包含的重要思想，才能正确地使用导数方法去解决各种相关的理论和应用问题.

(1) 导数概念的演变

我们知道，微积分早在 17 世纪 70 年代就由 Newton 与 Leibniz 创立起来了，并在以后近 200 年中在许多领域中得到了广泛的应用. 但是，由于当时对函数、极限、无穷小量等概念的理解很不清楚，因此，直到 19 世纪初，导数概念还没有被恰当地定义过. Newton 是以力学为背景来研究微积分的，他所建立的导数计算法则称为“流数术”. 按照这种方法，为了求自由落体运动 $s=\frac{1}{2}gt^2$ 在 t 时刻的瞬时速度，先给 t 添加一个“流量”0，则 s 便由 $\frac{1}{2}gt^2$ 变为 $\frac{1}{2}g(t+0)^2$，从而得到 s 的流量为

$$\frac{1}{2}g(t+0)^2-\frac{1}{2}gt^2=gt\cdot 0+\frac{1}{2}g\cdot 0^2,$$

所以它们的“最初比”为

$$\frac{\frac{1}{2}g(t+0)^2-\frac{1}{2}gt^2}{0}=gt+\frac{1}{2}g\cdot 0.$$

舍去上式右端含 0 的项，便得“最终比”$\dot{s}=gt$，称之为流数，也就是 t 时刻的瞬时速度.

Newton 的“流数术”受到 18 世纪著名的英国大主教 Berkeley 的猛烈攻击. 他责问道：“上述算法中的增量 0 究竟是非零还是真零？若为非零，则 $gt+\frac{1}{2}g\cdot 0$ 中的零就不能舍去；若为真零，则 $\frac{1}{2}g(t+0)^2-\frac{1}{2}gt^2=0$，因此，比值

$$\left[\frac{1}{2}g(t+0)^2-\frac{1}{2}gt^2\right]/0$$

变为无意义的 $\frac{0}{0}$. ”因此，他认为 Newton 的流数术是不合逻辑的，“它们只不过

是‘消逝量的鬼魂.’”Berkeley 的批评确实指出了“流数术”中存在的“偷换假设”的严重问题，但也否定了其中的合理内核. D'Alembert 最先看出了 Newton 在本质上已具有了正确的导数概念，他明确指出，“导数必须建立在应变量的差与自变量的差的比的基础上，”但仍未给出导数的明确定义. 直到 1817 年，捷克的一位神父、哲学家和数学家 Bolzano 首先把 $f(x)$ 的导数定义为当 Δx 经由负值和正值趋于 0 时，比 $[f(x+\Delta x)-f(x)]/\Delta x$ 无限接近地趋向的量 $f'(x)$. 他强调，$f'(x)$ 不是两个 0 的商，也不是两个消失了的量的比，而是前面指出的比所趋近的一个数. 1923 年，Cauchy 在他的《无穷小分析教程概论》中，就用上述方式定义导数，而且把导数与 Leibniz 的微分统一起来，使微分通过导数有了意义. 由于 Bolzano 的著作没有引起人们的注意，Cauchy 首先给出了正确的极限定义，所以一般都把定义在极限基础上的连续、导数和积分等概念归功于 Cauchy.

(2) 导数概念中所包含的重要思想

1° **导数是两个无穷小量之比的极限**

按导数的定义，若函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可导，则它在 x_0 处的导数是函数的改变量 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ 与自变量改变量 Δx 之比当 $\Delta x\to 0$ 时的极限，即

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}. \qquad (2-1)$$

由于当 $\Delta x\to 0$ 时，$\Delta y\to 0$，就是说，Δx 与 Δy 都是无穷小量，因此，$y=f(x)$ 在 x_0 处的导数 $f'(x_0)$ 就是当 $\Delta x\to 0$ 时，这两个无穷小量之比的极限，并且由(2-1)式易见，$y=f(x)$ 在 x_0 处可导的充要条件为 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ 是 Δx 的同阶或高阶无穷小(当 $\Delta x\to 0$ 时).

2° **函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的导数 $f'(x_0)$ 刻画了该函数在 x_0 处的本质属性——变化率**

《教材》中已对这个问题作了说明. 为了加深理解，下面再作些补充. 我们知道，导数定义中的比值 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 表示当 x 改变一个单位长度时函数改变量的大小，反映了 y 随 x 变化的快慢程度，称为 $y=f(x)$ 在 x_0 的 $|\Delta x|$ 邻域内对 x 的平均变化率，它近似地刻画了 $y=f(x)$ 在 x_0 附近的变化性态. 例如，若 $\frac{\Delta y}{\Delta x}>0$，则 Δy 与 Δx 同号，函数 $y=f(x)$ 在 x_0 右侧点处的值比 $f(x_0)$ 大，左侧点处的值比 $f(x_0)$ 小，且 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 越大，函数值变化越大；若 $\frac{\Delta y}{\Delta x}<0$，则 Δy 与 Δx 异号，$y=f(x)$ 在 x_0 两侧的变化情况与上面相反. 为了进一步研究 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的变化性态，仅用平均变化率就不够了. 由于 $|\Delta x|$ 越小，平均变化率越精确地刻画 $y=$

$f(x)$在 x_0 处的变化性态. 因此当 $\Delta x\to 0$ 时，它的极限 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x_0)$就能够真实而精确地表示 $y=f(x)$在 x_0 处的变化性态，称之为 $y=f(x)$在 x_0 处的变化率.

现实世界中存在着许多需要求它的变化率的变量. 例如，运动物体的速度，物质细棒的密度等. 仔细观察可知，这些变量可分为均匀变化与非均匀变化两种类型. 物体运动的速度有匀速与变速之分，匀速运动中位移 s 随时间 t 的变化是均匀的，即$\dfrac{\Delta s}{\Delta t}$是常数. 因此，平均变化率(即平均速度)在任何时刻都相同. 平均速度就是物体在每一点运动的速度，求物体的速度只要用除法就可以了. 而变速运动中 s 随 t 是非均匀变化的，即$\dfrac{\Delta s}{\Delta t}$是变量，平均变化率不等于物体在各个时刻的瞬时速度，求 t_0 时刻的瞬时速度需要用导数 $v(t_0)=s'(t_0)$. 类似地，细棒上的物质质量也有均匀分布与非均匀分布之分. 均匀分布也可看成质量 m 随细棒上点的坐标 x 是均匀变化的，即 $\dfrac{\Delta m}{\Delta x}$是常数；平均密度 $\dfrac{\Delta m}{\Delta x}$就是细棒上每一点的密度，因此求质量均匀分布细棒的密度只要用除法就行了. 而非均匀分布细棒上的质量 m 随 x 是非均匀变化的，即$\dfrac{\Delta m}{\Delta x}$是变量，平均密度$\dfrac{\Delta \mathrm{m}}{\Delta \mathrm{x}}$不能表示细棒上各点的密度. 因此求质量非均匀分布细棒上每点处的密度需要用导数.

一般地，若函数 $y=f(x)$在定义区间上的平均变化率$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$是一个常数，则称函数随 x 是均匀变化的. 在这种情况下，平均变化率就表示该函数在定义区间上各点的变化率，因此只要通过除法用商$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$就可以研究该函数的变化率问题. 若平均变化率$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$不是常量，随区间内点 x 而变化，则称函数随 x 是非均匀变化的. 对于这种情况，平均变化率只是各点变化率的近似值. 为了精确研究该函数在不同点的变化率，就需要利用函数在各点处的导数. 因此我们说函数 $y=f(x)$在 x_0 处的导数刻画了非均匀变化量 y 在 x_0 处的变化率，导数是研究均匀变化的除法在研究相应的非均匀变化问题中的推广.

3° 导数概念中的局部线性化思想

我们已经知道，将质量非均匀分布细棒上点 x_0 处密度归结为质量函数 $m=m(x)$在 x_0 处的导数$\left.\dfrac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}x}\right|_{x_0}$的过程包含了两步. 第一步，在微小局部内“以匀代非匀”，求得密度的近似值. 就是说，在以 x_0 为中心长为 $2|\Delta x|$的小邻域内，将质

量分布看成是均匀的，用平均密度$\dfrac{\Delta m}{\Delta x}$作为 x_0 处密度的近似值；第二步，通过极限求得 x_0 处密度 $\rho(x_0)$的精确值，即 $\rho(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta m}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{m(x_0+\Delta x)-m(x_0)}{\Delta x}=\left.\dfrac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}x}\right|_{x_0}$. 其中第一步“以匀代非匀”本质上就是“以线性函数代替非线性”，也就是**局部线性化**. 这是因为读者不难证明，函数 $y=f(x)$随 x 是均匀变化的充要条件为 $y=f(x)$是线性函数. 因此，若 $y=f(x)$随 x 非均匀变化，则 $y=f(x)$就是非线性函数. 又由于线性函数表示直线，而非线性函数表示曲线，所以“以匀代非匀”、“以线性代非线性”与“以直代曲”在本质上是一回事，它们从不同角度表述了局部线性化的思想. 导数概念中蕴含了这种思想，应用导数解决实际问题也需要用这种思想. 希望读者认真领会.

2. 与导数概念有关的几个值得注意的问题

不少初学者由于对导数概念理解不深，常常在学习中犯一些错误，下面几个问题都与导数概念有关，希望读者注意.

(1) 按照导数的定义(《教材》中定义 1.1)，函数 $y=f(x)$在 x_0 处的导数

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}. \tag{2-2}$$

定义中不但要求 f 在 x_0 的某邻域内有定义，而且从(2-2)易见 f 在 x_0 处的导数 $f'(x_0)$是否存在以及 $f'(x_0)$的值都与 f 在 x_0 处的值 $f(x_0)$有关. 实际上，导数定义中的这些要求就是为了满足刻画函数 f 在 x_0 处变化性态的需要提出来的. 那么能不能把极限(若存在)

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0-\Delta x)}{2\Delta x} \tag{2-3}$$

作为 f 在 x_0 处导数的定义呢？回答是否定的. 因为(2-3)式的分子是以 x_0 为中心的对称点 $x_0+\Delta x$ 与 $x_0-\Delta x$ 处函数值之差，它对函数 f 在 x_0 处的值没有任何要求. 就是说，极限(2-3)存在与否同 f 在 x_0 处的值无关. 即使 f 在 x_0 处有定义但不连续，极限(2-3)也可能存在. 例如，函数

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x^2}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0\end{cases}$$

在 $x=0$ 处不连续(第二类间断点)，因而在 $x=0$ 处必不可导. 但极限(2-3)却存在. 事实上，我们有

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x)-f(0+\Delta x)}{2\Delta x}=\frac{1}{2}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\dfrac{1}{(\Delta x)^2}-\dfrac{1}{(\Delta x)^2}}{\Delta x}=0.$$

因此，用(2-3)式来定义函数 f 在 x_0 处的导数是不恰当的，它不能刻画函数 f 在 x_0 处的变化性态. 实际上，对于任何偶函数 f，在 $x_0=0$ 处极限(2-3)总存在，而且

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x)-f(0-\Delta x)}{2\Delta x}=0,$$

但极限(2-2)却不一定存在，也就是说，f 在 $x_0=0$ 处不一定可导.

(2) 同由函数 f 在一点 x_0 处连续不能推出它在 x_0 的某一邻域内连续类似，函数 f 在 x_0 处可导也不能推出它在 x_0 的某一邻域内可导. 这是因为 f 在 x_0 处可导，其导数 $f'(x_0)$ 仅刻画 f 在 x_0 处的变化性态，由此一般不能推断 f 在 x_0 某邻域内各点处的变化性态. 例如，由 $f'(x_0)>0$ 可知函数 f 在 x_0 处严格单调增(指存在 x_0 右侧的点 x，使 $f(x)>f(x_0)$，且存在 x_0 左侧的点 x，使 $f(x)<f(x_0)$)，但不能判定是否存在 x_0 的一个邻域，使 f 在此邻域内严格单调增.

例 1　证明函数

$$f(x)=\begin{cases}x^2, & x\text{ 为无理数},\\ 0, & x\text{ 为有理数}\end{cases}$$

仅在 $x=0$ 处可导，在任何 $x\neq 0$ 处均不可导.

证　由导数的定义得

$$f'(0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x)}{\Delta x}$$

$$=\begin{cases}\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{(\Delta x)^2}{\Delta x}=0, & \Delta x\text{ 为无理数},\\[2ex] \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{0}{\Delta x}=0, & \Delta x\text{ 为有理数},\end{cases}$$

所以 f 在 $x=0$ 处可导，且 $f'(0)=0$.

又因为在任何 $x\neq 0$ 处，f 显然都不连续，所以也不可导.

此例还告诉我们：由函数 f 在 x_0 处可导不仅不能推出 f 在 x_0 的某邻域内可导，而且不能推出 f 在 x_0 的充分小邻域内连续. 显示出函数在一点的导数仅仅反映函数在该点处的性质.

根据上述结论，读者在用导数的定义求极限时，应当特别注意题中的已知条件. 切不可将仅在一点可导的条件扩大到在该点的邻域内也可导，否则就会出错.

例 2　设函数 f 在 x_0 处可导，为求极限

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+ah)-f(x_0-bh)}{h},$$

有人采用下述方法. 令 $x=x_0-bh$，则 $x_0+ah=x+(a+b)h$，于是

$$\text{原式}=\lim_{h\to 0}\frac{f[x+(a+b)h]-f(x)}{h}=(a+b)\lim_{x\to x_0}f'(x)$$

$$= (a+b)\lim_{h\to 0} f'(x_0 - bh) = (a+b)f'(x_0). \tag{2-4}$$

试问，这个解法对吗？为什么？

结论是正确的，但解法不对，其中有两个概念性错误：

1° 题中仅假设 f 在点 x_0 处可导，并不知道也不能推断它在 $x=x_0-bh$ 处可导，所以(2-4)式中第二个等号是没有根据的. 况且当 $h\to 0$ 时，$x\to x_0$，但计算中却又将 x 当作定值，所以运算也是错误的.

2° (2-4)式中最后一个等号成立要求导函数 f' 在 x_0 处连续，但在题设中没有给出这个条件. 此题的正确解法是利用导数定义，留给读者自己完成.

(3) 要注意 $f'_{\pm}(x_0)$ 与 $\lim\limits_{x\to x_0^{\pm}} f'(x)$ 的区别. 这些符号代表了不同的概念，它们的区别实际上是概念的区别. 因为 $f'_-(x_0)$ ($f'_+(x_0)$) 表示函数 f 在 x_0 处的左(右)导数，而 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f'(x)$ ($\lim\limits_{x\to x_0^+} f'(x)$) 是导函数 $f'(x)$ 在 x_0 处的左(右)极限，它们是两个不同的概念. 一般来说，$\lim\limits_{x\to x_0^{\pm}} f'(x)$ 是否存在与 $f'_{\pm}(x_0)$ 是否存在并无必然的联系，它们之中的一个存在，另一个可能不存在. 就是说，一般情况下，$f'_{\pm}(x_0) \neq \lim\limits_{x\to x_0^{\pm}} f'(x)$. 举例如下.

例 3 证明函数

$$f(x)=\begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0, \\ 0, & x=0 \end{cases}$$

在 $x=0$ 处右导数 $f'_+(0)$ 存在，但 $\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x)$ 不存在.

证 由定义得

$$f'_+(0) = \lim_{x\to 0^+}\frac{f(0+x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{x^2\sin\dfrac{1}{x}-0}{x} = 0.$$

但当 $x\neq 0$ 时，$f'(x) = 2x\sin\dfrac{1}{x} - \cos\dfrac{1}{x}$，故 $\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}\left(2x\sin\dfrac{1}{x} - \cos\dfrac{1}{x}\right)$ 不存在.

读者不难证明，函数

$$f(x)=\begin{cases} \arctan\dfrac{1}{x}, & x\neq 0, \\ 0, & x=0 \end{cases}$$

在 $x=0$ 处的右导数 $f'_+(0)$ 不存在，但 $\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x) = -1$.

因此，不能用 $\lim\limits_{x\to x_0^{\pm}} f'(x)$ 是否存在来讨论 $f'_{\pm}(x_0)$ 是否存在，也不能通过求 $\lim\limits_{x\to x_0^{\pm}} f'(x)$ 的值(如果存在)来计算 $f'_{\pm}(x_0)$ 的值. 在讨论分段表示函数在定义区

间的分界点处可导性或求在该点处的导数值的时候，一般利用导数或左右导数的定义来研究. 但若函数 f 满足在$[x_0,x_0+\delta)$(或$(x_0-\delta,x_0]$)上连续，在$(x_0,x_0+\delta)$(或$(x_0-\delta,x_0)$)内可导，且 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f'(x)$(或 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f'(x)$)存在的条件时，则有 f 在 x_0 右(或左)可导，且 $f'_+(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0^+}f'(x)$(或 $f'_-(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0^-}f'(x)$). 这就是《教材》第二章推论 4.3. 利用该推论讨论分段表示函数 f 在分界点处的可导性自然比较方便，但 f 需要满足推论的条件，读者可参看《教材》中的例题.

3. 微分与局部线性化

我们知道，对一元函数来说，可微与可导是等价的. 但是，微分与导数却是既有联系又有区别的两个不同概念. 虽然导数与微分都是研究函数 $y=f(x)$在微小局部(点 x_0 的小邻域)内变化性态的，并且微分$\mathrm{d}y|_{x_0}=f'(x_0)\mathrm{d}x$，导数$f'(x_0)$等于函数的微分与自变量微分之商$\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x_0}$. 然而，导数 $f'(x_0)$是一个确定的常数，它表示该函数在点 x_0 处的变化率，微分 $\mathrm{d}y|_{x_0}=\mathrm{d}f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$是 x(或 $\Delta x=x-x_0$)的一个线性函数，它表示该函数在 x_0 的小邻域内改变量的近似值. 从几何上来看，导数 $f'(x_0)$表示曲线 $y=f(x)$上点$(x_0,f(x_0))$处的切线斜率，而微分 $\mathrm{d}f(x_0)$则表示该曲线上点$(x_0,f(x_0))$处切线纵坐标对应于横坐标改变量 Δx 的改变量. 在应用方面，一般来说，导数更多地应用于对函数性质的理论研究，而微分则多用于近似计算.

与导数类似，微分定义中更直接地体现了局部线性化思想. 事实上，微分是函数改变量 Δy 的线性主部，它与 Δy 之差是 Δx 的高阶无穷小 $o(\Delta x)$($\Delta x\to 0$)，即

$$\Delta y = f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x) = \mathrm{d}f(x_0) + o(\Delta x).$$

当$|\Delta x|\ll 1$ 时，舍弃高阶无穷小 $o(\Delta x)$，就可以用微分来近似代替改变量 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$，从而求得函数的近似值，即

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

上式右端是 x(或 $\Delta x=x-x_0$)的线性函数，而左端 $f(x)$一般是可微的非线性函数. 因此，在 x_0 的小邻域内用微分近似代替改变量，本质上就是用线性函数近似代替非线性函数，在几何上就是用直线(切线)近似代替曲线. 这就是在导数概念中已经阐明的局部线性化，或**局部线性逼近**. 这种思想方法也包含在定积分概念与微元法中(《教材》第三章)，而且可以推广到多微函数的微积分中(《教材》第五、六章).

为了帮助读者加深对这种思想的理解，下面说明：若函数 $y=f(x)$在 x_0 处可微，则在点$(x_0,f(x_0))$的充分小的邻域内，过该点的所有直线中以该点的切线与曲线 $y=f(x)$的接近程度最好. 就是说，切线方程是对函数 $y=f(x)$的最佳

局部线性逼近. 为此,只要证明:设过点$(x_0,f(x_0))$的任一直线方程和曲线$y=f(x)$的切线方程分别是:

$$L(x)=f(x_0)+k(x-x_0)(k\neq f'(x_0)),$$
$$l(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0),$$

则必$\exists\delta>0$,使得$\forall x\in\mathring{U}(x_0,\delta)$,恒有$|f(x)-l(x)|<|f(x)-L(x)|$.

事实上,根据导数的定义,

$$f(x)-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)+\alpha(x)(x-x_0),$$

其中$\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0$. 从而有

$$\begin{aligned}|f(x)-l(x)|&=|\alpha(x)||x-x_0|,\\ |f(x)-L(x)|&=|f(x)-f(x_0)-k(x-x_0)|\\ &=|f'(x_0)(x-x_0)+\alpha(x)(x-x_0)-k(x-x_0)|\\ &=|f'(x_0)+\alpha(x)-k||x-x_0|.\end{aligned}$$

由于$\lim\limits_{x\to x_0}(|f'(x_0)+\alpha(x)-k|-|\alpha(x)|)=|f'(x_0)-k|>0$,故由保号性知,必$\exists\delta>0$,使得$\forall x\in\mathring{U}(x_0,\delta)$,有

$$|f'(x_0)+\alpha(x)-k|>|\alpha(x)|.$$

于是有

$$|f'(x_0)+\alpha(x)-k||x-x_0|>|\alpha(x)||x-x_0|,$$

所以$|f(x)-l(x)|<|f(x)-L(x)|$.

4. 中值定理在微分学中的地位和作用

中值定理(包含 Rolle、Lagrange、Cauchy 和 Taylor 四大定理)是微分学的理论基础. 这是因为仅有导数与微分,只能研究函数在一点处的变化率问题,求函数在一点附近的近似值,这些都是函数在微小局部的变化性态. 而中值定理,特别是 Lagrange 定理为我们架设了沟通函数在区间上的变化(改变量)与函数在该区间内一点处导数之间联系的桥梁,从而使我们能够利用导数来研究函数在区间上的整体性态(例如,单调性、极值性与凸性等),大大地扩充了导数的应用范围. 下面先就 Rolle、Lagrange 和 Cauchy 定理的主要作用作一总结,关于 Taylor定理将在后面的问题 5 另作说明.

(1) Rolle 定理的作用

Rolle 定理不但是证明 Lagrange 定理与 Cauchy 定理的基础(见《教材》),而且可以用来判定导函数零点的存在性,所以也是研究函数方程根的存在性的重要方法. 我们知道,连续函数的零点定理也可以判定方程根的存在性,与 Rolle 定理相比,二者各有优点和局限性. 零点定理要求的条件比 Rolle 定理弱,并且应用也较简便,但当函数 f 有偶数个零点,在$[a,b]$的两个端点处符号不变,或

者 f 在端点处值的正负不易判定等情况下，零点定理就无能为力了，需要借助于 Rolle 定理.

例 1　证明方程

$$4ax^3+3bx^2+2cx=a+b+c \tag{2-5}$$

在 $(0,1)$ 内至少有一个根，其中 a,b,c 均为常数.

分析　若令 $f(x)=4ax^3+3bx^2+2cx-(a+b+c)$，则 $f(0)=-(a+b+c)$，$f(1)=3a+2b+c$，无法确定 $f(0)$ 与 $f(1)$ 是否异号，不能用零点定理来证明，但可改用 Rolle 定理来证明.

证　注意到 $f(x)$ 是 $ax^4+bx^3+cx^2-(a+b+c)x$ 的导数，故设 $F(x)=ax^4+bx^3+cx^2-(a+b+c)x$，则 F 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $F(0)=F(1)=0$，由 Rolle 定理，至少存在一点 $d\in(0,1)$，使 $F'(d)=0$，所以方程(2-5)在 $(0,1)$ 内至少有一个根.

例 2　设三阶可导函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内非负，且有两个不同的零点，证明存在一点 $\xi\in(a,b)$，使 $f'''(\xi)=0$.

分析　由于 $f(x)$ 在 (a,b) 内非负且有两个不同的零点 x_1 和 x_2，故 x_1 与 x_2 必是 $f(x)$ 在 (a,b) 内的极小点. 由 Fermat 定理知 $f'(x_1)=f'(x_2)=0$. 又由 Rolle 定理知还存在 $x_3\in(x_1,x_2)$，使 $f'(x_3)=0$，因此再应用两次 Rolle 定理可证得题中的结果，详细证明由读者完成.

应用 Rolle 定理讨论方程 $f(x)=0$ 根存在性的困难在于如何构造一个满足该定理条件的辅助函数 $F(x)$，使 $F'(x)=f(x)$. 如果直接从 $f(x)$ 找 $F(x)$ 有困难(学过积分后易知 $F(x)$ 实际上就是 $f(x)$ 的一个原函数，可用积分法求得)，那么可将该方程进行适当的等价变形(例如方程两边同乘一个因子等)，然后再设法构造辅助函数.

例 3　设函数 $f(x)$ 可导，试证 $f(x)$ 的两个零点之间必有 $f(x)+f'(x)$ 的零点.

分析　要直接构造一个函数使其导数为 $f(x)+f'(x)$ 是困难的. 但由于 $f(x)+f'(x)$ 的零点与 $e^x[f(x)+f'(x)]$ 的零点相同，并且 $[e^xf(x)]'=e^x[f(x)+f'(x)]$，所以只要证明 $F(x)=e^xf(x)$ 在以 $f(x)$ 的两个零点 x_1 与 x_2 为端点的区间上满足 Rolle 定理的条件就可以了. 证明留给读者.

(2) Lagrange 定理的作用

Lagrange 定理不但有鲜明的几何意义(见《教材》)，而且还有重要的物理意义. 例如，假设 $y=f(x)$ 表示在 $[a,b]$ 上作变速直线运动物体的位移函数，则 Lagrange定理

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi),\quad \xi\in(a,b)$$

表示在(a,b)内至少有一点ξ，使物体在该点的速度$f'(\xi)$等于它在区间$[a,b]$上的平均速度$\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Lagrange 定理在微积分中具有十分重要的地位，它是研究函数在区间上变化性态的理论基础. 在本章的第六节中，详尽地讨论了函数的单调性、极值性(含最大、最小值问题)和凸性. 细心的读者会发现，Lagrange 定理在证明与函数上述性态有关的定理中是至关重要的，希望读者认真领会.

同 Rolle 定理类似，Lagrange 定理还可用于研究形如

$$f(b)-f(a)=f'(x)(b-a) \quad 或 \quad \frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(x)$$

的方程根的存在性(就是证明存在一个或多个数满足该等式)问题，同时也可以证明某些不等式. 在应用中关键也在于构造满足该定理的辅助函数.

例 4 设函数f与g在$[a,b]$上连续，在(a,b)内可导，证明方程

$$\frac{f(b)g(b)-f(a)g(a)}{b-a}=f'(x)g(x)+f(x)g'(x) \tag{2-6}$$

在(a,b)内至少有一个根.

分析 将方程(2-6)与 Lagrange 公式比较易知，只要作辅助函数$F(x)=f(x)g(x)$，不难验证F在$[a,b]$上满足 Lagrange 定理的条件，所以至少存在一个$c\in(a,b)$，满足方程(2-6).

在例 4 中，若取$g(x)=x$，则易知$\exists\, c\in(a,b)$，使

$$\frac{bf(b)-af(a)}{b-a}=cf'(c)+f(c); \tag{2-7}$$

若取$g(x)=\mathrm{e}^x$，则又知$\exists\,\xi\in(a,b)$，使

$$\frac{\mathrm{e}^b f(b)-\mathrm{e}^a f(a)}{b-a}=\mathrm{e}^\xi[f(\xi)+f'(\xi)]. \tag{2-8}$$

例 5 设函数f在$[a,b]$上连续，在(a,b)内可导，且$f(a)=f(b)=1$. 证明$\exists\,\xi,\eta\in(a,b)$，使

$$\mathrm{e}^{\xi-\eta}[f(\xi)+f'(\xi)]=1. \tag{2-9}$$

分析 此题要证明在(a,b)内存在两个数满足(2-9)式，是比较复杂的一个难题. 为寻求解题思路，先将它变为如下等式：

$$\mathrm{e}^\xi[f(\xi)+f'(\xi)]=\mathrm{e}^\eta.$$

易见，上式左端就是(2-8)式的右端，注意到题设条件，即有$\mathrm{e}^\xi[f(\xi)+f'(\xi)]=\dfrac{\mathrm{e}^b-\mathrm{e}^a}{b-a}$. 所以，只要能证明：$\exists\,\eta\in(a,b)$，$\eta\neq\xi$，使$\dfrac{\mathrm{e}^b-\mathrm{e}^a}{b-a}=\mathrm{e}^\eta$就行了，而这个等式就是$\mathrm{e}^x$在$[a,b]$上的 Lagrange 公式. 综上可知，只要在$[a,b]$上分别对函数$F(x)=\mathrm{e}^x f(x)$和$g(x)=\mathrm{e}^x$应用 Lagrange 定理就可证明题中的结论. 详细步骤请读者

补足.

例 6　设 $f''(x)<0, f(0)=0$，证明对任何 $x_1>0, x_2>0$，有

$$f(x_1+x_2)<f(x_1)+f(x_2).$$

证　不妨设 $x_1\leqslant x_2$，只要证等价的不等式

$$f(x_1+x_2)-f(x_2)<f(x_1)-f(0) \tag{2-10}$$

即可.为此，有两种证法.

证法一　对不等式(2-10)两端分别用 Lagrange 定理，得

$$\exists \xi_1\in(0,x_1)，使\ f(x_1)-f(0)=x_1 f'(\xi_1), \tag{2-11}$$

$$\exists \xi_2\in(x_2,x_1+x_2)，使\ f(x_1+x_2)-f(x_2)=x_1 f'(\xi_2), \tag{2-12}$$

由于 $x_1\leqslant x_2$，所以 $\xi_1<\xi_2$. 再由 $f''(x)<0$，故 $f'(x)$ 严格单调减，从而有 $f'(\xi_2)<f'(\xi_1)$. 注意到 $x_1>0$，由(2-11)式与(2-12)式得

$$f(x_1+x_2)-f(x_2)<f(x_1)-f(0)=f(x_1),$$

于是题中的不等式得证.

证法二　作辅助函数 $F(x)=f(x+x_1)-f(x)$，则 $F'(x)=f'(x+x_1)-f'(x)$. 由 Lagrange 定理，$\exists c\in(x,x+x_1)$，使 $F'(x)=f'(x+x_1)-f'(x)=f''(c)x_1<0$，故 $F(x)$ 严格单调减，从而有 $F(x_2)<F(0)$，即 $f(x_1+x_2)-f(x_2)<f(x_1)-f(0)<f(x_1)$. 于是题中的不等式得证.

(3) Cauchy 定理的作用

Cauchy 定理不但是 Lagrange 定理的推广，而且它的几何意义也同 Lagrange定理类似.事实上，若将该定理中函数 f 与 g 的自变量改用字母 t 表示，则 $x=g(t)$ 与 $y=f(t)$ $(t\in[a,b])$ 就是一条以 $A(g(a),f(a))$ 与 $B(g(b),f(b))$ 为端点的平面曲线 C 的参数方程，并且 $\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$ 就是弦 AB 的斜率，而 $\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$ 就是 C 上点 $P(g(\xi),f(\xi))$ 处切线的斜率. 因此，Cauchy 定理在几何上就表示在满足定理条件的曲线 C 上，必至少存在一点 P，使 C 在 P 点处的切线平行于弦 AB.

Cauchy 定理主要作用有：(1)导出便于求不定式极限的一个常用的法则——L'Hospital 法则；(2)是证明 Taylor 定理的基础；(3)判定方程根的存在性.(1)与(2)两方面的作用见《教材》，下面仅就第(3)方面的作用举例说明.

例 7　设函数 f 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，$a>0$，证明：$\exists x_1,x_2,x_3\in(a,b)$，使

$$\frac{f'(x_1)}{2x_1}=(a^2+b^2)\frac{f'(x_2)}{4x_2^3}=\frac{\ln b-\ln a}{b^2-a^2}x_3 f'(x_3). \tag{2-13}$$

分析　将等式(2-13)乘以 b^2-a^2，则有

$$\frac{(b^2-a^2)f'(x_1)}{2x_1}=\frac{(b^4-a^4)f'(x_2)}{4x_2^3}=\frac{(\ln b-\ln a)f'(x_3)}{\frac{1}{x_3}}.$$

把上式与 Cauchy 定理对照，易知只要证明

$$\frac{f(b)-f(a)}{b^2-a^2}=\frac{f'(x_1)}{2x_1},\frac{f(b)-f(a)}{b^4-a^4}=\frac{f'(x_2)}{4x_2^3},\frac{f(b)-f(a)}{\ln b-\ln a}=\frac{f'(x_3)}{\frac{1}{x_3}}$$

即可. 因此，只要分别取 $g_1(x)=x^2,g_2(x)=x^4,g_3(x)=\ln x$，在$[a,b]$上对 $f(x)$ 与 $g_i(x)(i=1,2,3)$分别用 Cauchy 定理就可证得等式(2-13). 详细证明步骤留给读者完成.

5. Taylor 定理的内涵及其应用

Taylor 定理是微分学中另一个重要定理. 由于当 $n=0$ 时，带 Lagrange 余项的 Taylor 公式就是 Lagrange 公式，因此，Taylor 定理可以看作 Lagrange 定理的推广，也被看作是一个微分中值定理.

(1) Taylor 定理的基本思想——用高次多项式逼近高阶可微函数

我们知道，在 x_0 的微小邻域内用线性函数近似替代在 x_0 处可微的非线性函数 $y=f(x)$是微分的基本思想. 由于线性函数是一次多项式，所以微分在本质上就是用一次多项式来逼近一阶可微函数 $y=f(x)$，即

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+o(x-x_0),x\in U(x_0,\delta).\qquad(2-14)$$

而 Taylor 公式的基本思想就是用高次多项式来逼近高阶可微函数. 例如，按照带 Peano 余项的 Taylor 定理，若函数 $y=f(x)$在 x_0 处 n 阶可导，则 $\forall x\in U(x_0,\delta)$，

$$f(x)=\sum_{i=0}^{n}\frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(x-x_0)^i+o((x-x_0)^n),\qquad(2-15)$$

其中 $P_n(x)=\sum\limits_{i=0}^{n}\frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(x-x_0)^i$ 就是 $f(x)$在 x_0 处的 n 次 Taylor 多项式($P_n(x)$的系数为 f 及其各阶导数在已知点 x_0 处的值)，而余项 $R_n(x)=o((x-x_0)^n)$就是用 $P_n(x)$近似替代 $f(x)$所产生的误差，它是当 $x\to x_0$ 时$(x-x_0)^n$ 的高阶无穷小.

当 $n=1$ 时，一次多项式 $P_1(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$就是 $y=f(x)$在 $U(x_0,\delta)$内的一次近似，误差为 $x-x_0$ 的高阶无穷小. 几何上，$P_1(x)$表示曲线 $y=f(x)$上点$(x_0,f(x_0))$处的切线，也称之为**一次切线**，并说它与曲线 $y=f(x)$在$(x_0,f(x_0))$处**一阶接触**(或**一阶密切**).

当 $n=2$ 时，二次多项式 $P_2(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2$ 就是 $y=f(x)$在 $U(x_0,\delta)$内的二次近似，误差为$(x-x_0)^2$ 的高阶无穷小. 称它为曲线 $y=f(x)$在点$(x_0,f(x_0))$处的**二次切线**，并说它与 $y=f(x)$在点

$(x_0,f(x_0))$处**二阶接触**(或**二阶密切**).

一般地,当 $n=k$ 时,k 次多项式

$$P_k(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

是函数 $y=f(x)$在 $U(x_0,\delta)$内的 k 次近似,误差为$(x-x_0)^k$ 的高阶无穷小.称之为曲线 $y=f(x)$在点$(x_0,f(x_0))$处的 **k 次切线**,并说它与 $y=f(x)$在该点 **k 阶接触**(或 **k 阶密切**).

显然,当次数 n 越高,在 x_0 的邻域 $U(x_0,\delta)$内,多项式 $P_n(x)$与该函数接近的程度越好,即用 $P_n(x)$替代 $f(x)$所产生的误差越小.如果能证明 $\lim\limits_{n\to\infty}R_n(x)=0$,那么就能用 $P_n(x)$(n 足够大)求出 $f(x)$的任何精度的近似值,Taylor 公式(2-15)就变成第四章中将要讨论的所谓 Taylor 展开式:

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n.$$

图 2-1 中画出了正弦函数 $y=\sin x$ 与其 Taylor 多项式 $P_n(x)$($n=1,3,5,\cdots,19$)的图形.不难看到,随着多项式 $P_n(x)$次数的增高,不但它与该函数的接近程度越来越好,即使在偏离原点较远的 x 处,只要多项式 $P_n(x)$的次数足够高,也能得到该函数精度很高的近似值.

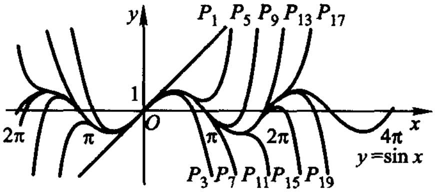


图 2-1

从上面的分析可见,Taylor 定理的思想包括两个方面:第一,用简单函数(多项式)来逼近复杂函数;第二,通过函数 f 在已知点处的信息(f 及其各阶导数在 x_0 处的值)来表达它在未知点的信息.这样,使我们可以借助简单函数的性质来研究复杂函数 f 的性质,利用函数 f 在已知点信息构造的简单函数(多项式)计算函数 f 在未知点的近似值,这就是数学中常用的一种思想——逼近的思想.读者应当从微分到 Taylor 公式的学习中深刻领会这种思想.

(2) Taylor 定理的应用

《教材》中介绍了 Taylor 定理的两种形式,即带 Peano 余项的形式与带 Lagrange余项的形式.前者是一阶微分公式的推广,后者是 Lagrange 公式的推广,它们都具有重要的理论意义和广泛的应用价值,下面仅就四个方面加以说明.第一,它是进一步研究函数性态的理论基础.我们已经指出,Lagrange 定理是利用导数研究函数性态的重要基础,但它主要用于研究与一阶导数相关的那些性态.如果要研究函数哪些与高阶导数有关的更进一步的性态,自然就要借助于作为 Lagrange 定理推广的 Taylor 定理.例如,《教材》中利用二阶导数值在驻

点 x_0 的正负来判定 x_0 是极大值点还是极小值点的定理 6.3 以及利用更高阶导数来研究函数的极值问题的定理 6.4 等，都是利用 Taylor 定理证明的. 第二，计算函数的近似值. 利用 Taylor 公式来计算函数的近似值比用微分精度更高，适用范围更广，而且可以进行误差估计. 由于 Lagrange 余项给出了余项的表达式，所以为了估计误差的精度，需要利用带 Lagrange 余项的 Taylor 公式. 第三，是求$\frac{0}{0}$型不定式极限的一般性方法. 因为求极限时不需要对余项(高阶无穷小)的大小进行具体计算，而且仅涉及函数 f 在 x_0 去心邻域内的变化性态，所以只要用带 Peano 余项的 Taylor 公式就行了. 求极限时，利用 Taylor 公式将分子与分母中的函数分别展开，使其中多项式部分的最高次数相同. 第四，证明不等式. 证明不等式的方法很多，例如，可以利用单调性、Lagrange 定理和函数的凸性. 而 Taylor公式常用于证明与中间值 ξ 处二阶以上导数(含二阶导数)有关的不等式. 由于证明不等式往往需要对其中的某些含 ξ 的项进行具体估计，所以一般使用带 Lagrange 余项的 Taylor 公式. 证明中一方面要充分利用题中给定的函数 $f(x)$及其各阶导数的已知信息(例如在某些已知点上的值，它们满足的不等式条件和有界性等)；另一方面，要恰当选择在哪一点 x_0 处将函数 $f(x)$ 展开为 Taylor 公式. 后者没有一般规律可循，通常选用区间的端点、中间点、函数的极值点和导数为零的点等特殊点作为 x_0. 现举例说明如下.

例 1　设函数 $f(x)$在$[-1,1]$上三阶可导，且 $f(-1)=f(0)=0, f(1)=1, f'(0)=0$. 证明：存在 $\xi\in(-1,1)$，使 $f'''(\xi)\geqslant 3$.

分析　为证明这个含 f 在中间值$\xi\in(-1,1)$处的三阶导数的不等式，一般利用带 Lagrange 余项的三阶 Taylor 公式. 由已知，$f(0)=f'(0)=0$，因此，$f(x)$在 $x_0=0$ 处的三阶 Taylor 公式中仅含 x^2 与 x^3 项，它们的系数分别为$\frac{1}{2!}f''(0)$与$\frac{1}{3!}f'''(\eta)$($\eta\in(-1,1)$). 若将 $f(-1)=0$ 与 $f(1)=1$ 代入，可得分别含 $f''(0)$与 $f'''(\eta_1)$以及 $f''(0)$与 $f'''(\eta_2)$的两个等式. 由这两个等式消去 $f''(0)$即得仅含 $f'''(\eta_1)$与 $f'''(\eta_2)$的等式，从而不难得到所要证明的不等式.

证　利用 $f(x)$在 $x_0=0$ 处的 Taylor 公式，$\forall x\in[-1,1]$，则有

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{1}{2!}f''(0)x^2+\frac{1}{3!}f'''(\eta)x^3$$
$$=\frac{1}{2}f''(0)x^2+\frac{1}{6}f'''(\eta)x^3\ (\eta\text{ 介于 }0\text{ 与 }x\text{ 之间}).$$

将 $f(-1)=0$ 与 $f(1)=1$ 分别代入上式得

$$0=f(-1)=\frac{1}{2}f''(0)-\frac{1}{6}f'''(\eta_1),\quad \eta_1\in(-1,0),$$

$$1=f(1)=\frac{1}{2}f''(0)+\frac{1}{6}f'''(\eta_2),\quad \eta_2\in(0,1).$$

两式相减得

$$f'''(\eta_1)+f'''(\eta_2)=6.$$

令 $f'''(\xi)=\max\{f'''(\eta_1),f'''(\eta_2)\}$，则 ξ 为 η_1 或 η_2，且

$$2f'''(\xi)\geqslant f'''(\eta_1)+f'''(\eta_2)=6,$$

从而有 $f'''(\xi)\geqslant 3,\xi\in(-1,1)$.

例 2　设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶可导，$|f(x)|\leqslant a$，$|f''(x)|\leqslant b$（a,b 为非负实数），证明：$\forall c\in(0,1)$，$|f'(c)|\leqslant 2a+\dfrac{b}{2}$.

分析　由于题中给出了 $\forall x\in[0,1]$，都有 $|f(x)|\leqslant a$ 与 $|f''(x)|\leqslant b$ 的条件，而且要证明的不等式中含 f' 在 $(0,1)$ 内任何点 c 处的值，因此利用 $f(x)$ 在 $x_0=c$ 处的二阶 Taylor 公式

$$f(x)=f(c)+f'(c)(x-c)+\frac{1}{2}f''(\xi)(x-c)^2\ (\xi\text{ 介于 } x \text{ 与 } c \text{ 之间}),\tag{2-16}$$

其中 $f(x)$，$f(c)$ 与 $f''(\xi)$ 均有界. 虽然从 (2-16) 式可解出 $f'(c)$ 所满足的等式，但由于 $x\in[0,1]$，$c\in(0,1)$，所以 $x-c$ 可能为 0，从该式无法得到题中要证的不等式. 为此，将 $x=0$ 与 $x=1$ 代入上述 Taylor 公式 (2-16)，并将所得二等式相减，利用上述有界性条件可证得题中的不等式.

证　将 $x=0$ 与 $x=1$ 代入 $f(x)$ 在 $x_0=c$ 处的二阶 Taylor 公式得

$$f(0)=f(c)-f'(c)c+\frac{1}{2}f''(\xi_1)c^2,\quad \xi_1\in(0,c),$$

$$f(1)=f(c)+f'(c)(1-c)+\frac{1}{2}f''(\xi_2)(1-c)^2,\quad \xi_2\in(c,1).$$

两式相减得

$$f(1)-f(0)=f'(c)+\frac{1}{2}[f''(\xi_2)(1-c)^2-f''(\xi_1)c^2].$$

所以

$$\begin{aligned}|f'(c)|&=\left|f(1)-f(0)-\frac{1}{2}[f''(\xi_2)(1-c)^2-f''(\xi_1)c^2]\right|\\&\leqslant|f(1)|+|f(0)|+\frac{1}{2}|f''(\xi_2)|(1-c)^2+\frac{1}{2}|f''(\xi_1)|c^2\\&\leqslant 2a+\frac{b}{2}[(1-c)^2+c^2]\leqslant 2a+\frac{b}{2}(1-c+c)^2=2a+\frac{b}{2}.\end{aligned}$$

6. L'Hospital 法则的几何意义和应用中应当注意的几个问题

(1) L'Hospital 法则的几何意义

为了帮助读者进一步理解，为什么 L'Hospital 法则能将求两个函数之比的极限 $\lim\limits_{t\to t_0^+}\dfrac{f(t)}{g(t)}$ 等于它们导函数之比的极限 $\lim\limits_{t\to t_0^+}\dfrac{f'(t)}{g'(t)}$，下面我们就 $\dfrac{0}{0}$ 型不定式的情形对该法则作一种几何解释.

将 $x=g(t)$，$y=f(t)$ 看作平面曲线(C)的参数方程. 假设 f 与 g 在 $(t_0,t_0+\delta)$ 内满足该法则的三个条件：1° $\lim\limits_{t\to t_0^+}f(t)=\lim\limits_{t\to t_0^+}g(t)=0$；2° f 与 g 在 $(t_0,t_0+\delta)$ 内可导，且 $g'(t)\neq 0$；3° $\lim\limits_{t\to t_0^+}\dfrac{f'(t)}{g'(t)}=a$（$a$ 为有限或无穷大）. 不妨设 f 与 g 在 t_0 处右连续，则 $f(t_0)=g(t_0)=0$（否则可补充定义 $f(t_0)=g(t_0)=0$）. 这样，曲线(C)通过原点 O 且在原点连续（图 2-2）.

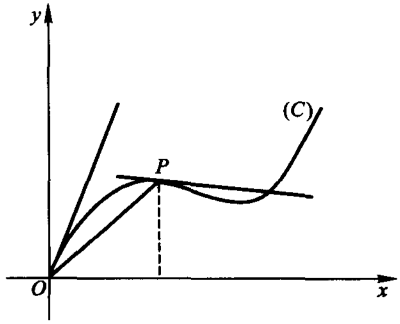


图 2-2

根据参数方程求导法则，曲线(C)上任一点 P 处的切线斜率为 $\dfrac{\dot{y}}{\dot{x}}=\dfrac{f'(t)}{g'(t)}$，而割线 OP 的斜率为

$$\frac{y}{x}=\frac{f(t)}{g(t)}.$$

由已知，当 $t\to t_0^+$（即 P 沿(C)趋于原点 O）时，极限 $\lim\limits_{t\to t_0^+}\dfrac{f'(t)}{g'(t)}=a$，并且 L'Hospital 法则断言，

$$\lim_{t\to t_0^+}\frac{f(t)}{g(t)}=\lim_{t\to t_0^+}\frac{f'(t)}{g'(t)},$$

所以极限 $\lim\limits_{t\to t_0^+}\dfrac{f(t)}{g(t)}$ 存在且等于 a. 而它就是当 P 沿(C)趋于原点 O 时割线 OP 斜率的极限，也就是曲线(C)在原点 O 处的(右)切线的斜率. 因此 L'Hospital 法则在几何上就表示曲线(C)在原点处(右)切线就是(C)上点 P 处切线当 P 趋于 O 时的极限位置.

从图 2-2 易见，两个函数 $f(t)$ 与 $g(t)$ 之比的极限是 $\dfrac{0}{0}$ 型不定式，而它们的导函数之比的极限不一定是不定式（分子，分母分别求导后可能消去零因子）. 一般说来，后者较前者简单易求.

(2) 用 L'Hospital 法则求不定式极限时应注意的几个问题

L'Hospital 法则是求不定式极限的有效方法，它把求极限 $\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 的问题

转化为求极限$\lim \frac{f'(x)}{g'(x)}$的问题. 在应用中应当理解并熟记法则成立的三个条件,并逐一检查条件是否满足. 否则可能得到错误的答案或无法求得结果.

1° 是否为$\frac{0}{0}$或$\frac{\infty}{\infty}$型不定式,若不是,则不可贸然使用.

例 1 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{4+x^2}$显然不是不定式,且其值为 0. 若使用 L'Hospital 法则,则得下面的错误结果:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{4+x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2x}=\frac{1}{2}.$$

例 2 $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-3x+2}{2x^3-x^2-4x+3}$是$\frac{0}{0}$型不定式,有人求解如下:

$$\text{原式}=\lim_{x\to 1}\frac{3x^2-3}{6x^2-2x-4}=\lim_{x\to 1}\frac{6x}{12x-2}=\frac{6}{12}=\frac{1}{2}.$$

答案是错误的. 产生错误的原因是用了两次 L'Hospital 法则后得到的极限$\lim\limits_{x\to 1}\frac{6x}{12x-2}$已不是不定式了. 容易直接求得其值为$\frac{3}{5}$.

2° 若$\lim \frac{f'(x)}{g'(x)}$既不存在也不是无穷大,则该法则失效,不能应用. 但这种情况下$\lim \frac{f(x)}{g(x)}$仍可能存在,可用其他方法计算.

例 3 $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{x+\sin x}{x-\sin x}$属于$\frac{\infty}{\infty}$型不定式,但由于

$$\text{原式}=\lim_{x\to +\infty}\frac{(x+\sin x)'}{(x-\sin x)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\cos x}{1-\cos x}$$

不存在,故不能使用该法则. 读者不难看到原极限是存在的,且极限值为 1.

3° L'Hospital 法则要求分子 $f(x)$ 与分母 $g(x)$在 x_0 的某去心邻域(或单侧邻域)内可导,且 $g'(x)\neq 0$,这个条件常被忽视,并且不易发现错在何处.

例 4 设 $f(x)$在 x_0 处二阶可导,有人求极限

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-\left[f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2\right]}{(x-x_0)^2}$$

如下:

$$\text{原式}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)-[f'(x_0)+f''(x_0)(x-x_0)]}{2(x-x_0)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f''(x)-f''(x_0)}{2}=0.$$

上述答案是对的,但方法不对,而且错误有两处. 请读者找出错误何在,并给出正确的解法.

4° L'Hospital 法则应与无穷小等价代换、求出式中非零因子的极限值等其他方法交替使用，以避免出现复杂的求导运算，简化极限的计算过程. 这方面的例子《教材》中已举了很多，请读者注意.

5° 对于其他类型的不定式（如 $0\cdot\infty,\infty-\infty,1^\infty,\infty^0,0^0$），应化为$\frac{0}{0}$或$\frac{\infty}{\infty}$型后再使用 L'Hospital 法则.

例 5 求$\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

解 此题属于 1^∞ 型不定式. 由于

$$\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}=e^{\frac{1}{x^2}\ln\frac{\sin x}{x}},$$

而$\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln\frac{\sin x}{x}}{x^2}$是$\frac{0}{0}$型不定式，所以拟先用 L'Hospital 法则求出它的极限，得

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln\frac{\sin x}{x}}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{x\cos x-\sin x}{2x^2\sin x}=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{x\cos x-\sin x}{x^3}$$
$$=-\frac{1}{6}\lim_{x\to0}\frac{x\sin x}{x^2}=-\frac{1}{6}.$$

从而

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}=e^{-\frac{1}{6}}.$$

6° 某些不定式的极限虽满足 L'Hospital 法则的所有条件，但由于$\lim\frac{f'(x)}{g'(x)}$并不比$\lim\frac{f(x)}{g(x)}$简单易求，因此仍不宜使用该法则. 仅当$\lim\frac{f'(x)}{g'(x)}$比$\lim\frac{f(x)}{g(x)}$简单易求时，该法则才有使用价值. 否则，应另寻他法.

例如，若用 L'Hospital 法则求$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{e^x+e^{-x}}$，则有

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{e^x+e^{-x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{e^x-e^{-x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{e^x+e^{-x}},$$

由于出现了循环现象，因此用该法则不能求得结果. 其实，读者容易求得该极限为 1.

7° 数列极限不能直接利用 L'Hospital 法则来求，因为数列没有导数. 但若所求数列极限是不定式，可以先用该法则求出对应的函数极限，再根据函数极限的归并原理得到所要求的数列极限.

例如，为求数列极限$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\arcsin\frac{1}{n}\right)^{\tan\frac{1}{n}}$，由于它属于 0^0 不定式，先求对应

的函数极限 $\lim\limits_{x\to0^+}(\arcsin x)^{\tan x}$. 因为

$$(\arcsin x)^{\tan x}=\mathrm{e}^{\tan x\ln(\arcsin x)},$$

并且

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0^+}\tan x\ln(\arcsin x)&=\lim_{x\to0^+}\frac{\ln\arcsin x}{\cot x}\\&=\lim_{x\to0^+}\left(-\frac{\sin^2x}{\arcsin x\sqrt{1-x^2}}\right)=\lim_{x\to0^+}\left(-\frac{x^2}{x\sqrt{1-x^2}}\right)=0,\end{aligned}$$

所以

$$\lim_{x\to0^+}(\arcsin x)^{\tan x}=\mathrm{e}^0=1,$$

故所求数列极限也等于 1.

***7. 可微函数导函数的几个重要性质**

可微函数 f 的导函数 f' 有几个重要性质是函数 f 本身所不具有的，因此，不能随意把函数 f 本身的性质用于导函数 f'，这是很多初学者容易犯的一个错误.

性质 1°　若函数 f 的导函数 f' 在某点的极限存在，则 f' 在该点必定连续.

证　设 f 在 x_0 的邻域内连续，除 x_0 外可导，且 $\lim\limits_{x\to x_0}f'(x)=a$，则 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f'(x)=\lim\limits_{x\to x_0^-}f'(x)=a$. 根据《教材》中推论 4.3，我们有 $f'_+(x_0)=f'_-(x_0)=a$，故 $f'(x_0)=a$，从而 $\lim\limits_{x\to x_0}f'(x)=f'(x_0)=a$，即 f' 在 x_0 处连续.

导函数的上述性质是一般函数所没有的. 因为即使函数 f 在 x_0 处的极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在，其值也可能不等于 f 在 x_0 处的值 $f(x_0)$（甚至 f 在 x_0 处无定义），除非 f 在 x_0 处连续.

性质 2°（Darboux 定理）　设函数 f 在闭区间 $[a,b]$ 上可导，$f'_+(a)\neq f'_-(b)$，μ 为介于 $f'_+(a)$ 与 $f'_-(b)$ 之间的任意一个数，则至少存在一个点 $\xi\in(a,b)$，使 $f'(\xi)=\mu$.

证　先证当 $f'_+(a)$ 与 $f'_-(b)$ 异号的情形，不妨设 $f'_+(a)>0$，$f'_-(b)<0$. 由 $f'_+(a)>0$，得

$$\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}>0.$$

根据极限的保号性，必存在 a 的右邻域 $(a,a+\delta_1)$，在此邻域内有 $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}>0$，从而有 $f(x)>f(a)$. 同理，由 $f'_-(b)<0$ 得知在 b 的某左邻域 $(b-\delta_2,b)$ 内有 $f(x)>f(b)$. 又因为 f 在 $[a,b]$ 上连续，故知必 $\exists\,\xi\in(a,b)$（上面已说明最大值不能在端点 a 与 b 取得），使 $f(\xi)$ 取得 f 在 $[a,b]$ 上的最大值，从而有 $f'(\xi)=0$. 也就是说，f' 在 ξ 处取得介于 $f'_+(a)$ 与 $f'_-(b)$ 之间的零值.

如果 $f'_+(a)$ 与 $f'_-(b)$ 的正负是任意的，μ 为介于两者之间的任意数，令 $g(x)=f(x)-\mu x$，则 g 在 $[a,b]$ 上可导，并且 $g'(x)=f'(x)-\mu$. 故 $g'_+(a)=f'_+(a)-\mu$ 与 $g'_-(b)=f'_-(b)-\mu$ 异号. 由上述证明结果知，必 $\exists\,\xi\in(a,b)$，使 $g'(\xi)=0$，即 $f'(\xi)=\mu$. 证毕.

性质 2°与闭区间上连续函数的介值定理类似，也称它为闭区间上导函数的介值性. 但是，与连续函数介值定理不同的是该性质并不要求导函数 f' 在 $[a,b]$ 上连续，因此，条件比连续函数的介值定理要弱得多.

由性质 2°利用反证法容易得到导函数的另外两个性质：

性质 3° 若导函数 $f'(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上异于零，即 $\forall\,x\in[a,b]$，$f'(x)\neq 0$，则要么在 $[a,b]$ 上恒有 $f'(x)>0$，要么恒有 $f'(x)<0$.

对于函数 $f(x)$ 自身来说，根据零点定理，当 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的连续函数时才有上述性质.

性质 4° 区间 I 上的导函数不存在第一类间断点.

这就是说，区间上的导函数仅可能有第二类间断点，而不可能有第一类间断点. 例如，容易证明函数

$$f(x)=\begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0, \\ 0, & x=0 \end{cases}$$

在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，但它的导函数

$$f'(x)=\begin{cases} 2x\sin\dfrac{1}{x}-\cos\dfrac{1}{x}, & x\neq 0, \\ 0, & x=0 \end{cases}$$

在 $(-\infty,+\infty)$ 上处处存在但不连续，并且 $x=0$ 是它的第二类间断点.

这个性质也是函数 $f(x)$ 自身所没有而是导函数 $f'(x)$ 所特有的，在第三章中讨论函数的可积性与存在原函数的关系时将会用到它.

第三章　一元函数积分学及其应用

1. 关于函数的可积性

《教材》是在可积的条件下讨论定积分，而将被积函数连续，有有限个第一类间断点，乃至在闭区间上单调等情况作为函数可积的几种主要特殊情况. 这样，扩大了定积分的使用范围.

《教材》中所介绍的可积的充要条件(定理 1.2)，是判定函数可积性的基本定理. 虽然未给出分析证明，但借助于定积分的几何意义，利用 Darboux 小和与大和来说明其正确性是不难接受的. 为了对它有更多的理解，我们再作如下解释.

Darboux 大(小)和 $\sum\limits_{k=1}^{n} M_k\Delta x_k\left(\sum\limits_{k=1}^{n} m_k\Delta x_k\right)$与积分和式 $\sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$ 的主要区别在于，当函数 f 与区间$[a,b]$给定后，Darboux 大(小)和被此区间的"划分"所唯一确定，而积分和式却还依赖于 ξ_k 在$[x_{k-1} x_k]$上的选取，然而对于任一确定的划分，总有

$$\sum_{k=1}^{n} m_k\Delta x_k\leqslant \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k\leqslant \sum_{k=1}^{n} M_k\Delta x_k, \tag{3-1}$$

其中 m_k 与 M_k 分别是 $f(x)$在区间$[x_{k-1},x_k]$上的下、上确界. 应当注意，在 $d=\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n}|\Delta x_k|\to 0$ 的过程中，由于分点在原有划分的基础上不断增多，因而 m_k 与 M_k 在不断变化，m_k 不断增大，M_k 不断减小. 我们可以证明：对有界函数 f 而言，当 $d\to 0$ 时，Darboux 大和与小和的极限都存在. 因此，$\sum\limits_{k=1}^{n}\omega_k\Delta x_k=\sum\limits_{k=1}^{n}(M_k-m_k)\Delta x_k\to 0$ 与 Darboux 大和与小和的极限均存在且相等是等价的. 令 $d\to 0$，对(3-1)式中各式取极限①，根据夹逼定理，便可在 $\sum\limits_{k=1}^{n}\omega_k\Delta x_k\to 0$ 的条件下得知定积分 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 存在，这也就是定理 1.2 充分性证明的主要思想.

由上可见，积分和式的极限 $\lim\limits_{d\to 0}\sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$ 不是普通的数列或函数的极限，它既依赖于区间$[a,b]$的划分，还依赖于 ξ_k 的选取. 我们利用夹逼定理将此

① 严格说来，Riemann 和式极限涉及网收敛问题，此处不宜讨论.

复杂的极限作了简化.

在定理 1.2 这一可积充要条件的基础上，读者便不难理解为什么连续函数、具有有限个第一类间断点的函数，以及在闭区间上单调的函数都一定可积. 在定理 1.3 中，我们利用了函数的一致连续性，证明了对区间$[a,b]$的任一划分，被积函数 $f(x)$在各子区间上振幅 ω_k 所构成的和式 $\sum\limits_{k=1}^{n}\omega_k\Delta x_k$ 可以任意小，从而利用可积充要条件(定理 1.2)中的充分性，证明了连续函数必定可积的重要结论，利用类似的思想方法，不难给出定理 1.4 的证明，下面我们就 $f(x)$在$[a,b]$上有一个第一类间断点的情形，说明证明可积的思想方法.

设点 $c\in(a,b)$是 $f(x)$的第一类间断点，且 f 在$[a,b]\backslash\{c\}$连续. 于是 $f(x)$在$[a,b]$上有界，设$|f(x)|\leqslant M,x\in[a,b]$. 要证明 $f(x)$在$[a,b]$上可积，只需证明它在$[a,b]$上满足可积的充要条件 $\sum\limits_{k=1}^{n}\omega_k\Delta x_k<\varepsilon$. 为此，$\forall\varepsilon>0$，取一小区间$(\alpha,\beta)\subseteq(a,b)$使 $\alpha<c<\beta$，且 $\beta-\alpha<\varepsilon$，由于 f 在$[a,\alpha]$与$[\beta,b]$上连续，故可积，于是由可积的充要条件的必要性可知，对于上述给定的 ε，$\exists\delta>0(\delta<\beta-\alpha)$，使当任意划分的最大子区间的长度 $d<\delta$ 时，在区间$[a,\alpha]$与$[\beta,b]$上均有$\sum\omega_k\Delta x_k<\varepsilon$. 现在任意划分$[a,b]$使 $d<\delta$，得到的所有子区间可分为三类(如图3-1)：第一类全部位于区间(α,β)内，容易看出，在这些区间上有$\sum\omega_k\Delta x_k<2M(\beta-\alpha)<2M\varepsilon$；第二类全部位于区间$[a,\alpha]$或$[\beta,b]$中，从而在这些子区间上和式$\sum\omega_k\Delta x_k<2\varepsilon$；第三类把点 α 或 β 包含在其内部，这样的子区间至多只有两个，从而有$\sum\omega_k\Delta x_k\leqslant 2M\sum\Delta x_k<4M\varepsilon$. 于是对$[a,b]$上述划分的所有项的和式

$$\sum\omega_k\Delta x_k<2M\varepsilon+2\varepsilon+4M\varepsilon=2(1+3M)\varepsilon.$$

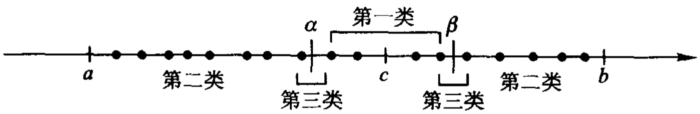


图 3-1

再据可积充要条件的充分性可知，f 在$[a,b]$上可积.

运用同样的证明方法，读者容易看出，若函数 $f(x)$在区间$[a,b]$上有界且除去有限个间断点外连续，则 $f(x)$必在$[a,b]$上可积.

至于在$[a,b]$上单调函数的可积性，证明更为简单，例如，若 $f(x)$在$[a,b]$上单调增. $\forall\varepsilon>0$，取 $\delta=\dfrac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}$，则对任一划分，当 $d<\delta$ 时，有 $\omega_k=f(x_k)-f(x_{k-1})$，且

$$\sum\omega_k\Delta x_k<\delta\sum[f(x_k)-f(x_{k-1})]=\delta[f(b)-f(a)]=\varepsilon,$$

从而 $f(x)$在$[a,b]$上可积.

我们看到,有界是函数可积的必要条件.但 $f(x)$在$[a,b]$上仅有界并不能保证它在$[a,b]$上的可积性,而如果把条件加强至连续,或稍弱的条件:在$[a,b]$上有有限个第一类间断点或单调,又加得过强而变成了充分条件.究竟怎样的函数才正好满足充要条件而与可积性等价呢?《教材》中已经指出函数有界且间断点"不太多",所谓"不太多"的涵义是:$\forall\varepsilon>0$,可以找到一列开区间 $I_1,I_2,\cdots,I_n,\cdots$它们包含了 f 在$[a,b]$上的所有间断点,而这些区间长度之和$\sum I_k<\varepsilon$.第八章中将对这一问题作进一步的阐述.如果一函数的间断点过多而使这一条件不能满足,那么,此函数将不可积,例如 Dirichlet 函数在任一区间上均不可积.

2. 关于 Newton - Leibniz 公式与微积分基本定理

(1) Newton - Leibniz 公式

多数微积分的教材中,Newton - Leibniz 公式是在被积函数连续的条件下,通过变上限积分求导定理来导出的.《教材》对 Newton - Leibniz 公式是在被积函数可积和其原函数存在的条件下导出的.这样做既可扩大 Newton - Leibniz 公式适用的范围,也使它的导出更加直接明了,现将《教材》的讲述思路归纳如下:

定积分是寻求非均匀分布在某一区间上的可加量的一种有效方法,有其广泛的应用性.但是,要通过和式的极限来求出这种可加量是相当繁难的.为了使定积分能方便应用,重要的问题是为它的计算另辟途径.《教材》是从变速直线运动的速度 $v(t)$和位移 $s(t)$的关系出发,通过时间区间$[a,b]$上位移 s 的计算,得到公式

$$s=\int_a^b v(t)\mathrm{d}t=s(b)-s(a),\quad s'(t)=v(t),$$

再加以抽象提出并证明了下列 Newton - Leibniz 公式.

定理 2.1(Newton - Leibniz)　设 $f\in\mathscr{R}[a,b]$,且 f 在$[a,b]$上有一个原函数 F,则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=F(b)-F(a)=F(x)\Big|_a^b.$$

由于定理的条件:f 可积且有原函数,比连续的要求要弱.这显然扩大了公式的应用范围.例如,对于具有第二类间断点的函数

$$f(x)=\begin{cases}2x\sin\dfrac{1}{x}-\cos\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0\end{cases}$$

在$[-1,1]$有界,易知在$[-1,1]$上可积,其原函数为

$$F(x)=\begin{cases}x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$$

应用 Newton - Leibniz 公式得

$$\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x = F(x)\Big|_{-1}^{1} = 2\sin 1.$$

(2) 函数的连续性、可积性与原函数的存在性之间的关系

Newton - Leibniz 公式把定积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 的计算问题转化为寻求 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 的原函数问题，人们自然要问是否任一可积函数都有原函数呢?答案是否定的.

例如，具有跳跃间断点 $x=0$ 的函数 $f(x)=\begin{cases}-1, -1\leqslant x<0,\\ 1, 0<x\leqslant 1\end{cases}$ 在$[-1,1]$上显然可积，但在区间$[-1,1]$上却不存在原函数.因为由内容剖析中的问题 2 - 7 我们知道，导函数不可能存在跳跃间断点.因此，要求 $f(x)$具有原函数，必须把可积的条件加强.《教材》中定理 2.2(微积分学第一基本定理)在 $f(x)$连续的条件下，证明了 $f(x)$原函数的存在性，并且具体给出了其原函数的表述式 $\int_a^x f(t)\mathrm{d}t, x\in[a,b]$.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t = f(x),\quad x\in[a,b].$$

函数连续是其原函数存在的充分条件，但并不必要.换句话说，若函数 $f(x)$有原函数，$f(x)$不一定非连续不可.例如

$$F(x)=\begin{cases}x^2\sin\dfrac{1}{x^2}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

容易求得

$$F'(x)=\begin{cases}2x\sin\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{2}{x}\cos\dfrac{1}{x^2}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

可见

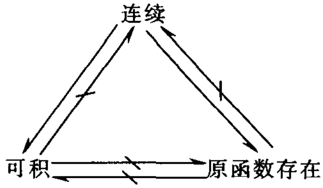
$$f(x)=\begin{cases}2x\sin\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{2}{x}\cos\dfrac{1}{x^2}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0\end{cases}$$

在 $x\in(-\infty,+\infty)$存在原函数 $F(x)$.但 $f(x)$在 $x=0$ 处间断.由于导函数不可能具有第一类间断点，我们可以肯定 $f(x)$的间断点只能是第二类间断点.事实上，容易看出 $x=0$ 是 $f(x)$的无穷间断点.

由这个例子还可看到，原函数存在的函数 $f(x)$不仅不一定连续，甚至不一定可积.因为在此例中 $f(x)$在包含 $x=0$ 的任一区间上是无界的.

综上所述，可将函数的连续性，可积性与原函数存在性之间的关系图示如下

(其中符号$\nrightarrow$表示不一定成立). 读者可通过它们的关联和区别来加深对这些概念的理解.



(3) 微积分第一基本定理的重要意义

上述微积分第一基本定理有着十分重要的理论意义. 首先,它给出了原函数存在的一个广泛适用且易于判定的充分条件 —— 连续;其次,它在积分学与微分学之间架起了一座桥梁,变上限积分$\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$对上限x的导数,就是被积函数在上限的值$f(x)$,从而有$\mathrm{d}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t = f(x)\mathrm{d}x$,$\int_a^x \mathrm{d}f(t) = f(x) - f(a)$. 正是由于它揭示了定积分与导数(微分)这一重要联系,人们用微积分学第一基本定理来命名它. 第三,它扩大了我们所研究函数的范围. 尽管有些变上限积分$\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$难以求出,甚至无法用初等函数表示,例如$\int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t$,$\int_1^x \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$等,但是它们给出了用变上限积分表示函数的新方法,而且由于函数$F(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$的导数$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x} = f(x)$容易算得,所以凡是可以通过导函数研究函数性态的一些问题,对于这类函数$F(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$均将通行无阻. 在这些问题中,变上限积分$\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$这一由$f(x)$的积分来定义的新函数,可以和那些初等函数一样来参加研究.

(4) 原函数的结构及其对定积分计算的意义

应当注意,微积分第一基本定理尽管在很大范围内解决了原函数的存在问题,但却并未给出求原函数的方法. 这一问题将在《教材》第三章第三节中专门讲解. 在讨论此问题之前,我们先应了解一个函数的原函数的结构. 由于常数的导数为零,容易得知,一个给定函数的原函数$F(x)$若存在并不唯一,因为$(F(x)+C)' = F'(x)$. 但是一个给定函数的任何两个原函数之间是否仅仅相差一个常数呢?微积分学第二基本定理(定理 2.3)给予了肯定的回答. 由此可知,只要求得了被积函数$f(x)$的任意一个原函数$F(x)$,则$f(x)$的所有原函数都可得到,它的一般表达式为$F(x) + C$,C为任意常数. 由此还可看到,要求定积分$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$,只要求出$f(x)$在$[a,b]$上的任何一个原函数,就可以通过 Newton -

Leibniz 公式，得到定积分的值，而无需过问是哪一个原函数，因为

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = [F(x)+C]\Big|_a^b = F(x)\Big|_a^b.$$

这样一来，我们把定积分的计算问题转化为寻求被积函数的任一原函数问题，或者寻求被积函数的原函数的一般表达式 —— 不定积分的问题. 这为定积分的计算开辟了一条崭新的途径.

(5) 有界分段连续函数的积分

应当指出，对于在区间$[a,b]$上分段连续的有界函数 $f(x)$ 而言，定积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 显然存在，但 $f(x)$ 在$[a,b]$上的原函数却不存在. 这时，Newton - Leibniz 公式不能直接应用，但可分段使用. 例如，

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x), & a \leqslant x \leqslant c; \\ f_2(x), & c < x \leqslant b. \end{cases}$$

若 c 是 $f(x)$的跳跃间断点，则

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x &= \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x \\ &= \int_a^c f_1(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f_2(x)\mathrm{d}x = F_1(x)\Big|_a^c + F_2(x)\Big|_c^b.\end{aligned}$$

对于积分$\int_c^b f(x)\mathrm{d}x = \int_c^b f_2(x)\mathrm{d}x$，我们实际上应将 $f(x)$ 在 $x=c$ 点的值替换成了它的右极限值 $f_2(c+0)$. 由于改变被积函数在有限个点上的值不影响定积分的值，因此上式成立.

由此还可看出，如果分段函数 $f(x)$的分段原函数：

$$F(x) = \begin{cases} F_1(x), & a \leqslant x \leqslant c, \\ F_2(x), & c < x \leqslant b \end{cases}$$

在 $x=c$ 处连续(并不可导)，即 $F_1(c) = F_2(c+0) \overset{\text{def}}{=} F_2(c)$，则有

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x &= F_1(x)\Big|_a^c + F_2(x)\Big|_c^b \\ &= F_2(b) - F_1(a) = F(x)\Big|_a^b.\end{aligned}$$

因此，对于在$[a,b]$上的分段连续函数 $f(x)$，如果其分段原函数 $F(x)$在$[a,b]$上连续，仍然可以直接应用 Newton - Leibniz 公式，即

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b.$$

3. 关于积分的换元法

积分的换元法就是变换法在积分学中的应用. 变换是数学中一种非常重要的思想和方法. 通过变换，我们有可能把未知变为已知，把复杂变为简

单，把困难变为容易.实际上复合函数求极限、求导数的方法就是变换思想在求极限和求导数中的应用.在高等数学的其他许多内容中，在其他大学数学乃至现代数学的各分支中，在数学的许多应用中，都大量使用着变换的思想和方法.

(1) 不定积分的换元法

换元积分法在不定积分的计算中发挥着重要的作用.不定积分的换元法有两类：第一类换元法也称为凑微分法.如果不定积分$\int f(x)\mathrm{d}x$不易直接求得，但若能把$f(x)$写成$g[\varphi(x)]\varphi'(x)$，从而原积分就改写为

$$\int f(x)\mathrm{d}x=\int g[\varphi(x)]\varphi'(x)\mathrm{d}x=\int g[\varphi(x)]\mathrm{d}\varphi(x).$$

作变换$u=\varphi(x)$，若积分$\int g(u)\mathrm{d}u=G(u)+C$容易求得，则

$$\int f(x)\mathrm{d}x=G[\varphi(x)]+C$$

这里，我们是通过变换$u=\varphi(x)$把难以计算的积分$\int f(x)\mathrm{d}x$转换为容易计算的积分$\int g(u)\mathrm{d}u$.这时无需考虑$u=\varphi(x)$是否存在逆变换的问题.

第二类换元法是把一个难以计算的积分$\int f(x)\mathrm{d}x$通过变换$x=\varphi(t)$转换为容易求得的积分$\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)\mathrm{d}t$.在求得该积分$F(t)+C$之后，再用$x=\varphi(t)$的逆变换$t=\varphi^{-1}(x)$代入，即得$\int f(x)\mathrm{d}x=F[\varphi^{-1}(x)]+C$.在通常的教材中，求不定积分时，对其定义区间一般是不作要求的.实际上，不定积分的被积函数蕴含着该积分的定义区间.例如，不定积分$\int\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\mathrm{d}x$仅当$|x|>1$才有意义.因此，严格地讲，在对不定积分作第二类换元时，需要考虑它的逆变换在相应区间上的存在性.现以下例说明.

***例 1**　求不定积分$\int\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\mathrm{d}x$, $|x|>1$.

解　如果取变换$x=\sec t$, $-\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}$，由于$\sec t$在$|t|<\frac{\pi}{2}$不单调，故它不存在单值的反函数，而且当$t\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$时，$x\in[1,+\infty)$.换句话说，变换$x=\sec t$及其逆变换不可能建立$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$与$(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$之

间的 1－1 对应关系. 容易看出若取变换 $x=\sec t, t\in(0,\pi)\setminus\left\{\frac{\pi}{2}\right\}$，此时 $\sec t$ 在区间 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 与 $\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ 上分段单调增，且其反函数分别在区间 $(1,+\infty)$ 与 $(-\infty,-1)$ 内存在，从而

$$\begin{aligned}\int\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\mathrm{d}x &\xlongequal{x=\sec t}\int|\cot t|\sec t\tan t\,\mathrm{d}t\\
&=\begin{cases}\displaystyle\int\sec t\mathrm{d}t, & 0<t<\dfrac{\pi}{2},\\[2ex] \displaystyle-\int\sec t\,\mathrm{d}t, & \dfrac{\pi}{2}<t<\pi\end{cases}\\
&=\begin{cases}\ln|\sec t+\tan t|+C, & 0<t<\dfrac{\pi}{2},\\[2ex] -\ln|\sec t+\tan t|+C, & \dfrac{\pi}{2}<t<\pi\end{cases}\\
&=\begin{cases}\ln(x+\sqrt{x^2-1})+C, & 1<x<+\infty,\\ -\ln\left|x-\sqrt{x^2-1}\right|+C, & -\infty<x<-1.\end{cases}\end{aligned}$$

最后一个等式的得出是由于将 t 用 $\operatorname{arcsec} x$ 代回时，当 $-\frac{\pi}{2}<t<\pi$ 时，$\tan t<0$，从而应有 $\tan t=-\sqrt{x^2-1}$. 注意到

$$-\ln\left|x-\sqrt{x^2-1}\right|=\ln\left|\frac{1}{x-\sqrt{x^2-1}}\right|=\ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|,$$

从而

$$\int\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\mathrm{d}x=\ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|+C,\quad |x|>1.$$

(2) 定积分的换元法

读者从《教材》第三章定理 3.3 可见，定积分换元法的要求比较宽松. 对定积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 所选用的变换 $x=\varphi(t)$ 无需考虑其逆变换的存在性. 除要求 $\varphi(t)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上有连续的导数外，只要求 $a=\varphi(\alpha), b=\varphi(\beta)$，当 $t\in[\alpha,\beta]$ 时函数 $x=\varphi(t)$ 不仅可以不单调，甚至其值可以越出区间 $[a,b]$，只需使 f 连续的区间 $I\supseteq R(\varphi)$ 即可(图 3－2). 我们通过下述例子来说明上述解释的涵义.

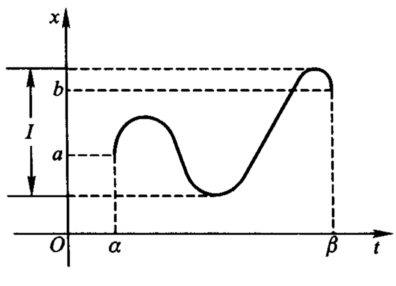


图 3－2

例 2　计算定积分 $\int_0^{\frac{1}{2}}\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x$.

解法一　选取变换

$$x=\sin t,\quad 0\leqslant t\leqslant\frac{\pi}{6},$$

于是

$$\int_0^{\frac{1}{2}}\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{6}}|\cos t|\cos t\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{6}}=\frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

这里，$\sin 0=0,\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$.

解法二　选取变换

$$x=\sin t,\quad 0\leqslant t\leqslant\pi-\frac{\pi}{6},$$

仍然有 $\sin 0=0,\sin\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$，但当 $t\in\left[0,\pi-\frac{\pi}{6}\right]$时，$x=\sin t$ 不单调，且其值域[0,1]超出了定积分的积分区间$\left[0,\frac{1}{2}\right]$. 由定理 3.3，仍有

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{1}{2}}\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x&=\int_0^{\frac{5\pi}{6}}|\cos t|\cos t\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\mathrm{d}t-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{5\pi}{6}}\cos^2 t\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{5\pi}{6}}\\&=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\left[\left(\frac{5\pi}{6}-\frac{1}{2}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)-\frac{\pi}{2}\right]=\frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right).\end{aligned}$$

4. 微积分基本思想方法及其应用

(1) 微积分的基本思想方法

对现实世界中各种事物的运动变化通常需要从微观(局部)和宏观(整体)两个侧面去加以研究. 抽象为数量关系，从微观上研究其变化率；从宏观上研究其改变量. 例如，对于作直线运动的物体，需要从微观上研究其在某时刻的运动速度，从宏观上研究其在某时间段上的位移；对于连续分布在一细棒上的物质，既需要研究在各点物质分布的密度，也需要研究棒的质量.

无论是物体的运动还是质量的分布，都可以划分为均匀和非均匀两大类：均匀变化或均匀分布；非均匀变化或非均匀分布.

对于均匀分布或均匀变化的问题，从微观上研究其变化率，只需运用除法，例如对上述物质细棒，质量 m 的变化率(即线密度)$\mu=\frac{\Delta m}{\Delta x}$；从宏观上研究其改变量，只需使用乘法，如 $m=\mu\cdot l$(其中 l 为棒长)，但是对于非均匀的问题，正如我们所看到的，从微观上研究变化率则需要导数，从宏观上研究改变量就需要积分. 因此，正如本书在内容剖析的问题 2-1 所述，微积分学中导数

和积分不过是分别处理均匀量的除法和乘法，在处理相应的非均匀量中的发展而已.

现在，以上述质量非均匀分布的细棒为例来总结一下从处理均匀量发展到处理非均匀量的方法. 取坐标轴如图 3－3 所示. 先研究其线密度. 设质量函数 $m(x)$已知，求线密度（即 m 的变化率）的方法分为两步：

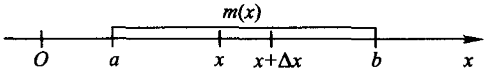


图 3－3

1° **"匀"**：尽管质量在棒上非均匀分布，但在微小区间$[x,x+\Delta x]$上可近似看成是均匀分布的. 以"匀"代"不匀"，或者说对变化率以"常"代"变"，使用处理均匀问题的除法得 $\mu(x)\approx\dfrac{\Delta m}{\Delta x}$；

2° **"精"**：$|\Delta x|$越小，近似程度越高，于是令 $\Delta x\to 0$，利用极限方法便将此近似值转化为精确值，即

$$\mu(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta m}{\Delta x}=\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}x}.$$

再从宏观来研究棒的质量. 设线密度 $\mu(x)$已知，求棒的质量 m 的思想方法也是上述两大步骤：

1° "匀"：非均匀量近似于均匀量只有在微小局部才能成立. 因此要处理这一非均匀分布的整体量，首先必须划分此棒为若干小段，再在各小段上以匀代不匀. 因此，这一思想需要分为两步来完成：i)"分"：将区间$[a,b]$任意划分为 n 个小区间，考察棒在微小区间$[x_{k-1},x_k]$上的小段；ii)"匀"在$[x_{k-1},x_k]$上将质量近似看作均匀分布，用处理相应均匀量的乘法得

$$\Delta m_k\approx\mu(\xi_k)\Delta x_k,\quad x_{k-1}\leqslant\xi_k\leqslant x_k,\quad \Delta x_k=x_k-x_{k-1}.$$

2° "精"：由于所求的是整体量，因此先要把局部量的近似值累加起来再通过极限向精确值转化，所以实现"精"的思想也需两步：i)"合"：$m=\sum\limits_{k=1}^{n}\Delta m_k\approx\sum\limits_{k=1}^{n}\mu(\xi_k)\Delta x_k$；ii)"精"$m=\lim\limits_{d\to 0}\sum\limits_{k=1}^{n}\mu(\xi_k)\Delta x_k=\int_a^b\mu(x)\mathrm{d}x$，其中 $\mathrm{d}=\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n}\{\Delta x_k\}$.

可见，导数与定积分虽然是在处理微观和宏观两种不同范畴的问题中所得到的两个数学概念，但它们的特征都是研究非均量，而解决问题的基本思想方法也是一样的，可归结为两大步：1°微小局部求近似；2°利用极限得精确. 而积分中"分"是"匀"的需要，如何"分"要视有利于"匀"而定；"合"是计算整体量本身的要求. 微积分的这一基本思想方法贯穿在整个一元和多元函数的微积分学中，并且将指导着我们应用微积分去解决各种相关的实际问题. 读者务

必透彻领会.

(2) 定积分与微分的关系

由质量非均匀分布细棒的质量问题可见,已知密度函数 $\mu(x)$,求质量 $m=\int_a^b \mu(x)\mathrm{d}x$ 的关键在于:在微小区间$[x,x+\Delta x]$上以"匀"代"不匀"或对密度函数 $\mu(x)$ 以"常"代"变",从而得到此小段质量的近似值:$\Delta m\approx\mu(x)\Delta x$;求得此近似值后,$m$ 立即可通过和式极限表达为定积分,即 $m=\int_a^b \mu(x)\mathrm{d}x$. 我们知道 $\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}x}=\mu(x)$,即 $m(x)$ 是 $\mu(x)$ 的一个原函数. 因此,这里,$m(x)$ 与 $\mu(x)$ 的关系是原函数与导函数的关系,在微小区间$[x,x+\Delta x]$上对 $\mu(x)$ 以"常"代"变",就是通过对导函数(m 的变化率)$\mu(x)$"以常代变"去求其原函数 $m(x)$ 改变量的近似值. 这一关系是否具有普遍性呢?换句话说,积分和式中 $f(\xi_k)\Delta x_k$ 是否都是 $f(x)$ 的原函数改变量的近似值呢?如果是,又是怎样的近似值呢?显然,这两个问题的解决对从实际问题建立积分式具有重要的指导作用. 事实上,若在$[a,b]$上的所求量 F 能用积分$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 表示,那么,分布在区间$[a,x]$($x\in(a,b)$)上的所求量就是

$$F(x)=\int_a^x f(u)\mathrm{d}u,\quad a\leqslant x\leqslant b.$$

若 $f\in C[a,b]$,则由微积分学第一基本定理可知

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x}=f(x),\text{或 }\mathrm{d}F=f(x)\mathrm{d}x.$$

所以,如果 $f(x)$ 在$[a,b]$上连续,积分和式 $\sum\limits_a^b f(x)\Delta x$ 中的 $f(x)\Delta x$ 的确就是 $f(x)$ 原函数改变量 ΔF 的近似值,而且就是此原函数 $F(x)$ 的微分:$\mathrm{d}F=f(x)\Delta x=f(x)\mathrm{d}x$. 由于 $f(x)$ 在$[a,b]$可积,若将 ξ_k 取成各子区间的左端点,则定积分可写成

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x&=\lim_{d\to0}\sum_{k=1}^n f(x_{k-1})\Delta x_k\\&=\lim_{d\to0}\sum_{k=1}^n\left[\mathrm{d}F(x)\Big|_{x_{k-1}}\right]=\int_a^b\mathrm{d}F(x).\end{aligned}$$

也就是说定积分$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$就是各子区间$[x,x+\Delta x]$上原函数 $F(x)$ 的微分和的极限. 在这个意义上我们说:定积分是微分的"无限累加".

(3) 微元法——微积分基本思想方法在积分学中的应用

由定积分与微分的关系可知,求在区间$[a,b]$上非均匀连续分布的可加量 F

的关键在于寻求 $F(x)$ 的微分 $f(x)\mathrm{d}x$，求得了此微分后将它们“无限累加”——积分，便得到 $F=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$. 然而在实际问题中 F 是要求的未知量，我们既不知道 $F(x)$，也难以确定怎样的函数 $f(x)$ 就是 $F(x)$ 的导函数(变化率函数)，怎样去求此微分呢?我们知道

$$\Delta F = F'(x)\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x = \mathrm{d}F + o(\Delta x).$$

因此，要求微分 $\mathrm{d}F$ 只要找 ΔF 的线性主部即可，也就是去寻求与 Δx 成线性关系的 $A\Delta x$，且使 $|\Delta F - A\Delta x| = o(\Delta x)$. 或者说，去寻找与 Δx 成线性关系的 ΔF 的等价无穷小($\Delta x \to 0$ 时). 下面再通过例子加以说明.

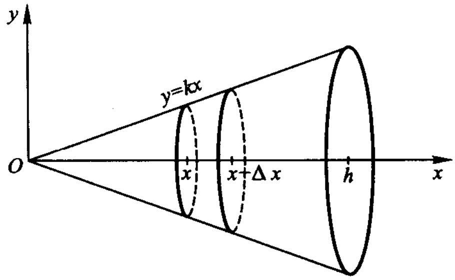


图 3-4

例 1　求如图 3-4 所示的圆锥体的体积 V.

解　显然体积 V 是非均匀分布在区间$[o,h]$上，表现为截圆半径 kx 随点 x 而变化. 在微小区间$[x,x+\Delta x]$上将截圆半径“以常代变”得 ΔV 的近似值

$$\Delta V \approx \pi(kx)^2\Delta x,$$

它是否是体积函数 $V(x)$的微分呢? 由于 $\pi(kx)^2\Delta x$ 与 Δx 成线性关系，故只需查看$|\Delta V-\pi(kx)^2\Delta x|$是否 Δx 的高阶无穷小，由于

$$\begin{aligned}|\Delta V-\pi(kx)^2\Delta x| &\leqslant |\pi[k(x+\Delta x)]^2-\pi(kx)^2|\,|\Delta x| \\ &=\pi k^2(2x+\Delta x)(\Delta x)^2=o(\Delta x),\end{aligned}$$

故 $\pi(kx)^2\Delta x$ 是 $V(x)$的微分. 从而

$$V=\int_0^h \pi k^2x^2\mathrm{d}x=\frac{\pi}{3}k^2h^3.$$

一般地，求光滑曲线 $y=f(x)$，$a\leqslant x\leqslant b$ 绕 x 轴旋转所得旋转体的体积 V(图 3-5).

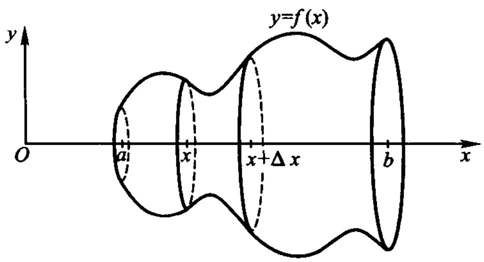


图 3-5

由于 $f(x)$ 在闭区间 $[x,x+\Delta x]$ 上连续，故 $f(x)$ 在 $[x,x+\Delta x]$ 上必存在最小值和最大值. 设其分别为 $f(x_1)$ 与 $f(x_2)$，$x_1,x_2\in[x,x+\Delta x]$. 从而

$$\begin{aligned}|\Delta V-\pi f^2(x)\Delta x|&<\pi|f^2(x_2)-f^2(x_1)||\Delta x|\\&=\pi|f(x_2)+f(x_1)||f(x_2)-f(x_1)||\Delta x|\\&=\pi|f(x_2)+f(x_1)||f'(\xi)||\Delta x|^2\\&\leqslant M|\Delta x|^2.\end{aligned}$$

最后不等式的得出是由于曲线 $y=f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上光滑，故 f 与 f' 均在 $[a,b]$ 上有界. 因此，$\pi f^2(x)\Delta x$ 是 ΔV 的线性主部，即 $V(x)$ 的微分. 从而

$$V=\int_a^b\pi f^2(x)\mathrm{d}x.$$

由上可见，我们是在微小区间 $[x,x+\Delta x]$ 上，把变动的截圆面积看作是固定为过点 x 的截圆面积 $\pi f^2(x)$. 然后通过乘法计算圆柱体面积这一均匀量得到所求非均匀变化函数 $V(x)$ 的微分. 在解决许多非均匀连续分布的可加量 F 求和的实际问题时，我们应先针对所给问题分析非均匀产生的原因，它往往是由于某一相关量 f 变动所引起的. 再看如何将其局部量均匀化便可利用乘法得到此局部量的线性形式的近似值，它通常是通过对 f 以“不变代变”来得到. 这样得到的近似值往往就是所需的微分，而不必也难以逐一加以验证. 这种方法称为微元法. 实际上，以不变代变所选用的 $f(x)$ 就是所求量 $F(x)$ 的变化率，而微元法的本质也就是将非均匀分布量 F 在局部均匀化，或者说将非线性函数 $F(x)$ 局部线性化.

读者在学习定积分的应用一节时，应着眼于通过几何、物理以及其他领域内的一些实际问题去学习和领会利用微元法去建立积分式的思想，掌握如何恰当地选取坐标系，如何划分，如何在微小局部上以常代变去获得微分(微元)，以及如何正确地确定积分的上、下限. 而不应单纯地去套用书上所导出的那些求面积、体积、压力、引力等公式. 这样，才能加深对微积分学基本思想方法的领会，不断提高自己分析问题解决问题的能力. 正是出于这种考虑，在《教材》中我们有意没有导出那些容易误导读者学习的公式. 而对每一具体的实际问题都强调通过微元法来建立积分式.

应当指出，尽管在微小区间“以常代变”去获得微分的方法通常是能奏效的，然而毕竟依赖于直观和经验，对某些特殊问题有时也会导致错误，读者应该了解这一点. 下面我们给出一个易犯错误的典型例子.

* **例 2**　求图 3－4 中圆锥体的侧面积 S.

解　由初等几何的知识我们知道

$$S=\pi kh\sqrt{h^2+(kh)^2}=\pi k\sqrt{1+k^2}h^2.$$

如果像求圆锥体体积那样，在微小区间 $[x,x+\Delta x]$ 上对截圆半径 kx“以常

代变”，用小圆柱的侧面积作为 ΔS 的近似值，则有

$$\Delta S \approx 2\pi kx \cdot \Delta x,$$

于是

$$S = \int_0^h 2\pi kx\,\mathrm{d}x = \pi kh^2.$$

这显然是错误的.

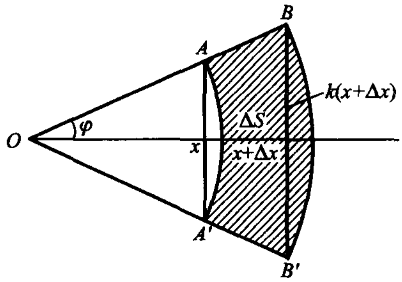


图 3-6

错误的原因在于这里“以常代变”所得到的 $2\pi kx\Delta x$ 并非侧面积函数 $S(x)$ 的微分. 换句话说，$2\pi kx\Delta x$ 尽管与 Δx 成线性关系，但它并非 ΔS 的等价无穷小，为揭示这一事实，将圆锥面沿某一母线剪开展平如图 3-6 所示. 易见

$$\begin{aligned}\Delta S &= \text{扇形}\, OBB' - \text{扇形}\, OAA' \\ &= \frac{1}{2}\overline{OB}^2 2\varphi - \frac{1}{2}\overline{OA}^2 2\varphi.\end{aligned}$$

由于

$$\tan\varphi = k, \sec\varphi = \sqrt{1+k^2},$$

故

$$\overline{OA} = x\sqrt{1+k^2}.$$

注意到圆弧 $\widehat{AA'}$ 是由过点 x 的截圆圆周展开得来，从而

$$\overline{OA}2\varphi = 2\pi kx,$$

于是

$$2\varphi = \frac{2\pi kx}{x\sqrt{1+k^2}} = \frac{2\pi k}{\sqrt{1+k^2}}.$$

故

$$\begin{aligned}\Delta S &= \frac{\pi k}{\sqrt{1+k^2}}\left\{\left[\sqrt{1+k^2}(x+\Delta x)\right]^2 - \left[\sqrt{1+k^2}x\right]^2\right\} \\ &= \pi k\sqrt{1+k^2}(2x\Delta x + \Delta x^2),\end{aligned} \tag{3-2}$$

所以

$$|\Delta S - 2\pi kx\Delta x| = 2\pi kx(\sqrt{1+k^2}-1)\Delta x + k\pi\sqrt{1+k^2}(\Delta x)^2,$$

可见当 $k \neq 0$ 时它不是 Δx 的高阶无穷小.

由(3-2)式可见，实际上 ΔS 的线性主部应该是 $2\pi k\sqrt{1+k^2}x\Delta x$，它才是 $S(x)$ 的微分. 从而

$$S = \int_0^h 2\pi k\sqrt{1+k^2}x\,\mathrm{d}x = \pi k\sqrt{1+k^2}h^2.$$

读者也许会产生如下的问题：容易看出在 $[x, x+\Delta x]$ 上的一段圆锥体是夹在分别以 x 点处和 $x+\Delta x$ 点处的截圆为底，高为 Δx 的两圆柱体之间，如图 3-7 所示. 因而似乎应有

$$2\pi kx\Delta x<\Delta S<2\pi k(x+\Delta x)\Delta x, \tag{3-3}$$

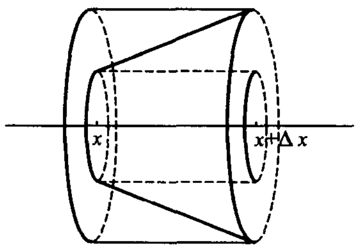


图 3-7

而由于

$$|2\pi k(x+\Delta x)\Delta x-2\pi kx\Delta x|=2\pi k(\Delta x)^2 =o(\Delta x),$$

从而

$$|\Delta S-2\pi kx\Delta x|<o(\Delta x).$$

这似乎表明 $2\pi kx\Delta x$ 也是 $S(x)$ 的微分.

其实(3-3)式是来自直观的错觉，事实上不难看出，当 $k\neq 0$，$|\Delta x|\ll 1$ 时，$\Delta S=\pi k\sqrt{1+k^2}(2x\Delta x+\Delta x^2)>2\pi k(x+\Delta x)\Delta x$.

(4) 微元法在建立微分方程中的应用

我们知道，求连续分布在区间$[a,b]$上可加量 F 的关键在于求函数 $F(x)$的微分，即求改变量 ΔF 的线性主部. 这一微分往往可以在微小区间$[x,x+\Delta x]$上通过恰当地选择与 F 相关的变量 f 且对它"以常代变"来得到，即

$$\Delta F\approx \mathrm{d}F=f(x)\Delta x.$$

从而

$$\frac{\Delta F}{\Delta x}\approx f(x) \quad 或 \quad \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta F}{\Delta x}=f(x).$$

所以，当在微小区间通过"以常代变"得到微分 $\mathrm{d}F=f(x)\mathrm{d}x$ 后，也可以通过

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}=f(x) \tag{3-4}$$

先求出其原函数 $F(x)$，再利用 Newton－Leibniz 公式求出 F. 实际上(3-4)式就是一个最简单的微分方程. 这种利用微元法来建立微分方程是建立微分方程中一种常用的重要方法，称为微元分析方法，也称微小增量法. 下面举例说明之.

例 3　设有一车间，其空间容积为 10 000 m³，空气中含有 0.12%的 CO_2(以容积计算)，现将含有 0.04% CO_2 的新鲜空气以 1 000 m³/min 的流量输入该车间，同时按 1 000 m³/min 的流量抽出车间内的混合空气. 向输入新鲜空气 10 min后，车间内 CO_2 的浓度下降到多少?

解　首先应用微元分析法来建立所需的微分方程. 要得知 10 min 后车间内 CO_2 浓度的下降数，关键在于求出此时刻车间内 CO_2 的含量. 设 t 时刻车间内 CO_2 的含量为 $x(t)$，考察微小时间区间$[t,t+\Delta t]$ 内 $x(t)$ 的变化. 显然，在 Δt 时间内 $x(t)$ 的改变量 Δx 是由于 Δt 时间内车间内空气中 CO_2 的输入和输出引起的. 因而有

$$\Delta x=CO_2\ 输入量-CO_2\ 输出量 \quad (\Delta t\ 时间内).$$

由于输入输出的空气量都是 1 000 m^3/min，故其中 CO_2 的含量取决于 CO_2 的浓度.

CO_2 的输入浓度是恒定的，容易算出 Δt 时间内 CO_2 的输入量为

$$\frac{0.04}{100}\cdot 1\,000\cdot \Delta t;$$

由于车间内空气与输入空气的不断混合，车间内 CO_2 的浓度随时间 t 连续变化，从而引起 CO_2 的输出量连续变化，这就是问题的困难所在. 利用微元法思想，在微小区间 $[t,t+\Delta t]$ 上对 CO_2 的浓度"以常代变"，都看作是 t 时刻的浓度 $x(t)$，于是可得在 Δt 时间内 CO_2 的输出量为 $\frac{x(t)}{10^4}\cdot 1\,000\cdot \Delta t$. 因此

$$\Delta x\approx\left(\frac{0.04}{10^2}\cdot 10^3-\frac{x(t)}{10^4}\cdot 10^3\right)\Delta t$$

两端同除以 Δt，再令 $\Delta t\to 0$ 取极限，得

$$\frac{dx}{dt}+\frac{x}{10}=\frac{4}{10}. \tag{3-5}$$

由所给条件易得初值条件为

$$x(0)=10^4\cdot 0.12\%=12. \tag{3-6}$$

容易求得方程(3－5)满足初始条件(3－6)的特解为

$$x(t)=8e^{-\frac{t}{10}}+4,$$

于是

$$x(10)=6.96,$$

从而此时车间内 CO_2 的浓度降到

$$\frac{6.96}{10\,000}=0.069\,6\%.$$

5. 不定积分的计算法

所谓函数 $f(x)$ 在区间 I 的不定积分，就是 $f(x)$ 在 I 中所有的原函数的一般表达式，即

$$\int f(x)dx=F(x)+C,\quad F'(x)=f(x),x\in I.$$

可见，求 $f(x)$ 的不定积分关键在于求其原函数，它是求导数的逆运算. 正如减法比加法困难，除法比乘法困难一样，作为逆运算的求不定积分要比求导数困难得多. 对求导数来说，我们只要牢记基本初等函数求导公式，正确地运用有理运算和复合运算等求导法则，任一初等函数的导数(除个别点外) 都可以"程序化" 地求得. 但是，对于求原函数或不定积分而言，尽管初等函数的原函数一定存在，但求原函数却没有导数中那样"程序化" 的方法. 甚而有些看来很简单的初等函数，它们的原函数却不可能用有限的解析形式表示(称无法积出)，例如 $\int\frac{\sin x}{x}dx,\int e^{x^2}dx,\int\frac{1}{x}e^x dx$ 等都无法积出.

正像减法和除法的运算规则是分别从加法和乘法的运算规则导出的那样，因为求原函数是求导的逆运算，求不定积分的规则也是从求导数的一些规则导出的.首先，基本积分表就是从基本导数表直接导出的；不定积分的线性运算性质也是导数线性运算性质的反映；不定积分运算中两个最重要的方法：换元积分法与分部积分法，正是分别从复合函数的求导公式和乘积的求导公式演变出来的.

求不定积分的基本思想方法是通过对积分 $\int f(x)\mathrm{d}x$ 中被积表达式 $f(x)\mathrm{d}x$ 的变换或变形，化难为易化繁为简，把难求的积分化为比较容易求的，最后归结为基本积分表中已有的积分，从而求得结果.因此读者必须首先熟记基本积分表中的积分公式.常用的化难为易方法除了应用线性性质和一些恒等变换以外，最主要的是灵活地运用换元积分法和分部积分法.《教材》对计算积分的要求也仅局限于这两个积分法的灵活运用.在换元积分法中用得更多的是第一换元法，即凑微分法.掌握凑微分法的关键在于熟记基本积分表中的积分，不断总结经验，善于从一些简单或典型的微分式 $f(x)\mathrm{d}x$ 看出它是什么函数的微分，即把 $f(x)\mathrm{d}x$ 写成 $\mathrm{d}F(x)$.

无论是换元积分法还是分部积分法都没有确定的计算程序可以遵循，下面是一些经验的归结，希望对读者解题有所帮助.①

(1) 第一换元法(凑微分法)

1° 凑常数：$\int f(ax+b)\mathrm{d}x=\frac{1}{a}\int f(ax+b)\mathrm{d}(ax+b)$.

例 1 $\int(1-2x)^{\frac{2}{3}}\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\int(1-2x)^{\frac{2}{3}}\mathrm{d}(1-2x)=-\frac{3}{10}(1-2x)^{\frac{5}{3}}+C.$

有时，先利用恒等变换将被积函数的分母变为基本积分表中的相关形式，再凑常数.

例 2
$$\begin{aligned}I&=\int\frac{\mathrm{d}x}{(\cos 3x+\sin 3x)^2}\\&=\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}x}{\left(\cos 3x\sin\frac{\pi}{4}+\sin 3x\cos\frac{\pi}{4}\right)^2}=\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}x}{\sin^2\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)}\\&=\frac{1}{6}\int\frac{\mathrm{d}\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)}{\sin^2\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)}=-\frac{1}{6}\cot\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)+C.\end{aligned}$$

2° 凑幂函数：$\int f(x^n)x^{n-1}\mathrm{d}x=\frac{1}{n}\int f(x^n)\mathrm{d}x^n$.

① 遵照“教学基本要求”，这里我们不考虑不定积分的存在区间.

例 3 $\int x^2\sqrt{4-3x^3}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\int\sqrt{4-3x^2}\,\mathrm{d}x^3=-\frac{1}{9}\int\sqrt{4-3x^2}\,\mathrm{d}(4-3x^2)$

$$=\frac{-2}{27}(4-3x^2)^{\frac{3}{2}}+C.$$

利用恒等变形和将因式拆开是一常用的技巧.

例 4 $I=\int\frac{\mathrm{d}x}{x(1+x^4)}$

$$=\int\frac{x^3\,\mathrm{d}x}{x^4(1+x^4)}=\frac{1}{4}\int\frac{1}{x^4(1+x^4)}\mathrm{d}x^4=\frac{1}{4}\int\frac{1+x^4-x^4}{x^4(1+x^4)}\mathrm{d}x^4$$

$$=\frac{1}{4}\left[\int\frac{\mathrm{d}x^4}{x^4}-\int\frac{\mathrm{d}x^4}{1+x^4}\right]=\frac{1}{4}[\ln x^4-\ln(1+x^4)]=\frac{1}{4}\ln\frac{x^4}{1+x^4}+C.$$

熟记下面两个公式在观察如何凑幂函数时常会有所帮助.

$$\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x=-\mathrm{d}\left(\frac{1}{x}\right),\quad\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}=2\mathrm{d}\sqrt{x}.$$

例 5 $\int\frac{a^{2+\frac{1}{x}}}{x^2}\mathrm{d}x=-a^2\int a^{\frac{1}{x}}\mathrm{d}\,\frac{1}{x}=-a^2\,\frac{a^{\frac{1}{x}}}{\ln a}+C.$

例 6 $\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x(1-x)}}=2\int\frac{\mathrm{d}\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}=2\int\frac{\mathrm{d}\sqrt{x}}{\sqrt{1-\sqrt{x}^2}}=2\arcsin\sqrt{x}+C.$

3° 凑三角函数：$\int f(\sin x)\cos x\,\mathrm{d}x=\int f(\sin x)\mathrm{d}\sin x$，

$$\int f(\cos x)\sin x\,\mathrm{d}x=-\int f(\cos x)\mathrm{d}\cos x,$$

$$\int f(\tan x)\,\frac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x=\int f(\tan x)\mathrm{d}\tan x,$$

$$\int f(\arcsin x)\,\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x=\int f(\arcsin x)\mathrm{d}\arcsin x,$$

$$\int f(\arctan x)\,\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}=\int f(\arctan x)\mathrm{d}\arctan x\text{ 等.}$$

例 7 $\int\sin^5 x\,\mathrm{d}x=-\int(1-\cos^2 x)^2\,\mathrm{d}\cos x=-\int(1-2\cos^2 x+\cos^4 x)\mathrm{d}\cos x$

$$=-\cos x+\frac{2}{3}\cos^3 x-\frac{1}{5}\cos^5 x+C.$$

将三角恒等式变换与凑三角函数的微分相结合是常用的技巧.

例 8 $\int\tan^5 x\sec^3 x\,\mathrm{d}x=\int\tan^4 x\sec^2 x\,\mathrm{d}\sec x=\int(\sec^2 x-1)^2\sec^2 x\,\mathrm{d}\sec x$

$$=\frac{1}{7}\sec^7 x-\frac{2}{5}\sec^5 x+\frac{1}{3}\sec^3 x+C.$$

例 9 $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{\sin 2x+2\sin x}=\int\frac{\mathrm{d}x}{2\sin x(\cos x+1)}=\frac{1}{4}\int\frac{\mathrm{d}x}{\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\cdot 2\cos^2\frac{x}{2}}$

$$=\frac{1}{4}\int\frac{\mathrm{d}\,\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}\cos^3\frac{x}{2}}=\frac{1}{4}\int\frac{\mathrm{d}\tan\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}$$

$$=\frac{1}{4}\int\frac{\mathrm{d}\tan\frac{x}{2}}{\tan\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}}$$

$$=\frac{1}{4}\int\frac{1+\tan^2\frac{x}{2}}{\tan\frac{x}{2}}\mathrm{d}\tan\frac{x}{2}=\frac{1}{4}\left(\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|+\frac{1}{2}\tan^2\frac{x}{2}\right)+C.$$

例 10 $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{1+\sin x}=\int\frac{(1-\sin x)}{(1+\sin x)(1-\sin x)}\mathrm{d}x=\int\frac{1-\sin x}{\cos^2 x}\mathrm{d}x$

$$=\int\sec^2 x\mathrm{d}x+\int\frac{\mathrm{d}\cos x}{\cos^2 x}=\tan x-\frac{1}{\cos x}+C.$$

凑微分法还有一些常用技巧，例如$\int f(\mathrm{e}^x)\mathrm{e}^x\mathrm{d}x=\int f(\mathrm{e}^x)\mathrm{d}\mathrm{e}^x$，$\int f(\ln x)\,\frac{1}{x}\mathrm{d}x=\int f(\ln x)\mathrm{d}\ln x$等. 总之是设法从被积函数中分出一部分与 $\mathrm{d}x$ 结合凑成某一需要函数的微分，再结合一些恒等变形，化繁为简，向基本积分表中已有公式靠拢.

(2) 第二换元法

当不定积分的被积函数含有根式而又不能通过基本积分表中的积分公式直接得出时，常用的方法是设法消去根式.

1° 根式中为二次多项式情形. 常用三角函数变换或双曲函数变换

$$\int f(\sqrt{a^2-x^2})\mathrm{d}x,\text{令 } x=a\sin t \text{ 或 } x=a\cos t;$$

$$\int f(\sqrt{x^2-a^2})\mathrm{d}x,\text{令 } x=a\sec t,\text{或 } x=a\,\mathrm{ch}\,t;$$

$$\int f(\sqrt{a^2+x^2})\mathrm{d}x,\text{令 } x=a\tan t,\text{或 } x=a\,\mathrm{sh}\,t.$$

例 11 $\displaystyle\int\frac{x}{(1-x^4)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}x^2}{(1-(x^2)^2)^{\frac{3}{2}}}\xlongequal{x^2=\sin t}\frac{1}{2}\int\frac{\cos t\mathrm{d}t}{\cos^3 t}$

$$=\frac{1}{2}\tan t+C=\frac{1}{2}\,\frac{x^2}{\sqrt{1-x^4}}+C.$$

当根式内是二次三项式时，可先配方再换元.

例 12 $\int \frac{\sqrt{x^2+2x+3}}{(x+1)}dx$

$$=\int \frac{\sqrt{(x+1)^2+2}}{(x+1)}d(x+1) \xlongequal{x+1=\sqrt{2}\tan t} \int \frac{\sqrt{2}\sec t}{\sqrt{2}\tan t}\sqrt{2}\sec^2 t\mathrm{d}t$$

$$=\sqrt{2}\int \frac{\mathrm{d}t}{\cos^2 t\sin t}=\sqrt{2}\int \frac{\sin t\mathrm{d}t}{\cos^2 t\sin^2 t}=-\sqrt{2}\int \frac{\mathrm{d}\cos t}{\cos^2 t(1-\cos^2 t)}$$

$$=-\sqrt{2}\int \frac{1-\cos^2 t+\cos^2 t}{\cos^2 t(1-\cos^2 t)}\mathrm{d}\cos t=-\sqrt{2}\left(\int \frac{\mathrm{d}\cos t}{\cos^2 t}+\int \frac{\mathrm{d}\cos t}{1-\cos^2 t}\right)$$

$$=\sqrt{2}\frac{1}{\cos t}-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-\cos t}{1+\cos t}\right|+C$$

$$=\sqrt{x^2+2x+3}-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-\sqrt{\frac{2}{x^2+2x+3}}}{1+\sqrt{\frac{2}{x^2+2x+3}}}\right|+C$$

$$=\sqrt{x^2+2x+3}-\ln\left|\frac{\sqrt{x^2+2x+3}-\sqrt{2}}{x+1}\right|+C.$$

当被积函数的分母中的根式$\sqrt{ax^2+bx+c}$外有因子x时,可先作变换$x=\frac{1}{t}$(称为倒置变换),再配方用三角函数变换可以简化计算.

例 13 $\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{3x^2-2x+1}} \xlongequal{x=\frac{1}{t}} \int \frac{-\frac{1}{t^2}\mathrm{d}t}{\frac{1}{t}\sqrt{\frac{3}{t^2}-\frac{2}{t}+1}}=-\int \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{3-2t+t^2}}$

$$=-\int \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{2+(t-1)^2}} \xlongequal{t-1=\sqrt{2}\tan u} -\int \sec u\mathrm{d}u=-\ln|\sec u+\tan u|+C$$

$$=-\ln\left|\frac{\sqrt{2+(t-1)^2}}{\sqrt{2}}+\frac{t-1}{\sqrt{2}}\right|+C=-\ln\left|\frac{\sqrt{3x^2-2x+1}}{2x^2}+\frac{1-x}{\sqrt{2}x}\right|+C.$$

2° 根式中为一次式或一次有理分式情形.常可直接令此根式为另一变量而将积分简化.

例 14 $\int \frac{\mathrm{d}x}{x(1+\sqrt{x})} \xlongequal[x=t^2]{\sqrt{x}=t} \int \frac{2t\mathrm{d}t}{t^2(1+t)}=2\int \frac{\mathrm{d}t}{t(1+t)}$

$$=2\int \frac{1}{t}\mathrm{d}t-2\int \frac{1}{1+t}\mathrm{d}t=2\ln\frac{t}{1+t}+C.$$

例 15 $\int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{1+x}{x}}\mathrm{d}x \xlongequal[x=\frac{1}{t^2-1}]{\sqrt{\frac{1+x}{x}}=t} \int (t^2-1)t\cdot\frac{-2t}{(t^2-1)^2}\mathrm{d}t=-2\int \frac{t^2}{t^2-1}\mathrm{d}t$

$$=-2\int\left(1+\frac{1}{t^2-1}\right)\mathrm{d}t=-2t-\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+C.$$

$$=-2\sqrt{\frac{1+x}{x}}+2\ln\left(\sqrt{\frac{1+x}{x}}+1\right)+\ln|x|+C.$$

(3) 分部积分法

使用分部积分法的关键在于善于从 $f(x)$ 中分出因子凑入 $\mathrm{d}x$ 中将 $\int f(x)\mathrm{d}x$ 写成 $\int u(x)\mathrm{d}v(x)$ 的形式，然后运用公式

$$\int u\mathrm{d}v=uv-\int v\mathrm{d}u,$$

使积分 $\int v\mathrm{d}u$ 较 $\int u\mathrm{d}v$ 容易积出. 有时需要反复使用分部积分. 常见的情形有

1° 多项式 $P_m(x)$ 与三角函数或指数函数或对数函数或反三角函数乘积的积分. 如

$\int P_m(x)\sin ax\mathrm{d}x=\frac{-1}{a}\int P_m(x)\mathrm{d}\cos ax$，分部积分可降低 $P_m(x)$ 的次数 m；

$\int P_m(x)\mathrm{e}^{ax}\mathrm{d}x=\frac{1}{a}\int P_m(x)\mathrm{d}\mathrm{e}^{ax}$；

$\int P_m(x)\ln ax\mathrm{d}x=\int\ln ax\mathrm{d}P_{m+1}(x)$，分部积分后可消去 $\ln ax$，其中 $P_{m+1}(x)$ 是 $P_m(x)$ 的一个原函数；

$\int P_m(x)\arctan x\mathrm{d}x=\int\arctan x\mathrm{d}P_{m+1}(x)$；

$\int P_m(x)\arcsin x\mathrm{d}x=\int\arcsin x\mathrm{d}P_{m+1}(x)$.

例 16 $\int(x^2+1)\cos x\mathrm{d}x=\int(x^2+1)\mathrm{d}\sin x=(x^2+1)\sin x-\int\sin x\cdot 2x\mathrm{d}x$

$$=(x^2+1)\sin x+2\int x\mathrm{d}\cos x=(x^2+1)\sin x+2\left(x\cos x-\int\cos x\mathrm{d}x\right)$$

$$=(x^2+1)\sin x+2x\cos x-2\sin x+C$$

例 17 $I=\int x\arctan x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int\arctan x\mathrm{d}x^2=\frac{1}{2}\left(x^2\arctan x-\int\frac{x^2}{1+x^2}\mathrm{d}x\right)$

$$\int\frac{x^2}{1+x^2}\mathrm{d}x=\int\frac{1+x^2-1}{1+x^2}\mathrm{d}x=\int\mathrm{d}x-\int\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}=x-\arctan x+C,$$

故
$$I=\frac{1}{2}x^2\arctan x+\frac{1}{2}\arctan x-\frac{1}{2}x+C.$$

2° 将分部积分法与两种换元积分法配合使用.

例 18 $\int \frac{x^2\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^2} = \frac{1}{2}\int \frac{x\mathrm{d}x^2}{(x^2+a^2)^2} = -\frac{1}{2}\int x\mathrm{d}\left(\frac{1}{x^2+a^2}\right)$

$$= -\frac{1}{2}\frac{x}{x^2+a^2} + \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+a^2} = -\frac{1}{2}\frac{x}{x^2+a^2} + \frac{1}{2a}\arctan\frac{x}{a} + C.$$

例 19 $I = \int \frac{x\mathrm{e}^x}{\sqrt{\mathrm{e}^x-1}}\mathrm{d}x = \int \frac{x\mathrm{d}(\mathrm{e}^x-1)}{\sqrt{\mathrm{e}^x-1}} = 2\int x\mathrm{d}\sqrt{\mathrm{e}^x-1}$

$$= 2x\sqrt{\mathrm{e}^x-1} - 2\int \sqrt{\mathrm{e}^x-1}\,\mathrm{d}x,$$

$$\int \sqrt{\mathrm{e}^x-1}\,\mathrm{d}x \xlongequal[x=\ln(1+t^2)]{\sqrt{\mathrm{e}^x-1}=t} 2\int \frac{t^2}{1+t^2}\mathrm{d}t = 2\left(\int \mathrm{d}t - \int \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}\right) = 2t - 2\arctan t + C$$

$$= 2\sqrt{\mathrm{e}^x-1} - 2\arctan\sqrt{\mathrm{e}^x-1} + C,$$

故 $$I = 2x\sqrt{\mathrm{e}^x-1} - 4\left(\sqrt{\mathrm{e}^x-1} - \arctan\sqrt{\mathrm{e}^x-1}\right) + C.$$

此题也可先用第二换元法再分部积分.

$$I \xlongequal[x=\ln(1+t^2)]{\sqrt{\mathrm{e}^x-1}=t} \int \frac{\ln(1+t^2)(1+t^2)}{t}\frac{2t}{1+t^2}\mathrm{d}t = 2\int \ln(1+t^2)\mathrm{d}t$$

$$= 2\left(t\ln(1+t^2) - \int \frac{t}{1+t^2}\cdot 2t\mathrm{d}t\right)$$

$$= 2t\ln(1+t^2) - 4\left(\int \mathrm{d}t - \int \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}\right) = 2t\ln(1+t^2) - 4(t - \arctan t) + C$$

$$= 2x\sqrt{\mathrm{e}^x-1} - 4\left(\sqrt{\mathrm{e}^x-1} - \arctan\sqrt{\mathrm{e}^x-1}\right) + C.$$

3° 通过分部积分将所求不定积分从方程中解出.

例 20 $\int \sec^3 x\mathrm{d}x = \int \sec x\mathrm{d}\tan x = \sec x\tan x - \int \tan^2 x\sec x\mathrm{d}x$

$$= \sec x\tan x - \int (\sec^3 x - \sec x)\mathrm{d}x$$

$$= \sec x\tan x - \int \sec^3 x\mathrm{d}x + \ln|\sec x + \tan x|,$$

故 $$\int \sec^3 x\mathrm{d}x = \frac{1}{2}(\sec x\tan x + \ln|\sec x + \tan x|) + C.$$

读者也许会感到迷惑，在最后的等式中 C 从哪里出来的. 事实上，分析分部积分公式：$\int u\mathrm{d}v = uv - \int v\mathrm{d}u$ 的导出可知，由于

$$\mathrm{d}(uv) = u\mathrm{d}v - v\mathrm{d}u,$$

从而 $$\int u\mathrm{d}v = \int \mathrm{d}(uv) - \int v\mathrm{d}u = (uv + C) - \int v\mathrm{d}u.$$

可见在分部积分公式中右端第一项中本应含有任意常数，我们把它保留而并入了积分 $\int v\mathrm{d}u$ 的任意常数中. 现在由于积分 $\int v\mathrm{d}u$ 变形后被移入等式左端，故原

保留的任意常数应明确地写出. 此外,从积分$\int \sec x\mathrm{d}x$中也应出现任意常数.

例 21
$$\int \sin(\ln x)\mathrm{d}x = x\sin(\ln x) - \int x\cos(\ln x)\frac{1}{x}\mathrm{d}x$$
$$= x\sin(\ln x) - x\cos(\ln x) - \int x\sin(\ln x)\frac{1}{x}\mathrm{d}x,$$

故
$$\int \sin(\ln x)\mathrm{d}x = \frac{x}{2}[\sin(\ln x) - \cos(\ln x)] + C.$$

(4) 分段表示的连续函数的不定积分

对于分段表示的连续函数,其不定积分可以分段求出,但由于它是连续函数,其原函数当然是连续的. 因而有时需要在分段点处调节常数值,使原函数在分段点连续(此时也必可导)

例 22 设
$$f(x)\begin{cases} 1, & -\infty < x < 0, \\ x+1, & 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ 2x, & 1 < x < +\infty, \end{cases}$$

则
$$F(x) = \int f(x)\mathrm{d}x = \begin{cases} x + C_1, & -\infty < x < 0, \\ \frac{1}{2}x^2 + x + C_2, & 0 < x < 1, \\ x^2 + C_3, & 1 < x < +\infty. \end{cases}$$

为了保证原函数在分段点的连续性,要求
$$\lim_{x\to 0^-} F(x) = C_1, \quad \lim_{x\to 0^+} F(x) = C_2 \text{ 满足 } C_1 = C_2,$$

而且
$$\lim_{x\to 1^-} F(x) = \frac{3}{2} + C_2, \quad \lim_{x\to 1^+} F(x) = 1 + C_3 \text{ 满足 } \frac{3}{2} + C_2 = 1 + C_3.$$

故须有
$$C_1 = C_2 = C, \quad C_3 = \frac{1}{2} + C.$$

所以
$$\int f(x)\mathrm{d}x = \begin{cases} x + C, & -\infty < x < 0, \\ \frac{1}{2}x^2 + x + C, & 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ x^2 + \frac{1}{2} + C, & 1 < x < +\infty. \end{cases}$$

容易验证$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int f(x)\mathrm{d}x = f(x), -\infty < x < +\infty$. 特别是在$x=1$点$\int f(x)\mathrm{d}x$可导且导数为 2.

顺便指出,在本题中,$f(x)$在分段点虽连续但却是不光滑的,然而积分

$\int f(x)\mathrm{d}x$ 却处处光滑. 可见,积分运算可提高函数所表示曲线的光滑性.

例 23　$I=\int(1+|x|)^2\mathrm{d}x=\int(1+2|x|+x^2)\mathrm{d}x=x+\frac{1}{3}x^3+2\int|x|\mathrm{d}x$,

由于

$$|x|=\begin{cases}x, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -x, & x<0\end{cases}=x\operatorname{sgn}x,$$

$$\int|x|\mathrm{d}x=\begin{cases}\frac{1}{2}x^2+C, & x>0,\\ C, & x=0,\\ -\frac{1}{2}x^2+C, & x<0\end{cases}=\frac{1}{2}x^2\operatorname{sgn}x+C.$$

故

$$I=x+\frac{1}{3}x^3+x^2\operatorname{sgn}x+C=x+\frac{1}{3}x^3+|x|x+C.$$

最后,我们指出,对于一些不定积分,常可用几种不同的方法去计算,读者在计算之前应加以思考,选择简单的方法. 有时由于方法不同,算得的结果表面上看来颇有差异. 实际上从理论上讲,只要没有算错,它们都可通过恒等变形后变成一致,最多相差一个常数. 由于变形过程有时并不容易,读者只要确信自己计算正确,不必去追求答案形式上的一致.

例 24　$I=\int\frac{\sin x}{\sin x+\cos x}\mathrm{d}x$.

解法一　$I=\int\frac{\tan x}{1+\tan x}\mathrm{d}x\xlongequal{\tan x=t}\int\frac{t}{1+t}\,\frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t$;

解法二　$I=\int\frac{1}{1+\cot x}\mathrm{d}x\xlongequal{\cot x=t}-\int\frac{1}{1+t}\,\frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t$;

解法三　$I=\int\frac{\sin x(\cos x-\sin x)}{\cos^2x-\sin^2x}\mathrm{d}x=\int\frac{\frac{1}{2}\sin 2x-\sin^2x}{\cos 2x}\mathrm{d}x$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{\sin 2x}{\cos 2x}\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\int\frac{1-\cos 2x}{\cos 2x}\mathrm{d}x;$$

解法四　$I=\int\frac{\sin x(\cos x-\sin x)}{\cos^2x-\sin^2x}\mathrm{d}x=\int\frac{\sin x\cos x}{2\cos^2x-1}\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\int\frac{1-\cos 2x}{\cos 2x}\mathrm{d}x$

$$=-\frac{1}{4}\int\frac{\mathrm{d}(2\cos^2x-1)}{2\cos^2x-1}-\frac{1}{2}\int\sec 2x\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int\mathrm{d}x;$$

解法五　$I=\int\frac{\sin x-\cos x+\cos x}{\sin x+\cos x}=-\int\frac{\mathrm{d}(\cos x+\sin x)}{\cos x+\sin x}+$

$$\int\frac{\cos x+\sin x-\sin x}{\cos x+\sin x}\mathrm{d}x$$

$$=-\ln|\cos x+\sin x|+x-I,$$

故
$$I=\frac{1}{2}(-\ln|\cos x+\sin x|+x)+C.$$

解法六　$I=\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{\sin x}{\cos x\cos\frac{\pi}{4}+\sin x\sin\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}x=\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{\sin x}{\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}\mathrm{d}x$

$$\xlongequal{x-\frac{\pi}{4}=t}\frac{1}{2}\int\frac{\sin t+\cos t}{\cos t}\mathrm{d}t;$$

解法七　$I=\int\frac{\sin\left(x+\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}=\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}{\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}\mathrm{d}x$

$$=\frac{1}{2}\left[x-\ln\left|\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right|\right]+C.$$

还可以有其他方法，例如作变换 $\tan\frac{x}{2}=t$ 等.

6. 定积分的计算法

对于给定的定积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$，$f\in C[a,b]$，一般说来，当然可以先计算相应的不定积分 $\int f(x)\mathrm{d}x=F(x)+C$，然后利用 Newton - Leibniz 公式求得 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=F(x)\Big|_a^b$. 然而当不定积分的计算需要利用第二换元法 $x=\varphi(t)$ 时，在求出变换后关于积分变量 t 的不定积分后，还必须通过反变换 $t=\varphi^{-1}(x)$ 将其变回为 x 的函数，再用 Newton - Leibniz 公式，这时是比较麻烦的. 若应用定积分的换元法，则正如问题 3 所指出那样，无需去求 $x=\varphi(t)$ 的反函数 $t=\varphi^{-1}(x)$，而直接使用换元公式：

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)\mathrm{d}t.$$

只要 $x=\varphi(t)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 有连续的导数，$R(\varphi)\subseteq D(f)$ 且 $\varphi(\alpha)=a$，$\varphi(\beta)=b$，即可. 这样简化了计算.

应当指出，计算不定积分时，我们可以对积分区间不作要求，因而对开方所得的量，一般也不要求添加绝对值，但对于定积分，则必须注意积分区间，因而开方所得的量应首先加上绝对值，再由积分区间确定其正负号以保证其值非负.

例 1　计算定积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\sin 2x}\mathrm{d}x$.

解　$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\sin 2x}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{(\sin x-\cos x)^2}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}|\sin x-\cos x|\mathrm{d}x$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\cos x-\sin x)\mathrm{d}x+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}(\sin x-\cos x)\mathrm{d}x=2(\sqrt{2}-1),$$

如果不注意积分区间，而如下计算，将导致错误的结论.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\sin 2x}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{(\sin x-\cos x)^2}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin x-\cos x)\mathrm{d}x$$

$$=-(\cos x+\sin x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=0.$$

应用定积分的换元法，我们可以证明一些对理论研究和简化定积分计算都颇有用处的恒等式，例如：

1° 若 $f(x)$ 在区间 $[-a,a]$ 上连续，则

$$\int_{-a}^{a}f(x)\mathrm{d}x=\int_0^a[f(x)+f(-x)]\mathrm{d}x.$$

证 $\displaystyle\int_{-a}^{a}f(x)\mathrm{d}x=\int_{-a}^{0}f(x)\mathrm{d}x+\int_0^a f(x)\mathrm{d}x,$

而 $\displaystyle\int_{-a}^{0}f(x)\mathrm{d}x\xlongequal{x=-t}-\int_a^0 f(-t)\mathrm{d}t=\int_0^a f(-t)\mathrm{d}t=\int_0^a f(-x)\mathrm{d}x,$

代入上式即得原等式.

作为特例，容易得出

2° $$\int_{-a}^{a}f(x)\mathrm{d}x=\begin{cases}2\displaystyle\int_0^a f(x)\mathrm{d}x, & \text{当 } f(x) \text{ 为偶函数；}\\ 0, & \text{当 } f(x) \text{ 为奇函数.}\end{cases}$$

3° 若 $f(x)$ 是周期为 T 的连续周期函数，则

$$\int_a^{a+T}f(x)\mathrm{d}x=\int_0^T f(x)\mathrm{d}x.$$

证 首先将积分 $\displaystyle\int_0^T f(x)\mathrm{d}x$ 从积分 $\displaystyle\int_a^{a+T}f(x)\mathrm{d}x$ 中分离出来，我们有

$$\int_a^{a+T}f(x)\mathrm{d}x=\int_a^0 f(x)\mathrm{d}x+\int_0^T f(x)\mathrm{d}x+\int_T^{a+T}f(x)\mathrm{d}x\ .$$

欲证明原等式，只需证明

$$\int_T^{a+T}f(x)\mathrm{d}x=\int_0^a f(x)\mathrm{d}x$$

即可，事实上，

$$\int_T^{a+T}f(x)\mathrm{d}x\xlongequal{x=t+T}\int_0^a f(t+T)\mathrm{d}t=\int_0^a f(t)\mathrm{d}t=\int_0^a f(x)\mathrm{d}x,$$

所以原式得证.

由 3°不难证明.

4° 若 $f(x)$ 的周期为 T，则

$$\int_a^{a+nT}f(x)\mathrm{d}x=n\int_0^T f(x)\mathrm{d}x.$$

《教材》第三章例 3.11 与例 3.12，利用变换 $x=\frac{\pi}{2}-t$ 与 $x=\pi-t$ 分别证明了

5° $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,dx$ （n 为正整数）.

6° $\int_0^{\pi} xf(\sin x)dx=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)dx, f\in C.$

类似地利用适当的简单变换可以证明

7° $\int_0^{\pi} f(\sin x)dx=2\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx=2\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)dx, f\in C.$

8° $\int_0^{a} f(x)dx=\int_0^{a} f(a-x)dx, f\in C.$

《教材》在例 3.20 利用定积分的分部积分法导出公式.

9° $$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx=\begin{cases}\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdot\cdots\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}, & \text{当 } n \text{ 为偶数},\\ \frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdot\cdots\cdot\frac{2}{3}, & \text{当 } n \text{ 为奇数}.\end{cases}$$

灵活地运用以上恒等式，常可使定积分的计算简化.

例 2　计算定积分 $\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin^4 x}{1+e^{-x}}dx$.

解　由上述恒等式 1°知

$$\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin^4 x}{1+e^{-x}}dx=\int_0^{\pi}\left[\frac{\sin^4 x}{1+e^{-x}}+\frac{\sin^4(-x)}{1+e^{x}}\right]dx$$

$$=\int_0^{\pi}\sin^4 x\left(\frac{e^x}{1+e^x}+\frac{1}{1+e^x}\right)dx=\int_0^{\pi}\sin^4 x\,dx,$$

为了利用恒等式 9°，变形积分

$$\int_0^{\pi}\sin^4 x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 x\,dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin^4 x\,dx,$$

对右端第二个积分作变换 $x=t+\frac{\pi}{2}$，得

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin^4 x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4\left(t+\frac{\pi}{2}\right)dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 t\,dt,$$

由恒等式 5°，再利用恒等式 9°可求得

$$\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin^4 x}{1+e^{-x}}dx=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 x\,dx=2\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{3}{8}\pi.$$

例 3　计算积分 $\int_{3\pi}^{5\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx$.

解　由于被积函数形如 $xf(\sin x)$，为了应用恒等式 6°，先将积分区间化为

$[-\pi,\pi]$. 为此令 $x=t+4\pi$，得

$$\int_{3\pi}^{5\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{(t+4\pi)\sin t}{1+\cos^2 t}\mathrm{d}t$$
$$=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{t\sin t}{1+\cos^2 t}\mathrm{d}t+4\pi\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin t}{1+\cos^2 t}\mathrm{d}t.$$

注意到前一积分中的被积函数是偶函数，而后一积分中的被积函数是奇函数，从而

$$\int_{3\pi}^{5\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x=2\int_{0}^{\pi}\frac{t\sin t}{1+\cos^2 t}\mathrm{d}t=2\cdot\frac{\pi}{2}\int_{0}^{\pi}\frac{\sin t}{1+\cos^2 t}\mathrm{d}t$$
$$\xlongequal{\cos t=u}-\pi\int_{1}^{-1}\frac{\mathrm{d}u}{1+u^2}=\frac{\pi^2}{2}.$$

例 4 设 $f(x)=\int_{\pi}^{x}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$，求 $\int_{0}^{\pi}f(x)\mathrm{d}x$.

解 我们知道不定积分 $\int\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$ 虽然存在，但却不能用初等函数表示. 应用定积分的分部积分法，可得

$$\int_{0}^{\pi}f(x)\mathrm{d}x=xf(x)\Big|_{0}^{\pi}-\int_{0}^{\pi}xf'(x)\mathrm{d}x,$$

注意到
$$f(\pi)=\int_{\pi}^{\pi}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t=0,\quad f'(x)=\frac{\sin x}{x},$$

于是

$$\int_{0}^{\pi}f(x)\mathrm{d}x=-\int_{0}^{\pi}\sin x\mathrm{d}x=-2.$$

7. 关于微分方程的概念

微分方程是研究事物运动变化规律时，沟通数学和实际问题之间的一座重要桥梁. 随着科学技术向高、精、尖发展，数学的应用日益广泛深入，要用数学的方法去研究和解决其他科学和工程技术中的问题，首先必须根据相关问题的内在特性和规律来建立数学模型. 对于其中相当广泛的一类问题，特别是与动力学相关的问题，它们的数学模型通常与变化率有关，反映在数学上常是含有导数或微分的方程——微分方程. 实际上求不定积分 $\int f(x)\mathrm{d}x$ 就是求解最简单的微分方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x)$.

给定一个一阶微分方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x,y),\quad f\in C(D),\quad D\subseteq\mathbf{R}^2.\tag{3-7}$$

对于平面区域 D 内任一点 (x,y)，确定唯一的函数值 $f(x,y)$，也就是确定了唯

一的斜率$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$,或方位,因此给定了微分方程(3－7)在几何上就在 D 内给定了一个方位场(也叫线索场)如图 3－8 所示.求此微分方程的解,就是求这样的函数 $y=\varphi(x)$,它表示的曲线过 D 内每一点 (x,y)时,其切线与方位场在此点所确定的方位吻合.显然这样的曲线 $y=\varphi(x)$ 有无数条,它们随所通过的点(x,y)的不同而不同,构成一曲线族,称为积分曲线族.这就是通解的几何意义.初值条件 $y|_{x=x_0}=y_0$ 表示区域 D 内的一定点(x_0,y_0),因而求满足此初值条件的特解就是从这一曲线族中找出通过点(x_0,y_0)的那条特定的曲线.

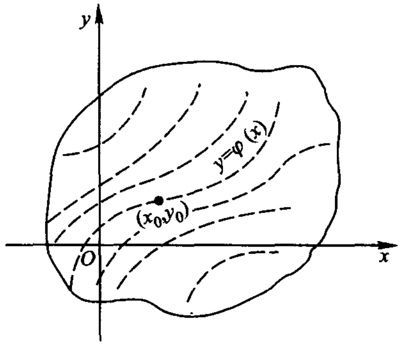


图 3－8

一般来说,含有未知函数导数的方程称微分方程,它的一般形式为

$$F(x,y,y',\cdots,y^{(n)})=0,$$

其中导数出现的最高阶数称为此微分方程的阶.本书局限于研究最高阶导数能解出的那些微分方程:

$$y^{(n)}=f(x,y,y',\cdots,y^{(n-1)})\quad(n\geqslant 1).\tag{3-8}$$

它的通解定义为含有相互独立的 n 个任意常数的解,即这样的函数 $y=\varphi(x,C_1,C_2,\cdots,C_n)$,它所含的 n 个任意常数不能合并,而且将它代入(3－8)式的两端,将使(3－8)式成为一恒等式.为了确定这 n 个常数来得到所需特解的初值条件,应有 n 个条件构成:

$$y\big|_{x=x_0}=y_0,y'\big|_{x=x_0}=y_1,\cdots,y^{(n-1)}\big|_{x=x_0}=y_{n-1}.$$

应当指出,即使对于一阶微分方程(3－7),它的通解一般而言并不一定包含了它的全部解.例如《教材》第三章例 6.7 所讨论的方程 $x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-y=2\sqrt{xy}$,即 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y}{x}+2\sqrt{\frac{y}{x}},(x,y)\in D=\left\{(x,y)\,\middle|\,\begin{smallmatrix}xy\geqslant 0,\\ x\neq 0\end{smallmatrix}\right\}$,其通解为 $\mathrm{e}^{\sqrt{\frac{y}{x}}}=Cx$.然而由方程直接可见,$y=0$ 显然满足方程,故也是它的一个解,但是 $y=0$ 这个解不能包含在通解中,换句话说在通解中不可能选择 C 的值来得到解 $y=0$.有时我们把通解 $\mathrm{e}^{\sqrt{\frac{y}{x}}}=Cx$ 或 $y=x\ln^2(Cx)$与解 $y=0$ 一道称为此微分方程的全部解.因为过域$D=\left\{(x,y)\,\middle|\,\begin{smallmatrix}xy\geqslant 0,\\ x\neq 0\end{smallmatrix}\right\}$内任一点的解,都可以由 $y=0$ 或通解 $\mathrm{e}^{\sqrt{\frac{y}{x}}}=Cx$ 中适当选择常数 C 得到.

还应注意，有时我们求得的通解并未包括全部解，但是如果扩大任意常数的取值范围，便可包括全部解. 这时通解应理解为包含着扩大了取值范围的任意常数的解. 例如，《教材》例 6－3 所讨论的微分方程$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=2xy$在分离变量时，我们须假定 $y\neq 0$，求得的通解

$$y=\pm \mathrm{e}^{C_1}\mathrm{e}^{x^2}=C\mathrm{e}^{x^2},$$

其中 $C=\pm\mathrm{e}^{C_1}$ 显然不会为零，然而 $y=0$ 也是原方程的一个解. 它虽没有包括在通解 $y=C\mathrm{e}^{x^2}$ 中，但是如果允许 $C=0$，则 $y=0$ 也就包括在其中了. 这时，通常把其通解理解为

$$y=C\mathrm{e}^{x^2}\quad (C\text{ 为包括零在内的任意常数}).$$

8. 一阶微分方程的求法

一阶微分方程中最基本、最重要的类型是变量可分离方程与线性方程. 前者是求解许多微分方程的基础，不少微分方程都是通过变换，最后化成变量可分离方程；线性微分方程之所以重要，是它经常出现在其他科学技术的研究中.

一阶线性齐次方程：$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+f(x)y=0$ 就是一个很简单的变量可分离的方程，它的通解可以直接分离变量得出，一阶非齐次线性方程的通解等于它的一个特解与它所对应的齐次方程通解之和. 这一通解的结构是线性微分方程所特有的，它不仅对一阶方程成立，而且今后我们还将看到，它对高阶线性微分方程与线性微分方程组也成立. 根据这一结构，求非齐次线性方程的通解，关键在于求得它任意一个特解. 而求其特解的方法是常数变易法. 为增进自己的能力，我们鼓励读者运用常数变易法去求特解，而不主张去直接代公式.

应当指出，尽管微分方程的解在很广泛的条件下存在，但是解能被求出（即用有限解析形式表达）的微分方程，在微分方程中是很少的一部分. 例如形式上很简单的一阶方程$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=x^2+y^2$ 都是无法求解的.

在我们所学的能求解的那些一阶方程中，求解的主要思想方法是寻找适当的变换，把所给的方程化成变量可分离的方程或一阶线性方程. 例如：

齐次方程：$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f\left(\frac{y}{x}\right)$，利用变换$\frac{y}{x}=u$ 可化为变量可分离的方程；

当 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}\neq 0$ 时，方程$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right)$可先通过平行变换化成齐次方程$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f\left(\frac{a_1x+b_1y}{a_2x+b_2y}\right)=f\left(\frac{a_1+b_1\dfrac{y}{x}}{a_2+b_2\dfrac{y}{x}}\right)$后再求解；当 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}=0$ 时，可通过

适当变换化为变量可分离的方程求解；

Bernoulli 方程：$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y=Q(x)y^n$，$n\in\mathbf{R}$，$n\neq 0,1$，可通过变换 $u=y^{1-n}$ 化成线性方程来求解.

因此，善于识别所给方程的类型，理解并记住所需的变换，对求解常见的一阶微分方程是十分重要的. 除了上述几类典型的方程外，有时还会遇到一些一阶方程，它们需要通过恒等变形，或通过适当变换才能变成上述类型的方程. 因此积累经验灵活地运用变换的思想，对求解微分方程是至关重要的. 下面举例说明.

例 1　求方程 $y'-\cos\dfrac{x+y}{2}+\cos\dfrac{x-y}{2}=0$ 的通解.

解　表面看来这一方程不属于我们熟悉的几类方程，但利用三角函数的和差化积公式可将方程变形为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=2\cos\frac{x}{2}\cos\frac{y}{2},$$

这是一个变量可分离方程，当 $\cos\dfrac{y}{2}\neq 0$ 时得通解为

$$C\left(\sec\frac{y}{2}+\tan\frac{y}{2}\right)=\mathrm{e}^{2\sin\frac{x}{2}}\quad(C\neq 0);$$

当 $\cos\dfrac{y}{2}=0$，得 $y=(2n+1)\pi\quad(n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$，

显然也是原方程的解，但它们不能包括在通解之中. 容易验证，此方程的全部解为

$$C\left(\sec\frac{y}{2}+\tan\frac{y}{2}\right)=\mathrm{e}^{2\sin\frac{x}{2}},$$

$$y=(2n+1)\pi,\quad n=0,\pm1,\pm2,\cdots.$$

例 2　求方程 $\cos y\cdot y'+2x\sin y=x^3$ 的通解.

解　将方程中的 $\cos y$ 凑入 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$，得

$$\frac{\mathrm{d}\sin y}{\mathrm{d}x}+2x\sin y=x^3,$$

从而可知采用变换 $u=\sin y$，便可将方程变为线性方程

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=2xu=x^3.$$

解之得
$$u=C\mathrm{e}^{-x^2}+\frac{1}{2}(x^2-1),$$

将 $u=\sin y$ 代回，便得原方程的通解为

$$\sin y=Ce^{-x^2}+\frac{1}{2}(x^2-1).$$

例 3　求方程$\frac{dy}{dx}=\frac{xy}{x^2+y^3}$的通解.

解　为有利于把方程的右端拆成两项,我们把 y 看是自变量,x 看作是因变量,讨论方程

$$\frac{dx}{dy}=\frac{x^2+y^3}{xy},\quad 或\quad \frac{xdx}{dy}=\frac{1}{y}x^2+y^2,$$

即
$$\frac{1}{2}\frac{dx^2}{dy}=\frac{1}{y}x^2+y^2.$$

令 $x^2=u$,将方程变为

$$\frac{du}{dy}=2\,\frac{1}{y}u+2y^2.$$

解之得

$$u=Cy^2+2y^3,$$

故原方程通解为

$$x^2=Cy^2+2y^3.$$

例 4　求方程$\frac{dy}{dx}=(4x+y+1)^2$ 的通解.

解　作变换 $u=4x+y+1$,原方程变为

$$\frac{du}{dx}-4=u^2.$$

分离变量可解得

$$\frac{1}{2}\arctan\frac{u}{2}=x+C_1,$$

把 $u=4x+y+1$ 代回,得

$$4x+y+1=2\tan(2x+2C_1),$$

或

$$y=2\tan(2x+C)-4x-1.$$

9. 可降阶高阶方程的解法

对于高阶微分方程来说,利用适当的变换来降低方程的阶数,是求解的一个重要思想方法. 例如对于最高阶导数解出的一般二阶方程

$$y''=f(x,y,y'),$$

要使降阶法奏效,其右端的函数 f 中通常需要不显含未知函数 y 或不显含自变量 x.

1°　$y''=f(x,y')$. 作变换 $y'(x)=P(x)$便将方程变为$\frac{dP}{dx}=f(x,P)$,若这

个被降阶后的一阶方程可求出解 $P=\varphi(x,C_1)$，则原方程的解可通过$\dfrac{dy}{dx}=\varphi(x,C_1)$得到为 $y=\int\varphi(x,C_1)dx+C_2$.

对于形如 $y''=f(x)$的方程，可以看作是方程 $y''=f(x,y')$的特例，类似地进行处理.

2° $y''=f(y,y')$. 如果仍用变换 $y'(x)=P(x)$，则方程变为$\dfrac{dP}{dx}=f(y,P)$. 这里出现 x,y,P 三个变量而无法求解. 为了使变换后的方程中只含两个变量，我们令$\dfrac{dy}{dx}=P[y(x)]$，看成是 $P(y)$与 $y=y(x)$的复合函数. 于是

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{dP}{dx}=\frac{dP}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}=\frac{dP}{dy}\cdot P,$$

在这样的变换下方程变为 $P\dfrac{dP}{dy}=f(y,P)$，只含有 y 与 P 两个变量. 如果其通解可以求出，设为 $P=\varphi(y,C_1)$，则原方程的通解可通过$\dfrac{dy}{dx}=\varphi(y,C_1)$得到为 $x=\int\dfrac{dy}{\varphi(y,C_1)}+C_2$.

例 5 求 $yy''+1=y'^2$的通解以及满足初值条件 $x=0,y=1,y'=2$；$x=0,y=1,y'=-\dfrac{1}{2}$与 $x=0,y=1,y'=1$ 的诸特解.

解 令 $y'=P,y''=\dfrac{dP}{dy}\cdot P$，代入方程得

$$yP\frac{dP}{dy}+1=P^2.$$

当 $P\neq\pm1$ 时，用分离变量法求解，得

$$\frac{1}{2}\ln|P^2-1|=\ln|C_1y|,$$

即
$$\begin{cases}P^2=1+C_1^2y^2, & |P|>1, \quad (3-9)\\ P^2=1-C_1^2y^2, & |P|<1, \quad (3-10)\end{cases}$$

或
$$\frac{dy}{dx}=\sqrt{1+C_1^2y^2},\frac{dy}{dx}>1,\quad \frac{dy}{dx}=\sqrt{1-C_1^2y^2},0\leqslant\frac{dy}{dx}<1,$$

$$\frac{dy}{dx}=-\sqrt{1+C_1^2y^2},\frac{dy}{dx}<-1;\frac{dy}{dx}=-\sqrt{1-C_1^2y^2},\quad -1<\frac{dy}{dx}<0.$$

于是有通解

当$\dfrac{dy}{dx}>1$ 时，$x=\int\dfrac{dy}{\sqrt{1+C_1^2y^2}}=\dfrac{1}{C_1}\operatorname{arsh}C_1y+C_2$，或 $y=\dfrac{1}{C_1}\operatorname{sh}(C_1x+C)$

$(C=-C_1C_2)$；　　(3-11)

当$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}<-1$时，$x=-\frac{1}{C_1}\mathrm{arsh}C_1y+C_2$，或 $y=-\frac{1}{C_1}\mathrm{sh}(C_1x+C)$；　　(3-12)

当 $0\leqslant\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}<1$ 时，$x=\frac{1}{C_1}\arcsin C_1y+C_2$，或 $y=\frac{1}{C_1}\sin(C_1x+C)$；　　(3-13)

当$-1<\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}<0$ 时，$x=-\frac{1}{C_1}\arcsin C_1y+C_2$，或 $y=-\frac{1}{C_1}\sin(C_1x+C)$.　(3-14)

当 $P=\pm1$ 时，有$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\pm1$，从而 $y=\pm x+C$，显然也是原方程的解，它不包含在上述通解之中.

再求所要求的特解. 将条件 $x=0,y=1,y'=2$ 代入(3-11)式与(3-9)式，得

$$1=\frac{1}{C_1}\mathrm{sh}\,C,4=1+C_1^2,$$

解之得　$C_1=\pm\sqrt{3},C=\pm\mathrm{arsh}\sqrt{3}=\pm\ln(2+\sqrt{3})$，从而相应的特解为

$$y=\frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{sh}[\sqrt{3}x+\ln(2+\sqrt{3})].$$

将条件 $x=0,y=1,y'=-\frac{1}{2}$代入(3-14)式与(3-10)式得

$$C_1=\pm\frac{\sqrt{3}}{2},C=\mp\frac{\pi}{3}.$$

于是相应的特解为

$$y=\frac{2}{\sqrt{3}}\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}x\right).$$

将条件 $x=0,y=1,y'=1$ 代入 $y=x+C$ 得 $C=1$，从而相应的特解为 $y=x+1$.

10. 关于反常积分

(1) 两类反常积分的概念

由定积分的定义，所讨论的区间$[a,b]$必须是有限的，否则定积分$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$没有意义；而 $f(x)$要在$[a,b]$上可积必须有界，换句话说，若 $f(x)$在点 $x_0\in[a,b]$无界，则 $f(x)$在$[a,b]$上的定积分必不存在. 但是有些实际问题需要我们在无穷区间上运用积分的思想去解决，或者对无界函数运用积分的思想. 它们不是定积分，所以称为反常积分或旁义积分或广义积分.

对无穷区间或无界函数这两类反常积分的研究，分别是先在有限区间或使

函数有界的区间上得到定积分，再让积分区间扩大到给定的区间，考察定积分的极限来进行的.如果极限存在，则称相应的反常积分收敛；否则称发散.

为了帮助读者更直观地理解两类反常积分的敛散性概念我们以幂函数为例作以下几何解释.我们知道$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^p}\mathrm{d}x$当$p>1$时收敛；$p\leqslant 1$时发散.从几何上看，此积分表示由幂函数$y=\frac{1}{x^p}$所表示的曲线，直线$x=1$与$x$轴所围成的“开口曲边三角形”的面积(图3-9).对任一$p>0$，这个开口的曲边三角形区域都是无限的.但当$p>1$时，在区间$[1,+\infty)$上，由低于等轴双曲线$y=\frac{1}{x}$的幂函数曲线$y=\frac{1}{x^p}$所围的上述区域的面积都是有限的，它的值可以通过极限$\lim\limits_{b\to+\infty}\int_1^b\frac{1}{x^p}\mathrm{d}x$求出为$\frac{1}{p-1}$.而当$p\leqslant 1$时，在$[1,+\infty)$上由曲线$y=\frac{1}{x}$和高于$y=\frac{1}{x}$的曲线$y=\frac{1}{x^p}$所围的上述区域的面积都不存在，它随$x$的增大而无限增大.$y=\frac{1}{x}$是两种情况的分界线.

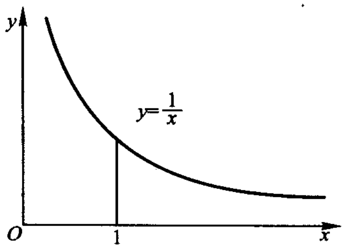


图3-9

类似地，反常积分$\int_0^1\frac{1}{x^p}\mathrm{d}x(p>0)$当$p<1$收敛，$p\geqslant 1$发散，在几何上表示尽管由幂函数曲线$y=\frac{1}{x^p}(p>0)$，直线$x=1$，$x$轴与$y$轴所围成的“开口曲边梯形区域”(图3-9)是无限的，但在区间$(0,1]$中低于$y=\frac{1}{x}$的幂函数曲线$y=\frac{1}{x^p}$$(0<p<1)$所围的上述区域的面积却是有限的，它的值可以通过极限$\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+}\int_\varepsilon^1\frac{1}{x^p}\mathrm{d}x$求出为$\frac{1}{1-p}$；而高于$\frac{1}{x}\left(包含\ y=\frac{1}{x}本身\right)$的曲线$y=\frac{1}{x^p}(p\geqslant 1)$所围成的上述区域的面积都不存在，它随$x$趋向于零而无限增大.$y=\frac{1}{x}$仍是两种情况的分界线.

下面的现象是饶有趣味的.考察由曲线$y=\frac{1}{x}$绕x轴旋转所得的旋转面与平面$x=1$所围成的开口的无限喇叭形立体(图3-10).容易算得此立体的体积为

$$V=\int_1^{+\infty}\pi\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x=-\frac{\pi}{x}\Big|_1^{+\infty}=\pi.$$

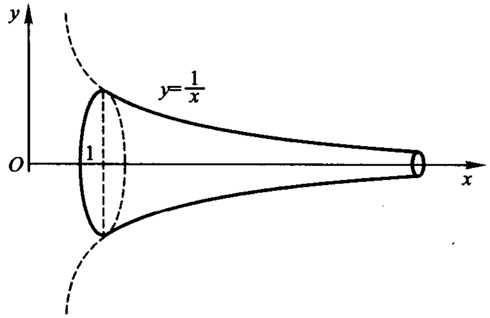


图 3 - 10

由《教材》第六章第四节中的知识，我们可以算得此无限喇叭形的表面积为①

$$S=2\pi\int_1^{+\infty} y\mathrm{d}s=2\pi\int_1^{+\infty}\frac{1}{x}\sqrt{1+\frac{1}{x^4}}\mathrm{d}x=+\infty.$$

由于$\frac{1}{x}<\frac{1}{x}\sqrt{1+\frac{1}{x^4}}$，而$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x}\mathrm{d}x=+\infty$.

设想将油漆倒入此无限喇叭形立体，由于体积 $V=\pi$，故只要有限量（π 单位）的油漆便可将此立体内部充满，然而由于立体的表面积 S 无穷大，故实际上充满内部的全部油漆也不足以涂抹此无限长喇叭的表面，事实上，由反常积分的敛散性概念，上述看来颇感迷惑的现象是不难理解的. 由于表示体积的积分收敛，故当 $x\geqslant z$ 足够大后，$[z,+\infty)$上所对应的喇叭体积 $\int_z^{+\infty}\pi\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x$ 可任意小，然而，由于表示其表面积的积分发散，故不论 z 多么大，喇叭剩余部分的表面积 $2\pi\int_z^{+\infty}\frac{1}{x}\sqrt{1+\frac{1}{x^4}}\mathrm{d}x$ 都是无穷大.

(2) 两类反常积分的审敛准则

有些实际问题所提出的反常积分是难以计算的，这时，判定反常积分收敛与否显然更为重要，因为如果收敛，即便其值难以求得，我们可以求它的近似值；或者像《教材》中对 Γ 函数所讨论的那样，用这个收敛的反常积分来定义一个新的函数，研究它所具有的一些性质和运算规则. 从而帮助我们去理解或解决有关的理论与实际问题.

正因为反常积分并非都能根据定义通过对应定积分的极限来求得，所以判定其敛散性必须利用被积函数的性质另辟途径. 在本问题(1)段中对幂函数的反

① 不难理解此表面面积微元为 $\mathrm{d}S=2\pi y\mathrm{d}s$，其中 $\mathrm{d}s$ 为曲线 $y=\frac{1}{x}$ 的微小弧段的长度，称为弧微元或弧微分，在下册第六章第四节，我们将知道若曲线的方程为 $y=y(x)$，则弧微分 $\mathrm{d}s=\sqrt{1+y'^2}\mathrm{d}x$.

常积分敛散性的分析可以启迪我们去使用比较的方法.实际上,两类反常积分敛散性判定的基本方法就是比较法(比较准则Ⅰ).若在所论区间内恒有

$$0\leqslant f(x)\leqslant g(x),$$

则较大函数 $g(x)$ 的反常积分收敛,$f(x)$ 的相应反常积分也必收敛;较小函数 $f(x)$ 的反常积分发散,较大的函数 $g(x)$ 的相应反常积分也必发散.

比较准则Ⅰ是基本的,但应用起来不甚方便.因为要从待判定的函数 $f(x)$ 出发,去寻找比 $f(x)$ 大且其反常积分收敛的函数 $g(x)$,或比 $f(x)$ 小且其反常积分发散的 $g(x)$,有时并不太容易.由比较准则Ⅰ演变而来的比较准则Ⅱ,在应用时常常会方便一些.

对于无穷反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$,当 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$ 存在时,不难证明,积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛的必要条件是 $A=0$.事实上,若 $A\neq 0$,例如 $A>0$,则必存在足够大的 $x_1>0$ 使 $x\geqslant x_1$ 时恒有 $f(x)>\dfrac{A}{2}>0$,令 $b>x_1$,从而有

$$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x=\lim_{b\to+\infty}\left[\int_a^{x_1} f(x)\mathrm{d}x+\int_{x_1}^{b} f(x)\mathrm{d}x\right]\geqslant\lim_{b\to+\infty}\left[\int_a^{x_1} f(x)\mathrm{d}x+\frac{A}{2}(b-x_1)\right].$$

可见,$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 必发散.

因此,当 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 存在时,判定反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 敛散性的难点在于判定$A=0$.即被积函数是 $x\to+\infty$ 时的无穷小量那些类型.这时应用比较准则Ⅱ,就是去寻找一个当 $x\to+\infty$ 时的正无穷小 $g(x)$,使 $\int_0^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$ 的敛散性容易判定,若 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是同阶无穷小,则它们有相同的敛散性;若 $f(x)$ 比 $g(x)$ 高阶,则由 $\int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$ 收敛可推知 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛;若 $f(x)$ 比 $g(x)$ 低阶,则由 $\int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$ 发散可推知 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 发散.

对于无界反常积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$,设 $x\to a^+$,$f(x)\to\infty$,应用比较准则Ⅱ是去寻找一个当 $x\to a^+$ 时的正无穷大量 $g(x)$,使 $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$ 的敛散性容易判定,若 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是同阶无穷大,则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 与 $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$ 有相同的敛散性;若 $f(x)$ 比 $g(x)$ 低阶,则由 $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$ 收敛可推知 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 收敛;若 $f(x)$ 比 $g(x)$ 高阶,则由 $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$ 发散可推知 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 发散.

例 1　判定反常积分$\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{1+x^2}}$的敛散性.

解　容易看出，当$x\to+\infty$时$\frac{1}{x\sqrt{1+x^2}}$是$\frac{1}{x}$的二阶无穷小，且

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x\sqrt{1+x^2}}}{\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}=1,$$

而$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x$收敛，所以原反常积分收敛.

例 2　判定反常积分$\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$（$k^2<1$）（称椭圆积分）的敛散性.

解　《教材》第三章例 6.12(1)利用比较准则Ⅰ，判定了此反常积分收敛. 现在我们应用比较准则Ⅱ来判定. 容易看出当$x\to1^-$时$\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$是$\frac{1}{1-x}$的$\frac{1}{2}$阶无穷大，

$$\lim_{x\to1^-}\frac{\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}}{\frac{1}{\sqrt{1-x}}}=\lim_{x\to1^-}\frac{1}{\sqrt{(1+x)(1-k^2x^2)}}=\frac{1}{\sqrt{2(1-k^2)}}\neq0,$$

而$\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1-x}}\mathrm{d}x$收敛，故所给椭圆积分收敛.

对于两类反常积分都有绝对收敛准则，它常用于被积函数变号的反常积分. 应当注意的是，绝对收敛比收敛强，绝对收敛的反常积分必收敛，反之不一定成立，因此当绝对值$|f(x)|$的反常积分发散时，仍无法断定$f(x)$相应的反常积分的敛散性. 需要另想他法去判定.

第四章　无穷级数

1. 关于无穷级数的概念

认识“无限”的常用方法是利用关于“有限”的已有知识通过极限去认识. 对无穷级数的认识也正是遵循这一方法. 常数项无穷级数是无限多个常数相加. 任意有限项(例如 n 项)相加 $a_1+a_2+\cdots+a_n$ 是一常数，记作 S_n，称为 n 项部分和. 在 n 项相加的基础上再添加一项，便得一新的和数，记作 S_{n+1}，这样就把无穷级数 $a_1+a_2+\cdots+a_n+\cdots$ 与其部分和数列 $S_1,S_2,\cdots,S_n,\cdots$ 对应了起来，数列 $\{S_n\}$ 中的 n 越大，相对应的级数中相加的项数就越多，因此，用数列 $\{S_n\}$ 的敛散性来定义级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 的敛散性，并用极限值 $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n=S$ 来定义级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 的和都是很自然的.

我们已经知道，不能把“有限”的知识和经验随便用于“无限”. 譬如有限个数中必有最大者与最小者，而无限个数中却不一定有. 有限个数之和是满足结合律和交换律的，但对无穷级数而言，结合律和交换律一般说来是不成立的，《教材》第四章第一节中曾给出过例子. 实际上这是容易理解的. 例如，对于级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 若施加结合律使其变为

$$(a_1+\cdots+a_{p_1})+(a_{p_1+1}+\cdots+a_{p_1+2})+\cdots+(a_{p_{k-1}+1}+\cdots+a_{p_k})+\cdots,$$

记 $b_k=a_{p_{k-1}+1}+\cdots+a_{p_k}$. 于是施加结合律后的上述级数为 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}b_k$，其部分和 $\alpha_k=\sum\limits_{i=1}^{p_k}a_i=S_{p_k}$，因而，数列 $\{\alpha_k\}$ 是数列 $\{S_n\}$ 的一个子数列. 若子数列 $\{\alpha_k\}$ 收敛，原数列 $\{S_n\}$ 当然不一定收敛，故结合律不能随便使用. 但由于数列 $\{S_n\}$ 收敛，其任一子数列均收敛. 故对于收敛级数，结合律是成立的. 然而应当注意《教材》中的例子显示，即使对于收敛级数而言，交换律也不一定成立.

可是，容易证明对于正项级数而言，无论其收敛与否，结合律和交换律都不会改变其敛散性. 事实上，对于正项级数而言，施以结合律或交换律后的级数仍是正项级数，它们的部分和数列都是单调增数列. 如果原级数收敛，其部分和数列有界，即 $\exists M>0$，使 $\forall n\in\mathbf{N}$ 均有部分和 S_n 满足 $|S_n|<M$. 从而易见施以结合律或交换律后的级数的部分和也必小于 M，从而收敛；若原级数发散，必有部分

和数列$\{S_n\}\to+\infty,n\to+\infty$，当然其任一子数列也均趋于无穷. 从而项序改变后的级数的部分和数列也必然趋于无穷，所以发散.

2. 关于常数项级数的审敛准则

判定级数的敛散性不仅是求其和的前提，而且比求和更为重要. 因为如果级数收敛，即便其和难以求得，我们仍可以用其部分和去作为其和的近似值，而且误差随项数的增加可以任意小.

(1) 关于正项级数的审敛准则

正项级数收敛的充要条件是其部分和数列上有界. 这一基本定理使用起来颇不方便，它的重要意义在于，由它可以证明一些便于使用的判别法.

判定正项级数敛散性的两类比较准则(教材中的定理 1.3 与 1.4)是与无穷区间上反常积分敛散性判定的两类比较准则相互对应的. 其中第二比较准则一般说来更便于应用. 因为若 $a_n\nrightarrow 0(n\to+\infty)$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散；若 $a_n\to 0$，则第二比较准则将其敛散性的判定转化为去寻求一个与 a_n 同阶(特殊情形也可比 a_n 高阶或低阶)无穷小 b_n，而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 的敛散性比较容易判定.

D'Alembert 准则和 Cauchy 准则的优点在于无需去寻求另一比较级数，而直接由所给级数的通项. 通过极限来判定此级数的敛散性. 但当极限 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ 或 $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a_n}$为 1 或不存在时，这两种准则都分别失效. 这时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 的敛散性判定需要另寻它法.

一般说来 D'Alembert 准则更便于使用. 但是应当指出，当 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=l$ 存在时，可以证明 $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a_n}=l$；但是，后者存在时，前者不一定存在. 因此，Cauchy 准则的适用范围比 D'Alembert 准则更为广泛. 例如，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}2^{-n-(-1)^n}$，由于

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=2^{-1+2(-1)^n}=\begin{cases}2, & n\text{ 为偶数},\\ \dfrac{1}{8}, & n\text{ 为奇数}.\end{cases}$$

所以 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$不存在；但

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to+\infty}2^{\frac{-n-(-1)^n}{n}}=\frac{1}{2},$$

所以由 Cauchy 准则知级数收敛.

当 D'Alembert 准则与 Cauchy 准则均失效的情况下，有时可以用积分准则

来判定.

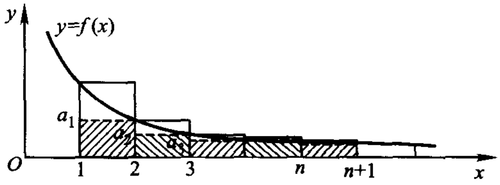


图 4-1

积分准则(《教材》第四章定理 1.5)从几何直观上是很容易理解的. 单调减的非负连续函数的反常积分 $\int_1^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 表示图中界于直线 $x=1$,x 轴和曲线 $y=f(x)$ 之间的开口曲边三角形的面积. 判定正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 敛散性的积分准则条件中的 $a_n=f(n)$,意味着通项 a_n 是 $x=n$ 处的函数值 $f(n)$,它在数值上也等于以 $f(n)$ 为高,长度为 1 的矩形面积,即在区间 $[n,n+1]$ 上曲线 $y=f(x)$ 的外接矩形面积. 从而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 表示图 4-1 中所有外接矩形面积之和,称其为大和,记作 S_n. 另一方面,$a_n=f(n)$ 在数值上也等于高为 $f(n)$ 而以区间 $[n-1,n]$ 为底的矩形面积,从而 $\sum\limits_{n=2}^{\infty} a_n$ 表示图中所有内接矩形之和,称其为小和,记作 s_n. 于是有

$$a_1+s_n=\sum_{n=1}^{\infty} a_n=S_n. \tag{4-1}$$

若反常积分 $\int_1^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛,意味着图中开口曲边三角形的面积是有限的,从而小和 s_n 收敛,由(4-1)式左端等式知正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛;若积分 $\int_1^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 发散,开口曲边三角形的面积无界,从而大和 S_n 发散,由(4-1)式右端等式可知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 也发散.

例 1　判定级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{n(\ln n)^p}$,$p>0$ 的敛散性.

解　由于

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{n+1}\left(\frac{\ln n}{\ln(n+1)}\right)^p=1,$$

由前面指出的结论可知必有 $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a_n}=1$. 所以 Cauchy 准则与 D'Alembert 准

则均失效.应用积分准则.令

$$f(x)=\frac{1}{x(\ln x)^{p}},$$

显然 $f(x)$在$[2,+\infty)$上满足积分准则条件.由于

当 $p=1$ 时，$$\int_{2}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x\ln x}=\ln(\ln x)\Big|_{2}^{+\infty}=+\infty;$$

当 $p\neq1$ 时，$$\int_{2}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x(\ln x)^{p}}=\frac{1}{1-p}(\ln x)^{1-p}\Big|_{2}^{+\infty}=\begin{cases}+\infty, p<1,\\ \dfrac{(\ln 2)^{1-p}}{p-1}, p>1,\end{cases}$$

所以，当 $p>1$ 时级数收敛；$p\leqslant1$ 时发散.

对于有些正项级数，若运用 D'Alembert 准则，Cauchy 准则或积分准则均难以判定其敛散性时，则需要使用其他方法和一些特殊技巧，较常使用的一种方法是将通项放大或缩小后利用比较准则.

例 2　判定级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\left(1-\dfrac{1}{\ln n}\right)^{n}$ 的敛散性.

解　这是一正项级数由于 $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-\dfrac{1}{\ln n}\right)=1$，所以 Cauchy 准则，从而 D'Alembert 准则均失效.容易看出，积分准则也难以应用，下面将 $a_n=\left(1-\dfrac{1}{\ln n}\right)^{n}$ 放大后使用比较准则.由于

$$a_n=\mathrm{e}^{n\ln\left(1-\frac{1}{\ln n}\right)},$$

而不难验证 $\ln(1+x)<x\,(x\neq0)$，事实上，在以 0 与 x 为端点的区间$[0,x]$或$[x,0]$上对函数 $\ln(1+x)$应用 Lagrange 中值定理可知

$$\ln(1+x)-\ln 1=\frac{1}{1+\theta x}(x-0),\quad 0<\theta<1.$$

从而当 $x\neq0$ 时有

$$\ln(1+x)=\frac{1}{1+\theta x}x<x.$$

令 $x=-\dfrac{1}{\ln n}$，可知

$$a_n=\mathrm{e}^{n\ln\left(1-\frac{1}{\ln n}\right)}<\mathrm{e}^{-n\frac{1}{\ln n}}=\frac{1}{\mathrm{e}^{\frac{n}{\ln n}}}.$$

为了把上式右端分母中的幂指函数简化，注意到对 $\forall k\neq0$，

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{k\ln^{2}x}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2k\ln x}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2k}{x}=0,$$

从而当 $x\gg1$ 时，有 $k\ln^{2}x<x$.取 $k=2,x=n$，当 $n\gg1$ 时有

$$2\ln^{2}n<n.$$

于是

$$a_n<\frac{1}{e^{\frac{n}{\ln n}}}<\frac{1}{e^{\frac{2\ln^2 n}{\ln n}}}=\frac{1}{n^2}.$$

由于 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2}$收敛,应用比较准则可知原给定级数收敛.

(2) 变号项级数的审敛准则——条件收敛与绝对收敛

我们知道若级数绝对收敛必收敛,但其逆不真.收敛而不绝对收敛的级数称为条件收敛级数.若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛,则必有 $n\to+\infty$时 $a_n\to0$,但通项 $a_n\to0$ $(n\to+\infty)$的级数不一定收敛,由此,不难理解,级数的绝对收敛性决定于通项 a_n 趋于零的速度,表现在无穷小量 a_n 的阶数上.而条件收敛性是在通项的收敛速度达不到绝对收敛的要求时,由于项的正负抵消所造成的.例如,我们知道,正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\alpha}$当 $\alpha>1$ 收敛,当 $\alpha=1$ 发散.这一事实表明,在级数中项数无限累加时,虽然它们的累加项$\frac{1}{n^\alpha}$随着 n 的增大而越来越小,但当 $\alpha>1$ 时,$\frac{1}{n^\alpha}$减小得比较快,其减小速度足以保证级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\alpha}$收敛;而 $\alpha=1$ 时,$\frac{1}{n}$减小的速度尚不足以保证级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 收敛.对于收敛的交错级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$ 来说,它的绝对值级数就是发散的调和级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$,说明交错级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$ 的收敛性并非完全由于其通项的减小速度所得,而且是由其奇偶项正负的部分抵消所造成的.条件收敛与绝对收敛有重要的本质差异.几乎一切有限和的代数运算性质(例如交换律、结合律、分配律等)均可以搬到绝对收敛级数上来,但对条件收敛级数有些有限和的运算规律是不适用的.《教材》在定理 1.10 之后已给出了例子 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$,说明交换律不适用于这个条件收敛级数.因此条件收敛级数在应用上受到了一定的限制.

对于一般变号级数,如果不绝对收敛,其条件收敛性的判定是比较困难的.但对于一类特殊的变号级数——交错级数,使用 Leibniz 准则可以很方便地判定收敛性.但是,Leibniz 准则的条件仅是级数收敛的充分条件.交错级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ 若收敛,虽然必有 $a_n\to0(n\to+\infty)$,但通项 a_n 却不一定需要单调减.例如,《教材》第四章例 1.13 已证明当 $p=1$ 时交错级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^p+(-1)^{n-1}}$

条件收敛，但 $a_n=\dfrac{(-1)^{n-1}}{n+(-1)^{n-1}}$ 显然不单调，读者看到，对于此级数的条件收敛性，我们是将 a_n 拆成两项采用特殊技巧来判定的.

通常判定一个交错级数的收敛性，不能仅停留于用 Leibniz 准则证明它收敛，还必须判定它是否绝对收敛，如果其绝对值级数发散，才能断定它是条件收敛的，因此，简捷的路线是先考察其绝对收敛性. 若不绝对收敛，再运用 Leibniz 准则，若也不满足 Leibniz 准则条件，则必须设法使用特殊技巧.

3. 关于函数项级数的处处收敛与一致收敛

设有函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x), x\in I\subseteq \mathbf{R}$. 处处收敛与一致收敛是函数项级数在区间 I 两种具有本质差异的收敛性. "处处"与"一致"的本质差异我们在讨论函数在区间 I 的连续性时已经有所认识，处处连续是在区间 I 对函数连续性逐点的考察. 它仅涉及函数在一点附近局部性态；而一致连续是对函数连续性在区间 I 的整体要求. 与此类似，处处收敛也是对函数项级数局部的考察. 对于区间 I 中任一给定的点 x_0，考察它所对应的常数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$ 的敛散性，若对任一 $x_0\in I$，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$ 都收敛，则称函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 I 处处收敛，讲得具体一些，对于任一给定的 $x_0\in I$，所谓 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$ 收敛，即 $\exists$ 常数（记作 $S(x_0)$），$\forall \varepsilon>0$，$\exists N(\varepsilon,x_0)>0$，使对一切 $n>N$，恒有 $|S_n(x_0)-S(x_0)|<\varepsilon$，其中 $S_n(x_0)=\sum\limits_{k=1}^{n} u_k(x_0)$ 是级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$ 的前 n 项部分和. 应当注意，部分和数列 $\{S_n(x_0)\}$ 趋向 $S(x_0)$ 的快慢一般说来将随 x_0 的不同而不同，所以保证 $|S_n(x_0)-S(x_0)|<\varepsilon$ 的 N 除了依赖于 ε 外，还可能依赖于 x_0，故我们把它记作 $N(\varepsilon,x_0)$.

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 I 中的一致收敛，则要求对 I 中的所有 x_0，存在保证 $|S_n(x_0)-S(x_0)|<\varepsilon$ 成立的统一的 $N(\varepsilon)$，它与 x_0 的位置无关，只要 $n>N(\varepsilon)$，对于任一 $x_0\in I$ 均有 $|S_n(x_0)-S(x_0)|<\varepsilon$. 容易看出如果 x_0 的取值仅有有限个，那么对每一个 x_0 存在一个 $N(\varepsilon,x_0)$，在这有限个 N 中必有最大者，记为 $\overline{N}$，从而当 $n>\overline{N}$ 时 $|S_n(x_0)-S(x_0)|<\varepsilon$ 必对所有这些 x_0 值均成立. 然而区间 I 中 x 的取值是无穷的，在对应的无穷多个 N 中就不一定能找到最大的了. 在这种情况下，尽管级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 I 处处收敛，但却不一致收敛.

例如《教材》第四章的例 2.2 所给出的级数

$$x+(x^2-x)+(x^3-x^2)+\cdots+(x^n-x^{n-1})+\cdots, \tag{4-2}$$

其部分和函数列$\{S_n(x)\}=\{x^n\}$，由于当$x\in[0,1)$时$\lim\limits_{n\to+\infty}x^n=0$，故此函数项级数(4－2)在区间$[0,1)$处处收敛于和函数$S(x)\equiv0$. 但是由图4－2可以看到，对于区间$[0,1)$中的点$x_0$，对应的常数列$\{x_0^n\}$在几何上表示为直线$x=x_0$与曲线族$y=x^n$的交点列的纵坐标，不同的点所对应的常数列收敛的速度是不同的. 例如，要求交点列进入$y=0$的ε邻域(即$0<y<\varepsilon$)，对于x_0而言，只要取$N=1$(即$n>1$)即可；对x_1而言，则至少需取$N=3$；对x_2而言，至少取$N=5$；而且我们看到，对于任意给定的$x_0\in[0,1)$，无论它与$x=1$多么靠近，$\forall\varepsilon>0$都$\exists N(\varepsilon,x_0)$使当$n>N$时，交点到$\{(x_0,x_0^n)\}$都将进入$y=0$的$\varepsilon$邻域内；

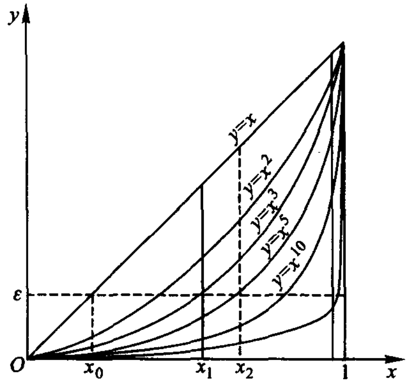


图4－2

但是，另一方面，随着点x向1靠近，对n的要求越来越大，也就是说，要级数(4－2)的部分和与0接近到ε程度，其部分和项数要求越来越多. 这无穷多个N中能否找到最大的呢？由于对任意大的n，均有$\lim\limits_{x\to1^-}x^n=1$，这意味着无论$n$多么大，总可以取与1足够靠近的$x_0(x_0<1)$，使$x_0^n$与$y=1$充分接近，当然就不可能与$y=0$任意接近了. 这说明使$|x^n-0|<\varepsilon$对一切$0\leqslant x<1$都成立的统一的$N$是不存在的，因此$\{x^n\}$虽在$[0,1)$处处收敛于0，但却并不一致收敛. 由此可见，一致收敛不仅要求对区间I内每一点所对应的级数都收敛，而且还要求它们收敛的速度“差不多”，对一切$x\in I$都“步伐比较整齐地”收敛于所对应的和. 所以一致收敛也称均匀收敛.

一致收敛的函数项级数有很好的性质. 对于有限项之和适用的一些分析性质，例如和函数的连续性，逐项求导，逐项求积等，对一致收敛的函数项级数同样成立；但对仅处处收敛而不一致收敛的函数项级数就不一定能成立了. 例如函数项级数(4－2)在区间$[0,1]$上处处收敛且有

$$x+\sum_{n=1}^{\infty}(x^{n+1}-x^n)=\begin{cases}0,0\leqslant x<1,\\1,x=1\end{cases}\equiv S(x).$$

虽然此级数的每一项均在区间$[0,1]$上连续，但其和函数$S(x)$却在$[0,1]$上并不连续.

仔细分析《教材》中对定理2.3(和函数的连续性)的证明，不难发现，尽管证明和函数$S(x)$对$\forall x_0\in I$连续的结论是局部性的，但在证明当x与x_0足够接

近时$|S(x)-S(x_0)|$可任意小时，要适当选择 N 而插入 $S_N(x_0)$与 $S_N(x)$而利用不等式

$$|S(x)-S(x_0)|\leqslant|S(x)-S_N(x)|+|S_N(x)-S_N(x_0)|+|S_N(x_0)-S(x_0)|.$$

对于$|S_N(x_0)-S(x_0)|<\varepsilon/3$ 只需 $S_n(x)$在 x_0 处收敛即可，但对$|S(x)-S_N(x)|<\varepsilon/3$ 则需要 $S_n(x)$在 x_0 的 δ 邻域内的一致收敛性.

4. 幂级数的收敛性及其在收敛区间内的性质

幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$ 是最常用的一类函数项级数，由于它的通项是幂函数，所以，不但形式简单，而且它的收敛域(除端点外)是一个关于点 x_0 对称的开区间(称为收敛区间)，在收敛域内几乎能像多项式一样地进行加法、乘法、逐项求导与逐项积分等运算. 幂级数的这些优点，使得它在应用中非常简便.

(1) 幂级数的收敛性

我们知道，按定义，函数项级数的敛散性需要将其定义域中的点 x_0 代入该级数中通过常数项级数的审敛准则逐点加以检验，除个别比较简单的函数项级数(如等比级数)外，用这种方法讨论函数项级数的敛散性是非常繁难的. 但对于幂级数而言，有一个十分简便的方法，就是先通过求其收敛半径 R 得到收敛区间，然后只要再将它的两端点代入级数进行检验就可以得到级数的收敛域. 为了使读者更好地理解并掌握这种方法，下面对它再作几点说明.

1) Abel 定理是研究幂级数收敛性的基础. 我们知道，幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 在实轴上的收敛性有且仅有三种情况：第一种，仅在 $x=0$ 点收敛，故收敛域 $D=\{0\}$；第二种，处处收敛，故 $D=(-\infty,+\infty)$；第三种，既有收敛点又有发散点. 在这种情况下，由 Abel 定理易知，收敛点与发散点不能交替出现，它的收敛域与发散域(不含端点)分别是对称于原点的开区间与关于原点对称的两个无穷开区间. 而且收敛的区间与发散的区间必不相交. 进而不难证明，存在 $x_0=R\in(0,+\infty)$，使 x_0 与 $-x_0$ 是收敛区间与发散区间的分界点(图 4-3)，在分界点 $x=\pm R$ 处可能收敛，也可能发散. 称这样的正数 R 为该级数的**收敛半径**，$(-R,R)$ **为收敛区间**，在收敛区间$(-R,R)$内级数绝对收敛，值得注意的是，对于一般幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$ ，收敛区间是对称于点 $x=x_0$ 的开区间(x_0-R,x_0+R).

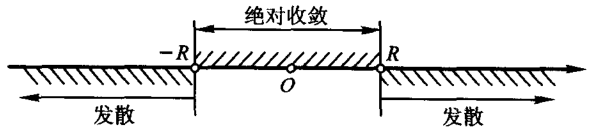


图 4-3

Abel 定理也可以直接用于确定幂级数的收敛半径.

例 1 若已知幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-1)^n$ 在 $x=-1$ 处条件收敛,求此幂级数的收敛半径.

解 为清楚起见,首先将所给级数化成 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n u^n$ 形式. 为此,令 $u=x-1$,当 $x=-1$ 时,$u=-2$. 于是可知级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n u^n$ 在 $u=-2$ 条件收敛. 由 Abel 定理可知,对于满足 $|u|<|-2|=2$ 的所有点 u,该级数均绝对收敛. 当 $|u|>2$ 时,容易看出级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n u^n$ 必发散. 否则,设其在一点 u_0($|u_0|>2$)收敛,则由 Abel 定理知级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n u^n$ 在区间 $|u|<u_0$ 将绝对收敛,这与 $u=-2$ 条件收敛矛盾. 因此级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n u^n$ 的收敛半径为 $R=2$. 从而级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-1)^n$ 的收敛半径为 $R=2$. 即若不讨论区间端点,所给级数在 $|x-1|<2$ 收敛,即收敛区间为 $(-1,3)$.

2) 使用收敛半径公式 $R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ 应注意的问题. 此公式是利用判定正项级数敛散性的 D'Alembert 准则在 $a_n\neq 0(n=1,2,\cdots)$,即不缺项,与极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ 存在两个条件下得到的. 这两个条件都是收敛半径公式成立的充分条件. 当这两个条件之一不满足时,公式失效,收敛半径需用其他方法寻求. 条件 $a_n\neq 0$ 表示级数的所有系数不为零,或至多只能有有限项系数为零. 若有无穷多项系数 $a_n=0$(称为缺项级数),则不能套用该公式求收敛半径. 这时,我们可直接运用 D'Alembert 准则,或通过变换把所给缺项级数化成非缺项级数后再用收敛半径公式. 例如《教材》在第四章例 3.2 中所给出的级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{4^n(n+1)^2}$,就是缺项级数,其收敛半径 $R=2$ 是直接利用 D'Alembert 准则获得的. 我们也可以利用变换 $x^2=u$,将原级数化为非缺项级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{u^n}{4^n(n+1)^2}$,先利用收敛半径公式求出 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{u^n}{4^n(n+1)^2}$ 的收敛半径 $R=4$,注意到 $x=\sqrt{u}$,从而原级数的收敛半径为 $R=2$.

若极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ 不存在,也不是 $+\infty$,或难以判定其存在与否时,则需改用其他方法去求收敛半径.

例 2 求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{3+(-1)^n}{3^n}x^n$ 的收敛半径.

解 由于

$$\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=3\cdot\frac{3+(-1)^n}{3+(-1)^{n+1}}=\begin{cases}\dfrac{3}{2}, & n\text{ 为奇数},\\ 6, & n\text{ 为偶数},\end{cases}$$

所以极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ 不存在,因此不能用公式求收敛半径而应改用其他方法.

解法一 利用 Canchy 准则,由

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n(x)|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{3+(-1)^n}{3^n}}|x|=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{3+(-1)^n}\frac{|x|}{3}=\frac{|x|}{3},$$

可知当 $|x|<3$ 时级数绝对收敛;当 $|x|>3$ 时,绝对值级数发散. 又由于在此情况下,$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n(x)|}>1$,由保号性,$\exists N\in\mathbf{N}_+$,当 $n>N$ 时,$|u_n(x)|>1$,所以 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n(x)\neq 0$,故原级数发散. 从而收敛半径 $R=3$.

解法二 利用不等式比较准则. 由于

$$\frac{2}{3^n}|x|^n\leqslant|u_n(x)|=\frac{3+(-1)^n}{3^n}|x|^n\leqslant\frac{4}{3^n}|x|^n,$$

所以,当 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{4}{3^n}|x|^n$ 收敛时,原级数绝对收敛;当 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{2}{3^n}|x|^n$ 发散时,原级数(是正项级数)发散. 用收敛半径公式容易求得幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{2}{3^n}x^n$ 与 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{4}{3^n}x^n$ 的收敛半径都是 3,所以,当 $|x|<3$ 时,级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{4}{3^n}x^n$ 绝对收敛,从而原级数也绝对收敛;当 $|x|>3$ 时,级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{2}{3^n}|x|^n$ 发散,因而原级数也发散. 故原级数的收敛半径也为 3.

解法三 利用收敛级数的加法及 Abel 定理. 由于幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{3}{3^n}x^n$ 与 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{3^n}x^n$ 当 $|x|<3$ 时都绝对收敛,故原级数当 $|x|<3$ 时也绝对收敛. 又当 $x=3$ 时,原级数变为发散级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}[3+(-1)^n]$(其通项 $a_n=3+(-1)^n$ 极限不存在),故由 Abel 定理,当 $|x|>3$ 时原级数也发散,所以原级数的收敛半径为 3.

例 3 已知幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛半径 $R=1$,试求级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{a_n}{n!}x^n$ 的收敛半径.

解 记 $b_n=\frac{a_n}{n!}$，则

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{b_n}{b_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}(n+1)\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|,$$

由于收敛半径公式的条件仅是充分条件，由已知条件 $R=1$ 并不能确定 $\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ 的极限($n\to\infty$)是否存在，所以不能用公式求级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}b_nx^n$ 的收敛半径，需改用其他方法. 由于级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛半径 $R=1$，所以，任取 $x_0\in(0,1)$，级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx_0^n$ 都绝对收敛，从而知 $\{a_nx_0^n\}$ 收敛于 0，因而有界，设 $|a_nx_0^n|\leqslant M$. 我们有

$$\left|\frac{a_n}{n!}x^n\right|=\left|\frac{a_nx_0^n}{n!x_0^n}x^n\right|\leqslant\frac{M}{n!x_0^n}|x|^n,$$

对级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{M}{n!x_0^n}|x|^n$ 应用 D'Alembert 准则，得

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{|x|}{(n+1)x_0}=0<1,$$

所以对任何 x，该级数都收敛，从而由不等式比较准则知原级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n!}x^n$ 对任何 x 都收敛，故其收敛半径为 $+\infty$.

读者应当注意，切不可由已知级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛半径 $R=1$，就得到 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=R=1$ 的结论！这是不少初学者易犯的错误.

(2) 幂级数在收敛区间内的运算性质

幂级数在其收敛域内有很多很好的代数运算和分析运算性质，这是幂级数的另一个优点.

根据收敛的常数项级数进行线性运算(加减法与数乘)后仍为收敛的常数项级数，容易得知，收敛半径分别为 R_1 与 R_2 的两个幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 与 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}b_nx^n$ 仅在它们共同的收敛区间 $(-R,R)$ 内才能进行线性运算，并且所得到的幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(\alpha a_n+\beta b_n)x^n$ 在 $(-R,R)$ 内收敛，其中 $R=\min(R_1,R_2)$. 否则不能进行这种运算. 例如，在 $(-1,1)$ 内有

$$\frac{x}{1-x}=x+x^2+\cdots+x^n+\cdots,$$

在$(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$上又有

$$\frac{x}{x-1}=1+x^{-1}+x^{-2}+\cdots+x^{-n}+\cdots.$$

由于它们的收敛域没有公共点，故不能相加，否则，就会得到荒谬的结论：

$$\cdots+x^{-n}+\cdots+x^{-2}+x^{-1}+1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots=0.$$

同样，由于绝对收敛的两个级数的乘积级数仍绝对收敛，所以上述两个幂级数的乘积幂级数在$(-R,R)$内也是收敛的，并且乘积级数的系数可采用对角线方法排列. 值得注意的是，两个收敛半径分别为 R_1 与 R_2 的幂级数的线性组合后所得到的幂级数其收敛半径大于或等于 R，$R=\min(R_1,R_2)$. 当 $R_1\neq R_2$ 时，收敛半径等于 R，这是因为若令 $\bar{R}=\max(R_1,R_2)$，则在区间$(-\bar{R},-R)$与$(R,\bar{R})$内必有一个级数收敛而另一个级数发散，从而它们的线性组合必发散. 故收敛半径只能是 R；当 $R_1=R_2$ 时，收敛半径可能大于 R，因为两个发散级数之和可能收敛. 例如，若 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 发散，取 $b_n=-a_n$，则 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}b_nx^n$ 也发散，但其和 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n)x^n\equiv 0$ 收敛，且收敛半径为$+\infty$.

幂级数在收敛区间内有一些很好的分析运算性质：其和函数 $S(x)$是连续的、可导的（任意阶可导）、可积的，可以进行逐项求导、逐项积分，而且逐项求导与逐项积分后得到的幂级数的收敛半径不变. 这些性质是利用幂级数在其收敛区间上的内闭一致收敛性（即在收敛区间内的任一闭子区间上一致收敛）所得到的.

幂级数的上述运算性质在求其和函数以及将函数展开为幂级数中有重要的应用，希望读者很好地理解并会运用它们.

5. 函数展开为幂级数问题

将函数 $f(x)$展开为幂级数的问题，就是求一个幂级数，它在其收敛区间（或收敛区域）内收敛于 $f(x)$，即

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n,\quad x\in(x_0-R,x_0+R),$$

也称为将 $f(x)$表示为幂级数的问题. 如果能将一个函数（不论它是初等函数还是非初等函数）展开为幂级数，那么就能用简单的多项式函数去逼近复杂函数，使幂级数成为近似计算函数值，深入研究函数的性质的重要工具. 因此，函数展开为幂级数问题是读者应当深入理解熟练掌握的重点之一.

(1) 函数展开为幂级数的条件与展开式的唯一性

函数 $f(x)$在区间(x_0-R,x_0+R)内展开为幂级数的必要条件是：1° $f(x)$在该区间内是任意阶可导的（又称为是无穷次可微的），即 $f\in C^{(\infty)}(x_0-R,x_0+R)$；2°该幂级数的系数必为 f 在 x_0 处的 Taylor 系数，即

$$a_n=\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!},\quad n=0,1,2,\cdots.$$

条件 2°表明如果 $f(x)$能展开为幂级数，那么该幂级数必是 f 在 x_0 处的 Taylor 级数. 换句话说，展开式是唯一的：

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n,(x_0-R,x_0+R). \tag{4-3}$$

读者应当区分函数 $f(x)$的 Taylor 级数与 Taylor 展开式这两个不同的概念. 只要 $f\in C^{(\infty)}(x_0-R,x_0+R)$，那么必可写出它所对应的 Taylor 级数：

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n. \tag{4-4}$$

当且仅当它的 Taylor 级数在(x_0-R,x_0+R)上收敛且收敛于 $f(x)$（即表达式(4－3)成立）时，Taylor 级数(4－4)才是 f 在 x_0 处的 Taylor 展开式. 事实上，存在着这样的函数 $f(x)$，它的 Taylor 级数在 x_0 的邻域内收敛但却不收敛于$f(x)$自身. 例如函数

$$f(x)=\begin{cases}e^{-\frac{1}{x^2}}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0\end{cases}$$

在 $x=0$ 处无穷次可微，并且 $f^{(n)}(0)=0(n=0,1,2,\cdots)$，现用归纳法证明如下. 显然，$f^{(0)}(0)=f(0)=0$，当 $x\neq 0$ 时，$f'(x)=\dfrac{2}{x^3}e^{-\frac{1}{x^2}}$，$f''(x)=\left(\dfrac{4}{x^6}-\dfrac{6}{x^4}\right)e^{-\frac{1}{x^2}}$，一般，$f^{(n)}(x)=P_{3n}\left(\dfrac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x^2}}$（其中 $P_{3n}\left(\dfrac{1}{x}\right)$是$\dfrac{1}{x}$的 $3n$ 次多项式）. 从而利用 L'Hospital 法则可得

$$f'(0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}e^{-\frac{1}{(\Delta x)^2}}=0.$$

假设 $f^{(n-1)}(0)=0$，则因对任何 $n\in\mathbf{N}_+$都有 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^n}e^{-\frac{1}{x^2}}=0$，故

$$f^{(n)}(0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f^{(n-1)}(\Delta x)-f^{(n-1)}(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}P_{3n-3}\left(\frac{1}{\Delta x}\right)e^{-\frac{1}{(\Delta x)^2}}=0.$$

由上述结论易知，$f(x)$在 $x=0$ 处的 Taylor 级数（即 Maclaurin 级数）$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{0}{n!}x^n$ 在$(-\infty,+\infty)$内处处收敛于 0. 也就是说，当 $x=0$ 时，该级数收敛于 $f(x)$；当 $x\neq 0$ 时，不收敛于 $f(x)$. 因此，只要 f 属于 $C^{(\infty)}$类函数，必存在着它所对应的 Taylor 级数，即便是 f 的 Taylor 级数收敛也不一定能展开为 Taylor 级数.

若 $f\in C^{(\infty)}(x_0-R,x_0+R)$，则 f 能在(x_0-R,x_0+R)内展开成 x_0 处的幂级数（Taylor 级数）的充要条件是

$$\lim_{n\to\infty}R_n(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}=0,x\in(x_0-R,x_0+R).$$

由此易得 f 在 (x_0-R,x_0+R) 内能展开为它在 x_0 处的幂级数的一个充分条件：$f\in C^{(\infty)}(x_0-R,x_0+R)$ 且 $\exists K>0$，$\forall n\in \mathbf{N}_+$ 及 $\forall x\in(x_0-R,x_0+R)$ 均有 $|f^{(n)}(x)|\leqslant K$.

函数展开为幂级数的上述条件(包括必要条件、充分条件及充要条件)与展开的唯一性是函数展开的理论基础.

(2) 函数展开为幂级数的方法

1° 直接展开法 它是将函数展开为幂级数(Taylor 级数)的基本方法. 为了将 $f(x)$ 展开为 $x-x_0$ 的幂级数，先求出它在 x_0 处的各阶导数 $f^{(n)}(x_0)(n=0,1,2,\cdots)$，写出它在 x_0 处的 Taylor 级数(4-4)，然后求出使余项 $R_n(x)\to 0$ $(n\to\infty)$ 的 x 的范围，确定使 $f(x)$ 在 x_0 的 Taylor 级数收敛于 $f(x)$ 的区间，从而得到 $f(x)$ 的 Taylor 展开式(4-3). 由于利用这种方法需要求出 $f^{n}(x_0)$ 的一般表达式，确定使 $R_n(x)\to 0$ 的区间，这往往都很困难，所以，直接展开法常用于求几个基本初等函数的 Taylor 展开式(见《教材》)，读者应当熟记这些基本展开式.

2° 间接展开法 所谓间接展开法，就是根据函数幂级数展开式的唯一性，利用函数的等式变形、变量代换、幂级数的代数运算性质和分析运算(逐项求导与逐项积分)性质，将待展开的函数转化为简单函数或幂级数展开式已知的(例如几个基本初等函数的展开式)函数的幂级数展开问题. 这种方法是将函数展开为幂级数最常用的方法，而且应用起来也比较简便.

关于这方面的例子，请参见本章的典型例题与讨论题.

6. 关于函数的 Fourier 级数与 Fourier 展开

将某些周期现象用最简单的正弦函数的叠加来描述是实际问题的需要. 例如发电机发出的交流电，其电压、电流都是正弦波，而表示正弦波的正弦函数 $A\sin(\omega t+\varphi)$ 中的振幅 A，角频率 ω 与初相位 φ 有明确的实际意义. 因而若能把一非正弦波用具有不同角频率的正弦波的叠加来表示，有助于我们对此非正弦波的研究和了解. 从数学上来看，可简化为把一个非正弦周期函数在其共同的周期 2π 区间上表示为一系列三角函数 $\{1,\cos x,\sin x,\cos 2x,\sin 2x,\cdots,\cos nx,\sin nx,\cdots\}$ 的线性迭加. 这一要求要能实现，首先需要上述三角函数系具有所谓正交完备的性质.

我们知道，在二维空间(平面) $\mathbf{R}^2$ 上任意两个正交的非零向量 $\boldsymbol{a}_1=(x_1,y_1)$ 与 $\boldsymbol{a}_2=(x_2,y_2)$，$\{\boldsymbol{a}_i\}\neq 0(i=1,2)$ 可在此空间构成一组正交基，$\mathbf{R}^2$ 中任一向量均可用此两正交向量线性表示. $\boldsymbol{a}_1$ 与 $\boldsymbol{a}_2$ 正交. 它们的内积为零，即 $x_1x_2+y_1y_2=0$. 对三维空间 $\mathbf{R}^3$ 来说，任意三个相互正交的非零向量构成一组正交基，$\mathbf{R}^3$ 中任一向量均可通过此三个正交向量线性表示. 或者说，$\mathbf{R}^3$ 中任一向量都不可能与这三个基向量同时正交. 这时我们说，三个相交向量对空间 $\mathbf{R}^3$ 而言是完备的，只

有在空间内完备的正交向量组才能构成此空间的正交基，两个正交向量所构成的向量组，例如$\{\mathbf{i},\mathbf{j}\}$在$\mathbf{R}^3$中就不完备，因为并非$\mathbf{R}^3$中任一向量都能通过两个正交向量线性表示，或者说在$\mathbf{R}^3$中可以找到另一向量$\boldsymbol{R}$同时与$\boldsymbol{i},\boldsymbol{j}$正交.

怎样把正交的概念从有限维空间推广到函数空间呢？设有两个函数$f_1(x),f_2(x)$，其公共定义区间为$[a,b]$，假定它们在$[a,b]$上可积，首先把函数值在$[a,b]$上离散化. 把$[a,b]$等分为n份，令$\Delta x=x_k-x_{k-1}$，$k=1,2,\cdots,n$，n个分点x_k上的函数值所构成的n维向量$\{f_1(x_1),f_1(x_2),\cdots,f_1(x_n)\}$与$\{f_2(x_1),f_2(x_2),\cdots,f_2(x_n)\}$正交，即它们的内积$\sum\limits_{k=1}^{n}f_1(x_k)f_2(x_k)=0$. 从而有

$$\sum_{k=1}^{n}f_1(x_k)f_2(x_k)\Delta x=0,$$

当$\Delta x\to 0(n\to+\infty)$时分点无限增多，函数的自变量将充满区间$[a,b]$，而$\{f_i(x_1),\cdots,f_i(x_n)\}$将演变为$f_i(x)(i=1,2)$. 于是函数$f_1(x)$与$f_2(x)$正交的条件变为

$$\int_a^b f_1(x)f_2(x)\mathrm{d}x=\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}f_1(x_k)f_2(x_k)\Delta x=0.$$

利用这一条件可以判定三角函数系$\{1,\sin x,\cos x,\sin 2x,\cos 2x,\cdots\}$中任意两不同函数在$[-\pi,\pi]$上正交，且任一函数自身平方在$[-\pi,\pi]$上的积分不为零. 后一结论是函数系中任一元素都是非零元素的反映. 我们还可以证明(从略)，不存在非零的连续函数，将它添加到上述三角函数系中后，使扩充后的函数系仍在$[-\pi,\pi]$上正交. 因此我们说，三角函数系$\{1,\sin x,\cos x,\sin 2x,\cos 2x,\cdots\}$是完备的正交系. 有了这个完备的正交函数系，我们就可以在一定的条件下，讨论函数的三角函数展开问题. 我们看到 Dirichlet 定理是在比连续更弱的条件下证明了函数的 Fourier 级数的收敛性，并给出了和函数的结构.

与 Taylor 级数类似，对于函数f只要能利用 Euler - Fourier 公式求出 Fourier 系数后所得的三角级数就称为f的 Fourier 级数，记作

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx). \tag{4-5}$$

至于这个三角级数是否收敛？即使收敛是否收敛于f？是另外的问题. 只有当其收敛于f(个别点可除外)时，才称它为$f(x)$的 Fourier 展开式. 这时才能将(4 - 5)式中的符号“$\sim$”改为“$=$”.

应当指出，对于一个函数$f(x)$，我们可以在其定义区间的任一子区间$[a,b]$上将它展开为 Fourier 级数，只要f在$[a,b]$上满足 Dirichlet 定理. 例如对函数$y=x^2$，我们可将其对应于区间$[-\pi,\pi]$的部分(图 4 - 4)展开成周期为2π的 Fourier 级数得

$$x^2=\frac{\pi^2}{3}-4\left(\frac{\cos x}{1^2}-\frac{\cos 2x}{2^2}+\frac{\cos 3x}{3^2}-\cdots\right),\quad -\pi\leqslant x\leqslant\pi.$$

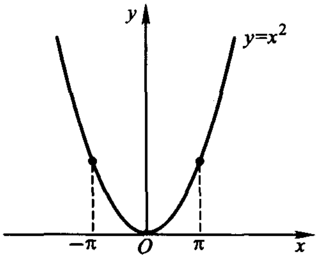


图 4-4

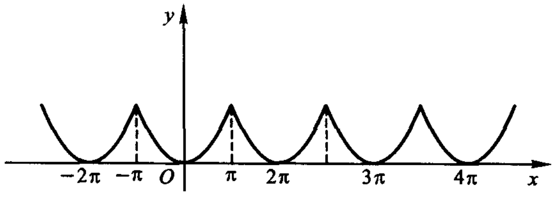


图 4-5

由周期性，等式右端的级数不仅在$[-\pi,\pi]$上收敛于函数x^2，而且在$(-\infty,+\infty)$内收敛于周期为2π的周期函数：$f(x)=x^2\mid f(x+2\pi)=f(x),x\in(-\infty,+\infty)$. 如图 4-5 所示.

如果给定的函数区间不是$[-\pi,\pi]$，而是$[a,b]$，欲将它展成周期为$b-a$的 Fourier 级数，只需先找一变换把$[a,b]$变为$[-\pi,\pi]$，再利用$[-\pi,\pi]$上的展开公式即可，容易看出，这可先将坐标原点移至区间$[a,b]$的中点，然后再作相似(伸缩)变换，即作变换

$$t=\frac{2\pi}{b-a}\left(x-\frac{b+a}{2}\right),$$

便可将区间$[a,b]$变为区间$[-\pi,\pi]$. 将$x=\dfrac{b-a}{2\pi}t+\dfrac{b+a}{2}$代入$f(x)$，把$f\left(\dfrac{b-a}{2\pi}t+\dfrac{b+a}{2}\right)$在$[-\pi,\pi]$上展开成周期为$2\pi$的三角级数. 最后再将级数中的$t$变换为$x$即得$f(x)$在区间$[a,b]$的 Fourier 展开式.

特别，若给定的区间为$[-l,l]$，则令$a=-l,b=l$得所需变换为

$$t=\frac{\pi}{l}x.$$

这就是《教材》中所用的变换.

如果要把在$[a,b]$区间上给出的函数$f(x)$展成周期为$2(b-a)$的余弦(正弦)级数，那么先用变换

$$t=x-a$$

将区间$[a,b]$变为$[0,l]$，$l=b-a$，然后在区间$[-l,0)$对$f(t+a)$作偶式(奇式)延拓，把延拓后的函数在$[-l,l]$上展为周期为$2l$的 Fourier 级数，再把t换回为x即得所求级数.

由延拓的思想不难看出，如果要把给定在区间$[a,b]$上的函数$f(x)$用周期为T的 Fourier 级数表示，$T>b-a$，则可先将函数f在$[a,b]$之外任意延拓到长

度为 T 的区间 I 上，即定义

$$F(x)=\begin{cases}f(x), & x\in[a,b],\\ g(x), & x\in I\setminus[a,b],\end{cases}$$

其中 $g(x)$ 可任意定义只要满足 Dirichlet 条件. 然后把 $F(x)$ 在区间 I 展成周期为 T 的 Fourier 级数. 它在区间 $[a,b]$ 上就收敛于 $f(x)$. 可见在这种情况下，f 的 Fourier 展开式可以有无穷多个.

由上可见，如果将一个周期函数展成 Fourier 级数，这只能意味着展为周期相同的 Fourier 级数，那么其展开式显然是唯一的. 但若要将一个函数展成 Fourier级数，则应该指明在什么区间上展成周期为多少的 Fourier 级数. 如果未加声明，那么应理解为级数的周期与函数的给定区间相同，若展为正弦或余弦级数，则其周期应理解为给定区间的 2 倍.

7. 关于 Fourier 级数收敛的特征及其与 Taylor 级数的差异

(1) 逐点逼近与均方逼近

对于 Taylor 级数而言，我们是用 n 次多项式 $P_n(x)$ 去逼近给定的函数 $f(x)$. 这里的逼近是逐点逼近. 即在收敛区间内，任意固定一点 x_1，当 n 越大时，多项式在此点 x_1 的值 $P_n(x_1)$ 越接近于函数值 $f(x_1)$. 当 $n\to+\infty$ 时 $P_n(x_1)\to f(x_1)$. 本书第一部分第二章图 2－1 就是多项式 $P_n(x)$ 逼近函数 $f(x)=\sin x$ 的情形，随着 x_1 远离原点 O，要使 $P_n(x_1)$ 与 $\sin x_1$ 靠近到同样程度，对 n 的要求越来越大，即多项式的项数必须越来越多. 因而我们说 Taylor 级数的收敛是逐点收敛，也在其收敛区间内任一闭区间上一致收敛.

Fourier 级数中，三角多项式

$$F_n(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$$

对函数 $f(x)$ 的逼近，不是就任一个别点来说的，而是从整个区间 $[-\pi,\pi]$ 来看的. 例如，由图 4－6 可见，尽管三角多项式 $F_n(x)$ 在 $x=0$、$-\pi$ 与 π 处始终为 $\frac{1}{2}$，但随着 n 的增大就整个区间 $[-\pi,\pi]$ 上来看，$F_n(x)$ 是越来越接近函数

$$f(x)=\begin{cases}1, & 0<x<\pi,\\ 0, & -\pi<x\leqslant 0.\end{cases}$$

下面，我们来进一步解释这种整体逼近的涵义. 假设有 m 个给定的函数值 $f(x_1),f(x_2),\cdots,f(x_m)$，对于确定的 n，要找一三角多项式 $F_n(x)$，使 $F_n(x_k)$ $(k=1,2,\cdots,m)$ 就整体来看与 $f(x_k)(k=1,2,\cdots,m)$ 最为靠近（称为最佳逼近），自然想到去用对应点距离的平均值最小来衡量，即 $\frac{1}{m}\sum\limits_{k=1}^{m}|F_n(x_k)-f(x_k)|$ 最小. 现在，在区间 $[-\pi,\pi]$ 上给定的是函数 $f(x)$，要寻找一 n 阶三角多项式 $F_n(x)$，

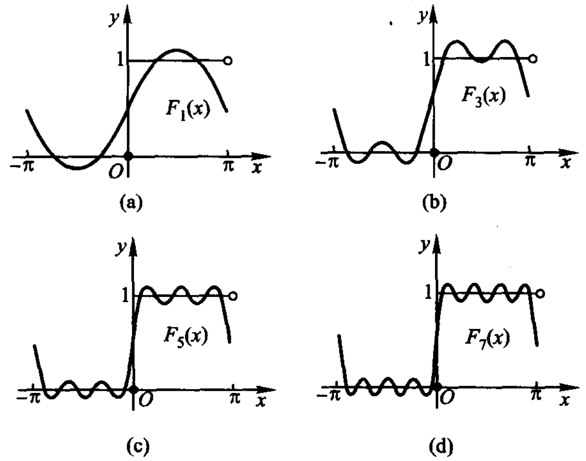


图 4-6

使 $F_n(x)$在$[-\pi,\pi]$上就整体来看与 $f(x)$最佳逼近. 当然应该把上述算术均值推广到积分均值,要求积分均值$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|F_n(x)-f(x)|\mathrm{d}x$ 最小. 然而含有绝对值的积分讨论起来不方便,故改用它的等价形式,即要求$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[F_n(x)-f(x)]^2\mathrm{d}x$ 或 $\left(\int_{-\pi}^{\pi}[F_n(x)-f(x)]^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}$最小. 可以证明(从略)在积分$\left(\int_{-\pi}^{\pi}[F_n(x)-f(x)]^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}$最小的条件下所求出的 $F_n(x)$表达式中的系数 $a_k(k=0,1,\cdots,n)$与 $b_k(k=1,2,\cdots,n)$就是由 Enler - Fourier 公式所表达的 Fourier 系数. 所以我们说由 Fourier 级数所反映的三角多项式对函数的逼近是最佳均方逼近,它是在区间$[-\pi,\pi]$上使其绝对误差平均最小的一种三角函数逼近. 这时的收敛是在区间$[-\pi,\pi]$上的均方收敛.

(2) Fourier 级数与 Taylor 级数的比较

1) $f(x)$的 Taylor 级数要求的条件很强,要 $f(x)$任意阶可导,即 $f\in C^{\infty}$,而且若要 $f(x)$的 Taylor 级数在区间 I 收敛于 $f(x)$,即 $f(x)$在 I 可展开成 Taylor 级数,还必须要求 $n\to+\infty$时余项 $R_n(x)\to0$, $\forall x\in I$;Fourier 级数要求的条件要宽得多,只要 f 在$[-\pi,\pi]$上满足 Dirichlet 条件,f 不仅有 Fourier 级数,而且 f 还可在$[-\pi,\pi]$上展开成其 Fourier 级数. 因而 Fourier 级数适用的范围要比 Taylor 级数广泛.

2) Taylor 级数的收敛是在其收敛区间内逐点绝对收敛且内闭一致收敛;Fourier 级数的收敛从局部看是几乎处处收敛,即除去有限个点或"数量很少"的点外都处处收敛,从整体来看,它是均方收敛.

3）Taylor 展式是用幂函数的多项式来逼近函数，当用多项式研究所论问题方便时（例如求函数近似值，讨论函数某些几何性态等），Taylor 展式比 Fourier展式优越；Fourier 展式是用三角多项式来逼近函数，由于三角函数的周期性，Fourier 展式不仅可以在给定区间上表示函数，而且可以表示此函数周期延拓所构成的波形. 从而可对各种周期函数（波形）进行应用中十分重要的谐波分析.

4）一个函数 f 在区间 I 若能展开成幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$，则其形式是唯一的，而且 $a_n = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$；但将函数 $f \in C[a,b]$ 展成周期为 $T(T \geqslant b-a)$ 的 Fourier 级数时，当 $T > b-a$ 时可有无穷多种形式，只有当 $T = b-a$ 时形式是唯一的.

*5）同一幂级数可以是不同函数的 Maclaurin 级数. 例如，上面问题 5 中已经证明函数

$$f_0(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

满足

$$f_0 \in C^\infty(-\infty, +\infty) \quad 且\ f_0^{(n)}(0) = 0, n = 1, 2, \cdots,$$

故对任一实数 α，$f(x) + \alpha f_0(x)$ 的 Maclaurin 级数都相同. 换句话说，对于给定的 $f \in C^\infty$ 和不同的实数 α，有无穷多个函数 $f(x) + \alpha f_0(x)$，它们的 Maclaurin 级数都相同. 但由于 f_0 的 Maclaurin 级数收敛于零而非 $f_0(x)$ 本身，故 $f(x) + \alpha f_0(x)$ 的 Maclaurin 级数仅收敛于 $f(x)$，而不收敛于 $f(x) + \alpha f_0(x)(\alpha \neq 0)$. 由此可见，函数 $f(x) + \alpha f_0(x)$ 当 $\alpha \neq 0$ 时不能 Maclaurin 展开.

周期为 2π 的同一三角级数能否是不同函数的周期为 2π 的 Fourier 级数呢？若 f 在周期区间上不连续，显然是可能的，因为变动有限个点的函数值，将是不同的函数，但它们的 Fourier 级数均相同；若 f 连续，则上述情况是不可能的. 事实上若设 $f_1 \neq f_2$，但它们有相同的 Fourier 级数. 从而 $f \equiv f_1 - f_2$ 的 Fourier系数均为零. 由表示系数的 Enler－Fourier 公式可知，f 与正交函数系 $\{1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \cdots\}$ 的任一元素均正交. 从而此函数系不完备. 这一矛盾表明，在 $[-\pi, \pi]$ 上定义的不同的连续函数，它们的周期为 2π 的 Fourier 级数必然不同.

第二部分　教学要求、典型例题与讨论题

第一章　函数、极限、连续

第一讲　数列的极限

1. 教学要求与学习注意点

1）熟悉集合的概念及其基本运算，理解积集的概念.

2）从几何上直观理解实数集的完备性，理解实数集上（下）确界的概念，知道确界存在定理是实数集的本质属性，是实数完备性的表现.

3）理解满射、单射、一一映射三类常见映射的概念.

4）正确理解复合映射的概念及映射复合的条件.

5）正确理解逆映射的概念，熟悉映射可逆的充要条件为它是一一映射.

6）正确理解函数是从一个实数集到另一个实数集的映射这个定义，从而掌握构成函数的两个基本要素；理解复合函数的概念及复合的条件；理解反函数的概念及反函数存在条件.

7）熟悉函数的表示方法及分段函数.

8）熟悉初等函数、双曲函数及反双曲函数.

9）正确理解数列极限的直观意义，会用 $\varepsilon-N$ 语言和邻域两种方法表述数列极限的定义，能用 $\varepsilon-N$ 定义证明简单数列的极限.

10）熟悉数列极限的性质及其应用.

11）掌握数列极限的有理运算法则及夹逼原理，并会利用它们求数列极限.

12）正确理解单调有界准则，会使用这个准则判别数列的收敛性，熟悉重要极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e}$，并会利用该极限求一些相关数列的极限.

13）掌握数列极限与子列极限的关系，会利用这种关系判定数列极限不存在，知道有界数列必有收敛子列.

14）理解 Cauchy 数列的概念和 Cauchy 收敛原理，会用 Cauchy 收敛原理判定数列的收敛性.

本讲中的大部分内容在中学都讲到过，但中学和大学在要求上还有比较大的差距. 比如说，数列极限的定义和求极限的方法在中学都已讲过，但很多同学

对数列极限的 $\varepsilon-N$ 定义并不完全理解，而现在我们通过进一步学习应该正确理解数列极限 $\varepsilon-N$ 定义的含义，懂得定义中的 ε 和 N 的作用，懂得为什么这个定义精确刻画了“当 n 无限增大时，a_n 无限接近于常数 a”这个事实．至于用此定义证明数列极限，只要求能证明一些简单的极限，但尽管如此，还是要求同学能正确书写证明过程．对于给定 ε 求 N，技巧方面不作过高要求．

2. 典型例题

例 1　利用数列极限的 $\varepsilon-N$ 定义证明下列各式：

1）$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\sqrt{n^2+10}}=1$；

2）$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$；

3）若 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=a$．

分析　利用数列极限的 $\varepsilon-N$ 定义证明数列极限，关键是要证明对任意给定的 $\varepsilon>0$，定义中的 N 的存在性．一般采用给定 ε 后具体找出 N 的方法，但 N 是为了确保当 $n>N$ 时，$|a_n-a|<\varepsilon$ 成立，因此找 N 应从 $|a_n-a|<\varepsilon$ 着手，简单问题就能从 $|a_n-a|<\varepsilon$ 中解出定义中的 N，但复杂一点的问题要从 $|a_n-a|<\varepsilon$ 中解出定义中的 N 是非常困难的，此时，通常采用“适当放大”的方法，即 $|a_n-a|\leqslant\varphi(n)$，令 $\varphi(n)<\varepsilon$ 找 N．这里 $\varphi(n)$ 的选取是关键，$\varphi(n)$ 的选取应在 $\lim\limits_{n\to\infty}\varphi(n)=0$ 这个原则下越简单越好．

证　1）由于 $\left|\dfrac{n}{\sqrt{n^2+10}}-1\right|=\dfrac{\sqrt{n^2+10}-n}{\sqrt{n^2+10}}=\dfrac{10}{\sqrt{n^2+10}(\sqrt{n^2+10}+n)}<\dfrac{10}{n}$．

因此，对于任意给定的 $\varepsilon>0$，要使 $\left|\dfrac{n}{\sqrt{n^2+10}}-1\right|<\varepsilon$，只要 $\dfrac{10}{n}<\varepsilon$，即 $n>\dfrac{10}{\varepsilon}$．

从而，$\forall\,\varepsilon>0$，取 $N=\left[\dfrac{10}{\varepsilon}\right]$，当 $n>N$ 时，恒有

$$\left|\frac{n}{\sqrt{n^2+10}}-1\right|<\varepsilon,$$

故
$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+10}}=1.$$

注　本题证明过程中如果直接从 $\left|\dfrac{n}{\sqrt{n^2+10}}-1\right|<\varepsilon$，即 $\dfrac{10}{\sqrt{n^2+10}(\sqrt{n^2+10}+n)}<\varepsilon$ 中解 N 显然比较繁，因此本题中采用了“适当放大”的方法，$\dfrac{10}{\sqrt{n^2+10}(\sqrt{n^2+10}+n)}<\dfrac{10}{n}$，而从 $\dfrac{10}{n}<\varepsilon$ 找 N 显然非常方便，这是证明

的关键所在.

2) **证法一** 由于$\left|\sqrt[n]{n}-1\right|=\sqrt[n]{n}-1$,

令$\sqrt[n]{n}-1=\alpha_n$,显然 $\alpha_n\geqslant 0$,且

$$n=(1+\alpha_n)^n=1+n\alpha_n+\frac{n(n-1)}{2!}\alpha_n{}^2+\cdots+\alpha_n{}^n>\frac{n(n-1)}{2!}\alpha_n{}^2$$

从而有 $\alpha_n<\sqrt{\frac{2}{n-1}}$,即$\sqrt[n]{n}-1<\sqrt{\frac{2}{n-1}}$.

因此,$\forall\varepsilon>0$,要使$\left|\sqrt[n]{n}-1\right|<\varepsilon$,只要$\sqrt{\frac{2}{n-1}}<\varepsilon$,即 $n>\frac{2}{\varepsilon^2}+1$,则

$\forall\varepsilon>0$,取 $N=\left[\frac{2}{\varepsilon^2}+1\right]$,当 $n>N$ 时,恒有$\left|\sqrt[n]{n}-1\right|<\varepsilon$,故 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$

证法二 由于$\left|\sqrt[n]{n}-1\right|=\sqrt[n]{n}-1$,而

$$\sqrt[n]{n}=\Big(\sqrt{n}\cdot\sqrt{n}\cdot\overbrace{1\cdot\cdots\cdot 1}^{n-2\text{个}1}\Big)^{\frac{1}{n}}\leqslant\frac{\sqrt{n}+\sqrt{n}+\overbrace{1+\cdots+1}^{n-2\text{个}1}}{n}$$

$$=\frac{2\sqrt{n}+n-2}{n}=1+\frac{2}{\sqrt{n}}-\frac{2}{n}<1+\frac{2}{\sqrt{n}},$$

从而有$\left|\sqrt[n]{n}-1\right|<\frac{2}{\sqrt{n}}$,以下与证法一类似.

注 本题中所证明的极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$ 是一个常用的结论.该题的两种证法中都采用了"适当放大"的思想,证法一中是利用二项式公式将 α_n 放大,证法二中是利用基本不等式$\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}\leqslant\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$(其中 $x_i\geqslant 0$)将 $\sqrt[n]{n}$ 放大.

3) **分析** 由 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$ 知,$\forall\varepsilon>0$,$\exists m\in\mathbf{N}_+$,当 $n>m$ 时,$|a_n-a|<\varepsilon$.而当 $n>m$ 时,

$$\left|\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}-a\right|\leqslant\frac{|a_1+a_2+\cdots+a_m-ma|}{n}+\frac{|a_{m+1}-a|+\cdots+|a_n-a|}{n},$$

上式右端中的第一项的分子是一个常数,当分母中 n 无限增大时它可任意小,而上式右端中的第二项的分子中每项都小于 ε,所以第二项小于 ε.

证 由于 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$,则$\forall\varepsilon>0$,$\exists m\in\mathbf{N}_+$,当 $n>m$ 时,有$|a_n-a|<\varepsilon$,又 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_m-ma}{n}=0$,则$\exists N\geqslant m$,当 $n>N$ 时,$\left|\frac{a_1+a_2+\cdots+a_m-ma}{n}\right|<\varepsilon$.

于是,$\forall\varepsilon>0$,$\exists N\in\mathbf{N}_+$,当 $n>N$ 时.

$$\left|\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}-a\right|\leqslant\left|\frac{a_1+a_2+\cdots+a_m-ma}{n}\right|+\frac{|a_{m+1}-a|+\cdots+|a_n-a|}{n}$$

$$<\varepsilon+\frac{n-m}{n}\varepsilon<\varepsilon+\varepsilon=2\varepsilon,$$

故
$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=a.$$

注 本题所证的结论是一个常用的结论，利用它可以计算一些极限. 例如

i) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}{n}=0$ $\left(\text{由于}\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=0\right)$；

ii) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}+\cdots+\sqrt[n]{n}}{n}=1$ （由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$）.

例 2 求下列各极限：

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\sqrt{1+2+\cdots+n}-\sqrt{1+2+\cdots+(n-1)}\right]$；

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{15}+\cdots+\dfrac{1}{4n^2-1}\right)$；

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{1+2}+\dfrac{1}{1+2+3}+\cdots+\dfrac{1}{1+2+\cdots+n}\right)$.

解 1)
$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\left[\sqrt{1+2+\cdots+n}-\sqrt{1+2+\cdots+(n-1)}\right]\\&=\lim_{n\to\infty}\left[\sqrt{\frac{n(n+1)}{2}}-\sqrt{\frac{n(n-1)}{2}}\right]\\&=\frac{1}{\sqrt{2}}\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{\sqrt{n(n+1)}+\sqrt{n(n-1)}}\\&=\frac{\sqrt{2}}{2}.\end{aligned}$$

2) 由于$\dfrac{1}{4n^2-1}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2n-1}-\dfrac{1}{2n+1}\right)$，则

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{15}+\cdots+\frac{1}{4n^2-1}\right)\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left[\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)\right]\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

注 本题中所用的方法是求 n 项和数列极限的一种常用方法.

3) 由于 $1+2+3+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$，而$\dfrac{1}{n(n+1)}=\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}$，

$$\begin{aligned}\text{原式}&=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{2\times3}+\frac{2}{3\times4}+\cdots+\frac{2}{n(n+1)}\right)\\&=\lim_{n\to\infty}\left[1+2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right]\end{aligned}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(2-\frac{2}{n+1}\right)=2.$$

例 3　求下列数列的极限：

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+2^n+3^n}$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+n+1}+\frac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n+n}\right)$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\cdots\cdot(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdot\cdots\cdot(2n)}}$.

解　1) **解法一**　由于 $\sqrt[n]{3^n}<\sqrt[n]{1+2^n+3^n}<\sqrt[n]{3\cdot3^n}$,
而 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{3^n}=\lim\limits_{n\to\infty}3=3$.　$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{3\cdot3^n}=\lim\limits_{n\to\infty}3\sqrt[n]{3}=3$.
由夹逼原理知

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+2^n+3^n}=3.$$

解法二　由于 $\sqrt[n]{1+2^n+3^n}=3\sqrt[n]{1+\left(\frac{1}{3}\right)^n+\left(\frac{2}{3}\right)^n}$,

而 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+\left(\frac{1}{3}\right)^n+\left(\frac{2}{3}\right)^n}=1$,则

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+2^n+3^n}=3.$$

2) **分析**　这是一个 n 项和的数列极限,求这种极限通常是用夹逼原理.

解　由于

$$\frac{1+2+\cdots+n}{n^2+n+n}\leqslant\frac{1}{n^2+n+1}+\frac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n+n}\leqslant\frac{1+2+\cdots+n}{n^2+n+1},$$

而

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+\cdots+n}{n^2+n+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n^2+n+n}=\frac{1}{2},$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+\cdots+n}{n^2+n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n^2+n+1}=\frac{1}{2},$$

由夹逼原理知 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+n+1}+\frac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n+n}\right)=\frac{1}{2}$.

3) **分析**　本题根式内的分子分母都是 n 项连乘的形式,又不能直接化简,这类问题也可以考虑用夹逼原理.

解　由于

$$\frac{1}{2n}\leqslant\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{7}{6}\cdot\cdots\cdot\frac{2n-1}{2n-2}\cdot\frac{1}{2n}=\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\cdots\cdot(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdot\cdots\cdot(2n)}\leqslant1,$$

则

$$\frac{1}{\sqrt[n]{2n}}\leqslant\sqrt[n]{\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\cdots\cdot(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdot\cdots\cdot(2n)}}\leqslant1,$$

而 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2n}=\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt[n]{2}\sqrt[n]{n})=1$，则

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\cdots\cdot(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdot\cdots\cdot(2n)}}=1.$$

注 本题中三个小题所用的一个共同的方法是夹逼原理.夹逼原理是求数列极限的一个常用方法，通常用在 n 项和的数列或出现连乘的形式的数列.

例 4 设 $x_n\leqslant a\leqslant y_n(n=1,2,\cdots)$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n-y_n)=0$，求证

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}y_n=a.$$

分析 由于原题所给条件 $x_n\leqslant a\leqslant y_n$ 是一个不等式关系，且 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n-y_n)=0$，所以我们应考虑夹逼原理.

证法一 由 $x_n\leqslant a\leqslant y_n(n=1,2,\cdots)$知

$$0\leqslant a-x_n\leqslant y_n-x_n,0\leqslant y_n-a\leqslant y_n-x_n,$$

而 $\lim\limits_{n\to\infty}(y_n-x_n)=0$，则

$$\lim_{n\to\infty}x_n=a,\quad \lim_{n\to\infty}y_n=a.$$

证法二 由 $x_n\leqslant a\leqslant y_n(n=1,2,\cdots)$知

$$0\leqslant y_n-a\leqslant y_n-x_n,$$

而 $\lim\limits_{n\to\infty}(y_n-x_n)=0$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=a$.

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}[(x_n-y_n)+y_n]=0+a=a.$$

注 本题有一种典型的错误证法如下：

由 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n-y_n)=0$ 知，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}y_n$.

又 $x_n\leqslant a\leqslant y_n$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n\leqslant a\leqslant\lim\limits_{n\to\infty}y_n$，

故 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}y_n=a$.错在何处呢？请读者考虑.

例 5 设有数列$\{a_n\}$，若 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=q,|q|<1$，求证 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$.并利用以上结论证明：

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^n}{n!}=0\quad(a>0)$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^p}{a^n}=0\quad(p>0,a>1)$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^n}{(n!)^2}=0$.

分析 由 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=q$ 知 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=|q|<1$，又 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$ 等价于 $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=0$，则只要证明 $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=0$.

证　由 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=q$ 知 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=|q|$,

又 $|q|<1$,则存在 $\varepsilon_0>0$,使 $|q|+\varepsilon_0<1$,从而应存在 $N\in\mathbf{N}_+$,当 $n>N$ 时

$$\left|\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|-|q|\right|<\varepsilon_0,$$

则　当 $n>N$ 时有

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|<|q|+\varepsilon_0,$$

即

$$|a_{n+1}|<(|q|+\varepsilon_0)|a_n|.$$

令　$|q|+\varepsilon_0=r$,则 $0<r<1$,且当 $n>N$ 时,$|a_{n+1}|<r|a_n|$,对任意的 $m\in\mathbf{N}_+$,

$$|a_{N+m}|<r|a_{N+m-1}|<\cdots<r^{m-1}|a_{N+1}|,$$

而　$\lim\limits_{m\to\infty}r^{m-1}=0$,则 $\lim\limits_{m\to\infty}|a_{N+m}|=0$,

则　$\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=0$,

故

$$\lim_{n\to\infty}a_n=0.$$

1）由于

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{a^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{a^n}=\frac{a}{n+1},$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=0,$$

由本题的结论知 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!}=0$.

2）由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{(n+1)^p}{a^{n+1}}\cdot\frac{a^n}{n^p}\right)=\frac{1}{a}\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^p=\frac{1}{a}$

而 $\left|\frac{1}{a}\right|<1$,则 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^p}{a^n}=0$.

3）由于

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{(n+1)^{n+1}}{((n+1)!)^2}\cdot\frac{(n!)^2}{n^n}\right]$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=0,$$

则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^n}{(n!)^2}=0.$$

注　本题中所证明的结论“若 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=q$,且 $|q|<1$,则 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$”在第四章级数理论中也是一个重要的结论.

例 6　证明下列数列极限存在,并求其极限

1）设 $0<x_1<3$, $x_{n+1}=\sqrt{x_n(3-x_n)}$　$(n=1,2,\cdots)$;

2）设 $x_1=10,x_{n+1}=\sqrt{6+x_n}$　$(n=1,2,\cdots)$;

3）设 $x_1=1,x_{n+1}=\frac{2(1+x_n)}{2+x_n}$　$(n=1,2,\cdots)$.

分析　本题中所给数列都是用递推关系定义的，这类问题一般先利用单调有界准则证明极限存在，然后等式两端取极限后解方程求出极限.

证　1）由 $0<x_1<3$ 知，x_1 和 $3-x_1$ 均为正数，则

$$0<x_2=\sqrt{x_1(3-x_1)}\leqslant\frac{1}{2}(x_1+3-x_1)=\frac{3}{2}.$$

设 $0<x_k\leqslant\frac{3}{2}(k>1)$，则

$$0<x_{k+1}=\sqrt{x_k(3-x_k)}\leqslant\frac{1}{2}(x_k+3-x_k)=\frac{3}{2},$$

由数学归纳法知，对任意正数 $n>1$，均有 $0<x_n<\frac{3}{2}$，因而数列 $\{x_n\}$ 有界. 以下证明数列 $\{x_n\}$ 的单调性，有两种方法，

证法一　当 $n>1$ 时，

$$x_{n+1}-x_n=\sqrt{x_n(3-x_n)}-x_n=\sqrt{x_n}(\sqrt{3-x_n}-\sqrt{x_n})=\frac{\sqrt{x_n}(3-2x_n)}{\sqrt{3-x_n}+\sqrt{x_n}}\geqslant0.$$

证法二　当 $n>1$ 时，

$$\frac{x_{n+1}}{x_n}=\frac{\sqrt{x_n(3-x_n)}}{x_n}=\sqrt{\frac{3}{x_n}-1}\geqslant\sqrt{\frac{3}{\frac{3}{2}}-1}=1.$$

因而 $x_{n+1}\geqslant x_n(n>1)$，则数列 $\{x_n\}$ 单调增，由单调有界准则知 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，令 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，等式 $x_{n+1}=\sqrt{x_n(3-x_n)}$ 两端取极限得

$$a=\sqrt{a(3-a)},$$

解之得 $a=\frac{3}{2}$，$a=0$（舍去），

故
$$\lim_{n\to\infty}x_n=\frac{3}{2}.$$

2）**证法一**　先用数学归纳法证明数列 $\{x_n\}$ 单调减.

由 $x_1=10$，$x_2=\sqrt{x_1+6}=\sqrt{16}=4$ 知，$x_1>x_2$. 即 $n=1$ 时有 $x_n>x_{n+1}$. 设 $n=k$ 时不等式 $x_n>x_{n+1}$ 成立，由 $x_{k+1}=\sqrt{x_k+6}>\sqrt{x_{k+1}+6}=x_{k+2}$ 可知，$n=k+1$ 时 $x_n>x_{n+1}$ 也成立，从而证明了 $\{x_n\}$ 单调减.

又因为 $x_n>0(n=1,2,\cdots)$，则 $\{x_n\}$ 下有界，由单调有界准则知数列 $\{x_n\}$ 收敛，设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，等式 $x_{n+1}=\sqrt{x_n+6}$ 两边取极限得 $a=\sqrt{a+6}$，解之得 $a=3$，$a=-2$（与题设不符，舍去），

故
$$\lim_{n\to\infty}x_n=3.$$

证法二　直接证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=3$.

$$|x_{n+1}-3|=|\sqrt{x_n+6}-3|=\left|\frac{x_n-3}{\sqrt{x_n+6}+3}\right|<\frac{|x_n-3|}{3}$$
$$<\frac{1}{3^2}|x_{n-1}-3|<\cdots<\frac{1}{3^n}|x_1-3|=\frac{7}{3^n},$$

由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{7}{3^n}=0$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_{n+1}=3$，

故
$$\lim_{n\to\infty}x_n=3.$$

3) 由 $x_1=1>0$，且 $x_{n+1}=1+\frac{x_n}{2+x_n}(n=1,2,\cdots)$ 知，$0<x_n<2(n=1,2,\cdots)$，即 $\{x_n\}$ 有界. 以下只要证明 $\{x_n\}$ 的单调性.

由于
$$x_{n+1}-x_n=\frac{2(1+x_n)}{2+x_n}-\frac{2(1+x_{n-1})}{2+x_{n-1}}$$
$$=\frac{2(x_n-x_{n-1})}{(2+x_n)(2+x_{n-1})}$$

则 $x_{n+1}-x_n$ 与 x_n-x_{n-1} 同号，而

$$x_2-x_1=\frac{4}{3}-1>0，则 x_{n+1}-x_n>0\quad(n=1,2,\cdots).$$

由单调有界准则知 $\{x_n\}$ 有极限，设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，则

$$a=\frac{2(1+a)}{2+a},$$

解得 $a=\sqrt{2}$，$a=-\sqrt{2}$（与题设不符，舍去），

故
$$\lim_{n\to\infty}x_n=\sqrt{2}.$$

注　本题中三个例子均利用单调有界准则证明数列收敛. 在证明单调性时通常是考虑 $x_{n+1}-x_n$ 或 $\frac{x_{n+1}}{x_n}$（当 x_n 恒正或恒负），而在证明单调性和有界性时基本不等式 $\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}\leqslant\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}(x_i\geqslant0,i=1,2,\cdots,n)$ 和数学归纳法是常用的.

例 7　设 $x_n=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{n}$，试证数列 $\{x_n\}$ 收敛.

分析　证明数列收敛常用的是单调有界准则和 Cauchy 原理. 显然本题中的数列 $\{x_n\}$ 不单调，我们考虑 Cauchy 原理.

证　$\forall n,p\in\mathbf{N}_+$，

$$|x_{n+p}-x_n|=\left|\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}+\cdots\frac{(-1)^{p-1}}{n+p}\right|.$$

若 p 为奇数，则

$$|x_{n+p}-x_n|=\frac{1}{n+1}-\left(\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}\right)-\left(\frac{1}{n+4}-\frac{1}{n+5}\right)-\cdots$$
$$-\left(\frac{1}{n+p-1}-\frac{1}{n+p}\right)$$
$$<\frac{1}{n+1}<\frac{1}{n};$$

若 p 为偶数，则

$$|x_{n+p}-x_n|=\frac{1}{n+1}-\left(\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}\right)-\left(\frac{1}{n+4}-\frac{1}{n+5}\right)-\cdots$$
$$-\left(\frac{1}{n+p-2}-\frac{1}{n+p-1}\right)-\frac{1}{n+p}$$
$$<\frac{1}{n+1}<\frac{1}{n}.$$

由此可见，$\forall\varepsilon>0$，$\exists N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$，使得 $\forall n>N$，及 $p\in\mathbf{N}_+$，恒有 $|x_{n+p}-x_n|<\varepsilon$.

由 Cauchy 原理知原数列收敛.

例 8　设数列 $\{x_n\}$ 满足 $|x_{n+1}-x_n|\leqslant q|x_n-x_{n-1}|$ $(n=1,2,\cdots)$，其中 $0<q<1$. 求证数列 $\{x_n\}$ 收敛.

分析　由本题所给条件不能断定数列 $\{x_n\}$ 的单调性，所以考虑 Cauchy 原理.

证　由于 $|x_{n+1}-x_n|\leqslant q|x_n-x_{n-1}|\leqslant q^2|x_{n-1}-x_{n-2}|\leqslant\cdots\leqslant q^n|x_1-x_0|$，则对 $\forall n,p\in\mathbf{N}_+$，有

$$|x_{n+p}-x_n|\leqslant|x_{n+p}-x_{n+p-1}|+|x_{n+p-1}-x_{n+p-2}|+\cdots$$
$$+|x_{n+1}-x_n|\leqslant(q^{n+p-1}+q^{n+p-2}+\cdots+q^n)|x_1-x_0|$$
$$=\frac{q^n(1-q^p)}{1-q}|x_1-x_0|$$
$$<q^n\frac{|x_1-x_0|}{1-q},$$

由于 $0<q<1$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(q^n\frac{|x_1-x_0|}{1-q}\right)=0$，所以，$\forall\varepsilon>0$，$\exists N>0$，当 $n>N$ 时，$q^n\frac{|x_1-x_0|}{1-q}<\varepsilon$，从而 $\forall n>N$，及 $p\in\mathbf{N}_+$，恒有 $|x_{n+p}-x_n|<\varepsilon$.

由 Cauchy 原理知，数列 $\{x_n\}$ 收敛.

3. 讨论题

1）下列说法能否作为 a 是数列 $\{a_n\}$ 的极限的定义？为什么？

(1) 对于无穷多个 $\varepsilon>0$，存在 $N\in\mathbf{N}_+$，当 $n>N$ 时，不等式 $|a_n-a|<\varepsilon$ 成立.

(2) 对于任给的 $m\in\mathbf{N}_+$，存在 $N\in\mathbf{N}_+$，当 $n>N$ 时，不等式 $|a_n-a|<\frac{1}{m}$ 成立.

(3) 对于任给的 $\varepsilon>0$，存在 $N\in\mathbf{N}_+$，当 $n>N$ 时，有无穷多项 a_n 使不等式 $|a_n-a|<\varepsilon$ 成立.

(4) 对给定的 $\varepsilon_0=10^{-10}$，不等式 $|a_n-a|<\varepsilon_0$ 恒成立.

2) 说明下列表述都可作为 a 是 $\{a_n\}$ 极限的定义.

(1) 对任给的 $\varepsilon>0$，存在 $N\in\mathbf{N}_+$，当 $n\geqslant N$ 时，不等式 $|a_n-a|<\varepsilon$ 成立.

(2) 对任给的 $\varepsilon>0$，存在 $N\in\mathbf{N}_+$，当 $n>N$ 时，不等式 $|a_n-a|\leqslant\varepsilon$ 成立.

(3) 对任给的 $\varepsilon>0$，存在 $N\in\mathbf{N}_+$，当 $n>N$ 时，不等式 $|a_n-a|<k\varepsilon$，其中 k 为正常数.

(4) 对于任给的 $\varepsilon>0$，存在 $N\in\mathbf{N}_+$，使不等式 $|a_{n+p}-a|<\varepsilon$ 对任意的自然数 p 都成立.

3) 有人说，数列极限 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$ 表示当 n 充分大后，a_n 越来越接近于 a. 这种说法对吗?

4) 数列极限定义中的 N 和 ε 的作用是什么? N 与 ε 是什么关系? N 是不是 ε 的函数?

5) "数列 $\{a_n\}$ 不以 A 为极限"和"数列 $\{a_n\}$ 发散"这两个命题是什么关系? 如何用 $\varepsilon-N$ 语言刻画"数列 $\{a_n\}$ 不以 a 为极限"?

6) 若数列 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 是两个发散数列，它们的和与积是否发散? 为什么? 若其中一个发散，一个收敛，它们的和与积的收敛性又如何?

7) 下列计算方法是否正确? 为什么?

(1) $$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot\cdots\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot\cdots\cdot\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)=1$$

(2) 设 $a_n=q^n$（其中 $q>1$），则 $a_{n+1}=qa_n$，令 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，等式 $a_{n+1}=qa_n$ 两端取极限得 $a=qa$，从而有 $a=0$，故 $\lim\limits_{n\to\infty}q^n=0$.

8) 下列结论是否正确? 若正确，请给出证明；若不正确请举出反例.

(1) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}a_{n+1}=a$；

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$ 等价于 $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=|a|$；

(3) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=1$.

9) 单调有界准则中，若将"数列 $\{a_n\}$ 单调"改为"从某一项之后数列 $\{a_n\}$ 单调"，结论还成立吗? 为什么? 数列 $a_n=\dfrac{10}{1}\cdot\dfrac{11}{3}\cdot\cdots\cdot\dfrac{n+9}{2n-1}$ 是否单调? 是否收敛? 如果收敛，试求该数列极限.

10) 对于数列 $\{a_n\}$，条件"对任意自然数 p，都有 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_{n+p}-a_n)=0$"与

Cauchy 收敛原理中的条件等价吗?

4. 练习题

1. 试用数列极限的 $\varepsilon-N$ 定义证明下列各式:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=0$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2-n+2}{3n^2+2n-4}=\dfrac{1}{3}$.

2. 求下列数列极限:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{3}{1^2\times 2^2}+\dfrac{5}{2^2\times 3^2}+\cdots+\dfrac{2n+1}{n^2\times(n+1)^2}\right]$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{3}+\cdots+\dfrac{n}{n+1}}{n}$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}}$;

4) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+\cdots+a_m^n}$,其中 $a_i>0(i=1,2,\cdots,m)$;

5) $\lim\limits_{n\to\infty}[(n+1)^\alpha-n^\alpha](0<\alpha<1)$.

6) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n n!}{n^n}$

3. 设 $x_1=\sqrt{2},x_{n+1}=\sqrt{3+2x_n}(n=1,2,\cdots)$,证明数列$\{x_n\}$收敛并求它的极限.

4. 设 $x_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$,求证:若 $y_n=|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_n|$收敛,则$\{x_n\}$必收敛.

5. 设数列$\{x_n\}$无上界,试证必存在子列$\{x_{n_k}\}$,使 $\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k}=+\infty$.

6. 试证明数列$\{x_n\}$有界的充分必要条件是$\{x_n\}$的任意子列$\{x_{n_k}\}$都有收敛子列.

第二讲　函数的极限与函数连续性

1. 教学要求与学习注意点

1) 正确理解函数极限(包括左、右极限)的 $\varepsilon-\delta$ 及 $\varepsilon-M$ 定义及其几何意义,会用定义证明简单函数极限.

2) 理解归并原理,会用它将函数极限的问题转化为数列极限的相应问题,并判定函数极限的不存在.

3) 熟悉函数极限的性质(特别是保号性和夹逼原理)及其作用.

4）正确使用函数极限的有理运算与复合运算法则计算函数的极限，特别是要掌握求不定式极限的方法.

5）牢记两个重要极限公式：

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1,\quad \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e},$$

并会利用这两个重要极限求一些相关的函数极限.

6）知道判定函数极限存在的单调有界准则与 Cauchy 收敛原理.

7）正确理解无穷小量与无穷大量，高阶、同阶与等价及低阶无穷小的概念.掌握利用等价无穷小求极限的方法，熟悉常用的等价无穷小，如

当 $x\to 0$ 时，

$$x\sim\sin x\sim\arcsin x\sim\tan x\sim\arctan x\sim \mathrm{e}^x-1\sim\ln(1+x),$$

$$1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2,(1+x)^\alpha-1\sim\alpha x,a^x-1\sim x\ln a.$$

8）正确理解函数在一点的连续及连续函数的概念.

9）熟悉连续函数的运算性质（包括和、差、积、商、复合及反函数的连续性）及初等函数的连续性.掌握利用函数连续性求函数极限的方法.

10）会求函数的间断点，并判断间断点的类型.

11）熟悉闭区间上连续函数的性质（有界性，最大最小值定理，零点定理与介值定理），并会利用这些性质解决一些简单问题（如函数方程根的存在性）.

12）理解一致连续的概念，会用定义判定一些简单函数的一致连续性.

学习注意点

本讲集中了函数极限的各种定义，性质及判别准则.就极限思想来说，函数极限与数列极限是完全相同的，性质及其判别准则是完全对应的，但是要注意它们在形式上的区别.Heine 定理是沟通数列极限与函数极限的桥梁，它指出，函数极限可化为数列极限，反之亦然.在极限理论中 Heine 定理处于重要的地位.

无穷小是微积分中一个重要的概念，它是极限为零的特殊变量.任何类型的极限都可归结为无穷小，因此极限方法的实质就是无穷小的方法.无穷小不仅可表述极限，而它本身也很有用，这一点在以后学习中会逐步有所体会，在微积分中，无穷小与极限占有同等的重要地位.

连续函数是微积分最基本的研究对象，函数的连续和间断是微积分两个基本概念，必须深刻理解其含义.连续函数有很多重要性质，在以后学习中会经常用到.因此，我们必须理解并掌握连续函数的一系列重要性质.

2. 典型例题

例 1　利用函数极限定义证明下列各式：

1）$\lim\limits_{x\to 1}(x^2+2x)=3$；

2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{x^2+2x-10}=1$；

3) $\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{x+1}{x-1}=-\infty$.

分析 利用定义证明函数极限与利用定义证明数列极限方法完全类似.例如要证明 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=a$，关键是要证明对任意给定的 $\varepsilon>0$，定义中的 δ 的存在性.一般采用给定 $\varepsilon>0$ 后具体找出 δ 的方法，但 δ 是为了确保当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，$|f(x)-a|<\varepsilon$ 成立，因此找 δ 应从 $|f(x)-a|<\varepsilon$ 着手，简单问题就能从 $|f(x)-a|<\varepsilon$ 中解出定义中的 δ，但复杂一点的问题要从 $|f(x)-a|<\varepsilon$ 中解出定义中的 δ 是非常困难的，此时，通常采用"适当放大"的方法，由于我们考虑的是 $x\to x_0$ 的极限，这时可将 x 限定在 x_0 的某去心邻域，如令 $0<|x-x_0|<\alpha$，然后将 $|f(x)-a|$ 放大找出定义中的 δ.

证 1) 由于 $|x^2+2x-3|=|x-1|\,|x+3|$.
令 $|x-1|<1$，则 $|x+3|=|(x-1)+4|\leqslant|x-1|+4<5$，
从而有 $|x^2+2x-3|\leqslant5|x-1|$（适当放大）

因此，对任给的 $\varepsilon>0$，取 $\delta=\left\{\dfrac{\varepsilon}{5},1\right\}$，当 $0<|x-1|<\delta$ 时，有 $|x^2+2x-3|<\varepsilon$.

故
$$\lim_{x\to1}(x^2+2x)=3.$$

2) 由于 $\left|\dfrac{x^2}{x^2+2x-10}-1\right|=\left|\dfrac{2x-10}{x^2+2x-10}\right|<\dfrac{2x+10}{|x^2+2x-10|}$

令 $x>10$，则
$$\frac{2x+10}{|x^2+2x-10|}=\frac{2x+10}{x^2+2x-10}<\frac{3x}{x^2+x}=\frac{3}{x+1}<\frac{3}{x},$$

所以，对任给 $\varepsilon>0$，取 $M=\max\left\{\dfrac{3}{\varepsilon},10\right\}$，当 $x>M$ 时，
$$\left|\frac{x^2}{x^2+2x-10}-1\right|<\varepsilon.$$

故
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x^2+2x-10}=1.$$

3) 由于
$$\frac{x+1}{x-1}=1-\frac{2}{1-x}\quad(x<1),$$

对于任给 $M>0$，要使 $\dfrac{x+1}{x-1}<-M$，即
$$1-\frac{2}{1-x}<-M$$

解得 $0<1-x<\dfrac{2}{M+1}$，则对任给的 $M>0$，取 $\delta=\dfrac{2}{M+1}$，

当 $0<1-x<\delta$ 时，$\dfrac{x+1}{x-1}<-M$，

故
$$\lim_{x\to1^-}\frac{x+1}{x-1}=-\infty.$$

例 2　求下列极限：

1）$\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{3-x}-\sqrt{1-x}}{x^2+x-2}$；

2）$\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{\sqrt[3]{1+x^3}-1}$；

3）$\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x\sqrt{\cos 2x}}{x^2}$；

4）$\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{(1+2\sin x)^x-1}{x^2}$；

5）$\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\ln(\sin^2x+e^x)-x}{\ln(2x^2+e^{2x})-2x}$.

分析　“$\dfrac{0}{0}$”型不定式的极限问题是一种常见类型. 解决这类问题的主要思想是消去分母的零因子，通常采用有理化，等价无穷小代换.

解　1）
$$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{3-x}-\sqrt{1+x}}{x^2+x-2}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{(3-x)-(1+x)}{(x-1)(x+2)(\sqrt{3-x}+\sqrt{1+x})}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{-2}{(x+2)(\sqrt{3-x}+\sqrt{1+x})}=-\frac{\sqrt2}{6}.$$

2）
$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{\sqrt[3]{1+x^3}-1}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{\tan x-\sin x}{\frac{1}{3}x^3(\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x})}\qquad\left(\sqrt[3]{1+x^3}-1\sim\frac{1}{3}x^3\right)$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{\tan x(1-\cos x)}{\frac{1}{3}x^3(\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x})}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{x\cdot\frac{1}{2}x^2}{\frac{1}{3}x^3(\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x})}\qquad\left(\tan x\sim x,1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2\right)$$
$$=\frac{3}{4}.$$

3) $$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x\sqrt{\cos 2x}}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x+\cos x(1-\sqrt{\cos 2x})}{x^2}$$

而 $$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{x^2}=\frac{1}{2},$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{\cos 2x}}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x^2(1+\sqrt{\cos 2x})}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}(2x)^2}{x^2(1+\sqrt{\cos 2x})}=1 \qquad \left(1-\cos 2x\sim\frac{1}{2}(2x)^2\right)$$

则 $$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x\sqrt{\cos 2x}}{x^2}=\frac{3}{2}.$$

4) 本题分子上出现幂指函数，直接求极限不方便，一般都改写成指数函数，$(1+2\sin x)^x=\mathrm{e}^{x\ln(1+2\sin x)}$，然后设法利用等价无穷小代换.

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+2\sin x)^x-1}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{x\ln(1+2\sin x)}-1}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot 2\sin x}{x^2} \qquad (\mathrm{e}^x-1\sim x)$$

$$=2.$$

5) 本题也是"$\frac{0}{0}$"型，注意 $x=\ln \mathrm{e}^x,2x=\ln \mathrm{e}^{2x}$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\sin^2 x+\mathrm{e}^x)-x}{\ln(2x^2+\mathrm{e}^{2x})-2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\sin^2 x+\mathrm{e}^x)-\ln\mathrm{e}^x}{\ln(2x^2+\mathrm{e}^{2x})-\ln \mathrm{e}^{2x}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+\frac{\sin^2 x}{\mathrm{e}^x}\right)}{\ln\left(1+\frac{2x^2}{\mathrm{e}^{2x}}\right)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin^2 x}{\mathrm{e}^x}}{\frac{2x^2}{\mathrm{e}^{2x}}} \qquad (\ln(1+x)\sim x)$$

$$=\frac{1}{2}.$$

例 3 试证明若 $\lim\alpha(x)=0$，$\lim\beta(x)=\infty$，且 $\lim\alpha(x)\beta(x)=A$，则 $\lim(1+\alpha(x))^{\beta(x)}=\mathrm{e}^A$. 并利用此结论计算下列各极限.

1) $\lim\limits_{x\to 0^+}(\cos\sqrt{x})^{\frac{\pi}{x}}$；

2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sin\frac{2}{x}+\cos\frac{1}{x}\right)^x$;

3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{a^{\frac{1}{x}}+b^{\frac{1}{x}}+c^{\frac{1}{x}}}{3}\right)^x\qquad(a>0,b>0,c>0)$.

解　由于　$\lim(1+\alpha(x))^{\beta(x)}=\lim\left[(1+\alpha(x))^{\frac{1}{\alpha(x)}}\right]^{\alpha(x)\beta(x)}$,

而 $\lim(1+\alpha(x))^{\frac{1}{\alpha(x)}}=\mathrm{e}$, $\lim\alpha(x)\beta(x)=A$，则

$$\lim(1+\alpha(x))^{\beta(x)}=\mathrm{e}^A.$$

此结论是求“1^∞”型极限的一个常用的一般方法.

1) 对于 $\lim\limits_{x\to0^+}(\cos\sqrt{x})^{\frac{\pi}{x}}$，由于

$\cos\sqrt{x}=1+(\cos\sqrt{x}-1)$，则

$$\alpha(x)=\cos\sqrt{x}-1,\quad\beta(x)=\frac{\pi}{x},$$

$$\lim_{x\to0^+}\alpha(x)\beta(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{\pi(\cos\sqrt{x}-1)}{x}$$

$$=\lim_{x\to0^+}\frac{\pi\left(-\frac{1}{2}x\right)}{x}\qquad\left(\cos\sqrt{x}-1\sim-\frac{1}{2}x\right)$$

$$=-\frac{\pi}{2},$$

则
$$\lim_{x\to0^+}(\cos\sqrt{x})^{\frac{\pi}{x}}=\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{2}}.$$

2) 由于
$$\sin\frac{2}{x}+\cos\frac{1}{x}=1+\left(\sin\frac{2}{x}+\cos\frac{1}{x}-1\right)$$

$$\lim_{x\to\infty}x\left(\sin\frac{2}{x}+\cos\frac{1}{x}-1\right)$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\sin\frac{2}{x}+\cos\frac{1}{x}-1}{\frac{1}{x}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\sin\frac{2}{x}}{\frac{1}{x}}+\lim_{x\to\infty}\frac{\cos\frac{1}{x}-1}{\frac{1}{x}}$$

$$=2+\lim_{x\to\infty}\frac{-\frac{1}{2}\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x}}=2,$$

则
$$\lim_{x\to\infty}\left(\sin\frac{2}{x}+\cos\frac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}^2.$$

3）由于 $$\frac{a^{\frac{1}{x}}+b^{\frac{1}{x}}+c^{\frac{1}{x}}}{3}=1+\frac{a^{\frac{1}{x}}+b^{\frac{1}{x}}+c^{\frac{1}{x}}-3}{3},$$

而
$$\lim_{x\to\infty}\frac{a^{\frac{1}{x}}+b^{\frac{1}{x}}+c^{\frac{1}{x}}-3}{3\cdot\frac{1}{x}}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{a^{\frac{1}{x}}-1}{3\frac{1}{x}}+\lim_{x\to\infty}\frac{b^{\frac{1}{x}}-1}{3\frac{1}{x}}+\lim_{x\to\infty}\frac{c^{\frac{1}{x}}-1}{3\frac{1}{x}}$$
$$=\frac{1}{3}\ln a+\frac{1}{3}\ln b+\frac{1}{3}\ln c\qquad(a^x-1\sim x\ln a)$$
$$=\ln\sqrt[3]{abc},$$

则
$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{a^{\frac{1}{x}}+b^{\frac{1}{x}}+c^{\frac{1}{x}}}{3}\right)^x=e^{\ln\sqrt[3]{abc}}=\sqrt[3]{abc}.$$

例 4　求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}x^2(a^{\frac{1}{x}}-a^{\frac{1}{x+1}})\qquad(a>0)$.

分析　本题是一个"$0\cdot\infty$"型极限，通常改写成"$\frac{0}{0}$"型再求.

解
$$\lim_{x\to\infty}x^2(a^{\frac{1}{x}}-a^{\frac{1}{x+1}})$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{a^{\frac{1}{x}}-a^{\frac{1}{x+1}}}{\frac{1}{x^2}}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{a^{\frac{1}{x+1}}(a^{\frac{1}{x(x+1)}}-1)}{\frac{1}{x^2}}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{a^{\frac{1}{x+1}}\cdot\frac{1}{x(1+x)}\ln a}{\frac{1}{x^2}}\qquad\left(a^{\frac{1}{x(1+x)}}-1\sim\frac{1}{x(1+x)}\ln a\right)$$
$$=\ln a.$$

例 5　求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left[x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-\frac{2}{\pi}\arctan\frac{1}{x}\right]$.

分析　这里应特别注意的是极限 $\lim\limits_{x\to 0}x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}$ 和 $\lim\limits_{x\to 0}\arctan\frac{1}{x}$ 都不存在. 事实上 $\lim\limits_{x\to 0^+}x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt{1+x^2}=1$，而 $\lim\limits_{x\to 0^-}x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}=-\lim\limits_{x\to 0^-}\sqrt{1+x^2}=-1$；$\lim\limits_{x\to 0^+}\arctan\frac{1}{x}=\frac{\pi}{2}$，$\lim\limits_{x\to 0^-}\arctan\frac{1}{x}=-\frac{\pi}{2}$. 因此，本题中的极限应分左右极限来求.

解　由于 $$\lim_{x\to 0^+}\left[x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-\frac{2}{\pi}\arctan\frac{1}{x}\right]$$

$$=\lim_{x\to0^+}\sqrt{1+x^2}-\frac{2}{\pi}\lim_{x\to0^+}\arctan\frac{1}{x}$$

$$=1-\frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi}{2}=0,$$

$$\lim_{x\to0^-}\left[x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-\frac{2}{\pi}\arctan\frac{1}{x}\right]$$

$$=-\lim_{x\to0^-}\sqrt{1+x^2}-\frac{2}{\pi}\lim_{x\to0^-}\arctan\frac{1}{x}$$

$$=-1-\frac{2}{\pi}\cdot\left(-\frac{\pi}{2}\right)=0,$$

则
$$\lim_{x\to0}\left[x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-\frac{2}{\pi}\arctan\frac{1}{x}\right]=0$$

注　在讨论极限 $\lim\limits_{x\to0}x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}$，$\lim\limits_{x\to0}\arctan\frac{1}{x}$ 及 $\lim\limits_{x\to0}e^{\frac{1}{x}}$ 时需分左、右极限；在讨论分段函数在分界点处极限时也要分左、右极限.

例 6　求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sin\ln(1+x)-\sin\ln x)$.

分析　本题虽然是求两项差的极限，但不能拆成两项分别求极限，因为拆开后两项极限均不存在，此类问题一般用三角的和差化积公式改写，然后再求极限.

解　由于

$$\sin\ln(x+1)-\sin\ln x=2\sin\frac{\ln(1+x)-\ln x}{2}\cos\frac{\ln(1+x)+\ln x}{2}$$

$$=2\sin\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{2}\cos\frac{\ln(1+x)+\ln x}{2},$$

而 $\lim\limits_{x\to+\infty}\sin\dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{2}=0$，$\cos\dfrac{\ln(1+x)+\ln x}{2}$ 为有界变量，

则
$$\lim_{x\to+\infty}(\sin\ln(1+x)-\sin\ln x)=0.$$

注　本题在计算中利用了无穷小量的一个重要性质：无穷小量乘有界变量是无穷小量，这也是求极限时一种常用的方法.

例 7　求极限 $\lim\limits_{x\to0^+}x\left[\dfrac{1}{x}\right]$.

分析　本题中出现取整函数 $\left[\dfrac{1}{x}\right]$，此类问题一般都是用夹逼原理，这时基本不等式 $[x]\leqslant x<[x]+1$ 是常用的.

解　因为
$$\left[\frac{1}{x}\right]\leqslant\frac{1}{x}<\left[\frac{1}{x}\right]+1\quad(x>0),$$

则 $$1-x<x\left[\frac{1}{x}\right]\leqslant 1 \quad (x>0),$$

故 $$\lim_{x\to 0^+} x\left[\frac{1}{x}\right]=1.$$

例 8 设 $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2-x+1}-ax-b)=0$，求 a 和 b.

分析 由于 $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x^2-x+1}=+\infty$，则 $a<0$，否则 $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2-x+1}-ax-b)=+\infty$ 与题设矛盾.

解法一

由于 $$\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2-x+1}-ax-b)=\lim_{x\to-\infty}\frac{(x^2-x+1)-(ax+b)^2}{\sqrt{x^2-x+1}+ax+b}$$
$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{(1-a^2)x^2-(1+2ab)x+1-b^2}{\sqrt{x^2-x+1}+ax+b}=0,$$

则 $$1-a^2=0 \text{ 且 } 1+2ab=0,$$

从而有 $$a=-1,\quad b=\frac{1}{2}.$$

解法二 由 $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2-x+1}-ax-b)=0$ 知
$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2-x+1}-ax-b}{x}=0,$$

从而有 $$a=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2-x+1}}{x}=-1.$$

由 $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2-x+1}-ax-b)=0$ 知
$$b=\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2-x+1}-ax)=\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2-x+1}+x)$$
$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x+1}{\sqrt{x^2-x+1}-x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-1+\dfrac{1}{x}}{-\sqrt{1-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}-1}=\frac{1}{2}.$$

注 本题代表极限问题中的一种常见的类型，已知极限确定极限式中的参数. 本题反映了求解此类极限问题的常用思想方法.

例 9 已知当 $x\to 0$ 时 $\alpha(x)=kx^a$ 与 $\beta(x)=\sqrt{1+x\arcsin x}-\sqrt{\cos x}$ 是等价无穷小，求 k 和 a 的值.

解 由题设知
$$\lim_{x\to 0}\frac{\beta(x)}{\alpha(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x\arcsin x}-\sqrt{\cos x}}{kx^a}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x+x\arcsin x}{kx^a(\sqrt{1+x\arcsin x}+\sqrt{\cos x})}=1,$$

从而
$$a=2,\quad k=\frac{3}{4}.$$

例 10　设当 $x\to0$ 时 $(1-\cos x)\ln(1+x^2)$ 是比 $x\sin x^n$ 高阶的无穷小，而 $x\sin x^n$ 是比 $(e^{x^2}-1)$ 高阶的无穷小，其中 n 为正整数，求极限
$$\lim_{x\to0}\frac{x\sin x^n}{(\sqrt[3]{1-2x^2}-1)(2^x-1)}.$$

分析　先由题设条件确定 $x\sin x^n$ 中的 n，然后利用等价无穷小代换求极限.

解　当 $x\to0$ 时，$1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2$，$\ln(1+x^2)\sim x^2$，$\sin x^n\sim x^n$，$e^{x^2}-1\sim x^2$，则当 $x\to0$ 时，
$$(1-\cos x)\ln(1+x^2)\sim\frac{1}{2}x^4,\quad x\sin x^n\sim x^{n+1},e^{x^2}-1\sim x^2.$$
由于当 $x\to0$ 时，$(1-\cos x)\ln(1+x^2)$ 是比 $x\sin x^n$ 高阶的无穷小，则 $4>n+1$. 而当 $x\to0$ 时，$x\sin x^n$ 是比 $e^{x^2}-1$ 高阶的无穷小，则

$n+1>2$，从而有 $n+1=3$，$n=2$，
$$\lim_{x\to0}\frac{x\sin x^n}{(\sqrt[3]{1-2x^2}-1)(2^x-1)}=\lim_{x\to0}\frac{x\sin x^2}{(\sqrt[3]{1-2x^2}-1)(2^x-1)}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{x^3}{-\frac{2}{3}x^2\cdot x\ln 2}\left(\sqrt[3]{1-2x^2}-1\sim-\frac{2}{3}x^2,2^x-1\sim x\ln 2,\sin x^2\sim x^2\right)$$
$$=-\frac{3}{2\ln 2}.$$

注　本题在求解过程中主要是利用等价无穷小代换.

例 11　求下列函数的间断点，并判定间断点的类型.

1) $f(x)=\dfrac{\ln|x|}{x^2-3x+2}$；

2) $f(x)=\dfrac{x\arctan\dfrac{1}{x-1}}{\sin\dfrac{\pi}{2}x}$；

3) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x(x^2-4)}{\sin\pi x}, & x>0,\\[2mm] \dfrac{x(x+1)}{x^2-1}, & x\leqslant0.\end{cases}$

解　1) 由于　$f(x)=\dfrac{\ln|x|}{x^2-3x+2}=\dfrac{\ln|x|}{(x-1)(x-2)}$，

显然 $f(x)$ 在 $x=0,x=1,x=2$ 处无定义，则必为间断点.

而 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln|x|}{x^2-3x+2}=\infty$，则 $x=0$ 为无穷间断点.

而
$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1}\frac{\ln|x|}{x^2-3x+2}&=\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{(x-1)(x-2)}\\&=\lim_{x\to 1}\frac{\ln[1+(x-1)]}{(x-1)(x-2)}\\&=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{(x-1)(x-2)}(\ln[1+(x-1)]\sim x-1)\\&=-1,\end{aligned}$$

则 $x=1$ 为可去间断点.

由于 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\ln|x|}{x^2-3x+2}=\infty$，则 $x=2$ 为无穷间断点.

2）由于 $f(x)=\dfrac{x\arctan\dfrac{1}{x-1}}{\sin\dfrac{\pi}{2}x}$ 在 $x=1$ 和 $x=2k(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ 处无定义，则在这些点不连续.

由于
$$\lim_{x\to 1^+}f(x)=\lim_{x\to 1^+}\frac{x\arctan\dfrac{1}{x-1}}{\sin\dfrac{\pi}{2}x}=\frac{\pi}{2},$$

$$\lim_{x\to 1^-}f(x)=\lim_{x\to 1^-}\frac{x\arctan\dfrac{1}{x-1}}{\sin\dfrac{\pi}{2}x}=-\frac{\pi}{2},$$

则 $x=1$ 为跳跃间断点.

而
$$\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{x\arctan\dfrac{1}{x-1}}{\sin\dfrac{\pi}{2}x}=-\frac{1}{2},$$

则 $x=0$ 为可去间断点.

$$\lim_{x\to 2k}f(x)=\lim_{x\to 2k}\frac{x\arctan\dfrac{1}{x-1}}{\sin\dfrac{\pi}{2}x}=\infty\qquad(k=\pm1,\pm2,\cdots),$$

则 $x=2k(k=\pm1,\pm2,\cdots)$ 为无穷间断点.

3）由于当 $x>0$ 时，$f(x)=\dfrac{x(x^2-4)}{\sin\pi x}$ 在 $x=k(k=1,2,\cdots)$ 无定义，则 $x=k(k=1,2,\cdots)$ 为 $f(x)$ 的间断点；

由
$$\lim_{x\to 2}\frac{x(x^2-4)}{\sin\pi x}=\lim_{x\to 2}\frac{x(x+2)(x-2)}{\sin\pi x}=8\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{\sin\pi x}$$

$$\xlongequal{x-2=t} 8\lim_{t\to 0}\frac{t}{\sin \pi t}=\frac{8}{\pi}$$

知 $x=2$ 为可去间断点，

由
$$\lim_{x\to k}\frac{x(x^2-4)}{\sin \pi x}\quad (k=1,3,4,\cdots)$$
$$=\infty$$

知 $x=k(k=1,3,4,\cdots)$ 为无穷间断点.

由于 $x\leqslant 0$ 时，$f(x)=\dfrac{x(x+1)}{x^2-1}$ 在 $x=-1$ 处无定义，

则 $x=-1$ 为 $f(x)$ 的间断点，

由 $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x(x+1)}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x}{x-1}=\dfrac{1}{2}$ 知 $x=-1$ 为可去间断点.

$x=0$ 为分段函数 $f(x)$ 的分界点，该点连续性需进一步讨论.

由于
$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{x(x^2-4)}{\sin \pi x}=-\frac{4}{\pi},$$
$$\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{x(x+1)}{x^2-1}=0,$$

则 $x=0$ 为跳跃间断点.

例 12　设 $f(x)=\lim\limits_{t\to x}\left(\dfrac{\sin t}{\sin x}\right)^{\frac{x}{\sin t-\sin x}}$，求函数 $f(x)$ 的间断点并指出间断点类型.

分析　本题中的 $f(x)$ 是用极限式定义的，此类问题一般先求极限得到 $f(x)$ 的表达式，然后再求 $f(x)$ 的间断点并判别类型.

解　由于
$$f(x)=\lim_{t\to x}\left(\frac{\sin t}{\sin x}\right)^{\frac{x}{\sin t-\sin x}}$$
$$=\lim_{t\to x}\left(1+\frac{\sin t-\sin x}{\sin x}\right)^{\frac{\sin x}{\sin t-\sin x}\cdot\frac{x}{\sin x}}$$
$$=e^{\frac{x}{\sin x}}$$

显然，$x=k\pi(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ 为 $f(x)$ 的间断点，而 $\lim\limits_{x\to 0}e^{\frac{x}{\sin x}}=e$，则 $x=0$ 为可去间断点.

由于 $\lim\limits_{x\to k\pi^-}e^{\frac{x}{\sin x}}(k=\pm1,\pm2,\cdots)$ 不存在. 则 $x=k\pi(k=\pm1,\pm2,\cdots)$ 为第二类间断点.

例 13　设 $f(x)$ 是 $[0,1]$ 上非负连续函数，且 $f(0)=f(1)=0$，求证：对任意实数 $r(0<r<1)$，必存在 $x_0\in[0,1]$，使得 $x_0+r\in[0,1]$，且 $f(x_0)=f(x_0+r)$.

分析　要证 $\exists x_0\in[0,1]$，使 $f(x_0)=f(x_0+r)$ 成立，也就是要证明 $f(x_0)-f(x_0+r)=0$，若令 $F(x)=f(x)-f(x+r)$，只要证明函数 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上有

零点.

证 令 $F(x)=f(x)-f(x+r)$,
由于 $f(x)$在$[0,1]$上连续,则 $F(x)=f(x)-f(x+r)$在$[0,1-r]$上连续,

$$F(0)=f(0)-f(r)=-f(r)\leqslant 0,$$

$$F(1-r)=f(1-r)-f(1)=f(1-r)\geqslant 0,$$

则

$$F(0)\cdot F(1-r)\leqslant 0.$$

i) 若 $F(0)\cdot F(1-r)=0$,则取 $x_0=0$ 或 $x_0=1-r$,结论成立.

ii) 若 $F(0)\cdot F(1-r)<0$,则由连续函数的零点定理知,存在 $x_0\in(0,1-r)$,使 $F(x_0)=0$,即

$$f(x_0)=f(x_0+r).$$

注 本题事实上就是要证方程 $f(x)-f(x+r)=0$ 在$[0,1]$内有根.此类问题一般构造辅助函数 $F(x)=f(x)-f(x+r)$,然后对 $F(x)$在$[0,1-r]$上用连续函数零点定理.

例 14 设 a_1,a_2,a_3 为正数,$\lambda_1<\lambda_2<\lambda_3$.证明方程

$$\frac{a_1}{x-\lambda_1}+\frac{a_2}{x-\lambda_2}+\frac{a_3}{x-\lambda_3}=0$$

在区间(λ_1,λ_2)和(λ_2,λ_3)内各有一根.

分析 若构造辅助函数 $F(x)=\frac{a_1}{x-\lambda_1}+\frac{a_2}{x-\lambda_2}+\frac{a_3}{x-\lambda_3}$,显然 $F(x)$在$[\lambda_1,\lambda_2]$与$[\lambda_2,\lambda_3]$上不连续.因此,对原方程左端变形,令 $\varphi(x)=a_1(x-\lambda_2)(x-\lambda_3)+a_2(x-\lambda_1)(x-\lambda_3)+a_3(x-\lambda_1)(x-\lambda_2)$,只要证明 $\varphi(x)$在(λ_1,λ_2)与(λ_2,λ_3)内各有一个零点即可.

证 令 $\varphi(x)=a_1(x-\lambda_2)(x-\lambda_3)+a_2(x-\lambda_1)(x-\lambda_3)+a_3(x-\lambda_1)(x-\lambda_2)$,显然 $\varphi(x)$在$[\lambda_1,\lambda_2]$与$[\lambda_2,\lambda_3]$上均连续,且

$$\varphi(\lambda_1)=a_1(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_1-\lambda_3)>0,$$

$$\varphi(\lambda_2)=a_2(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_2-\lambda_3)<0,$$

$$\varphi(\lambda_3)=a_3(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_2)>0,$$

由连续函数零点定理知,$\varphi(x)$在(λ_1,λ_2)与(λ_2,λ_3)内各有一个零点,故方程

$$\frac{a_1}{x-\lambda_1}+\frac{a_2}{x-\lambda_2}+\frac{a_3}{x-\lambda_3}=0$$

在(λ_1,λ_2)与(λ_2,λ_3)内各有一个根.

例 15 设 $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上连续,且 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=0$,试证存在 $\xi\in(-\infty,+\infty)$,使 $f(\xi)+\xi=0$.

分析 本题事实上是要证方程 $f(x)+x=0$ 有实根,若令 $F(x)=f(x)+x$,

则本题关键是找出使 $F(x)$ 在两端点函数值异号的区间，而由 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=0$ 知，$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{F(x)}{x}=1>0$，从而可知当 $|x|$ 充分大时，$F(x)$ 与 x 同号，由此不难找到使 $F(x)$ 在两端点函数值异号的区间.

证　令 $F(x)=f(x)+x$，由 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=0$ 知，

$$\lim_{x\to\infty}\frac{F(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{f(x)}{x}+1\right)=1>0,$$

从而当 $|x|$ 充分大时 $F(x)$ 与 x 同号，因此，一定存在 $a<0,b>0$，使 $F(a)<0$，$F(b)>0$. 由于 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则存在 $\xi\in(a,b)$，使 $F(\xi)=0$，故存在 $\xi\in(-\infty,+\infty)$，使

$$f(\xi)+\xi=0.$$

例 16　设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，$a<c<d<b$，试证对任意的正数 p 和 q，至少存在一点 $\xi\in[c,d]$，使

$$pf(c)+qf(d)=(p+q)f(\xi).$$

分析　要证 $pf(c)+qf(d)=(p+q)f(\xi)$，只要证明

$$\frac{pf(c)+qf(d)}{p+q}=f(\xi).$$

若能证明 $\frac{pf(c)+qf(d)}{p+q}$ 是介于 $f(x)$ 在区间 $[c,d]$ 上的最小值和最大值之间的一个数，利用介值定理便可证明本题.

证　由题设可知 $f(x)$ 在 $[c,d]$ 上连续，则 $f(x)$ 在 $[c,d]$ 上有最大值 M 和最小值 m. 从而有

$$m=\frac{pm+qm}{p+q}\leqslant\frac{pf(c)+qf(d)}{p+q}\leqslant\frac{pM+qM}{p+q}=M.$$

由连续函数介值定理知，至少存在一点 $\xi\in[c,d]$，使

$$pf(c)+qf(d)=(p+q)f(\xi).$$

例 17　试证 $f(x)=\sqrt{x}$ 在区间 $[1,+\infty)$ 上一致连续.

分析　要证 $f(x)=\sqrt{x}$ 在 $[1,+\infty)$ 上一致连续，对我们来讲没有现成结论可直接用，所以只好用定义.

证　对任意的 $x_1,x_2\in[1,+\infty)$，由于

$$|\sqrt{x_2}-\sqrt{x_1}|=\frac{|x_2-x_1|}{\sqrt{x_2}+\sqrt{x_1}}<|x_2-x_1|,$$

所以，$\forall\varepsilon>0$，取 $\delta=\varepsilon$，对任意的 $x_1,x_2\in[1,+\infty)$，只要 $|x_2-x_1|<\delta$，必有 $|\sqrt{x_2}-\sqrt{x_1}|<\varepsilon$，

故 $f(x)=\sqrt{x}$在$[1,+\infty)$上一致连续.

例 18 试证 $y=\sin x^2$ 在$[0,+\infty)$上不一致连续.

分析 我们知道,要证函数 $f(x)$在区间 I 上不一致连续,就是要证明:$\exists\varepsilon_0>0,\forall\delta>0,\exists x_1,x_2\in I$,满足$|x_2-x_1|<\delta$,但$|f(x_2)-f(x_1)|\geqslant\varepsilon_0$,就本题而言,由于 $\sin x^2$ 对任意的 $a>0$ 在区间$[0,a]$上一致连续,因此,应在$[a,+\infty)$中找 x_1,x_2.

证 取 $x_1=\sqrt{n\pi},x_2=\sqrt{n\pi+\frac{\pi}{2}}$,则

$$|x_2-x_1|=\sqrt{n\pi+\frac{\pi}{2}}-\sqrt{n\pi}=\frac{\frac{\pi}{2}}{\sqrt{n\pi+\frac{\pi}{2}}+\sqrt{n\pi}}<\frac{\frac{\pi}{2}}{\sqrt{n\pi}}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{n}}\xrightarrow{n\to\infty}0,$$

但
$$|\sin x_2{}^2-\sin x_1{}^2|=1.$$

从而,$\exists\varepsilon_0=1,\forall\delta>0$,取 $x_2=\sqrt{n\pi+\frac{\pi}{2}},x_1=\sqrt{n\pi}$,只要 $n>\frac{\pi}{4\delta^2}$.

就有$|x_2-x_1|<\delta$,但$|\sin x_2{}^2-\sin x_1{}^2|=1\geqslant\varepsilon_0$.

故 $\sin x^2$ 在$[1,+\infty)$上不一致连续.

例 19 设 $f\in C(a,b)$,求证:$f(x)$在(a,b)上一致连续的充要条件为 $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to b^-}f(x)$都存在.

证 **充分性** 设 $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=A,\lim\limits_{x\to b^-}f(x)=B$. 定义函数

$$F(x)=\begin{cases}A, & x=a,\\ f(x), & a<x<b,\\ B, & x=b,\end{cases}$$

则函数 $F(x)$在$[a,b]$上连续,从而 $F(x)$在$[a,b]$上一致连续,特别有 $F(x)$在(a,b)上一致连续,即 $f(x)$在(a,b)上一致连续.

必要性 因为 $f(x)$在(a,b)上一致连续,则$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$,使得$\forall x_1,x_2\in(a,b)$,只要$|x_1-x_2|<\delta$,就有

$$|f(x_2)-f(x_1)|<\varepsilon.$$

由此可见,$\forall x_1,x_2\in(a,a+\delta)$,必有$|x_1-x_2|<\delta$,从而有$|f(x_2)-f(x_1)|<\varepsilon$,由柯西原理知 $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)$存在. 同理可证 $\lim\limits_{x\to b^-}f(x)$存在.

注 本题所证的结论是一个常用的重要结论.

3. 讨论题

1) 如何用 $\varepsilon-\delta$ 语言来表述当 $x\to x_0$ 时,$f(x)$不以 a 为极限?

2) 下列命题是否正确? 为什么?

(1) 若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)+g(x)]$ 都存在，则 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ 存在；

(2) 若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)g(x)$ 都存在，则 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ 存在.

3) 函数极限除法法则中，为什么对分母中的函数 $g(x)$ 只假设 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)\neq 0$，而不假设 $g(x)\neq 0$?

4) 设 $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$，$\lim\limits_{u\to A} g(u)=B$. 是否必有 $\lim\limits_{x\to a} g[f(x)]=B$?

5) 无界变量和无穷大量有何区别?

6) 两个无界变量之积一定是无界变量吗?

7) 无穷小量有两个基本性质，即

(1) 有限个无穷小量之和为无穷小量.

(2) 有限个无穷小量之积为无穷小量.

在这两个性质中去掉“有限”这个条件结论还成立吗?

8) 在求极限时，作为加减项的无穷小能否用等价无穷小代换?

9) 在一点连续的函数是否在该点的一个邻域连续?

10) 有关闭区间上连续函数的性质的定理，都假定所涉及的区间为有限闭区间，那么对无穷区间，比如说区间 $[a,+\infty)$，这些性质还能成立吗? 如果不能成立，那么对函数附加什么条件后这些性质能成立?

4. 练习题

1. 试用函数极限定义证明下列各式：

1) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2}{1+x}=\dfrac{1}{2}$；

2) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}=-1$；

3) $\lim\limits_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{x}}=+\infty$.

2. 求下列各极限：

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{\sqrt{1+x\sin x}-\cos x}$；

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+2x}\sqrt[3]{1+3x}-1}{x}$；

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}\cos x-1}{x^2}$；

4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{\sin x}}{x-\sin x}$；

5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(a+x)^x-a^x}{x^2}(a>0)$；

6） $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^3}\left[\left(\dfrac{2+\cos x}{3}\right)^x-1\right]$；

7） $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+\sin x}{1+\tan x}\right)^{\frac{1}{\sin^3 x}}$；

8） $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\sin^2 x+\mathrm{e}^{2x})-x}{\ln(x+\mathrm{e}^{3x})-x}$；

9） $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{1+2^x+3^x}{3}\right)^{\frac{1}{x}}$.

3. 设 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$存在，且当 $x\to 0$ 时 $\sqrt{1+f(x)\sin 3x}-1$ 与 $\mathrm{e}^{2x}-1$ 为等价无穷小，求 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$.

4. 求下列函数的间断点并判定间断点的类型：

1） $f(x)=\dfrac{\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+1}}{\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{1}{x}}$；

2） $f(x)=\dfrac{2}{1+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}+\dfrac{\sin x}{|x|}$；

3） $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)x}{nx^2+1}$.

5. 设 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{2n-1}+ax^2+bx}{x^{2n}+1}$在$(-\infty,+\infty)$内连续，试确定常数 a 和 b 的值.

6. 证明方程 $x^3-9x-1=0$ 恰有三个实根.

7. 设 $f(x)$在$[0,1]$上连续，非负，且 $f(0)=f(1)=0$，试证对任意的小于 1 的正数 l，存在 $\xi\in[0,1]$，使 $f(\xi+l)=f(\xi)$.

8. 设 $f(x)$在$[a,b]$上连续，$x_i\in[a,b]$，$\lambda_i>0(i=1,2,\cdots,n)$，且 $\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i=1$，试证至少存在一点 $\xi\in[a,b]$，使

$$f(\xi)=\lambda_1 f(x_1)+\lambda_2 f(x_2)+\cdots+\lambda_n f(\xi_n).$$

9. 证明 $f(x)=\sqrt{1+x^2}$在$(-\infty,+\infty)$上一致连续.

10. 证明 $f(x)=\ln x$ 在$(0,+\infty)$上不一致连续.

第二章　一元函数微分学及其应用

第一讲　导数的概念与求导的基本法则

1. 教学要求与学习注意点

1）正确理解导数的定义和几何意义.

2）正确理解函数的可导性与连续性的关系，即连续是可导的必要而非充分条件.

3）理解可导的充要条件：$f'(x_0)$存在$\Leftrightarrow f'_+(x_0)=f'_-(x_0)$.

4）会用导数定义讨论一些简单函数的可导性（如分段函数在分界点处等）

5）正确理解函数在一点的导数就是函数在该点的变化率，并会正确将导数应用于科学技术中的相关问题.

6）熟记基本导数公式；掌握函数和、差、积、商求导法则与复合函数的链式法则.

7）掌握高阶导数的求法，会用 Leibniz 公式求高阶导数.

8）掌握隐函数和参数方程求导法.

9）根据实际问题，会建立两个相关变量之间的关系式，进而解决相关变化率问题.

10）正确理解微分定义及其几何意义，理解微分与导数之间的区别与联系.

11）掌握可微、可导与连续之间的关系：

$$\begin{tikzcd}
 & \boxed{f\text{在 }x_0\text{ 处可导}} \arrow[dl] \arrow[dd, shift left] \\
\boxed{f\text{在 }x_0\text{ 处连续}} \arrow[ur, "/" marking, shift left=2] \arrow[dr, "/" marking, shift right=2] & \\
 & \boxed{f\text{在 }x_0\text{ 处可微}} \arrow[ul] \arrow[uu, shift left]
\end{tikzcd}$$

12）正确理解用微分进行近似计算的基本思想：在微小的局部将给定的函数线性化，在几何上是用直线代替该函数所表示的曲线.

13）会求微分，并会利用微分形式不变性求函数的微分和导数.

学习注意点：

1） 导数与微分是微积分的两个重要概念，必须深刻理解这两个概念以及两个概念之间的联系和区别.

2） 求导运算是微积分两大主要运算（导数运算，积分运算）之一，必须熟练掌握，它是后继内容的基础，特别是后面将要学的积分运算是导数运算的逆运算，如果导数运算不熟练，将给后面积分运算带来很大困难. 要熟练掌握求导运算，首先要理解导数概念和求导法则，熟记导数基本公式，另外一定要多练. 在求导法则中，复合函数求导法是核心，因为隐函数求导法、参数方程求导法与反函数求导法实际是复合函数求导法的应用. 所以特别应熟练掌握复合函数求导法.

2. 典型例题

例 1 设 $f'(x_0)=-1$，求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{f(x_0+2x)-f(x_0-x)}$.

分析 本题所给条件为函数 $f(x)$ 在 x_0 点导数 $f'(x_0)=-1$，由导数定义知极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x_0+x)-f(x_0)}{x}=-1$，因此，本题只要将所求极限化成这个已知极限形式，然后利用导数定义就可求得极限.

解

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to 0}\frac{x}{f(x_0+2x)-f(x_0-x)}\\
=&\lim_{x\to 0}\frac{x}{[f(x_0+2x)-f(x_0)]-[f(x_0-x)-f(x_0)]}\\
=&\lim_{x\to 0}\frac{1}{2\dfrac{f(x_0+2x)-f(x_0)}{2x}+\dfrac{f(x_0-x)-f(x_0)}{-x}}\\
=&\lim_{x\to 0}\frac{1}{2f'(x_0)+f'(x_0)}=-\frac{1}{3}.\end{aligned}$$

例 2 设 $f(x)=\begin{cases}\ln x, & x\geqslant 1,\\ e^x-xe, & x<1,\end{cases}$ 试讨论 $f(x)$ 在 $x=1$ 处的可导性.

分析 $x=1$ 是分段函数 $f(x)$ 的分界点，在 $x=1$ 两侧 $f(x)$ 的表达式不相同，所以应分左、右导数，利用结论

$f'(x_0)$ 存在 $\Leftrightarrow f'_-(x_0)$ 与 $f'_+(x_0)$ 都存在且相等.

解 由左、右导数定义得

$$\begin{aligned}f'_-(1)&=\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{e^x-xe-0}{x-1}\\
&=\lim_{x\to 1^-}\frac{e^x-e-e(x-1)}{x-1}\\
&=\lim_{x\to 1^-}\frac{e(e^{x-1}-1)}{x-1}-e=e-e=0,\\
f'_+(1)&=\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{\ln x}{x-1}\end{aligned}$$

$$=\lim_{x\to 1^+}\frac{\ln[1+(x-1)]}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{x-1}{x-1}=1.$$

由于左导数 $f'_-(1)$ 与右导数 $f'_+(1)$ 虽然都存在，但不相等，则 $f(x)$ 在 $x=1$ 处不可导.

注　讨论分段函数在分界点导数一般要用定义.

例 3　确定 a 和 b 的值，使函数 $f(x)=\begin{cases} b(1+\sin x)+a+2, & x\geqslant 0, \\ e^{ax}-1, & x<0 \end{cases}$ 处处可导.

分析　由 $f(x)$ 的表达式可知，对任意的常数 a 和 b，$f(x)$ 在 $x\neq 0$ 处均可导. 所以，只要确定 a 和 b，使 $f(x)$ 在 $x=0$ 可导即可，而 $x=0$ 为分段函数 $f(x)$ 的分界点，所以要利用导数定义分左、右导数进行讨论.

解法一　由以上分析知，只要确定 a、b 使 $f(x)$ 在 $x=0$ 可导即可. 而要 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，首先要求 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，即

$$f(0-0)=f(0+0)=f(0),$$

而

$$f(0-0)=\lim_{x\to 0^-}(e^{ax}-1)=0,$$

$$f(0+0)=\lim_{x\to 0^+}[b(1+\sin x)+a+2]=b+a+2,$$

$$f(0)=b+a+2,$$

则

$$b+a+2=0.$$

又

$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{b(1+\sin x)+a+2-(b+a+2)}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{b\sin x}{x}=b,$$

$$f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{e^{ax}-1-(b+a+2)}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0^-}\frac{e^{ax}-1}{x}=a.$$

要使 $f'_+(0)=f'_-(0)$ 成立，须 $a=b$，又 $b+a+2=0$，则

$$a=b=-1,$$

此时，$f(x)$ 处处可导.

解法二　由分析知，只要确定 a,b 使 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，也就是要 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的左导数 $f'_-(0)$ 和右导数 $f'_+(0)$ 存在且相等，而

$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{b(1+\sin x)+a+2-(b+a+2)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{b\sin x}{x}=b,$$

$$f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{e^{ax}-1-(a+b+2)}{x},$$

要使该式极限存在，必须要有 $\lim\limits_{x\to0^-}[e^{ax}-1-(a+b+2)]=0$，

即
$$a+b+2=0,$$
此时
$$f'_-(0)=\lim_{x\to0^-}\frac{e^{ax}-1}{x}=a,$$
从而，要使 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，a 和 b 应满足
$$\begin{cases}a+b+2=0,\\a=b,\end{cases}$$
解之得
$$a=b=-1,$$
故当 $a=b=-1$ 时，$f(x)$ 处处可导.

注 解法一是分两步建立 a 和 b 应满足的关系式，要使 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，首先要 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，其次还要 $f'_-(0)$ 与 $f'_+(0)$ 存在且相等. 而解法二直接利用 $f'(0)$ 存在的充要条件是 $f'_-(0)$ 和 $f'_+(0)$ 都存在且相等直接建立 a 和 b 应满足的关系. 解法二较解法一方便.

例 4 设 $f'(0)$ 存在，$F(x)=f(x)(1+|\sin x|)$，试讨论 $F(x)$ 在 $x=0$ 处可导的充要条件.

分析 由于在 $F(x)$ 表达式中出现带绝对值的函数 $|\sin x|$，且在 $x=0$ 两侧绝对值内的函数 $\sin x$ 变号，因此，讨论 $F(x)$ 在 $x=0$ 处的可导性要用定义分左、右导数讨论. 由于 $F(x)=f(x)+f(x)|\sin x|$，而 $f'(0)$ 存在，则 $F(x)$ 在 $x=0$ 处可导等价于 $f(x)|\sin x|$ 在 $x=0$ 处可导.

解 令 $\varphi(x)=f(x)|\sin x|$，则
$$\varphi'_+(0)=\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)|\sin x|}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)\sin x}{x}=f(0),$$
$$\varphi'_-(0)=\lim_{x\to0^-}\frac{f(x)|\sin x|}{x}=\lim_{x\to0^-}\frac{-f(x)\sin x}{x}=-f(0),$$
$\varphi(x)$ 在 $x=0$ 处可导的充要条件是 $f(0)=-f(0)$，即 $f(0)=0$，

故 $F(x)$ 在 $x=0$ 可导的充要条件是 $f(0)=0$.

注 讨论带有绝对值的函数在绝对值内的函数为零的点上的可导性一般要用导数定义分左、右导数进行讨论.

例 5 设 $f(x)$ 在 x_0 点可导，$\{\alpha_n\}$ 和 $\{\beta_n\}$ 是趋于零的正项数列，求证：
$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(x_0+\alpha_n)-f(x_0-\beta_n)}{\alpha_n+\beta_n}=f'(x_0).$$

分析 本题很容易想到的一个方法是，给分子中加 $f(x_0)$，减 $f(x_0)$ 用导数定义，即
$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(x_0+\alpha_n)-f(x_0-\beta_n)}{\alpha_n+\beta_n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{[f(x_0+\alpha_n)-f(x_0)]-[f(x_0-\beta_n)-f(x_0)]}{\alpha_n+\beta_n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\alpha_n+\beta_n}\left\{\frac{\alpha_n[f(x_0+\alpha_n)-f(x_0)]}{\alpha_n}+\frac{\beta_n[f(x_0-\beta_n)-f(x_0)]}{-\beta_n}\right\},$$

如果拆项，就会遇到极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\alpha_n}{\alpha_n+\beta_n}$ 和 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\beta_n}{\alpha_n+\beta_n}$，但这两个极限不一定存在，因此，以上这个分析方法不能用. 我们换一种思路，由于 $f(x)$ 在 x_0 处可导，则 $f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+o(x-x_0)$，分别令 $x=x_0+\alpha_n$，$x=x_0-\beta_n$. 代入要证等式左端再进行讨论.

证　由于 $f(x)$ 在 x_0 处可导，则

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+o(x-x_0),$$

从而有

$$f(x_0+\alpha_n)=f(x_0)+f'(x_0)\alpha_n+o(\alpha_n),$$

$$f(x_0-\beta_n)=f(x_0)-f'(x_0)\beta_n+o(\beta_n),$$

则

$$\frac{f(x_0+\alpha_n)-f(x_0-\beta_n)}{\alpha_n+\beta_n}=\frac{f'(x_0)(\alpha_n+\beta_n)+o(\alpha_n)-o(\beta_n)}{\alpha_n+\beta_n}$$

$$=f'(x_0)+\frac{o(\alpha_n)-o(\beta_n)}{\alpha_n+\beta_n},$$

而 $\dfrac{o(\alpha_n)}{\alpha_n+\beta_n}=\dfrac{\alpha_n}{\alpha_n+\beta_n}\dfrac{o(\alpha_n)}{\alpha_n}$，由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{o(\alpha_n)}{\alpha_n}=0$，$0<\dfrac{\alpha_n}{\alpha_n+\beta_n}<1$，即 $\dfrac{\alpha_n}{\alpha_n+\beta_n}$ 为有界变量，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\alpha_n}{\alpha_n+\beta_n}=0$，同理 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{o(\beta_n)}{\alpha_n+\beta_n}=0$，

故

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(x_0+\alpha_n)-f(x_0-\beta_n)}{\alpha_n+\beta_n}=f'(x_0).$$

注　本题证明中用到一个常用的结论：若 $f(x)$ 在 x_0 可导，则

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+o(x-x_0).$$

例 6　设 $g(x)=\lim\limits_{t\to\infty}t^2\sin\dfrac{x}{t}\left[f\left(x+\dfrac{\pi}{t}\right)-f(x)\right]$，其中 $f(x)$ 具有二阶导数，求 $g'(x)$.

分析　由于 $g(x)$ 是用极限式定义的，所以要先求极限得 $g(x)$ 的表达式再求导数.

解

$$g(x)=\lim_{t\to\infty}t^2\sin\frac{x}{t}\left[f\left(x+\frac{\pi}{t}\right)-f(x)\right]$$

$$=\lim_{t\to\infty}\pi x\,\frac{\sin\frac{x}{t}}{\frac{x}{t}}\,\frac{f\left(x+\frac{\pi}{t}\right)-f(x)}{\frac{\pi}{t}}=\pi x f'(x),$$

则

$$g'(x)=\pi f'(x)+\pi x f''(x)=\pi[f'(x)+xf''(x)].$$

注　此类问题一般先求极限，然后再求导数.

例 7　设 $f\in C[a,b]$，$f(a)=f(b)=0$，$f'_+(a)f'_-(b)>0$. 试证明在 (a,b) 内至少存在一点 c，使 $f(c)=0$.

分析　由于 $f\in C[a,b]$，所以，如果能证明在 (a,b) 内存在两点 x_1 和 x_2，使 $f(x_1)f(x_2)<0$，那么用连续函数的零点定理就可证明本题的结论，以下有两种思路可以考虑，一种是用反证法；另一种是利用 $f(a)=f(b)=0$ 和 $f'_+(a)f'_-(b)>0$ 直接证明在 (a,b) 内存在两点 x_1 和 x_2 使 $f(x_1)f(x_2)<0$.

证法一　反证法，若在 (a,b) 不存在两点 x_1 和 x_2，使 $f(x_1)f(x_2)<0$，则 $f(x)$ 在 (a,b) 内恒正或恒负，不妨设 $f(x)$ 在 (a,b) 内恒正，从而，当 $x\in(a,b)$ 时.

$$\frac{f(x)}{x-a}>0,\quad \frac{f(x)}{x-b}<0,$$

又

$$f'_+(a)=\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)}{x-a},\quad f'_-(b)=\lim_{x\to b^-}\frac{f(x)}{x-b},$$

则

$$f'_+(a)\geqslant 0,\quad f'_-(b)\leqslant 0,$$

从而有 $f'_+(a)f'_-(b)\leqslant 0$，这与题设 $f'_+(a)f'_-(b)>0$ 矛盾，因此在 (a,b) 内必存在两点 x_1 和 x_2，使 $f(x_1)f(x_2)<0$，由连续函数零点定理知，存在 $c\in(a,b)$，使 $f(c)=0$，原题得证.

证法二　由于 $f'_+(a)f'_-(b)>0$，不妨设 $f'_+(a)>0$，且 $f'_-(b)>0$，由于 $f'_+(a)=\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(x)}{x-a}>0$，由极限的保号性知，存在 $\delta>0$，当 $x\in(a,a+\delta)$ 时，$\dfrac{f(x)}{x-a}>0$，从而，当 $x\in(a,a+\delta)$ 时，$f(x)>0$，则存在 $x_1\in(a,a+\delta)$，使 $f(x_1)>0$. 同理，利用 $f'_-(b)>0$ 可证明，存在 $x_2\in(b-\delta,b)$，使 $f(x_2)<0$，由连续函数零点定理可知，存在 $c\in(a,b)$，使 $f(c)=0$.

注　证法二中证明了一个常用的结论：即若 $f'(x_0)>0$，则存在 $\delta>0$，当 $x\in(x_0-\delta,x_0)$ 时 $f(x)<f(x_0)$；当 $x\in(x_0,x_0+\delta)$ 时 $f(x)>f(x_0)$，若 $f'(x_0)<0$ 结论完全类似，但值得注意的是，由 $f'(x_0)>0$，不能断定在 x_0 处必有一个邻域，使 $f(x)$ 在该邻域内单调增.

例 8　求下列各函数的导数：

1）$y=\dfrac{1}{\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}\,(\sqrt{x^2+1}+1)}$；

2）$y=\dfrac{1}{2}\arctan\sqrt[4]{1+x^4}+\dfrac{1}{4}\ln\dfrac{\sqrt[4]{1+x^4}+1}{\sqrt[4]{1+x^4}-1}$；

3）$y=f(\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x})+\mathrm{e}^{f(x^2)}$，其中 $f(x)$ 可导.

解　1）本题如果直接求导非常繁，因此，先将函数形式化简再求导，事实上

$$y=\frac{1}{x^{\frac{7}{8}}(\sqrt{x^2+1}+1)}=\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x^{\frac{7}{8}}\cdot x^2}=x^{-\frac{23}{8}}\sqrt{x^2+1}-x^{-\frac{23}{8}},$$

则 $$y'=-\frac{23}{8}x^{-\frac{31}{8}}\sqrt{1+x^2}+\frac{x^{-\frac{15}{8}}}{\sqrt{x^2+1}}+\frac{23}{8}x^{-\frac{31}{8}}.$$

2）本题直接求导也较繁，但我们注意到函数表达式中几处都出现了$\sqrt[4]{1+x^4}$，因此可令$\sqrt[4]{1+x^4}$，利用复合函数求导法则$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$较为方便.

令$\sqrt[4]{1+x^4}=u$，则 $y=\frac{1}{2}\arctan u+\frac{1}{4}\ln\frac{u+1}{u-1}$

$$=\frac{1}{2}\arctan u+\frac{1}{4}\ln(u+1)-\frac{1}{4}\ln(u-1),$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}=\frac{1}{2(1+u^2)}+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{u+1}-\frac{1}{u-1}\right)=\frac{1}{1-u^4},$$

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{4}(1+x^4)^{-\frac{3}{4}}\cdot 4x^3=\frac{x^3}{(1+x^4)^{\frac{3}{4}}},$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=-\frac{1}{x(1+x^4)^{\frac{3}{4}}}.$$

3）由于 $f(x)$可导，则

$$y'=f'(\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x})(\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x})+2x\mathrm{e}^{f(x^2)}f'(x^2).$$

例 9　设 $y=f\left(\frac{\mathrm{e}^x-1}{\mathrm{e}^x+1}\right)$，$f'(x)=\ln(2+x^2)$，求$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}$.

分析　利用 $y=f\left(\frac{\mathrm{e}^x-1}{\mathrm{e}^x+1}\right)$先求$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$，再将 $x=0$ 代入.

解　由于 $$\frac{\mathrm{e}^x-1}{\mathrm{e}^x+1}=\frac{-2}{\mathrm{e}^x+1},$$

则 $$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f'\left(\frac{\mathrm{e}^x-1}{\mathrm{e}^x+1}\right)\left(\frac{-2}{\mathrm{e}^x+1}\right)'=\frac{2\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x+1)^2}f'\left(\frac{\mathrm{e}^x-1}{\mathrm{e}^x+1}\right),$$

从而 $$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}=\left.\frac{2\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x+1)^2}f'\left(\frac{\mathrm{e}^x-1}{\mathrm{e}^x+1}\right)\right|_{x=0}=\frac{1}{2}f'(0)=\left.\frac{1}{2}\ln(2+x^2)\right|_{x=0}=\frac{1}{2}\ln 2.$$

例 10　设函数 $f(x)$在 $x=0$ 处可导，$\varphi(x)=\begin{cases}x^2\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$证明 $y=f[\varphi(x)]$在 $x=0$ 处可导，并求$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}$.

分析　这是一个求复合函数的导数问题，关于复合函数导数我们有结论：若 $y=f(u)$在 $u=u_0$ 处可导，$u=\varphi(x)$在 $x=x_0$ 处可导，且 $\varphi(x_0)=u_0$，则 $y=f[\varphi(x)]$在 $x=x_0$ 处可导且$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}=f'(u_0)\varphi'(x_0)$，因此，对本题而言，只要证明 $\varphi(x)$在 $x=0$ 可导就可利用以上结论.

解 由于 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2\sin\dfrac{1}{x}-0}{x}=\lim\limits_{x\to0}x\sin\dfrac{1}{x}=0$,

则 $\varphi(x)$在 $x=0$ 可导,而 $\varphi(0)=0$,$f(x)$又在 $x=0$ 可导,则复合函数 $y=f[\varphi(x)]$在 $x=0$ 处可导,且

$$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}=f'(0)\varphi'(0)=0$$

注 本题能否直接用导数定义证明呢?

$$\begin{aligned}\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}&=\lim_{x\to0}\frac{f[\varphi(x)]-f[\varphi(0)]}{x}=\lim_{x\to0}\frac{f\left(x^2\sin\dfrac{1}{x}\right)-f(0)}{x}\\&=\lim_{x\to0}\frac{f\left(x^2\sin\dfrac{1}{x}\right)-f(0)}{x^2\sin\dfrac{1}{x}}\cdot\frac{x^2\sin\dfrac{1}{x}}{x}=f'(0)\times0=0,\end{aligned}$$

这是一种典型的错误证法,实际上极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f\left(x^2\sin\dfrac{1}{x}\right)-f(0)}{x^2\sin\dfrac{1}{x}}$不存在,因为函数$\dfrac{f\left(x^2\sin\dfrac{1}{x}\right)-f(0)}{x^2\sin\dfrac{1}{x}}$在 $x=0$ 的任何去心邻域内都有无意义的点,如 $x=\dfrac{1}{n\pi}$(n充分大).

例 11 求下列函数的高阶导数.

1) 设 $f(x)=\dfrac{x}{x^2-5x+6}$,求 $f^{(n)}(x)$;

2) 设 $f(x)=\ln(3+7x-6x^2)$,求 $f^{(n)}(1)$;

3) 设 $f(x)=\sin^4x+\cos^4x$,求 $f^{(n)}(x)$;

4) 设 $f(x)=(x^2+2x+3)\mathrm{e}^{-x}$,求 $f^{(n)}(x)$;

5) 设 $f(x)=\mathrm{e}^x\sin x$,求 $f^{(n)}(x)$.

解 1) 此类问题一般要将分母分解因式,然后拆成两项后再求 n 阶导数.

$$f(x)=\frac{x}{(x-2)(x-3)}=\frac{3(x-2)-2(x-3)}{(x-2)(x-3)}=\frac{3}{x-3}-\frac{2}{x-2},$$

$$\begin{aligned}f^{(n)}(x)&=\left(\frac{3}{x-3}\right)^{(n)}-\left(\frac{2}{x-2}\right)^{(n)}\\&=(-1)^n n!\left[\frac{3}{(x-3)^{n+1}}-\frac{2}{(x-2)^{n+1}}\right]\qquad(x\neq2,\text{且 }x\neq3).\end{aligned}$$

2) 由于 $3+7x-6x^2=(3-2x)(1+3x)$,则

$$f(x)=\ln(3+7x-6x^2)=\ln(3-2x)+\ln(1+3x),$$

$$f'(x)=\frac{-2}{3-2x}+\frac{3}{1+3x},$$

$$f^{(n)}(x)=\left(\frac{-2}{3-2x}\right)^{(n-1)}+\left(\frac{3}{1+3x}\right)^{(n-1)}$$

$$=\frac{-2^n(n-1)!}{(3-2x)^n}+\frac{(-1)^{n-1}3^n(n-1)!}{(1+3x)^n},$$

则　$$f^{(n)}(1)=-2^n(n-1)!+(-1)^{n-1}\left(\frac{3}{4}\right)^n(n-1)!.$$

3）由于　$$\sin^4 x+\cos^4 x=1-2\sin^2 x\cos^2 x=1-\frac{1}{2}\sin^2 2x,$$

即 $f(x)=1-\frac{1}{2}\sin^2 2x$，则

$$f'(x)=-2\sin 2x\cos 2x=-\sin 4x,$$

$$f^{(n)}(x)=-(\sin 4x)^{(n-1)}=-4^{n-1}\sin\left[4x+(n-1)\frac{\pi}{2}\right].$$

4）本题中的 $f(x)=(x^2+2x+3)e^{-x}$ 是两个函数 $u(x)=x^2+2x+3$ 与 $v(x)=e^{-x}$ 相乘，所以考虑应用莱布尼茨公式，则

$$\begin{aligned}f^{(n)}(x)=&(x^2+2x+3)(e^{-x})^{(n)}+C_n^1(x^2+2x+3)'(e^{-x})^{(n-1)}+\\&C_n^2(x^2+2x+3)''(e^{-x})^{(n-2)}\\=&(-1)^n(x^2+2x+3)e^{-x}+(-1)^{n-1}n(2x+2)e^{-x}+\\&(-1)^{n-2}n(n-1)e^{-x}\\=&(-1)^n e^{-x}[x^2-2(n-1)x+n^2-3n+3].\end{aligned}$$

5）本题虽然也是两个函数 e^x 与 $\sin x$ 相乘，但直接用莱布尼茨公式求导后不易整理，所以先求低阶导数寻找规律.

$$f'(x)=e^x\sin x+e^x\cos x=e^x(\sin x+\cos x)=\sqrt{2}e^x\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right),$$

$$f''(x)=\sqrt{2}e^x\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+\sqrt{2}e^x\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=(\sqrt{2})^2e^x\sin\left(x+2\cdot\frac{\pi}{4}\right),$$

由数学归纳法可证明

$$f^{(n)}(x)=(\sqrt{2})^n e^x\sin\left(x+n\cdot\frac{\pi}{4}\right).$$

注　本题中的五个例子反应求高阶导数的常用方法，这里有几个公式是常用的，必须熟记

1）$(\sin x)^{(n)}=\sin\left(x+n\cdot\frac{\pi}{2}\right)$；

2）$(\cos x)^{(n)}=\cos\left(x+n\cdot\frac{\pi}{2}\right)$；

3) $\left(\dfrac{1}{ax+b}\right)^{(n)}=\dfrac{(-1)^n a^n}{(ax+b)^{n+1}}\quad(a\neq0)$;

4) $(uv)^{(n)}=\sum\limits_{k=0}^{n}C_n^k u^{(k)}v^{(n-k)}$,其中 u 和 v 为 n 阶可导.

例 12 设 $f(x)=\begin{cases}ax^2+bx+c, & x<0,\\ \ln(1+x), & x\geqslant0,\end{cases}$ 试确定 a,b,c,使 $f(x)$ 处处二阶可导.

分析 由 $f(x)$ 表达式不难看出,当 $x\neq0$ 时,$f(x)$ 二阶可导,所以,要使 $f(x)$ 处处二阶可导,只要 $f(x)$ 在 $x=0$ 处二阶可导即可,而 $x=0$ 为分段函数 $f(x)$ 的分界点,因此,要利用导数定义进行讨论.

解
$$f'_-(0)=\lim_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to0^-}\frac{ax^2+bx+c}{x}$$
$$f'_+(0)=\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$$
$f'(0)$ 存在的充要条件是 $f'_-(0)$ 与 $f'_+(0)$ 都存在且相等,从而须有 $f'_-(0)=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{ax^2+bx+c}{x}=1$,由此可知 $c=0,b=1$,此时 $f'(0)=1$.

当 $x<0$ 时,$f'(x)=2ax+b$,
$$f''_-(0)=\lim_{x\to0^-}\frac{f'(x)-f'(0)}{x}=\lim_{x\to0^-}\frac{2ax+b-1}{x}=2a,$$
当 $x>0$ 时,$f'(x)=\dfrac{1}{1+x}$
$$f''_+(0)=\lim_{x\to0^+}\frac{f'(x)-f'(0)}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{1+x}-1}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{-1}{1+x}=-1.$$
由于 $f''(0)$ 存在等价于 $f''_-(0)$ 与 $f''_+(0)$ 都存在且相等,则
$$2a=-1,\text{即 } a=-\frac{1}{2},$$
故当 $a=-\dfrac{1}{2},b=1,c=0$ 时 $f(x)$ 处处二阶可导.

例 13 求下列函数的导数:

1) $y=(1+x^2)^{\sin^2x}$

2) $y=x+x^x+x^{x^x}$;

3) $y=\sqrt{e^{\frac{1}{x}}\sqrt{x\sqrt{2+\sin x}}}$;

4) $y=\sqrt[3]{\dfrac{x(x^2+1)}{(x^2-1)^2}}$.

解 1) 本题中所给函数 $y=(1+x^2)^{\sin^2x}$ 为幂指函数,关于幂指函数求导数

常用两种方法，一种是将其改写成指数函数形式再求导，另一种是用对数求导法.

解法一　由于 $y=e^{\sin^2 x\ln(1+x^2)}$，则

$$y'=e^{\sin^2 x\ln(1+x^2)}\left[2\sin x\cos x\ln(1+x^2)+\frac{2x\sin^2 x}{1+x^2}\right]$$

$$=(1+x^2)^{\sin^2 x}\left[\sin 2x\ln(1+x^2)+\frac{2x\sin^2 x}{1+x^2}\right]$$

解法二　由 $y=(1+x^2)^{\sin^2 x}$ 知，$\ln y=\sin^2 x\ln(1+x^2)$.

上式两端对 x 求导得 $\dfrac{y'}{y}=2\sin x\cos x\ln(1+x^2)+\dfrac{2x\sin^2 x}{1+x^2}$，

则
$$y'=(1+x^2)^{\sin^2 x}\left[\sin 2x\ln(1+x^2)+\frac{2x\sin^2 x}{1+x^2}\right].$$

2) $y'=(x)'+(x^x)'+(x^{x^x})'$.

令 $u=x^x$，则 $\ln u=x\ln x$，两边求导得

$\dfrac{u'}{u}=1+\ln x$，则 $u'=x^x(1+\ln x)$.

令 $v=x^{x^x}$，则 $\ln v=x^x\ln x=u\ln x$，两边对 x 求导得 $\dfrac{v'}{v}=u'\ln x+\dfrac{u}{x}$，

$$v'=v\left(u'\ln x+\frac{u}{x}\right)=x^{x^x}[x^x(1+\ln x)\ln x+x^{x-1}],$$

故
$$y'=1+x^x(1+\ln x)+x^{x^x}[x^x(1+\ln x)\ln x+x^{x-1}].$$

3) 本题函数中出现的主要是乘方、开方和乘积形式，直接求导很不方便，一般采用对数求导法.

将 $y=\sqrt{e^{\frac{1}{x}}\sqrt{x(2+\sin x)}}$ 两边取对数得

$$\ln y=\frac{1}{2x}+\frac{1}{4}\ln x+\frac{1}{4}\ln(2+\sin x).$$

将上式两边对 x 求导得

$$\frac{y'}{y}=-\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{4x}+\frac{\cos x}{4(2+\sin x)},$$

则
$$y'=y\left(\frac{x-2}{4x^2}+\frac{\cos x}{4(2+\sin x)}\right)=\sqrt{e^{\frac{1}{x}}\sqrt{x\sqrt{2+\sin x}}}\left(\frac{x-2}{4x^2}+\frac{\cos x}{4(2+\sin x)}\right).$$

4) 本题与 3)类似，也适宜用对数求导法. 将 $y=\sqrt[3]{\dfrac{x(x^2+1)}{(x^2-1)^2}}$ 两边取对数得

$$\ln|y|=\frac{1}{3}[\ln|x|+\ln(x^2+1)-2\ln|x^2-1|],$$

上式两边对 x 求导得

$$\frac{y'}{y}=\frac{1}{3}\left[\frac{1}{x}+\frac{2x}{x^2+1}-\frac{4x}{x^2-1}\right],$$

则
$$y'=\frac{1}{3}y\left[\frac{1}{x}+\frac{2x}{x^2+1}-\frac{4x}{x^2-1}\right]=\frac{x^4+6x^2+1}{3x(1-x^4)}\sqrt[3]{\frac{x(x^2+1)}{(x^2-1)^2}}.$$

注　本题中的四个例子主要都是用对数求导法. 对数求导法一般适用于两种形式的函数,一种是幂指函数 $u(x)^{v(x)}$,另一种是许多因子相乘除、乘方、开方的函数.

例 14　求下列方程所确定的隐函数的导数:

1) $\sqrt{x^2+y^2}=e^{\arctan\frac{y}{x}}$,求$\frac{d^2y}{dx^2}$;

2) $y=\tan(x+y)$,求$\frac{d^2y}{dx^2}$;

3) $y=f(x+y)$,其中 f 具有二阶导数,且其一阶导数不等于 1. 求$\frac{d^2y}{dx^2}$;

4) $y=1+xe^{xy}$,求 $y'|_{x=0}$;$y''|_{x=0}$.

解　1) 等式$\sqrt{x^2+y^2}=e^{\arctan\frac{y}{x}}$两边取对数得

$$\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)=\arctan\frac{y}{x},$$

上式两边对 x 求导得

$$\frac{1}{2}\frac{2x+2yy'}{x^2+y^2}=\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\frac{xy'-y}{x^2},$$

由上式可得
$$y'=\frac{x+y}{x-y},$$

从而
$$y''=\frac{(1+y')(x-y)-(1-y')(x+y)}{(x-y)^2}=\frac{2xy'-2y}{(x-y)^2}=\frac{2(x^2+y^2)}{(x-y)^3}.$$

2) 等式 $y=\tan(x+y)$两边对 x 求导得

$$y'=\sec^2(x+y)\cdot(1+y'),$$

$$y'=\frac{\sec^2(x+y)}{1-\sec^2(x+y)},$$

上式直接求导数较繁,此时要注意,如果能利用原方程将一阶导数表达式化简应尽可能化简后再求二阶导数.

由原方程 $y=\tan(x+y)$知

$$y'=\frac{\sec^2(x+y)}{1-\sec^2(x+y)}=\frac{1+\tan^2(x+y)}{-\tan^2(x+y)}=-\frac{1+y^2}{y^2}=-\frac{1}{y^2}-1,$$

于是
$$y''=\frac{2y'}{y^3}=-\frac{2}{y^3}\left(\frac{1}{y^2}+1\right).$$

3）等式 $y=f(x+y)$ 两边对 x 求导得

$y'=f'(x+y)(1+y')$，从而有

$$y'=\frac{f'(x+y)}{1-f'(x+y)}=-1+\frac{1}{1-f'(x+y)},$$

上式两边对 x 求导得

$$y''=-\frac{-f''(x+y)(1+y')}{[1-f'(x+y)]^2}=\frac{f''(x+y)}{[1-f'(x+y)]^3}$$

4）**解法一**　等式 $y=1+xe^{xy}$ 两边对 x 求导得

$$y'=xe^{xy}(y+xy')+e^{xy}=e^{xy}(x^2y'+xy+1).$$

由 $y=1+xe^{xy}$ 知，当 $x=0$ 时，$y=1$，将 $x=0,y=1$ 代入上式得 $y'(0)=1$.

等式 $y'=e^{xy}(x^2y'+xy+1)$ 两边对 x 求导得

$$y''=e^{xy}(y+xy')(x^2y'+xy+1)+e^{xy}(2xy'+x^2y''+y+xy')$$

将 $x=0,y=1,y'(0)=1$ 代入上式得 $y''(0)=2$.

解法二　同解法一先求出 $y'=e^{xy}(x^2y'+xy+1)$，在求二阶导数前利用原式 $y=1+xe^{xy}$ 将上式化简得

$$y'=e^{xy}+(y-1)(y+xy'),$$

然后，上式两边对 x 求导，较解法一方便.

注　本例中的四个例题反映了隐函数求导常见题型和常用方法. 如果是求由方程 $F(x,y)=0$ 所确定的隐函数 $y=y(x)$ 的二阶导函数（如本例中的 1），2），3）），首先在导式 $F(x,y)=0$ 两边对 x 求导得 $y'(x)$，然后 $y'(x)$ 再对 x 求导得 $y''(x)$，注意在求 $y''(x)$ 之前要对 $y'(x)$ 利用原方程 $F(x,y)=0$ 尽可能化简，这样求 $y''(x)$ 较为方便. 但如果是求由方程 $F(x,y)=0$ 确定的隐函数 $y=y(x)$ 在一点 $x=x_0$ 处的导数 $y'(x_0)$ 及 $y''(0)$（如本例中的 4）），则应先将等式 $F(x,y)=0$ 两边对 x 求导，此时不用解出一阶导函数表达式 $y'(x)$，而是对刚才求导得到的等式两端再对 x 求导，将 $x=x_0$ 代入刚求导得到的两个等式求出 $y'(x_0)$ 和 $y''(x_0)$，这样较为方便.

例 15　求下列参数方程所确定函数的导数：

1）$\begin{cases}x=\ln(1+t^2),\\ y=t-\arctan t,\end{cases}$ 求 $\dfrac{dy}{dx},\dfrac{d^2y}{dx^2}$，及 $\dfrac{dx}{dy},\dfrac{d^2x}{dy^2}$；

2）$\begin{cases}x=f(t)-\pi,\\ y=f(e^{3t}-1),\end{cases}$ 求 $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{t=0},\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=0}$，其中 $f(t)$ 二阶可导且 $f'(0)\neq 0$.

分析　求参数方程 $\begin{cases}x=x(t)\\ y=y(t)\end{cases}$ 确定的函数 $y=y(x)$ 的一阶导数 $\dfrac{dy}{dx}$，一般直接用公式 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\dot{y}}{\dot{x}}$ 求；而要求 $y=y(x)$ 的二阶导数 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$，一般有两种方法，方法一是

利用公式$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\ddot{y}\dot{x}-\ddot{x}\dot{y}}{\dot{x}^3}$，另一种方法是在等式$\frac{dy}{dx}=\frac{\dot{y}}{\dot{x}}$两端再对 x 求导，即$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{\dot{y}}{\dot{x}}\right)=\frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{y}}{\dot{x}}\right)\frac{dt}{dx}=\frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{y}}{\dot{x}}\right)\frac{1}{\dot{x}}$，一般情况下方法二较为简单.

解　1)
$$\frac{dy}{dx}=\frac{\dot{y}}{\dot{x}}=\frac{1-\frac{1}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}}=\frac{t}{2},$$

等式$\frac{dy}{dx}=\frac{t}{2}$两端对 x 求导得

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{t}{2}\right)=\frac{d}{dt}\left(\frac{t}{2}\right)\frac{dt}{dx}=\frac{d}{dt}\left(\frac{t}{2}\right)\frac{1}{\dot{x}}$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\frac{2t}{1+t^2}}=\frac{(1+t^2)}{4t}$$

$$\frac{dx}{dy}=\frac{\dot{x}}{\dot{y}}=\frac{\frac{2t}{1+t^2}}{1-\frac{1}{1+t^2}}=\frac{2}{t}$$

上式两端对 y 求导得

$$\frac{d^2x}{dy^2}=\frac{d}{dy}\left(\frac{2}{t}\right)=\frac{d}{dt}\left(\frac{2}{t}\right)\frac{dt}{dy}=\frac{d}{dt}\left(\frac{2}{t}\right)\frac{1}{\dot{y}}$$
$$=\left(-\frac{2}{t^2}\right)\frac{1}{1-\frac{1}{1+t^2}}=-\frac{2(1+t^2)}{t^4}$$

2)
$$\frac{dy}{dx}=\frac{\dot{y}}{\dot{x}}=\frac{f'(e^{3t}-1)3e^{3t}}{f'(t)},$$
$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=0}=\frac{3f'(0)}{f'(0)}=3,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dt}\left(\frac{3e^{3t}f'(e^{3t}-1)}{f'(t)}\right)\frac{1}{\dot{x}}$$
$$=\frac{[9e^{3t}f'(e^{3t}-1)+9e^{6t}f''(e^{3t}-1)]f'(t)-3e^{3t}f'(e^{3t}-1)f''(t)}{[f'(t)]^3}$$

则
$$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=0}=\frac{9f'(0)+6f''(0)}{[f'(0)]^2}.$$

注　这里应特别注意的是在求参数方程所确定的函数的二阶导数时一种典型错误，以 1)为例，由$\frac{dy}{dx}=\frac{\dot{y}}{\dot{x}}$我们立刻得到$\frac{dy}{dx}=\frac{t}{2}$，从而有人得出$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{1}{2}$. 这

是错误的，因为，由$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{t}{2}$要得到$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$应是等式$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{t}{2}$两端同时对 x 求导数，而刚才的错误出现在等式左端是对 x 求导，而右端是对 t 求导. 正确的解法是

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{t}{2}\right)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{t}{2}\right)\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{t}{2}\right)\frac{1}{\dot{x}}=\frac{1}{2}\frac{1}{\frac{2t}{1+t^2}}=\frac{1+t^2}{4t}.$$

例 16　设 $y=y(x)$ 由方程组$\begin{cases}x=3t^2+2t+3,\\ \mathrm{e}^y\sin t-y+1=0\end{cases}$所确定，求$\left.\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{t=0}$.

分析　本题是求参数方程的导数，但第二个方程给出的 $y=y(t)$ 是由方程 $\mathrm{e}^y\sin t-y+1=0$ 所确定的隐函数，因此，又要求隐函数的导数，所以本题是一道综合题.

解法一　由 $x=3t^2+2t+3$ 知 $x|_{t=0}=3$，且

$$\dot{x}(t)=6t+2,\quad \dot{x}(0)=2.$$

由 $\mathrm{e}^y\sin t-y+1=0$ 知 $y|_{t=0}=1$，

$$\mathrm{e}^y\dot{y}\sin t+\mathrm{e}^y\cos t-\dot{y}=0,$$

则

$$\dot{y}(t)=\frac{\mathrm{e}^y\cos t}{1-\mathrm{e}^y\sin t}=\frac{\mathrm{e}^y\cos t}{2-y},\quad \dot{y}(0)=\mathrm{e},$$

从而有

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)}=\frac{\mathrm{e}^y\cos t}{(2-y)(6t+2)}.$$

该式两端对 x 求导得

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)}\right)\frac{1}{\dot{x}}$$

$$=\frac{(\mathrm{e}^y\dot{y}\cos t-\mathrm{e}^y\sin t)(2-y)(6t+2)-\mathrm{e}^y\cos t[6(2-y)-\dot{y}(6t+2)]}{(2-y)^2(6t+2)^3}.$$

将 $t=0, y(0)=1, \dot{y}(0)=\mathrm{e}$ 代入上式得

$$\left.\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{t=0}=\frac{2\mathrm{e}^2-3\mathrm{e}}{4}.$$

解法二　本题最简单的方法是利用公式

$$\left.\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{t=0}=\frac{\ddot{y}(0)\dot{x}(0)-\ddot{x}(0)\dot{y}(0)}{\dot{x}^3(0)}.$$

由 $x=3t^2+2t+3$ 知 $\dot{x}=6t+2$，$\ddot{x}=6$，则

$$\dot{x}(0)=2,\quad \ddot{x}(0)=6.$$

由 $\mathrm{e}^y\sin t-y+1=0$ 知 $y(0)=1$，且

$$\mathrm{e}^y\dot{y}\sin t+\mathrm{e}^y\cos t-\dot{y}=0.$$

该式两端再对 t 求导得

$$\ddot{y}\mathrm{e}^y\sin t+\mathrm{e}^y\dot{y}^2\sin t+2\mathrm{e}^y\dot{y}\cos t-\mathrm{e}^y\sin t-\ddot{y}=0.$$

在以上两个式中分别令 $t=0$ 得 $\dot{y}(0)=\mathrm{e}$，$\ddot{y}(0)=2\mathrm{e}^2$.

将 $\dot{x}(0)=2$，$\ddot{x}(0)=6$，$\dot{y}(0)=\mathrm{e}$，$\ddot{y}(0)=2\mathrm{e}^2$ 代入公式

$$\left.\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{t=0}=\frac{\ddot{y}(0)\dot{x}(0)-\ddot{x}(0)\dot{y}(0)}{\dot{x}^3(0)},$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{t=0}=\frac{2\mathrm{e}^2-3\mathrm{e}}{4}.$$

注 像本题这种参数方程与隐函数的综合题求一个具体点的二阶导数，往往解法二(代公式)较为方便.

例 17 试求曲线 $xy+2\ln x=y^4$ 在点(1,1)处的切线方程和法线方程.

分析 本题关键是求出曲线 $xy+2\ln x=y^4$ 在点(1,1)处切线斜率，这显然是隐函数求导的问题.

解 等式 $xy+2\ln x=y^4$ 两端对 x 求导得

$$y+xy'+\frac{2}{x}=4y^3y',$$

将 $x=1,y=1$ 代入上式得 $y'|_{(1,1)}=1$，

则该曲线在点(1,1)处切线方程为 $y-1=x-1$，

即 $$y-x=0.$$

法线方程为 $$y+x=0.$$

例 18 求曲线 $y=x^2$ 和 $y=\frac{1}{x}(x<0)$的公切线方程.

解 设公切线在曲线 $y=x^2(x<0)$上的切点为(x_1,x_1^2)，在曲线 $y=\frac{1}{x}$上的切点为$\left(x_2,\frac{1}{x_2}\right)$，则公切线作为曲线 $y=x^2$ 的切线，其方程为

$$y=x_1^2+2x_1(x-x_1).$$

公切线作为曲线 $y=\frac{1}{x}$的切线，其方程为

$$y=\frac{1}{x_2}-\frac{1}{x_2^2}(x-x_2).$$

由于是公切线，所以，以上两切线方程右端 x 的同次幂系数相等，即

$$\begin{cases}2x_1=-\dfrac{1}{x_2^2},\\ -x_1^2=\dfrac{2}{x_2}.\end{cases}$$

由上式解得 $x_1=-2,x_2=-\frac{1}{2}$.

故公切线方程为 $4x+y+4=0$.

例 19　求曲线 $\rho=e^{\theta}$ 在点 $(\rho,\theta)=\left(e^{\frac{\pi}{2}},\frac{\pi}{2}\right)$ 处的切线方程.

分析　本题中的曲线是用极坐标方程 $\rho=e^{\theta}$ 给出. 此时，很容易写出该曲线参数方程为

$$\begin{cases}x=e^{\theta}\cos\theta,\\ y=e^{\theta}\sin\theta.\end{cases}$$

利用参数方程求导法可求出该曲线在点 $(\rho,\theta)=\left(e^{\frac{\pi}{2}},\frac{\pi}{2}\right)$ 处切线斜率，从而可求得切线方程.

解　曲线 $\rho=e^{\theta}$ 的参数方程为

$$\begin{cases}x=e^{\theta}\cos\theta,\\ y=e^{\theta}\sin\theta.\end{cases}$$

由参数方程求导公式得

$$\frac{dy}{dx}=\frac{e^{\theta}\sin\theta+e^{\theta}\cos\theta}{e^{\theta}\cos\theta-e^{\theta}\sin\theta},$$

则

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\theta=\frac{\pi}{2}}=-1.$$

点 $(\rho,\theta)=\left(e^{\frac{\pi}{2}},\frac{\pi}{2}\right)$ 的直角坐标为 $(0,e^{\frac{\pi}{2}})$，因此，所求切线为 $y-e^{\frac{\pi}{2}}=-(x-0)$，

即

$$x+y=e^{\frac{\pi}{2}}.$$

注　要求极坐标方程 $\rho=\rho(\theta)$ 所表示曲线在某点处切线斜率，首先写出该曲线参数方程 $\begin{cases}x=\rho(\theta)\cos\theta,\\ y=\rho(\theta)\sin\theta,\end{cases}$ 然后利用参数方程求导法便可求得曲线 $\rho=\rho(\theta)$ 在所求点处切线斜率.

例 20　已知 $f(x)$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 上的连续函数，它在 $x=0$ 某邻域内满足

$$f(1+\sin x)-3f(1-\sin x)=8x+o(x)\quad(x\to 0)$$

且 $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导，求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程.

分析　本题的关键是求出 $f'(1)$ 和 $f(1)$，原题中仅假设 $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导，且 $f(1+\sin x)-3f(1-\sin x)=8x+o(x)(x\to 0)$，所以，应考虑用导数定义求 $f'(1)$.

解　在等式 $f(1+\sin x)-3f(1-\sin x)=8x+o(x)$ 中令 $x\to 0$ 得

$$f(1)-3f(1)=0,$$

则

$$f(1)=0.$$

等式 $f(1+\sin x)-3f(1-\sin x)=8x+o(x)$ 两端除以 x，取极限得

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(1+\sin x)-3f(1-\sin x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{8x+o(x)}{x}=8,$$

又
$$\lim_{x\to 0}\frac{f(1+\sin x)-3f(1-\sin x)}{x}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{[f(1+\sin x)-f(1)]-3[f(1-\sin x)-f(1)]}{x}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{[f(1+\sin x)-f(1)]-3[f(1-\sin x)-f(1)]}{\sin x}\frac{\sin x}{x}$$
$$=f'(1)+3f'(1)=4f'(1),$$
则 $f'(1)=2$,故所求切线方程为 $y=2(x-1)$.

例 21 设有一火箭发射升空后沿竖直方向运动.在距火箭发射台 4 000 m 处安装有摄影机,摄影机始终对准火箭.用 $h(t)$表示火箭在 t 时刻的高度,假定在时刻 t_0,火箭高度 $h(t_0)=3\ 000$ m,运动速度为 300 m/s.

1) 用 l 表示火箭与摄影机的距离,求在 t_0 时刻 l 的增加速率.

2) 用 α 表示摄影机跟踪火箭时的仰角(弧度),求在 t_0 时刻 α 的增加速率.

分析 这是一个相关变化率问题.首先应建立两个相关量的关系式,然后,等式两端对 t 求导便可求得所要的变化率.

解 1) 首先建立 l 与 h 之间的关系,由题设知
$$l=\sqrt{4\ 000^2+h^2},$$
上式两端对 t 求导得
$$\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t}=\frac{h}{\sqrt{4\ 000^2+h^2}}\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}.$$
由题设知,$t=t_0$ 时,$h=3\ 000$ m,$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}=300$(m/s),代入上式得
$$\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t}=\frac{3\ 000}{\sqrt{4\ 000^2+3\ 000^2}}=180(\mathrm{m/s}).$$

2) 首先应建立 α 与 h 之间关系,由题设知
$$\tan\alpha=\frac{h}{4\ 000}.$$
上式两端对 t 求导得 $\sec^2\alpha\,\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{4\ 000}\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}$,

而当 $t=t_0$ 时,$h=3\ 000$(m),则 $\sec^2\alpha=\frac{25}{16}$,由题设知 $t=t_0$ 时,$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}=300$(m/s).则
$$\left.\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t}\right|_{t=t_0}=\frac{16}{25}\cdot\frac{1}{4\ 000}\cdot 300=0.048.$$

例 22 设 $f(x)$在 $x=0$ 处连续,且在 $x=0$ 的去心邻域内 $f(x)=1+2x\mathrm{e}^x+x\sin x+\alpha(x)$,其中 $\alpha(x)$在 $x\to 0$ 时是比 x 高阶的无穷小.试问 $f(x)$在 $x=0$ 处是否可微?如果可微,试求 $f(x)$在 $x=0$ 处的微分.

分析 由于可微等价于可导,所以,有两种办法可进行分析.一是用微分定

义直接判定是否可微，二是用导数定义判定 $f'(0)$ 是否存在.

解法一　由于 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，则

$$f(0)=\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}(1+2xe^{x}+x\sin x+\alpha(x))=1,$$

从而等式 $f(x)=1+2xe^{x}+x\sin x+\alpha(x)$ 可改写为

$$f(x)-f(0)=2xe^{x}+x\sin x+\alpha(x),$$

即

$$\begin{aligned}f(\Delta x)-f(0)&=2\Delta x e^{\Delta x}+\Delta x\sin\Delta x+\alpha(\Delta x)\\&=2\Delta x+2\Delta x(e^{\Delta x}-1)+\Delta x\sin\Delta x+\alpha(\Delta x)\\&=2\Delta x+o(\Delta x),\end{aligned}$$

由微分定义知，$f(x)$ 在 $x=0$ 处可微，且

$$dy=2dx.$$

解法二　$f(0)=\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}(1+2xe^{x}+x\sin x+\alpha(x))=1$，

则等式 $f(x)=1+2xe^{x}+x\sin x+\alpha(x)$ 可改写为

$$f(x)-f(0)=2xe^{x}+x\sin x+\alpha(x),$$

从而

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{2xe^{x}+x\sin x+\alpha(x)}{x}=2,$$

由此可知 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可微，且微分为

$$dy=f'(0)dx=2dx.$$

3. 讨论题

1）设 $f(x)$ 在 x_0 的某邻域内有定义，则 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处可导的一个充要条件为

(A) $\lim\limits_{n\to\infty} n\left[f\left(x_0+\dfrac{1}{n}\right)-f(x_0)\right]$ 存在；

(B) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x_0+x^2)-f(x_0)}{x^2}$ 存在；

(C) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x_0+x)-f(x_0-x)}{2x}$ 存在；

(D) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x_0)-f(x_0-x)}{x}$ 存在.

2）如果函数 $f(x)$ 在 x_0 点可导，能否推出 $f(x)$ 在 x_0 某个邻域内可导？能否推出 $f(x)$ 在 x_0 某个邻域内连续？

3）如果函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的左、右导数都存在，那么 $f(x)$ 在 x_0 处连续吗？反之如何？

4）符号 $f'_{+}(x_0)$ 与 $f'(x_0+0)$ 是否有区别？

5）导数与微分之间的区别与联系是什么？

6）设有分段函数 $f(x)=\begin{cases}\varphi(x), & x\geqslant x_0,\\ \psi(x), & x<x_0,\end{cases}$ 其中 $\varphi(x)$ 和 $\psi(x)$ 均可导，问

$f'(x)=\begin{cases}\varphi'(x), & x\geqslant x_0,\\ \psi'(x), & x<x_0,\end{cases}$是否成立？为什么？

7）若 $f(x)$在区间 I 上可导，那么，其导函数 $f(x)$在 I 上一定连续吗？

8）设 $H(x)=f(x)+g(x)$，$G(x)=f(x)g(x)$. 若 $f(x)$和 $g(x)$中至少有一个在 x_0 点不可导，那么 $H(x)$和 $G(x)$一定在 x_0 点不可导吗？

9）设 $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上可导，下列说法是否正确？

(1) 若 $f(x)$是奇（偶）函数，则导函数 $f'(x)$是偶（奇）函数.

(2) 若 $f(x)$是以 T 为周期的周期函数，则导函数 $f'(x)$也是以 T 为周期的周期函数.

(3) 若 $f(x)$是单调增函数，则导函数 $f'(x)$也是单调增函数.

10）若函数 $f(x)$在点 x_0 处不可导，那么，曲线 $y=f(x)$在点$(x_0,f(x_0))$处是否一定没有切线？

4. 练习题

1. 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos x}{\sqrt{x}}, & x>0\\ x^2g(x), & x\leqslant 0\end{cases}$，其中 $g(x)$是有界函数，则函数 $f(x)$在 $x=0$ 处

A）极限不存在.　　B）极限存在但不连续.

C）连续但不可导.　　D）可导.

2. 设函数 $f(x)$在点 $x=a$ 处可导，则函数$|f(x)|$在点 $x=a$ 处不可导的充分条件是

A）$f(a)=0$ 且 $f'(a)=0$.　　B）$f(a)=0$ 且 $f'(a)\neq 0$.

C）$f(a)>0$ 且 $f'(a)>0$.　　D）$f(a)<0$ 且 $f'(a)<0$.

3. 设 $f(0)=0$，则 $f(x)$在点 $x=0$ 可导的充要条件为

A）$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{h^2}f(1-\cos h)$存在.　　B）$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{h}f(1-e^h)$存在.

C）$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{h}f(h\sin h)$存在.　　D）$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{h}[f(2h)-f(h)]$存在.

4. 设函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+|x|^{2n}}$，则 $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内

A）处处可导.　　B）恰有一个不可导点.

C）恰有两个不可导点.　　D）至少有三个不可导点.

5. 函数 $f(x)=(x^2+x-2)|x^3-x|$的不可导点的个数为

A）3　　B）2　　C）1　　D）0

6. 设 $f(x)$在点 $x=x_0$ 处可导，a 和 b 为非零常数，试求极限

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+a\Delta x)-f(x_0-b\Delta x)}{\Delta x}.$$

7. 设 $f(x)$ 二阶可导，且 $f(x)\neq 0$，$\varphi(x)=\lim\limits_{t\to 0}\left(\dfrac{f(x+t)}{f(x)}\right)^{\frac{x}{\sin t}}$，求 $\varphi'(x)$.

8. 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有定义，在区间 $[0,2]$ 上有 $f(x)=x(x^2-4)$，若对任意 x 都满足 $f(x)=kf(x+2)$，其中 k 为常数.

1) 试求 $f(x)$ 在 $[-2,0)$ 上的表达式.

2) 当 k 为何值时，$f(x)$ 在 $x=0$ 处可导.

9. 设 $f(x)=\begin{cases}|x|^{\alpha}\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$ 试讨论实数 α 分别满足什么条件时，

1) $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续；

2) $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导；

3) $f'(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

10. 求下列函数的导数：

1) 设 $y=\dfrac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2}+\dfrac{a^2}{2}\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})$，求 y'，

2) 设 $y=\arctan \mathrm{e}^x-\ln\sqrt{\dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{\mathrm{e}^{2x}+1}}$，求 $\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=1}$.

3) 设 $y=\sin[f(x^2)]$，其中 f 二阶可导，求 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

11. 求下列函数的 n 阶导数 $(n\geqslant 2)$.

1) $y=\dfrac{x^3}{x^2-3x+2}$；

2) $y=\sin^6x+\cos^6x$；

3) $y=\ln\sqrt{4-9x^2}$.

12. 求函数 $f(x)=x^2\ln(1+x)$ 在 $x=0$ 处的 n 阶导数 $f^{(n)}(0)(n\geqslant 3)$.

13. 求由下列方程所确定的隐函数的导数

1) $x\sin y-\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^y=0$，求 $y''(0)$.

2) $x\mathrm{e}^{f(y)}=\mathrm{e}^y$，其中 f 具有二阶导数，且 $f'\neq 1$，求 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

14. 设 $y=y(x)$ 由 $\begin{cases}x=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\sin\dfrac{t}{x}\right)^{2tx},\\ y=t^2\mathrm{e}^{2t^2}\end{cases}$ 所确定，求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$，$\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

15. 设 $f(0)=0$，$f'(0)$ 存在，令 $x_n=f\left(\dfrac{1}{n^2}\right)+f\left(\dfrac{2}{n^2}\right)+\cdots+f\left(\dfrac{n}{n^2}\right)$，求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

第二讲 微分中值定理及 L'Hospital 法则

1. 教学要求与学习注意点

1) 正确理解 Rolle 定理、Lagrange 定理、Cauchy 定理及其几何意义，会利用它们和构造辅助函数法解决一些比较简单的相关问题(例如，证明某些不等式，证明方程根的存在性等).

2) 熟练掌握利用 L'Hospital 法则求不定式极限的方法并知道应用该法则时应注意的问题.

3) 熟悉 Taylor 定理(包括带 Lagrange 余项与带 Peano 余项的两种形式)的结论与成立条件.

4) 理解 Taylor 定理是用高次多项式来逼近具有一定可微性的函数所得到的一个重要定理.

5) 熟悉几个常用的基本初等函数(e^x, $\sin x$, $\cos x$, $\ln(1+x)$, $(1+x)^\alpha$)的 Maclaurin 公式.

6) 会用 Taylor 公式进行近似计算，求极限，证明一些简单的不等式.

学习注意点：

1) 四个中值定理(Rolle, Lagrange, Cauchy, Taylor)是沟通函数与导数之间的桥梁，一般说来，利用导数研究函数性态都要直接或间接用到中值定理，中值定理为我们利用导数研究函数性态奠定了理论基础，是利用导数的局部性研究函数在区间上整体性的重要工具. 如果要用低阶(一阶或二阶)导数研究函数性态，通常是用 Rolle, Lagrange 或 Cauchy 中值定理，其中 Lagrange 中值定理最常用. 如果是用高阶导数研究函数性态，一般是用 Taylor 中值定理，其中，如果研究函数的局部性态(如极限，极值等)，通常是用带有 Peano 余项的 Taylor 定理，如果研究函数的整体性态，通常是用带有 Lagrange 余项的 Taylor 中值定理.

2) L'Hospital 法则是求七种类型$\left(\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0\cdot\infty, \infty-\infty, 1^\infty, \infty^0, 0^0\right)$不定式的一种常见的好方法，但不是唯一的方法. 有些不定式仅仅用 L'Hospital 法则不一定能求出极限，有时仅仅用 L'Hospital 法则虽然能求出极限，但不一定是最好的方法，因此，在求不定式极限时往往要把 L'Hospital 法则与以前学过的求极限的方法(极限四则运算法则，基本极限，等价无穷小代换等)有机结合起来，灵活使用，求不定式的极限最常用的方法是将 L'Hospital 法则与等价无穷小结合起来使用. 另外，L'Hospital 法则在一定条件下才能使用，有关使用

L'Hospital 法则中应注意的问题见本书第一部分第二章中“6. L'Hospital 法则的几何意义和应用中应当注意的几个问题”.

2. 典型例题

例 1　求下列极限：

1) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^a-a^x}{x^x-a^a}\quad(a>1)$；

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1+\sin x}}{x\ln^2(1+x)}$；

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\sin x}-e^x}{\sin x-x}$；

4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-e}{x}$.

解　1) 本题是一个“$\dfrac{0}{0}$”型极限，由 L'Hospital 法则得

$$\lim_{x\to a}\frac{x^a-a^x}{x^x-a^a}=\lim_{x\to a}\frac{ax^{a-1}-a^x\ln a}{x^x(1+\ln x)}=\frac{aa^{a-1}-a^a\ln a}{a^a(1+\ln a)}=\frac{1-\ln a}{1+\ln a}.$$

2) 本题也是“$\dfrac{0}{0}$”型极限，但直接用 L'Hospital 法则较繁，应将分子有理化，分母中用到等价无穷小代换 $\ln^2(1+x)\sim x^2$.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1+\sin x}}{x\ln^2(1+x)}&=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1+\sin x}}{x^3}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3(\sqrt{1+x}+\sqrt{1+\sin x})}\\&=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}\\&=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{3x^2}\quad\left(1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2\right)\\&=\frac{1}{12}.\end{aligned}$$

3) **解法一**　本题也是一个“$\dfrac{0}{0}$”型极限，由 L'Hospital 法则知

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin x}-e^x}{\sin x-x}&=\lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin x}\cos x-e^x}{\cos x-1}\quad\left(\frac{0}{0}\right)\\&=\lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin x}\cos^2 x-e^{\sin x}\sin x-e^x}{-\sin x}\quad\left(\frac{0}{0}\right)\end{aligned}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin x}\cos^3 x-e^{\sin x}\sin 2x-\frac{1}{2}e^{\sin x}\sin 2x-e^{\sin x}\cos x-e^x}{-\cos x}=1.$$

解法二
$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin x}-e^x}{\sin x-x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x\left[e^{\sin x-x}-1\right]}{\sin x-x}$$
$$=1\qquad (e^{\sin x-x}-1\sim \sin x-x).$$

解法三　由 Lagrange 定理知

$\dfrac{e^{\sin x}-e^x}{\sin x-x}=e^{\xi}$,其中 ξ 介于 x 与 $\sin x$ 之间,

则
$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin x}-e^x}{\sin x-x}=\lim_{x\to 0}e^{\xi}=e^0=1.$$

4) **解法一**　由 L'Hospital 法则知

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-e}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}\dfrac{\frac{x}{1+x}-\ln(1+x)}{x^2}}{1}$$
$$=e\lim_{x\to 0}\frac{x-(1+x)\ln(1+x)}{x^2(1+x)}$$
$$=e\lim_{x\to 0}\frac{x-(1+x)\ln(1+x)}{x^2}$$
$$=e\lim_{x\to 0}\frac{1-1-\ln(1+x)}{2x}=-\frac{e}{2}.$$

解法二　由解法一可看出,由于本题中有幂指函数 $(1+x)^{\frac{1}{x}}$,因此本题用 L'Hospital 法则较繁,此时一般将幂指函数改写成指数函数,然后设法用等价无穷小代换较为方便.

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-e}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{\frac{\ln(1+x)}{x}}-e}{x}$$
$$=e\lim_{x\to 0}\frac{e^{\frac{\ln(1+x)-x}{x}}-1}{x}$$
$$=e\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}\qquad\left(e^{\frac{\ln(1+x)-x}{x}}-1\sim\frac{\ln(1+x)-x}{x}\right)$$
$$=e\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x}-1}{2x}$$
$$=e\lim_{x\to 0}\frac{\frac{-x}{1+x}}{2x}=-\frac{e}{2}.$$

注　本例中的四个题目都是“$\frac{0}{0}$”型. 从以上四个题目看出在应用 L'Hospital 法则时应注意以下几点：

1）每一步使用 L'Hospital 法应检查是否还是不定式，是否符合 L'Hospital 的条件.

2）非零因子极限先求出来再用 L'Hospital 法则较为方便. 如本例 2)的求解中 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1+\sin x}}=\frac{1}{2}$，本例 4)的法一求解中 $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}$.

3）一般说来，不定式极限用 L'Hospital 法则较为方便，但也不全是，如本例中 2)，3)，4)直接用 L'Hospital 法则都不大方便，需作一些处理然后再用 L'Hospital 法则，常用的处理方法有，等价无穷小代换，根式有理化等.

例 2　求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\cot^2 x-\frac{1}{x^2}\right)$.

分析　本题是一个“$\infty-\infty$”型不定式的极限，通常是采用通分化成“$\frac{0}{0}$”或“$\frac{\infty}{\infty}$”再用 L'Hospital 法则.

解

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0}\left(\cot^2 x-\frac{1}{x^2}\right)\\
=&\lim_{x\to 0}\frac{x^2\cos^2 x-\sin^2 x}{x^2\sin^2 x}\\
=&\lim_{x\to 0}\frac{x^2\cos^2 x-\sin^2 x}{x^4}\quad(\sin^2 x\sim x^2)\\
=&\lim_{x\to 0}\frac{x\cos x+\sin x}{x}\cdot\frac{x\cos x-\sin x}{x^3}\\
=&2\lim_{x\to 0}\frac{x\cos x-\sin x}{x^3}\\
=&2\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-x\sin x-\cos x}{3x^2}=-\frac{2}{3}.
\end{aligned}$$

注　本题计算中将 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2\cos^2 x-\sin^2 x}{x^4}$ 改写成 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\cos x+\sin x}{x}\cdot\frac{x\cos x-\sin x}{x^3}$ 然后先求出极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\cos x+\sin x}{x}=2$ 后，再用 L'Hospital 法则，为后面计算提供了方便.

例 3　计算极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left[x-x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]$.

分析　本例也是一个“$\infty-\infty$”的不定式，但如果直接通分化成“$\frac{0}{0}$”或“$\frac{\infty}{\infty}$”

后用 L'Hospital 法则不方便，考虑到 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$，所以我们可作变换$\dfrac{1}{x}=t$.

解法一　令$\dfrac{1}{x}=t$，则当 $x\to\infty$时，$t\to0$.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\left[x-x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]&=\lim_{t\to0}\left[\frac{1}{t}-\frac{\ln(1+t)}{t^2}\right]\\&=\lim_{t\to0}\frac{t-\ln(1+t)}{t^2}\quad\left(\text{“}\frac{0}{0}\text{”型}\right)\\&=\lim_{t\to0}\frac{1-\dfrac{1}{1+t}}{2t}=\lim_{t\to0}\frac{\dfrac{t}{1+t}}{2t}=\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

解法二　本例也可用 Taylor 定理，由 Taylor 定理知

$$\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\quad(x\to\infty),$$

则
$$\lim_{x\to\infty}[x-x^2\ln(1+x)]=\lim_{x\to\infty}\left[x-x+\frac{1}{2}-x^2\cdot o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right].$$

注　显然解法二较为方便，利用 Taylor 公式求极限也是一种求极限常用的方法.

例 4　计算极限 $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{\sin^2x}}$.

分析　这是一个“1^∞”型不定式的极限，通常采用取对数或改写成指数形式后再考虑用 L'Hospital 法则

解法一　由于 $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{\sin^2x}}=\lim\limits_{x\to0}\mathrm{e}^{\frac{\ln\frac{\sin x}{x}}{\sin^2x}}$，所以，只要求极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln\dfrac{\sin x}{x}}{\sin^2x}$，该极限是一个“$\dfrac{0}{0}$”型不定式，但直接用 L'Hospital 法则不方便，先用等价无穷小代换化简，然后再用 L'Hospital 法则.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}\frac{\ln\dfrac{\sin x}{x}}{\sin^2x}&=\lim_{x\to0}\frac{\ln\left(1+\dfrac{\sin x-x}{x}\right)}{x^2}\qquad(\sin^2x\sim x^2)\\&=\lim_{x\to0}\frac{\sin x-x}{x^3}\qquad\left(\ln\left(1+\frac{\sin x-x}{x}\right)\sim\frac{\sin x-x}{x}\right)\\&=\lim_{x\to0}\frac{\cos x-1}{3x^2}\\&=\lim_{x\to0}\frac{-\dfrac{1}{2}x^2}{3x^2}\qquad\left(\cos x-1\sim-\frac{1}{2}x^2\right)\\&=-\frac{1}{6},\end{aligned}$$

则
$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{\sin^2 x}}=e^{-\frac{1}{6}}.$$

解法二　处理"1^∞"型不定式极限还有一种常用且比较简单的方法，就是利用结论"若 $\lim u(x)=0,\lim v(x)=\infty$，且 $\lim u(x)v(x)=A$，则 $\lim(1+u(x))^{v(x)}=e^A$"。

由于 $\dfrac{\sin x}{x}=1+\dfrac{\sin x-x}{x}$，取 $u(x)=\dfrac{\sin x-x}{x}$，$v(x)=\dfrac{1}{\sin^2 x}$

则
$$\lim_{x\to 0}u(x)v(x)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{x\sin^2 x}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2}x^2}{3x^2}=-\frac{1}{6},$$

故
$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{\sin^2 x}}=e^{-\frac{1}{6}}.$$

注　一般说来，处理"1^∞"型不定式极限解法二较简单.

例 5　设 $f(0)=0,f'(0)=1,f''(0)=2$，求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-x}{x^2}$.

分析　这是一个"$\dfrac{0}{0}$"型不定式，如下解法是否正确？

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)-1}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{f''(x)}{2}=\frac{2}{2}=1.$$

这是一种典型的错误的解法，问题出在第二个等号和第三个等号. 由原题只假设 $f''(0)=2$，此时，极限 $\lim\limits_{x\to 0}f''(x)$ 不一定存在，从而等式 $\lim\limits_{x\to 0}f''(x)=2$ 也就不一定成立. 如果本题附加条件 $f(x)$ 在 $x=0$ 处有连续二阶导数，则以上解法完全正确.

解法一
$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-x}{x^2}\quad\left(\frac{0}{0}\right)$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)-1}{2x}$$
$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)-f'(0)}{x}$$
$$=\frac{1}{2}f''(0)\qquad(\text{导数定义})$$
$$=\frac{2}{2}=1.$$

解法二　本题也可用 Taylor 定理求解.

由于
$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+o(x^2)$$
$$=x+x^2+o(x^2),$$
则
$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)-x}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{x+x^2+o(x^2)-x}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{x^2+o(x^2)}{x^2}=1.$$

注　显然用解法二较为方便.

例 6　已知 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 6x+xf(x)}{x^3}=0$,求极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{6+f(x)}{x^2}$.

分析　本题的关键是如何将所求极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{6+f(x)}{x^2}$ 与已知极限联系起来.这里有三种思路,第一种是将 $\sin 6x$ 用 Taylor 定理展开;第二种是给已知极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 6x+xf(x)}{x^3}$ 分子中加 $6x$ 减 $6x$;第三种思路是由 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 6x+xf(x)}{x^3}=0$ 知,$\sin 6x+xf(x)=o(x^3)$,从该式中将 $f(x)$ 用已知形式表示出来,然后代入所求极限式 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{6+f(x)}{x^2}$.详细求解如下.

解法一　由 Taylor 定理知 $\sin 6x=6x-\dfrac{(6x)^3}{3!}+o(x^3)$,

则
$$\lim_{x\to0}\frac{\sin 6x+xf(x)}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{6x-\frac{(6x)^3}{3!}+o(x^3)+xf(x)}{x^3}=0,$$
从而有
$$\lim_{x\to0}\frac{6x+xf(x)}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{6+f(x)}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{(6x)^3}{3!}-o(x^3)}{x^3}=36.$$

解法二　由于
$$\lim_{x\to0}\frac{\sin 6x+xf(x)}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{\sin 6x-6x+6x+xf(x)}{x^3}=0,$$
则
$$\lim_{x\to0}\frac{6x+xf(x)}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{6+f(x)}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{6x-\sin 6x}{x^3}\quad\left(\frac{0}{0}\right)$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{6-6\cos 6x}{3x^2}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{36\sin 6x}{6x}=36.$$

解法三　由 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 6x+xf(x)}{x^3}=0$ 知
$$\sin 6x+xf(x)=o(x^3),$$
则
$$f(x)=\frac{-\sin 6x+o(x^3)}{x}$$

从而有
$$\lim_{x\to0}\frac{6+f(x)}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{6+\dfrac{-\sin 6x+o(x^3)}{x}}{x^2}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{6x-\sin 6x+o(x^3)}{x^3}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{6x-\sin 6x}{x^3}.$$

以下同解法二.

例 7　求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt[6]{x^6+x^5}-\sqrt[6]{x^6-x^5})$.

分析　本题是一个"$\infty-\infty$"型的不定式，一般方法是改写成"$\frac{\infty}{\infty}$"或"$\frac{0}{0}$"(本题可有理化)，然后用 L'Hospital 法则，显然本题用这个方法非常繁，因此考虑以下几种方法.

解法一　由于
$$\sqrt[6]{x^6+x^5}=x\sqrt[6]{1+\frac{1}{x}}.$$

由 $(1+x)^\alpha$ 的 Maclaurin 公式知，
$$\sqrt[6]{1+\frac{1}{x}}=\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{6}}=1+\frac{1}{6x}+o_1\left(\frac{1}{x}\right)\quad(x\to+\infty),$$

同理
$$\sqrt[6]{x^6-x^5}=x\left(1-\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{6}}=x\left[1-\frac{1}{6x}+o_2\left(\frac{1}{x}\right)\right],$$

则
$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt[6]{x^6+x^5}-\sqrt[6]{x^6-x^5})$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\left(x+\frac{x}{6x}+x\cdot o_1\left(\frac{1}{x}\right)-x+\frac{x}{6x}-x\cdot o_2\left(\frac{1}{x}\right)\right)$$
$$=\frac{1}{3}.$$

解法二
$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt[6]{x^6+x^5}-\sqrt[6]{x^6-x^5})$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\sqrt[6]{x^6-x^5}\left[\sqrt[6]{1+\frac{2x^5}{x^6-x^5}}-1\right]$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\sqrt[6]{x^6-x^5}\cdot\frac{1}{6}\frac{2x^5}{x^6-x^5}\quad\left(\sqrt[6]{1+\frac{2x^5}{x^6-x^5}}-1\sim\frac{1}{6}\cdot\frac{2x^5}{x^6-x^5}\right)$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\sqrt[6]{1-\frac{1}{x}}\cdot\frac{1}{6}\frac{2x^6}{x^6-x^5}=\frac{1}{3}.$$

解法三
$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt[6]{x^6+x^5}-\sqrt[6]{x^6-x^5})$$
$$=\lim_{x\to+\infty}x\left(\sqrt[6]{1+\frac{1}{x}}-\sqrt[6]{1-\frac{1}{x}}\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}x\left[\left(\sqrt[6]{1+\frac{1}{x}}-1\right)-\left(\sqrt[6]{1-\frac{1}{x}}-1\right)\right]$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[6]{1+\frac{1}{x}}-1}{\frac{1}{x}}-\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[6]{1-\frac{1}{x}}-1}{\frac{1}{x}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{6x}}{\frac{1}{x}}-\lim_{x\to+\infty}\frac{-\frac{1}{6x}}{\frac{1}{x}}\quad\left(\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\alpha}-1\sim\frac{\alpha}{x}\right)$$

$$=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{1}{3}.$$

解法四　由于 $\sqrt[6]{x^6+x^5}-\sqrt[6]{x^6-x^5}=x\left(\sqrt[6]{1+\frac{1}{x}}-\sqrt[6]{1-\frac{1}{x}}\right)$，对 $\sqrt[6]{1+t}$ 在 $\left[-\frac{1}{x},\frac{1}{x}\right]$ 用 Lagrange 中值定理得

$$\sqrt[6]{1+\frac{1}{x}}-\sqrt[6]{1-\frac{1}{x}}=\frac{1}{6(1+\xi)^{\frac{5}{6}}}\frac{2}{x}\quad\left(-\frac{1}{x}<\xi<\frac{1}{x}\right),$$

则
$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[6]{x^6+x^5}-\sqrt[6]{x^6-x^5}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{6(1+\xi)^{\frac{5}{6}}}\frac{2x}{x}=\frac{1}{3}.$$

例 8　试确定常数 a 和 n 的一组值，使得当 $x\to0$ 时，$e^{x^2}-\ln[e(1+x^2)]$ 与 ax^n 为等价无穷小.

分析　此类问题一般是两种方法，一种是对极限 $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{x^2}-\ln[e(1+x^2)]}{ax^n}$ 用 L'Hospital 法则，另一种是用 Taylor 定理，详细求解如下

解法一　利用 L'Hospital 法则

$$\lim_{x\to0}\frac{e^{x^2}-\ln[e(1+x^2)]}{ax^n}=\lim_{x\to0}\frac{2xe^{x^2}-\frac{2x}{1+x^2}}{anx^{n-1}}$$

$$=\frac{2}{a}\lim_{x\to0}\frac{e^{x^2}(1+x^2)-1}{nx^{n-2}(1+x^2)}$$

$$=\frac{2}{a}\lim_{x\to0}\frac{e^{x^2}(1+x^2)-1}{nx^{n-2}}$$

$$=\frac{2}{a}\lim_{x\to0}\frac{2xe^{x^2}(1+x^2)+2xe^{x^2}}{n(n-2)x^{n-3}}.$$

由上式可知，取 $n=4$ 时，上式极限为 $\frac{8}{8a}$. 从而当 $n=4,a=1$ 时，当 $x\to0$ 时 $e^{x^2}-\ln[e(1+x^2)]$ 与 ax^n 为等价无穷小.

解法二　由 Taylor 定理知

$$e^{x^2}=1+x^2+\frac{x^4}{2!}+o(x^4),$$

$$\ln[e(1+x^2)]=1+\ln(1+x^2)=1+x^2-\frac{x^4}{2}+o(x^4).$$

要使
$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-\ln[e(1+x^2)]}{ax^n}=1,$$

即要
$$\lim_{x\to 0}\frac{\left(1+x^2+\frac{x^4}{2!}+o(x^4)\right)-\left(1+x^2-\frac{x^4}{2}+o(x^4)\right)}{ax^n}=1,$$

从而有 $n=4,a=1$.

注　一般来说，此类问题用解法二较方便.

例 9　设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{g(x)-e^{-x}}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$ 其中 $g(x)$ 有二阶连续导数，且 $g(0)=1,g'(0)=-1$.

1）求 $f'(x)$；

2）讨论 $f'(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上的连续性.

解　1）当 $x\neq 0$ 时，$f'(x)=\dfrac{(g'(x)+e^{-x})x-(g(x)-e^{-x})}{x^2}$

$$=\frac{xg'(x)-g(x)+(x+1)e^{-x}}{x^2}.$$

当 $x=0$ 时，由导数定义知

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{g(x)-e^{-x}}{x^2}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{g'(x)+e^{-x}}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{g''(x)-e^{-x}}{2}=\frac{g''(0)-1}{2}.$$

2）因为

$$\lim_{x\to 0}f'(x)=\lim_{x\to 0}\frac{xg'(x)-g(x)+(x+1)e^{-x}}{x^2}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{g'(x)+xg''(x)-g'(x)+e^{-x}-(x+1)e^{-x}}{2x}=\frac{g''(0)-1}{2}=f'(0),$$

则 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处连续，在 $x\neq 0$ 处 $f'(x)$ 显然连续，则 $f'(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续.

注　事实上，本题中所给条件"$g(x)$ 具有二阶连续导数"这个条件可减弱为"$g(x)$ 具有连续一阶导数，$g''(0)$ 存在"，但此时以上解法要作相应修改，望读者考虑.

例 10　设 $a>1,n\geqslant 1$，试证明不等式

$$\frac{a^{\frac{1}{n+1}}}{(n+1)^2}<\frac{a^{\frac{1}{n}}-a^{\frac{1}{n+1}}}{\ln a}<\frac{a^{\frac{1}{n}}}{n^2}.$$

分析　由于 $a^{\frac{1}{n}}-a^{\frac{1}{n+1}}$ 为函数 a^x 在区间 $\left[\frac{1}{n+1},\frac{1}{n}\right]$ 两个端点函数值差，所以，考虑用 Lagrange 中值定理.

证　由 Lagrange 中值定理知

$$a^{\frac{1}{n}}-a^{\frac{1}{n+1}}=a^c\ln a\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=a^c\ln a\,\frac{1}{n(n+1)}\quad\left(\frac{1}{n+1}<c<\frac{1}{n}\right),$$

从而有 $\dfrac{a^{\frac{1}{n+1}}}{(n+1)^2}<\dfrac{a^{\frac{1}{n}}-a^{\frac{1}{n+1}}}{\ln a}=a^c\,\dfrac{1}{n(n+1)}\leqslant\dfrac{a^{\frac{1}{n}}}{n^2}$.

原题得证.

注　利用微分中值定理证明不等式是一种常用方法.

例 11　设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 为任意实数，求证方程 $a_1\cos x+a_2\cos 2x+\cdots+a_n\cos nx=0$ 在 $(0,\pi)$ 内必有实根.

分析　本题是要证明方程根的存在性. 在前面我们已学习过一种证明方程根存在性的方法是利用零点定理，但本题若将方程左端令为 $f(x)$，则 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 两端点异号无法验证，所以，本题不便用零点定理. 事实上要证方程根的存在性，还有一种常用的方法是用 Rolle 定理. 要证方程 $f(x)=0$ 在 $[a,b]$ 上有根. 考虑函数 $F(x)$，其中 $F'(x)\equiv f(x),x\in(a,b)$，只要 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上满足 Rolle 定理条件，则 $\exists c\in(a,b)$ 使 $F'(c)=0$，即 $f(c)=0$，原题得证.

证　本题关键是找一个 $F(x)$. 使

$$F'(x)=a_1\cos x+a_2\cos 2x+\cdots+a_n\cos nx,x\in(0,\pi),$$

且 $F(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上满足 Rolle 定理三个条件，所以

令 $$F(x)=a_1\sin x+\frac{a_2}{2}\sin 2x+\cdots+\frac{a_n}{n}\sin nx.$$

显然，$F(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上连续，在 $(0,\pi)$ 内可导，且 $F(0)=F(\pi)$，由 Rolle 定理知，$\exists c\in(0,\pi)$，使 $F'(c)=0$，即方程 $a_1\cos x+a_2\cos 2x+\cdots+a_n\cos nx=0$ 在 $(0,\pi)$ 内必有实根.

例 12　设 $f(x)$ 在区间 I 上 n 阶可导，且 $f^{(n)}(x)\neq 0$，试证方程 $f(x)=0$ 在区间 I 上最多有 n 个实根.

分析　本题直接证明不方便，考虑反证法.

证　反证法，若结论不成立，则方程 $f(x)=0$ 在区间 I 上至少有 $n+1$ 个实根，不妨设这 $n+1$ 个实根为 $x_i(i=1,2,\cdots,n+1)$

且 $$x_1<x_2<x_3\cdots<x_n<x_{n+1}.$$

对 $f(x)$ 在两个相邻零点构成的区间 $[x_i,x_{i+1}]$ 上用 Rolle 定理得

$\exists c_i \in (x_i, x_{i+1})$，使 $f'(c_i)=0\quad(i=1,2,\cdots,n)$，这就证明了 $f'(x)$在区间 I 上至少有 n 个零点.

再对 $f'(x)$在它两个相邻的零点构成的区间$[c_i, c_{i+1}]$上用 Rolle 定理得

$\exists \xi_i \in (c_i, c_{i+1})$，使 $f''(\xi_i)=0\quad(i=1,2,\cdots,n-1)$，即 $f''(x)$在区间 I 上至少有$n-1$个零点，以此类推可知，$f^{(n)}(x)$在区间 I 上至少有一个零点，这与题设 $f^{(n)}(x)\neq 0$ 矛盾. 原题得证.

注　本题所证明的结论在说明方程根的个数时是一个常用结论.

例 13　设 $3a^2-5b<0$，试证方程 $x^5+2ax^3+3bx+4c=0$ 有唯一实根.

分析　本题要证明两点，首先要证明有根，可考虑用连续函数的零点定理；其次是证明根的唯一性，可考虑用例 12 的结论.

证　先证根的存在性，令 $f(x)=x^5+2ax^3+3bx+4c$，

由于
$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty,\ \lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty,$$
则一定存在实数 A 和 B，使 $A<B$，且 $f(A)<0, f(B)>0$，由零点定理知 $\exists c\in(A,B)$，使 $f(c)=0$，即原方程至少有一个实根.

下面证明唯一性，由于
$$f'(x)=5x^4+6ax^2+3b \xlongequal{x^2=t} 5t^2+6at+3b,$$
由 $3a^2-5b<0$ 知，二次式 $5t^2+6at+3b$ 的判别式 $\Delta<0$，则 $f'(x)\neq 0$，由例 12 结论知，方程 $f(x)=0$ 最多一个实根，故方程 $x^5+2ax^3+3bx+4c=0$ 有唯一实根.

例 14　试证方程 $2^x-x^2=1$ 有且仅有三个实根.

证　本题与上一题类似，先证根的存在性.

令
$$f(x)=2^x-x^2-1,$$
显然，$f(0)=0, f(1)=0$，即 $x=0$ 和 $x=1$ 是方程 $2^x-x^2=1$ 的两个根，又 $f(2)=-1<0, f(5)=32-25-1=6>0$ 由连续函数零点定理知，方程 $2^x-x^2=1$ 在$(2,5)$上至少有一实根，则原方程$2^x-x^2=1$ 至少有三个实根.

以下证明方程 $2^x-x^2=1$ 最多有三个实根. 事实上
$$f'(x)=2^x\ln 2-2x,$$
$$f''(x)=2^x(\ln 2)^2-2,$$
$$f'''(x)=2^x(\ln 2)^3\neq 0,$$
则方程 $f(x)=0$ 最多有三个实根，故方程 $2^x-x^2=1$ 有且仅有三个实根.

例 15　设 $f\in C[a,b]$，在(a,b)内除仅有一个点外都可导，求证：$\exists c\in(a,b)$，使$|f(b)-f(a)|\leqslant(b-a)|f'(c)|$.

分析　从本题要证的结论容易联想到 Lagrange 中值定理，但不能在$[a,b]$上对 $f(x)$用 Lagrange 中值定理，因为(a,b)内有一个不可导的点，因此，可用

这个不可导点将$[a,b]$分成两个区间后，分别在这两个区间上用 Lagrange 定理.

证　设$f(x)$在区间(a,b)内仅有的一个不可导点为d，由原题设知$f(x)$分别在区间$[a,d]$和$[d,b]$上满足 Lagrange 定理条件，则

$$f(d)-f(a)=f'(\xi_1)(d-a),\xi_1\in(a,d),$$
$$f(b)-f(d)=f'(\xi_2)(b-d),\xi_2\in(d,b),$$

则
$$\begin{aligned}f(b)-f(a)&=(f(d)-f(a))+(f(b)-f(d))\\&=f'(\xi_1)(d-a)+f'(\xi_2)(b-d),\end{aligned}$$

从而有
$$\begin{aligned}|f(b)-f(a)|&\leqslant|f'(\xi_1)|(d-a)+|f'(\xi_2)|(b-d)\\&\leqslant|f'(c)|(d-a)+|f'(c)|(b-d)\\&=|f'(c)|(b-a),\end{aligned}$$

其中，
$$|f'(c)|=\max\{|f'(\xi_1)|,|f'(\xi_2)|\}$$

原题得证.

例 16　设$f(x)$在$[0,1]$上有连续一阶导数，在$(0,1)$内二阶可导，且$f(1)=0$，$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=0$，试证在$(0,1)$内至少存在一点$\xi$，使$f''(\xi)=0$.

证　由$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=0$知，$f(0)=0$，$f'(0)=0$. 又$f(1)=0$，由 Rolle 定理知，$\exists c\in(0,1)$，使$f'(c)=0$.

从而，$f'(x)$在区间$[0,c]$上满足 Rolle 定理条件，则$\exists\xi\in(0,c)$，使$f''(\xi)=0$，原题得证.

例 17　设$f(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)内可导，且$ab>0$，证明至少存在一点$\xi\in(a,b)$，使$\dfrac{af(b)-bf(a)}{a-b}=f(\xi)-\xi f'(\xi)$.

分析　由于$\dfrac{af(b)-bf(a)}{a-b}=\dfrac{\dfrac{f(b)}{b}-\dfrac{f(a)}{a}}{\dfrac{1}{b}-\dfrac{1}{a}}$，所以应考虑 Cauchy 中值定理.

证　由于
$$\frac{af(b)-bf(a)}{a-b}=\frac{\dfrac{f(b)}{b}-\dfrac{f(a)}{a}}{\dfrac{1}{b}-\dfrac{1}{a}}.$$

且$ab>0$，根据 Cauchy 定理知，存在$\xi\in(a,b)$，使

$$\frac{\dfrac{f(b)}{b}-\dfrac{f(a)}{a}}{\dfrac{1}{b}-\dfrac{1}{a}}=\frac{\dfrac{\xi f'(\xi)-f(\xi)}{\xi^2}}{-\dfrac{1}{\xi^2}}=f(\xi)-\xi f'(\xi).$$

例 18　设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，$f(0)=f(1)=0$，$f\left(\frac{1}{2}\right)=1$，求证：$\exists\xi\in(0,1)$，使 $f'(\xi)=1$.

分析　此类问题一般都要构造辅助函数，然后用微分中值定理证明. 构造辅助函数通常有两种方法，一种是几何法，另一种是分析法. 以下用两种方法进行证明.

证法一　几何法. 由 Lagrange 定理知，只要在区间 $[0,1]$ 上找一个子区间，使得在这个区间上曲线 $y=f(x)$ 所对的弦的斜率为 1，然后在这个区间上对 $f(x)$ 用 Lagrange 定理即可证明. 注意直线 $y=x$ 斜率为 1，所以考虑 $y=x$ 与 $y=f(x)$ 是否有交点，若令 $F(x)=f(x)-x$，也就是要考查 $F(x)$ 的零点

令 $F(x)=f(x)-x$，则

$F\left(\frac{1}{2}\right)=f\left(\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}>0$，$F(1)=f(1)-1=-1<0$，由连续函数零点定理知，$\exists\eta\in\left(\frac{1}{2},1\right)$，使 $F(\eta)=0$，即 $f(\eta)=\eta$. 又 $f(0)=0$，在区间 $[0,\eta]$ 上对 $f(x)$ 用 Lagrange 定理得存在 $\xi\in(0,\eta)$，使

$$f'(\xi)=\frac{f(\eta)-f(0)}{\eta-0}=\frac{\eta-0}{\eta-0}=1.$$

证法二　分析法，要证 $f'(\xi)=1$，即要证 $f'(\xi)-1=0$，由于 $(f(x)-x)'\big|_{x=\xi}=f'(\xi)-1$，则若令 $F(x)=f(x)-1$，原题就是要证明 $\exists\xi\in(0,1)$，使 $F'(\xi)=0$. 这就是 Rolle 定理的结论，只要能验明 $F(x)$ 满足 Rolle 定理条件.

令 $F(x)=f(x)-x$，显然 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，而

$$F(0)=f(0)-0=0.$$

$F\left(\frac{1}{2}\right)=f\left(\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}>0$，$F(1)=f(1)-1=-1<0$，由连续函数零点定理知，存在 $\eta\in\left(\frac{1}{2},1\right)$，使 $F(\eta)=0$，从而 $F(x)$ 在区间 $[0,\eta]$ 上满足 Rolle 定理条件，从而 $\exists\xi\in(0,\eta)$，使 $F'(\xi)=0$，即 $f'(\xi)=1$，原题得证.

例 19　设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $f(1)=0$. 证明：存在 $c\in(0,1)$，使 $f(c)+cf'(c)=0$.

分析　若能找到一个函数 $F(x)$，使 $F'(x)\big|_{x=c}=f(c)+cf'(c)$，且 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上满足 Rolle 定理条件，利用 Rolle 定理本题立即可证. 所以，问题的关键是构造这样的辅助函数 $F(x)$，使 $F'(x)=f(x)+xf'(x)$，由此可知，可令 $F(x)=xf(x)$.

证　令 $F(x)=xf(x)$，由题设可知 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且

$$F(0)=0,\quad F(1)=0,$$

由 Rolle 定理知 $\exists c\in(0,1)$，使 $F'(c)=0$，

即
$$f(c)+cf'(c)=0.$$

注　由本题证明不难看出，在本题条件下也可证明 $\exists c\in(0,1)$，使 $nf(c)+cf'(c)=0$（其中 n 为正整数）. 事实上此时只要构造辅助函数 $F(x)=x^nf(x)$，对 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 区间上用 Rolle 定理即可证明.

例 20　设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $f(0)=0$，当 $x\in(0,1)$ 时，$f(x)\neq 0$，证明：对一切自然数 n，在 $(0,1)$ 内存在点 c，使 $\dfrac{nf'(c)}{f(c)}=\dfrac{f'(1-c)}{f(1-c)}$.

分析　要证 $\exists c\in(0,1)$，使 $\dfrac{nf'(c)}{f(c)}=\dfrac{f'(1-c)}{f(1-c)}$，也就是要证明 $nf'(c)f(1-c)-f'(1-c)f(c)=0$. 受前一例的启发，这里应考虑辅助函数 $F(x)=f^n(x)f(1-x)$，由于

$$\begin{aligned}F'(x)&=nf^{n-1}(x)f'(x)f(1-x)-f^{(n)}(x)f'(1-x)\\&=f^{n-1}(x)[nf'(x)f(1-x)-f(x)f'(1-x)].\end{aligned}$$

证　令 $F(x)=f^n(x)f(1-x)$，

由题设知 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且

$$F(0)=F(1)=0.$$

由 Rolle 定理知，存在 $c\in(0,1)$，使 $F'(c)=0$.

即
$$f^{n-1}(c)[nf'(c)f(1-c)-f(c)f'(1-c)]=0.$$

又当 $x\in(0,1)$ 时 $f(x)\neq 0$，则 $f^{n-1}(c)=0$，故

$$nf'(c)f(1-c)-f(c)f'(1-c)=0,$$

即
$$\frac{nf'(c)}{f(c)}=\frac{f'(1-c)}{f(1-c)}.$$

例 21　设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，$f(a)=f(b)=0$. 试证

1) $\exists\xi\in(a,b)$，使 $f'(\xi)+f(\xi)=0$；

2) $\exists\eta\in(a,b)$，使 $f'(\eta)-f(\eta)=0$；

3) 对任意实数 λ，存在 $c\in(a,b)$，使 $f'(c)+\lambda f(c)=0$.

分析　对于 1)，如果能找到一个 $F(x)$，使 $F'(\xi)=f'(\xi)+f(\xi)$，且 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上满足 Rolle 定理条件，本题立即可证. 但要找 $F(x)$，使 $F'(x)=f'(x)+f(x)$ 是不方便的. 但我们把思路开阔一些，将要证的结论 $f'(\xi)+f(\xi)=0$ 改写成等价形式 $g(\xi)(f'(\xi)+f(\xi))=0\ (g(\xi)\neq 0)$，此时，应寻找函数 $G(x)$，使 $G'(x)=f'(x)g(x)+g(x)f(x)$，若 $g(x)=g'(x)$，则 $G'(x)=f'(x)g(x)+g'(x)f(x)=(f(x)g(x))'$，由 $g(x)=g'(x)$ 知，只要取 $g(x)=\mathrm{e}^x$，则 $G(x)=\mathrm{e}^xf(x)$. 对 $G(x)$ 在 $[a,b]$ 上用 Rolle 定理即可证明本题.

对于 2)，受 1)的启发，我们考虑 $F(x)=e^{-x}f(x)$.

对于 3)，我们只要考虑 $F(x)=e^{\lambda x}f(x)$.

证　1) 令
$$G(x)=e^{x}f(x).$$
由题设知 $G(x)$在$[a,b]$上满足 Rolle 定理的条件，则$\exists\,\xi\in(a,b)$，使
$$G'(\xi)=0,$$
即
$$e^{\xi}f'(\xi)+e^{\xi}f(\xi)=0,$$
而 $e^{\xi}\neq0$，则
$$f'(\xi)+f(\xi)=0.$$
原题得证.

2) 令 $F(x)=e^{-x}f(x)$. 对 $F(x)$在$[a,b]$上用 Rolle 定理得，存在 $\eta\in(a,b)$，使
$$F'(\eta)=0,$$
即
$$e^{-\eta}f'(\eta)-e^{-\eta}f(\eta)=0,$$
而 $e^{-\eta}\neq0$，则
$$f'(\eta)-f(\eta)=0.$$

3) 令 $F(x)=e^{\lambda x}f(x)$，对 $F(x)$在区间$[a,b]$上用 Rolle 定理得，存在 $c\in(a,b)$，使
$$F'(c)=0,$$
即
$$e^{\lambda c}f'(c)+\lambda e^{\lambda c}f(c)=0,$$
而 $e^{\lambda c}\neq0$，则 $f'(c)+\lambda f(c)=0$.

注　由本题不难看出，要证存在 $c\in(a,b)$使 $\alpha f'(c)+\beta f(c)=0\quad(\alpha\neq0)$，由于 $\alpha f'(c)+\beta f(c)=0$ 等价于 $f'(c)+\dfrac{\beta}{\alpha}f(c)=0$，此时，一般应构造辅助函数
$$F(x)=e^{\frac{\beta}{\alpha}x}f(x).$$

例 22　设 $f(x)$和 $g(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)内可导，且 $f(a)=f(b)=0$，$g'(x)\neq0$. 证明：存在 $\xi\in(a,b)$，使 $f(\xi)=-\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$.

分析　将要证的结论改写成等价形式 $f'(\xi)+f(\xi)g'(\xi)=0$，哪个函数在 ξ 点的导数等于等式左端呢？也就是说哪个函数 $F(x)$，能使 $F'(x)=f'(x)+f(x)g'(x)$，从这个等式可看出这个 $F(x)$不好找，受上一个例子启发，能否找到一个函数 $G(x)$，使 $G'(x)=H(x)(f'(x)+f(x)g'(x))$. 即
$$G'(x)=H(x)f'(x)+H(x)f(x)g'(x),$$
此时，我们易想到 $G(x)=H(x)f(x)$，但这就要 $H'(x)=H(x)g'(x)$，从而应取 $H(x)=e^{g(x)}$. 则应令 $G(x)=e^{g(x)}f(x)$.

证　令
$$G(x)=e^{g(x)}f(x).$$
由题设条件知，$G(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)内可导，且 $G(a)=G(b)=0$，由 Rolle 定理知，存在 $\xi\in(a,b)$，使

$$G'(\xi)=0,$$

即
$$e^{g(\xi)}f'(\xi)+e^{g(\xi)}g'(\xi)f(\xi)=0,$$

而 $e^{g(\xi)}\neq 0$，则
$$f'(\xi)+g'(\xi)f(\xi)=0,$$

又 $g'(\xi)\neq 0$，故

$$f(\xi)=-\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

注 例 21 和例 22 是同一类型问题，这类问题一般应考虑形如 $e^{g(x)}f(x)$ 的辅助函数.

例 23 设函数 $f(x),g(x)$ 在 $[a,b]$ 上二阶可导，且 $g''(x)\neq 0, f(a)=f(b)=g(a)=g(b)=0$，试证

1）在 (a,b) 内 $g(x)\neq 0$；

2）在 (a,b) 内至少有一点 ξ，使 $\dfrac{f(\xi)}{g(\xi)}=\dfrac{f''(\xi)}{g''(\xi)}$.

分析 1）有两种思路可考虑，一种是利用本讲例 12 所证明的结论"若在区间 I 上 $f^{(n)}(x)\neq 0$，则方程 $f(x)=0$ 在 I 上最多 n 个实根"；另一个思路是用反证法，若 $\exists c\in(a,b)$ 使 $f(c)=0$，则 $f(a)=f(c)=f(b)=0$，反复用 Rolle 定理可得 $\exists\xi\in(a,b)$，使 $f''(\xi)=0$ 矛盾.

2）将要证的结论改写成等价形式 $g(\xi)f''(\xi)-f(\xi)g''(\xi)=0$，现在的关键是构造辅助函数 $F(x)$，使 $F'(x)=g(x)f''(x)-f(x)g''(x)$. 由于右端有 $g(x)f''(x)$，使我们想到 $(g(x)f'(x))'=g(x)f''(x)+g'(x)f'(x)$. 同理，由于右端有 $f(x)g''(x)$，使我们想到 $(f(x)g'(x))'=f(x)g''(x)+f'(x)g'(x)$，由此不难看出，应构造辅助函数 $F(x)=g(x)f'(x)-f(x)g'(x)$.

证 1）**证法一** 由于在 $[a,b]$ 上 $g''(x)\neq 0$，由本讲例 12 已证明的结论知，方程 $f(x)=0$ 在区间 $[a,b]$ 上最多两个实根，而 $f(a)=f(b)=0$，则在 (a,b) 内 $f(x)\neq 0$.

证法二 反证法，若不然，则 $\exists c\in(a,b)$，使 $f(c)=0$，此时，由 Rolle 定理知，$\exists\xi_1\in(a,c)$，$\exists\xi_2\in(c,b)$，使 $f'(\xi_1)=f'(\xi_2)=0$，再对 $f'(x)$ 在 $[\xi_1,\xi_2]$ 上用 Rolle 定理得，$\exists\xi\in(\xi_1,\xi_2)$，使 $f''(\xi)=0$，与题设矛盾，则在 (a,b) 内 $g(x)\neq 0$.

2）令
$$F(x)=g(x)f'(x)-f(x)g'(x),$$
由题设条件知 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且 $F(a)=g(a)f'(a)-f(a)g'(a)=0, F(b)=g(b)f'(b)-f(b)g'(b)=0$. 由 Rolle 定理知，存在 $\xi\in(a,b)$，使 $F'(\xi)=0$，

即
$$g(\xi)f''(\xi)-f(\xi)g''(\xi)=0,$$

故
$$\frac{f(\xi)}{g(\xi)}=\frac{f''(\xi)}{g''(\xi)}.$$

例 24　设 $f(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)内可导，且 $f(a)=f(b)=1$，试证存在 $\xi,\eta\in(a,b)$，使

$$e^{a+b}(f(\eta)-f'(\eta))=e^{\xi+\eta}.$$

分析　本题的特点是要证存在的中间点是两个，即ξ和η. 此时，用一次微分中值定理不能证明本题. 此时，我们可将要证的等式 $e^{a+b}(f(\eta)-f'(\eta))=e^{\xi+\eta}$中含有$\xi$的项和含有$\eta$的项分离到等式两边，即 $e^{a+b}e^{-\eta}(f(\eta)-f'(\eta))=e^{\xi}$，由该式左端的 $e^{-\eta}(f(\eta)-f'(\eta))$知，我们应考虑对 $e^{-x}f(x)$用微分中值定理；而由右端的 e^{ξ}知，我们应考虑对 e^{x}用微分中值定理.

证　对 e^{x}在区间$[a,b]$上用 Lagrange 定理得，存在 $\xi\in(a,b)$，使

$$\frac{e^{b}-e^{a}}{b-a}=e^{\xi}.$$

令

$$F(x)=e^{-x}f(x),$$

由题设知，$F(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)内可导，由 Lagrange 定理知，存在 $\eta\in(a,b)$，使

$$\frac{F(b)-F(a)}{b-a}=F'(\eta),$$

即

$$\frac{e^{-b}f(b)-e^{-a}f(a)}{b-a}=e^{-\eta}(f'(\eta)-f(\eta)),$$

又 $f(a)=f(b)=1$，代入上式左端的分子得

$$\frac{e^{-b}-e^{-a}}{b-a}=e^{-\eta}(f'(\eta)-f(\eta)),$$

从而有

$$\frac{e^{b}-e^{a}}{b-a}=e^{a+b}e^{-\eta}(f(\eta)-f'(\eta)),$$

则

$$e^{a+b}e^{-\eta}(f(\eta)-f'(\eta))=e^{\xi},$$

故

$$e^{a+b}(f(\eta)-f'(\eta))=e^{\xi+\eta}.$$

例 25　设函数 $f(x)$在$[0,1]$上连续，在$(0,1)$内可导，且 $f(0)=0$，$f(1)=1$，证明：1) 存在 $c\in(0,1)$，使 $f(c)=1-c$；

2) 存在两个不同的点 $\xi,\eta\in(0,1)$，使 $f'(\xi)f'(\eta)=1$.

分析　1) 事实上要证存在 $c\in(0,1)$，使 $f(c)=1-c$，也就是要证方程 $f(x)-1+x=0$ 在$(0,1)$内有根，因此可考虑对 $F(x)=f(x)-1+x$ 用连续函数零点定理.

2) 本题中要证明存在的中间点也是两个，则应用两次微分中值定理，但本题中还要求ξ和η是两个不同的点，所以，如果在同一个区间$[0,1]$上用两次中值定理无法说明两次中值定理中的点ξ与η不相同，因此，此时应将$[0,1]$分成两个区间$[0,d]$和$[d,1]$$(0<d<1)$，在这两个区间上分别用中值定理，而此时的关键是 d 的选取. 我们先分别在区间$[0,d]$和$[d,1]$上对 $f(x)$用 Lagrange 定理

得，存在 $\xi\in(0,d)$，$\eta\in(d,1)$，使

$$f(d)-f(0)=f'(\xi)d,$$
$$f(1)-f(d)=f'(\eta)(1-d),$$

即

$$f(d)=f'(\xi)d,\quad f'(\xi)=\frac{f(d)}{d},$$

$$1-f(d)=f'(\eta)(1-d),\quad f'(\eta)=\frac{1-f(d)}{1-d},$$

由此可见，只要选择 d，使

$$f'(\xi)f'(\eta)=\frac{f(d)}{d}\cdot\frac{1-f(d)}{1-d}=1,$$

原题便可得到证明. 而我们在 1) 中已证明了 $f(c)=1-c$，从而，只要取 $d=c$ 即可.

证　1) 令 $F(x)=f(x)-1+x$，

则

$$F(0)=-1<0,\quad F(1)=1>0,$$

且 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，由连续函数零点定理知，存在 $c\in(0,1)$，使 $f(c)=1-c$.

2) 对 $f(x)$ 分别在区间 $[0,c]$ 和 $[c,1]$ 上用 Lagrange 定理得，存在 $\xi\in[0,c]$ 和 $\eta\in[c,1]$，使

$$f(c)-f(0)=f'(\xi)c,$$
$$f(1)-f(c)=f'(\eta)(1-c),$$

又 $f(0)=0$，$f(1)=1$，$f(c)=1-c$，则

$$f'(\xi)f'(\eta)=\frac{1-c}{c}\cdot\frac{c}{1-c}=1.$$

原题得证.

例 26　设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $f(0)=0$，$f(1)=1$，试证明对任意的正数 a 和 b，在 $(0,1)$ 内存在互不相同的两个点 ξ 和 η，使 $\dfrac{a}{f'(\xi)}+\dfrac{b}{f'(\eta)}=a+b$.

分析　与上题类似，本题要证结论中也是两个不同的点 ξ 和 η，因此，应将区间 $[0,1]$ 分为两个区间 $[0,c]$ 和 $[c,1]$，在区间 $[0,c]$ 和 $[c,1]$ 上分别对 $f(x)$ 用 Lagrange 定理得，存在 $\xi\in(0,c)$，$\eta\in(c,1)$，使

$$f(c)-f(0)=f'(\xi)c,\quad f(1)-f(c)=f'(\eta)(1-c),$$

即

$$\frac{1}{f'(\xi)}=\frac{c}{f(c)},\quad \frac{1}{f'(\eta)}=\frac{1-c}{1-f(c)},$$

要使 $\dfrac{a}{f'(\xi)}+\dfrac{b}{f'(\eta)}=a+b$ 成立. 只要

$$\frac{c}{f(c)}a+\frac{1-c}{1-f(c)}b=a+b.$$

由上式可看出，只要$\frac{a}{f(c)}=\frac{b}{1-f(c)}=a+b$成立，上式一定成立，从而只要$f(c)=\frac{a}{a+b}$即可，又$f(0)=0, f(1)=1$，而$0<\frac{a}{a+b}<1$，由连续函数介值定理知存在$c\in(0,1)$使$f(c)=\frac{a}{a+b}$.

证 令$\frac{a}{a+b}=\lambda$，由于$f(x)$在$[0,1]$上连续，且$f(0)<\lambda<f(1)$，由介值定理知，存在$c\in(0,1)$，使$f(c)=\frac{a}{a+b}$.

由题设可知$f(x)$在区间$[0,c]$和$[c,1]$上满足 Lagrange 定理条件，则存在$\xi\in(0,c)$，$\eta\in(c,1)$，使

$$f(c)-f(0)=f'(\xi)(c-0),$$
$$f(1)-f(c)=f'(\eta)(1-c),$$

即
$$\frac{1}{f'(\xi)}=\frac{c}{f(c)}=\frac{a+b}{a}c,$$
$$\frac{1}{f'(\eta)}=\frac{1-c}{1-f(c)}=\frac{a+b}{b}(1-c),$$

从而有
$$\frac{a}{f'(\xi)}+\frac{b}{f'(\eta)}=a+b.$$

原题得证.

注 前面三个例子要证的都是存在两个点ξ和η使相应结论成立.但例 24 不要求ξ和η一定不相同，而例 25 和例 26 要求ξ和η不相同，由上面证明可看出，对于类似于例 24 不要求ξ和η不相同的问题，往往是在题目给定的同一个区间上对不同的两个函数分别用 Lagrange 定理；而对类似于例 25 和例 26 要求ξ和η不相同的问题，往往需要在题目所给区间中插入一个点c，将原区间分为两个区间，分别在这两个区间上用 Lagrange 定理，这时c的选取是关键.希望读者通过例 25 和例 26 题前面的分析，很好体会选取c的思想方法.

例 27 设$f(x)$在$[0,1]$上有二阶导数，且$|f(x)|\leqslant a$，$|f''(x)|\leqslant b$，其中a，b都是非负常数，c是$(0,1)$内任一点，证明$|f'(c)|\leqslant 2a+\frac{b}{2}$.

分析 一般说来，当题目的条件或结论中出现高阶导数时，往往要考虑 Taylor 中值定理.由于本题要证的结论中出现$f'(c)$，所以应考虑在c点用 Taylor 中值定理.

证 由 Taylor 定理得

$$f(x)=f(c)+f'(c)(x-c)+\frac{f''(\xi)}{2!}(x-c)^2,$$

其中 $x\in[0,1]$,ξ 介于 c 与 x 之间.

在上式中分别取 $x=0$ 和 $x=1$ 得

$$f(0)=f(c)+f'(c)(0-c)+\frac{f''(\xi_1)}{2!}(0-c)^2,\quad 0<\xi_1<c<1,$$

$$f(1)=f(c)+f'(c)(1-c)+\frac{f''(\xi_2)}{2!}(1-c)^2,\quad 0<c<\xi_2<1,$$

以上两式相减得

$$f(1)-f(0)=f'(c)+\frac{1}{2!}[f''(\xi_2)(1-c)^2-f''(\xi_1)c^2],$$

从而有

$$\begin{aligned}|f'(c)|&=\left|f(1)-f(0)-\frac{1}{2}[f''(\xi_2)(1-c)^2-f''(\xi_1)c^2]\right|\\&\leqslant|f(1)|+|f(0)|+\frac{1}{2}[|f''(\xi_2)|(1-c)^2+|f''(\xi_2)|c^2]\\&\leqslant 2a+\frac{b}{2}[(1-c)^2+c^2],\end{aligned}$$

由于 $c\in(0,1)$,则$(1-c)^2+c^2\leqslant 1$,

故
$$|f'(c)|\leqslant 2a+\frac{b}{2}.$$

例 28 设 $f(x)$在$[a,b]$上一阶可导,在(a,b)内二阶可导,且 $f'(a)=f'(b)=0$,证明存在 $\xi\in(a,b)$,使

$$|f''(\xi)|\geqslant\frac{4}{(b-a)^2}|f(b)-f(a)|.$$

分析 与上例类似,本题也应考虑 Taylor 中值定理,由于本题条件中出现 $f'(a)$和 $f'(b)$,要证的结论中出现 $f(a)$和 $f(b)$,因此,我们在 Taylor 中值定理中分别取 $x_0=a$ 和 $x_0=b$,$x=\dfrac{a+b}{2}$.

证 由 Taylor 中值定理知

$$\begin{aligned}f\left(\frac{a+b}{2}\right)&=f(a)+f'(a)\left(\frac{a+b}{2}-a\right)+\frac{f''(\xi_1)}{2!}\left(\frac{a+b}{2}-a\right)^2\quad\left(a<\xi_1<\frac{a+b}{2}\right)\\&=f(a)+\frac{f''(\xi_1)}{8}(b-a)^2,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f\left(\frac{a+b}{2}\right)&=f(b)+f'(b)\left(\frac{a+b}{2}-b\right)+\frac{f''(\xi_2)}{2!}\left(\frac{a+b}{2}-b\right)^2\quad\left(\frac{a+b}{2}<\xi_2<b\right)\\&=f(b)+\frac{f''(\xi_2)}{8}(b-a)^2,\end{aligned}$$

两式相减得
$$f(b)-f(a)=\frac{(b-a)^2}{8}[f''(\xi_1)-f''(\xi_2)],$$
则
$$|f(b)-f(a)|\leqslant\frac{(b-a)^2}{8}[|f''(\xi_1)|+|f''(\xi_2)|]$$
$$\leqslant\frac{(b-a)^2}{4}|f''(\xi)|,$$
其中
$$|f''(\xi)|=\max\{|f''(\xi_1)|,|f''(\xi_2)|\},$$
故，存在 $\xi\in(a,b)$，使
$$|f''(\xi)|\geqslant\frac{4}{(b-a)^2}|f(b)-f(a)|.$$

注　在用 Taylor 中值定理时 x_0 点的选取是关键. 一般应选取题目提供该点函数值和导数值信息较多的点作为 x_0，本题中只提供 $f'(a)=f'(b)=0$，因此在本题中 x_0 分别取 a 和 b.

例 29　设 $f(x)$在$[0,1]$上二阶可导，$f(0)=f(1)=0$，$\max\limits_{0\leqslant x\leqslant 1}f(x)=2$，试证存在 $\xi\in(0,1)$，使 $f''(\xi)\leqslant-16$.

分析　本题中出现高阶导数，所以可考虑 Taylor 定理. 而由 $\max\limits_{0\leqslant x\leqslant 1}f(x)=2$ 知，存在 $c\in(0,1)$，使 $f(c)=2$，也就是说 $f(x)$在 $x=c$ 处取得它在区间$[0,1]$上的最大值，从而 $x=c$ 是极大值点，则 $f'(c)=0$. 此时 c 点应为区间$[0,1]$上我们知道该点函数值和导数值信息最多的点，因此 Taylor 定理中的 x_0 应取 c.

证　由 Taylor 定理知，$\forall x\in[0,1]$，
$$f(x)=f(c)+f'(c)(x-c)+\frac{f''(\xi)}{2!}(x-c)^2\quad(\xi\text{ 介于 }c\text{ 与 }x\text{ 之间})$$
$$=2+\frac{f''(\xi)}{2!}(x-c)^2.$$

i) 若 $0<c\leqslant\frac{1}{2}$，

在 $f(x)=2+\frac{f''(\xi)}{2!}(x-c)^2$ 中令 $x=0$ 得
$$0=f(0)=2+\frac{f''(\xi_1)}{2!}c^2\quad(0<\xi_1<c),$$
则
$$f''(\xi_1)=\frac{-4}{c^2}\leqslant\frac{-4}{\left(\frac{1}{2}\right)^2}=-16.$$

ii) 若$\frac{1}{2}<c<1$，

在 $f(x)=2+\frac{f''(\xi)}{2!}(x-c)^2$ 中令 $x=1$ 得

$$0=f(1)=2+\frac{f''(\xi_2)}{2!}(1-c)^2 \quad (c<\xi_2<1),$$

则
$$f''(\xi_2)=\frac{-4}{(1-c)^2}\leqslant\frac{-4}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2}=-16.$$

故，原题得证.

3. 讨论题

1）Rolle 定理有三个条件，缺少一个条件 Rolle 定理是否成立？如果不成立，能否说这三个条件是 Rolle 定理的必要条件？

2）设 $f\in C[a,b]$，且 $f(x)$ 在 (a,b) 内可导. 试问 Rolle 定理的逆命题成立吗？即，若 $\exists c\in(a,b)$，使 $f'(c)=0$，是否一定存在 $\alpha,\beta\in[a,b]$，使 $f(\alpha)=f(\beta)$？

3）如果将 Rolle 定理的条件改为：$f(x)$ 在 (a,b) 内可导，$f(a+0)$ 和 $f(b-0)$ 存在且相等，Rolle 定理的结论还成立吗？为什么？

4）微分中值定理（Rolle 定理，Lagrange 定理，Cauchy 定理）有什么意义？这三个中值定理之间有什么联系？在应用时各有什么特点？

5）在什么条件下，$f'_+(x_0)=f'(x_0+0)$？

6）若 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内可导，那么函数 $f(x)$ 的导函数 $f'(x)$ 在 (a,b) 内会出现第一类间断点吗？

7）设 $f(x)$ 在 x_0 处二阶可导，则

$$\begin{aligned}\lim_{h\to0}\frac{f(x_0+h)-2f(x_0)+f(x_0-h)}{h^2}&=\lim_{h\to0}\frac{f'(x_0+h)-f'(x_0-h)}{2h}\\&=\lim_{h\to0}\frac{f''(x_0+h)+f''(x_0-h)}{2}=f''(x_0).\end{aligned}$$

试问：1）以上解法是否正确？为什么？

2）正确解法是什么？

3）如何改变原题设条件，可使以上解法正确？

8）运用 L'Hospital 法则能求哪些类型极限？运用 L'Hospital 法则求极限时应注意什么问题？

9）两种余项（Lagrange 余项和 Peano 余项）的 Taylor 公式具有什么不同的特点？

4. 练习题

1. 求下列极限：

1）$\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right)$；

2）$\lim\limits_{x\to0}\frac{x^2+2(\cos x-1)}{x^3\sin x}$；

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-\sin x-1}{1-\sqrt{1-x^2}}$;

4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x\ln(1+x)-x^2}$;

5) $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{a}{x}-\left(\dfrac{1}{x^2}-a^2\right)\ln(1+ax)\right]$　$(a\neq 0)$;

6) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n\tan\dfrac{1}{n}\right)^{n^2}$.

2. 设 $f'(a)=1$, $f''(a)=2$, 求极限

$$\lim_{x\to a}\left(\frac{1}{f(x)-f(a)}-\frac{1}{(x-a)f'(a)}\right).$$

3. 已知当 $x\to 0$ 时, $e^{x^2}-1-\sin x^2$ 与 ax^n 为等价无穷小, 试确定 a 和 n 的值.

4. 试证方程 $x+p+q\cos x=0$ 恰有一个实根, 其中 p 和 q 为常数, 且 $|q|<1$.

5. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 且不恒为常数, 在 (a,b) 内可导, $f(a)=f(b)$, 证明在 (a,b) 内至少有一点 ξ, 使 $f'(\xi)>0$.

6. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内可导, 证明存在 $\xi\in(a,b)$, 使 $f'(\xi)=\dfrac{f(\xi)-f(a)}{b-\xi}$.

7. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 在 $(0,1)$ 内可导, 且 $f(0)=f(1)=0$, $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=1$,

试证: 1) 存在 $\eta\in\left(\dfrac{1}{2},1\right)$, 使 $f(\eta)=\eta$;

2) 对任意实数 λ 必存在 $\xi\in(0,\eta)$, 使

$$f'(\xi)-\lambda[f(\xi)-\xi]=1.$$

8. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内可导, $af(b)-bf(a)=0$, $ab>0$, 试证存在 $\xi\in(a,b)$, 使 $f(\xi)=\xi f'(\xi)$.

9. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 在 $(0,1)$ 内可导, 且 $f(0)=f(1)$, 试证存在 ξ 和 η 满足 $0<\xi<\eta<1$, 使 $f'(\xi)+f'(\eta)=0$.

10. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有二阶连续导数, 试证存在 $\xi\in(a,b)$, 使 $f(a)-2f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)+f(b)=\dfrac{(b-a)^2}{4}f''(\xi)$.

11. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有二阶连续导数, 且 $f(0)=f(1)=0$, $\min\limits_{0\leqslant x\leqslant 1}f(x)=-1$, 证明 $\max\limits_{0\leqslant x\leqslant 1}f''(x)\geqslant 8$.

12. 设 $f(x)$ 二阶可导, 且 $|f''(x)|\leqslant M$, $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{(x-1)^2}=1$, 证明, 对任意的 $a>1$,

有$|f'(0)|+|f'(a)|\leqslant Ma$.

第三讲 函数性态的研究

1. 教学要求与学习注意点

1) 正确理解可导函数的单调性与导数的正负号之间的关系,会利用单调性证明函数不等式.

2) 掌握极值的概念和求极值的方法.

3) 理解函数最大(小)值与极大(小)值的区别,掌握求函数最大(小)值的方法.会利用这些方法证明简单不等式并能解决实际问题中的一些简单优化问题.

4) 理解凸(凹)函数的数学定义及其几何意义(函数图像的凸(凹)性),掌握判定函数凸性与曲线拐点的方法,并会利用函数的凸性证明某些不等式.

学习注意点

1) 要理解函数极大(小)值与最大(小)值的区别和联系,不可将两者混为一谈.

2) 不要将驻点与极值点混为一谈.注意驻点是对可导函数而言的,而极值点对不可导函数,甚至对不连续函数也是有意义的.只有可导函数的极值点一定是驻点,而可导函数的驻点仅是可疑极值点.

3) 关于函数凸性的定义各种教材不完全一致,读者在看其他的一些参考书时应特别注意.

2. 典型例题

例 1 设函数 $f(x)$在定义域内可导,$y=f(x)$的图形如图 2-1 所示,则导函数 $y=f'(x)$的图形为(如图 2-2).

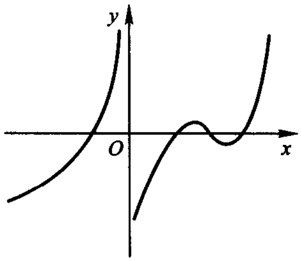


图 2-1

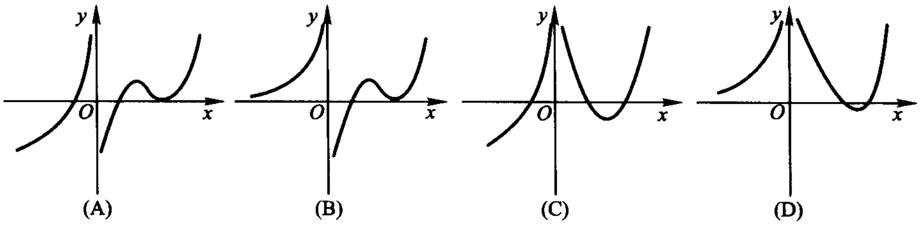


图 2-2

分析　我们知道，对于一个可导函数，其函数的增减性与导函数的正负密切相关，而从本题所给图形可很清楚看出 $f(x)$ 的增减性和 $f'(x)$ 的正负，所以这是解决本题关键.

解　由图 2-1 可看出，当 $x<0$ 时，函数 $f(x)$ 是增函数，则此时 $f'(x)\geqslant 0$，从而图 2-2 中的(A)和(C)是错误的，只能在(B)和(D)中选. 而由图 2-1 进一步可看出，在 $x>0$ 处，函数 $f(x)$ 由增变减再变增，那么，在 $x>0$ 处，$f'(x)$ 应由正变负再变正，由图 2-2 可看出，应选(D).

例 2　设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，其导函数图形如图 2-3 所示，则函数 $f(x)$ 有

(A) 一个极小值点和两个极大值点；

(B) 两个极小值点和一个极大值点；

(C) 两个极小值点和两个极大值点；

(D) 三个极小值点和一个极大值点.

分析　由极值第一充分条件知，连续函数 $f(x)$ 若在 x_0 点两侧的导数变号，则 $x=x_0$ 为极值点，若在 x_0 点两侧导数不变号，则 $x=x_0$ 不是函数 $f(x)$ 的极值点. 本题已给出导函数 $f'(x)$ 的图形，所以，关键是找使 $f'(x)$ 正负号发生变化的点.

解　由图 2-4 可以看出，$f(x)$ 在 $x=x_1,x=x_2,x=x_3$ 处导数为零. 在 $x=0$ 处导数不存在. 且 $f(x)$ 的导数只在经过这四个点时变号，所以，$f(x)$ 只在这四个点取得极值. 而函数 $f(x)$ 在 $x=x_1$ 和 $x=0$ 两侧导数都是由正变负，则函数 $f(x)$ 在 $x=x_1$ 和 $x=0$ 两点处取极大值；函数 $f(x)$ 在 $x=x_2$ 和 $x=x_3$ 两侧导数都是由负变正，则函数 $f(x)$ 在 $x=x_2$ 和 $x=x_3$ 两点处取极小值，故本题应选(C).

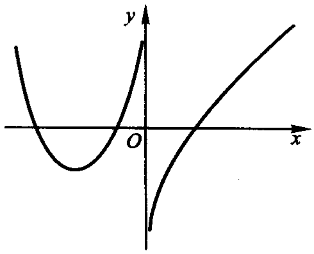


图 2-3

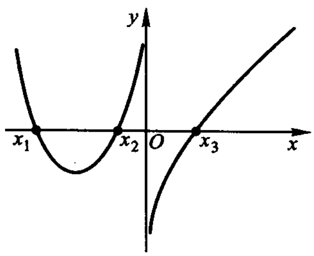


图 2-4

例 3　已知 $f(x)$ 在 $x=0$ 某邻域内连续，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{1-\cos x}=2$，则在点 $x=0$ 处 $f(x)$

(A) 不可导；　　　　(B) 可导且 $f'(0)\neq 0$；

(C) 取得极大值； (D) 取得极小值.

分析 本题中很重要的一个条件是$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{1-\cos x}=2$，注意极限值 2 大于零，因此，可考虑极限的保号性.

解法一 由于$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{1-\cos x}=2>0$，由极限的保号性知，存在 $x=0$ 的去心邻域，在此去心邻域内$\dfrac{f(x)}{1-\cos x}>0$. 又 $1-\cos x>0$，则在此去心邻域内 $f(x)>0$.

再由$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{1-\cos x}=2$ 知，$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$，又 $f(x)$在 $x=0$ 连续，从而 $f(0)=0$，则存在 $x=0$ 的邻域，在此邻域内 $f(x)\geqslant f(0)$，则 $f(x)$在 $x=0$ 处取极小值，故应选(D).

解法二 考虑排除法，即找一个符合题目条件的具体 $f(x)$，说明四个选项中某三个不正确，则剩余一个为正确选项.(适用于单项选择题).

在极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{1-\cos x}=2$ 中，由于 $1-\cos x\sim\dfrac{1}{2}x^2\ (x\to 0)$，则取 $f(x)=x^2$，符合原题设所有条件. 显然(A)、(B)、(C)不正确，故应选(D).

注 本题不能对已知极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{1-\cos x}=2$ 用 L'Hospital 法则，因为原题只假定 $f(x)$连续.

例 4 已知函数 $y=f(x)$对一切 x 满足 $xf''(x)+3x[f'(x)]^2=1-e^{-x}$. 若 $f'(x_0)=0\quad (x_0\neq 0)$，则

(A) $f(x_0)$是 $f(x)$的极大值；

(B) 点$(x_0,f(x_0))$是曲线 $y=f(x)$的拐点；

(C) $f(x_0)$是 $f(x)$的极小值；

(D) $f(x_0)$不是 $f(x)$的极值，点$(x_0,f(x_0))$也不是曲线 $y=f(x)$的拐点.

解 在等式 $xf''(x)+3x[f'(x)]^2=1-e^{-x}$中令 $x=x_0$，得

$$x_0f''(x_0)=1-e^{-x_0}\quad (x_0\neq 0),$$

则
$$f''(x_0)=\frac{1-e^{-x_0}}{x_0}>0,$$

从而有 $f'(x_0)=0,f''(x_0)>0$，故 $f(x_0)$为 $f(x)$的极小值，应选(C).

例 5 求函数 $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$的单调区间，极值，凸性以及该函数所表示的曲线的拐点.

解 显然 $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$的定义域为 $x>0$，

$$f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}.$$

令 $f'(x)=0$，得 $x=\mathrm{e}$，且

当 $0<x<\mathrm{e}$ 时，$f'(x)>0$，则 $f(x)$ 在区间 $(0,\mathrm{e})$ 上单调增.

当 $x>\mathrm{e}$ 时，$f'(x)<0$，则 $f(x)$ 在区间 $(\mathrm{e},+\infty)$ 上单调减且 $f(x)$ 在 $x=\mathrm{e}$ 取极大值，极大值为 $f(\mathrm{e})=\frac{1}{\mathrm{e}}$.

又
$$f''(x)=\frac{2\ln x-3}{x^3},$$

令 $f''(x)=0$ 得 $x=\mathrm{e}^{\frac{3}{2}}$，

且当 $0<x<\mathrm{e}^{\frac{3}{2}}$ 时，$f''(x)<0$，则函数 $f(x)$ 在区间 $(0,\mathrm{e}^{\frac{3}{2}})$ 上为凹函数. 当 $x>\mathrm{e}^{\frac{3}{2}}$ 时，$f''(x)>0$，则函数 $f(x)$ 在区间 $(\mathrm{e}^{\frac{3}{2}},+\infty)$ 上为凸函数.

由以上讨论可知曲线 $y=\frac{\ln x}{x}$ 在 $(0,\mathrm{e}^{\frac{3}{2}})$ 上上凸，在区间 $(\mathrm{e}^{\frac{3}{2}},+\infty)$ 上下凸，故点 $\left(\mathrm{e}^{\frac{3}{2}},\frac{3}{2\mathrm{e}^{\frac{3}{2}}}\right)$ 为曲线 $y=\frac{\ln x}{x}$ 的拐点.

例 6　设函数 $y=y(x)$ 由方程 $2y^3-2y^2+2xy-x^2=1$ 所确定，试求函数 $y=y(x)$ 的极值.

解　等式 $2y^3-2y^2+2xy-x^2=1$ 两端对 x 求导得

$$6y^2y'-4yy'+2y+2xy'-2x=0,$$

令 $y'=0$ 得 $y=x$，将 $y=x$ 代入 $2y^3-2y^2+2xy-x^2=1$ 得 $2x^3-x^2=1$，由此可得唯一驻点 $x=1$.

而等式 $6y^2y'-4yy'+2y+2xy'-2x=0$ 可改写为

$$(6y^2-4y+2x)y'+2y-2x=0,$$

该式两端对 x 求导得

$$(6y^2-4y+2x)'y'+(6y^2-4y+2x)y''+2y'-2=0,$$

令 $x=1$ 得 $4y''(1)-2=0$，$y''(1)=\frac{1}{2}>0$，

则 $y=y(x)$ 在 $x=1$ 处取极小值 $y(1)=1$.

例 7　如图 2-5 所示，在半径为 R 的球中内接一正圆锥，试求圆锥的最大体积.

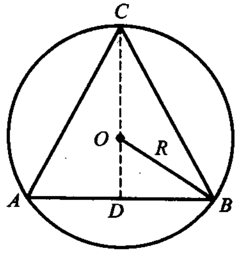


图 2-5

分析　这是一个求最值的应用题，问题的关键是，选取变量，建立目标函数，这里应特别注意的是选取变量使目标函数尽可能简单.

解　若选底面圆半径为变量，即令 $DB=x$，则内接圆锥体体积为

$$V=\frac{\pi}{3}x^2\left[R+\sqrt{R^2-x^2}\right],\quad x\in[0,R],$$

显然这个目标函数求导数找驻点都不方便.

若选圆锥高为变量，令 $CD=x$，则内接圆锥体积为

$$V=\frac{\pi}{3}x\left[R^2-(x-R)^2\right]$$

$$=\frac{\pi}{3}x^2(2R-x),\quad 0\leqslant x\leqslant 2R,$$

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}=\frac{\pi}{3}(4Rx-3x^2).$$

令 $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}=0$，得 $x=\frac{4}{3}R$.

当 $x=0$，或 $x=2R$ 时，$V=0$.

当 $x=\frac{4}{3}R$ 时，$V=\frac{32}{81}\pi R^3$.

故所求圆锥最大体积为 $\frac{32}{81}\pi R^3$.

例 8 设有如图 2－6 所示的河道，求在此河道中能通过船只的最大长度（船的宽度忽略不计）.

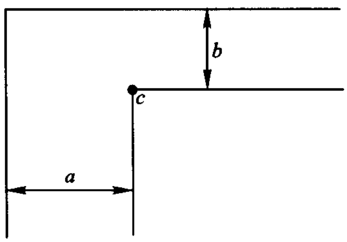


图 2－6

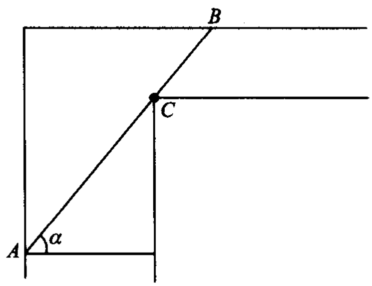


图 2－7

分析 所求的最长船只在转弯处应紧贴 C 点. 因此，所求长度应为过 C 点夹在河道内线段 $\overline{AB}$ 的长度的最小值（如图 2－7），如图 2－7 选取变量 α，则 $\overline{AB}$ 的长为

$$f(\alpha)=\frac{a}{\cos\alpha}+\frac{b}{\sin\alpha},\quad \alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right).$$

问题就转化为求 $f(\alpha)$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 内的最小值.

解 $$f(\alpha)=\frac{a}{\cos\alpha}+\frac{b}{\sin\alpha},\quad \alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right),$$

$$f'(\alpha)=\frac{a\sin\alpha}{\cos^2\alpha}-\frac{b\cos\alpha}{\sin^2\alpha}=\frac{a\sin^3\alpha-b\cos^3\alpha}{\cos^2\alpha\sin^2\alpha},$$

令 $f'(\alpha)=0$，得 $\tan^3\alpha=\frac{b}{a}$，

$$\alpha_0=\arctan\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{3}},$$

由 $f'(\alpha)$表达式可知，当 $0<\alpha<\alpha_0$ 时，$f'(\alpha)<0$，

当 $\alpha_0<\alpha<\frac{\pi}{2}$时，$f'(\alpha)>0$，则 $f(\alpha)$在 $\alpha=\alpha_0$ 处取得区间$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$上的最小值，最小值为 $f(\alpha_0)$.

由于 $\tan\alpha_0=\frac{b^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{1}{3}}}$，则

$$\sin\alpha_0=\frac{b^{\frac{1}{3}}}{(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}}},\quad \cos\alpha_0=\frac{a^{\frac{1}{3}}}{(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}}},$$

$$f(\alpha_0)=(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}}(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}})=(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}.$$

例 9　设 $x\in(0,1)$，证明：

1) $(1+x)\ln^2(1+x)<x^2$；

2) $\frac{1}{\ln 2}-1<\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{x}<\frac{1}{2}$.

分析　1) 要证$(1+x)\ln^2(1+x)<x^2$，只要证 $x^2-(1+x)\ln^2(1+x)>0$ 从而可令 $f(x)=x^2-(1+x)\ln^2(1+x)$，而 $f(0)=0$，若能证明 $f(x)$在$(0,1)$上单调增，原不等式得证.

2) 这里是要证函数$\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{x}$在$(0,1)$之间的函数值介于两个常数之间，一般应考虑该函数的最大值和最小值.

证　1) 令 $f(x)=x^2-(1+x)\ln^2(1+x)$，则 $f(0)=0$，

$$f'(x)=2x-\ln^2(1+x)-2\ln(1+x),\ f'(0)=0,$$

$$f''(x)=2-\frac{2\ln(1+x)}{1+x}-\frac{2}{1+x}=\frac{2}{1+x}[x-\ln(1+x)],$$

则当 $x\in(0,1)$时，$f''(x)>0$，$f'(x)$单调增，又 $f'(0)=0$，从而 $f'(x)>0$，则当 $x\in(0,1)$时，$f(x)>0$，

故
$$(1+x)\ln(1+x)<x^2,\quad x\in(0,1).$$

2) 令
$$\varphi(x)=\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{x},\quad x\in(0,1],$$

则
$$\varphi'(x)=\frac{(1+x)\ln^2(1+x)-x^2}{x^2(1+x)\ln^2(1+x)}.$$

由 1)知，当 $x\in(0,1)$时，$\varphi'(x)<0$，则 $\varphi(x)$在$(0,1)$上单调减. 又 $\varphi(1)=\dfrac{1}{\ln 2}-1$，则

$$\varphi(x)=\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{x}>\frac{1}{\ln 2}-1.$$

由于

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0^+}\varphi(x)&=\lim_{x\to0^+}\left[\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{x}\right]\\&=\lim_{x\to0^+}\frac{x-\ln(1+x)}{x\ln(1+x)}\\&=\lim_{x\to0^+}\frac{x-\ln(1+x)}{x^2}\quad(\ln(1+x)\sim x)\\&=\lim_{x\to0^+}\frac{1-\frac{1}{1+x}}{2x}\\&=\lim_{x\to0^+}\frac{1}{2(1+x)}=\frac{1}{2},\end{aligned}$$

从而，当 $x\in(0,1)$时，$\varphi(x)=\dfrac{1}{\ln(1+x)}-\dfrac{1}{x}<\dfrac{1}{2}$.

故原不等式得证.

注 本题中不等式的证明主要是利用函数的单调性.

例 10 设 $b>a>\mathrm{e}$，试证 $a^b>b^a$.

分析 要证的不等式 $a^b>b^a$ 等价于$b\ln a>a\ln b$，也等价于$\dfrac{\ln a}{a}>\dfrac{\ln b}{b}$，由于$b>a>\mathrm{e}$，所以，只要证明函数 $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$在$(\mathrm{e},+\infty)$内单调减即可.

证 令 $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$，

则

$$f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}.$$

当 $x\in(\mathrm{e},+\infty)$时，$f'(x)<0$，$f(x)$单调减.

当 $b>a>\mathrm{e}$ 时，$\dfrac{\ln a}{a}>\dfrac{\ln b}{b}$.

即 $a^b>b^a$.

注 本题主要也是利用函数的单调性来证明不等式. 这里的一个主要思想是通过取对数将要证明的不等式问题转化成一个函数单调性问题.

例 11 设 $0<a<b$，证明不等式

$$\frac{2a}{a^2+b^2}<\frac{\ln b-\ln a}{b-a}<\frac{1}{\sqrt{ab}}.$$

分析 本题由$\dfrac{\ln b-\ln a}{b-a}$很容易想到 Lagrange 定理，从而有$\dfrac{\ln b-\ln a}{b-a}=\dfrac{1}{\xi}$

$(a<\xi<b)$，由于$\frac{1}{\xi}>\frac{1}{b}>\frac{1}{b}\frac{2ab}{a^2+b^2}=\frac{2a}{a^2+b^2}$，原不等式左端已证明，但要用这种思路证明不等式右端是不行的，我们将右端不等式中的 b 视为 x，考虑函数

$f(x)=\ln x-\ln a-\frac{x-a}{\sqrt{ax}}, x\in[a,+\infty)$，

利用 $f(x)$的单调性证明右端不等式.

证　由 Lagrange 中值定理知，

$$\frac{\ln b-\ln a}{b-a}=\frac{1}{\xi}\quad(a<\xi<b),$$

而

$$\frac{1}{\xi}>\frac{1}{b}\geqslant\frac{1}{b}\frac{2ab}{a^2+b^2}=\frac{2a}{a^2+b^2},$$

则

$$\frac{\ln b-\ln a}{b-a}>\frac{2a}{a^2+b^2}.$$

令

$$f(x)=\ln x-\ln a-\frac{x-a}{\sqrt{ax}},\quad x\in[a,+\infty),$$

则

$$\begin{aligned}f'(x)&=\frac{1}{x}-\frac{1}{\sqrt{a}}\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{a}{2x\sqrt{x}}\right)\\&=-\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{a})^2}{2x\sqrt{ax}}<0,\quad x\in(a,+\infty),\end{aligned}$$

所以，$f(x)$在$[a,+\infty)$上单调减，又 $f(a)=0$，

则当 $x\in(a,+\infty)$时，$f(x)<0$，

故

$$f(b)<0,$$

即

$$\ln b-\ln a-\frac{b-a}{\sqrt{ab}}<0,$$

$$\frac{\ln b-\ln a}{b-a}<\frac{1}{\sqrt{ab}}.$$

注　本题证明中所用到的两种证明不等式的方法(利用中值定理，利用函数单调性)都是常用的重要方法.

例 12　设 $0\leqslant x\leqslant 2$，试证不等式 $4x\ln x\geqslant x^2+2x-3$.

分析　要证的不等式等价于 $4x\ln x-x^2-2x+3\geqslant 0$，若令 $f(x)=4x\ln x-x^2-2x+3$，只要证明 $f(x)$在区间 $[0,2]$上的最小值非负即可.

证　令 $f(x)=4x\ln x-x^2-2x+3$，则

$$f'(x)=4\ln x+4-2x-2=4\ln x+2(1-x).$$

令 $f'(x)=0$，得 $x=1$.

又

$$f''(x)=\frac{4}{x}-2\neq 0,\quad x\in(0,2),$$

则 $x=1$ 为 $f(x)$ 在 $(0,2)$ 内唯一的驻点，且 $f''(1)=4-2>0$，$x=1$ 为极小值点，从而 $f(1)$ 为 $f(x)$ 在区间 $[0,2]$ 上的最小值，而 $f(1)=0$，则当 $x\in[0,2]$ 时，$f(x)\geqslant 0$，

故
$$4x\ln x\geqslant x^2+2x-3.$$

例 13　设 $0<\alpha<1$，求证不等式 $x^\alpha-\alpha x\leqslant 1-\alpha\quad(x\geqslant 0)$.

分析　本题实际上是要证明函数 $x^\alpha-\alpha x$ 在区间 $[0,+\infty)$ 上的函数值不超过常数 $1-\alpha$，那么，只要证明该函数在区间 $[0,+\infty)$ 上的最大值不超过 $1-\alpha$ 即可.

证　令
$$f(x)=x^\alpha-\alpha x,\quad x\in[0,+\infty),$$
则
$$f'(x)=\alpha x^{\alpha-1}-\alpha.$$

令 $f'(x)=0$，得 $x=1$，且 $f''(1)=\alpha(\alpha-1)<0$，则 $x=1$ 为 $f(x)$ 在区间 $[0,+\infty)$ 内部唯一的极值点，且取极大值，则 $f(1)=1-\alpha$ 为 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上的最大值.

故
$$x^\alpha-\alpha x\leqslant 1-\alpha\quad(x\geqslant 0).$$

注　前两个例子（例 12 和例 13）都是利用函数的最大最小值证明函数不等，这也是一种证明函数不等式常用的方法.

例 14　试证下列不等式：

1) $e^{\frac{x+y}{2}}\leqslant\dfrac{e^x+e^y}{2}$，其中 x 和 y 为任意实数；

2) $\dfrac{\ln x+\ln y}{2}\leqslant\ln\dfrac{x+y}{2}$，其中 x 和 y 为正实数.

分析　由凸函数定义知，若函数 $f(x)$ 为区间 I 上的凸函数，则 $\forall x_1,x_2\in I$，$\forall\lambda\in[0,1]$ 有
$$f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)\leqslant\lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2).$$

特别地取 $\lambda=\dfrac{1}{2}$ 时有
$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\leqslant\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2},$$
当 $f(x)$ 为凹函数时有
$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\geqslant\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}.$$

证　1) 由以上分析知，只要证明函数 $f(x)=e^x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上为凸函数.

由 $f(x)=e^x$ 知，$f''(x)=e^x>0$，则

$f(x)=e^x$ 为 $(-\infty,+\infty)$ 上的凸函数，此时，对任意实数 x 和 y 有
$$e^{\frac{x+y}{2}}\leqslant\frac{e^x+e^y}{2}.$$

2) 令
$$g(x)=\ln x,\quad x\in(0,+\infty),$$
则
$$g'(x)=\frac{1}{x},g''(x)=-\frac{1}{x^2}<0,\quad x\in(0,+\infty),$$

$g(x)=\ln x$ 为 $(0,+\infty)$ 上的凹函数. 故，对任意正实数 x 和 y 有 $\frac{\ln x+\ln y}{2}\leqslant \ln\frac{x+y}{2}$.

注　本题证明主要是利用函数的凹凸性，利用函数凹凸性证明函数不等式也是证明函数不等式的一种常用方法.

例 15　设 $p,q>0$，且 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$，又设 $a>0,b>0$，求证：$ab\leqslant\frac{1}{p}a^p+\frac{1}{q}b^q$.

分析　只要能证明原不等式两边取对数得到的不等式，即

$$\ln(ab)\leqslant\ln\left(\frac{1}{p}a^p+\frac{1}{q}b^q\right).$$

证　令

$$f(x)=\ln x,\quad x\in(0,+\infty),$$

则

$$f''(x)=-\frac{1}{x^2}<0,\quad x\in(0,+\infty),$$

$f(x)=\ln x$ 为 $(0,+\infty)$ 上的凹函数，从而有

$$f\left(\frac{1}{p}a^p+\frac{1}{q}b^q\right)\geqslant\frac{1}{p}f(a^p)+\frac{1}{q}f(b^q),$$

即

$$\ln\left(\frac{1}{p}a^p+\frac{1}{q}b^q\right)\geqslant\frac{1}{p}\ln a^p+\frac{1}{q}\ln b^q=\ln a+\ln b=\ln(ab),$$

故

$$ab\leqslant\frac{1}{p}a^p+\frac{1}{q}b^q.$$

例 16　证明不等式

$$1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}<\sqrt{1+x}\quad(x>0).$$

分析　令 $\sqrt{1+x}=f(x)$，由 $(1+x)^\alpha$ 的 Maclaurin 公式得

$$\sqrt{1+x}=(1+x)^{\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{2}x+\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2!}x^2+\frac{f'''(\theta x)}{3!}x^3$$
$$=1+\frac{x}{2}-\frac{1}{8}x^3+\frac{f'''(\theta x)}{3!}x^3.$$

只要证明 $f'''(x)>0\quad(x>0)$.

证　令 $f(x)=\sqrt{1+x}=(1+x)^{\frac{1}{2}}$，

则

$$f'(x)=\frac{1}{2}(1+x)^{-\frac{1}{2}},$$

$$f''(x)=-\frac{1}{4}(1+x)^{-\frac{3}{2}},$$

$$f'''(x)=\frac{3}{8}(1+x)^{-\frac{5}{2}}>0\quad(x>0),$$

从而有
$$f'''(\theta x)>0,$$
故
$$1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}<\sqrt{1+x}\quad(x>0).$$

注 从以上例题(例 9 到例 16)可看出,利用导数知识证明不等式的常用方法有以下五种:

1) 利用函数的单调性;

2) 利用 Lagrange 中值定理;

3) 利用函数的最大最小值;

4) 利用函数的凸性;

5) 利用 Taylor 公式.

例 17 证明方程 $\tan x=1-x$ 在 $(0,1)$ 内有唯一实根.

分析 关于方程 $f(x)=0$ 的根的问题往往是两个问题,一个是根的存在性,另一个是根的个数问题.

① 讨论根的存在性常用的两种方法:

i) 利用零点定理;

ii) 利用 Rolle 定理. 即:构造函数 $F(x)$,使得 $F'(x)=f(x)$.

② 讨论根的个数常用的两种方法:

i) 利用单调性;

ii) 利用结论(第二章第二讲例 12 已证) 若在区间 I 上 $f^{(n)}(x)\neq 0$,则方程 $f(x)=0$ 在 I 上最多 n 个实根.

证法一 令 $f(x)=\tan x-1+x$.

显然 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续,且 $f(0)=-1<0$, $f(1)=\tan 1>0$,由零点定理知 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内至少有一个零点,即方程 $\tan x=1-x$ 在 $(0,1)$ 内至少有一实根;又
$$f'(x)=\sec^2 x+1>0,\quad x\in[0,1],$$
则 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上严格单调增, $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内最多一个零点,即方程 $\tan x=1-x$ 在 $(0,1)$ 内最多一个实根. 故方程 $\tan x=1-x$ 在 $(0,1)$ 内有且仅有一个实根.

证法二 方程 $\tan x=1-x$ 两端同乘 $\cos x$ 得
$$\sin x=(1-x)\cos x,$$
即
$$(1-x)\cos x-\sin x=0.$$
由于 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[(1-x)\sin x]=(1-x)\cos x-\sin x$,则令 $F(x)=(1-x)\sin x$ 且 $F(0)=F(1)=0$,显然 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上满足 Rolle 定理条件则 $\exists c\in(0,1)$,使 $F'(c)=0$. 即方程 $(1-x)\cos x-\sin x=0$ 在 $(0,1)$ 内至少有一个实根,又 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[(1-x)\cos x-$

$\sin x] = -[2\cos x + (1-x)\sin x] \neq 0 \quad x \in (0,1)$，
则方程$(1-x)\cos x - \sin x = 0$在$(0,1)$内最多一个实根.

故方程$(1-x)\cos x - \sin x = 0$在$(0,1)$内有且仅有一个实根. 即方程$\tan x = 1-x$在$(0,1)$内有且仅有一个实根.

例 18 求证：方程$x^2 = x\sin x + \cos x$恰好只有两个不同的实根.

证 令$f(x) = x^2 - x\sin x - \cos x$，显然$f(x)$为偶函数，所以，只需证明$f(x)$在$(0,+\infty)$上恰有一个零点，事实上$f(0) = -1$，

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x^2\left[1 - \frac{\sin x}{x} - \frac{\cos x}{x^2}\right] = +\infty,$$

又$f(x)$在$[0,+\infty)$上连续，则$f(x)$在$(0,+\infty)$上至少有一个零点.

由于 $$f'(x) = x(2-\cos x) > 0, \quad x \in (0,+\infty).$$
则$f(x)$在$(0,+\infty)$上严格单调增，$f(x)$在$(0,+\infty)$上有且仅有一个零点，即方程$x^2 = x\sin x + \cos x$在$(0,+\infty)$内有且仅有一个实根，故方程$x^2 = x\sin x + \cos x$恰有两个不同的实根.

例 19 判定方程$e^x - |x+2| = 0$有几个实根，并指出各个根所在的区间.

分析 令$f(x) = e^x - |x+2|$，只要讨论$f(x)$有几个零点，由于$f(x)$带有绝对值，首先分区间取掉$f(x)$表达式中的绝对值.

解 令$f(x) = e^x - |x+2|$，则

$$f(x) = \begin{cases} e^x + x + 2, & x \leqslant -2, \\ e^x - x - 2, & x > -2, \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} e^x + 1, & x < -2, \\ e^x - 1, & x > -2, \end{cases}$$

从而，当$x \in (-\infty,-2)$或$x \in (0,+\infty)$时，$f'(x) > 0$，则$f(x)$在区间$(-\infty,-2)$和$(0,+\infty)$上严格单调增，而

$$f(-2) = e^{-2} > 0, \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}(e^x + x + 2) = -\infty,$$

$$f(0) = -1 < 0, \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}(e^x - x - 2) = +\infty,$$

则方程$e^x = |x+2|$在区间$(-\infty,-2)$和$(0,+\infty)$上各有一个实根，

当$x \in (-2,0)$时，$f'(x) = e^x - 1 < 0$，则在区间$(-2,0)$上$f(x)$严格递减，且

$$f(-2) = e^{-2} > 0, \quad f(0) = -1 < 0,$$

则方程$e^x = |x+2|$在$(-2,0)$内有唯一实根. 故方程$e^x = |x+2|$共有三个实根，分别在区间$(-\infty,-2)$，$(-2,0)$和$(0,+\infty)$内.

例 20 试确定方程$xe^{-x} = a(a > 0)$的实根个数.

分析 令$f(x) = xe^{-x} - a$，求导数找出$f(x)$单调的区间，然后根据函数

$f(x)$函数值的取值范围确定原方程的根.

解 令 $f(x)=xe^{-x}-a$,则

$$f'(x)=e^{-x}-xe^{-x}=e^{-x}(1-x),$$

令 $f'(x)=0$,得 $x=1$.

且 当 $x\in(-\infty,1)$时,$f'(x)>0$,$f(x)$严格单调增.

当 $x\in(1,+\infty)$时,$f'(x)<0$,$f(x)$严格单调减,

则

i) 当 $f(1)=\frac{1}{e}-a<0$,即 $a>\frac{1}{e}$时原方程无实根.

ii) 当 $f(1)=\frac{1}{e}-a=0$,即 $a=\frac{1}{e}$时原方程有唯一实根.

iii) 当 $f(1)=\frac{1}{e}-a>0$,即 $a<\frac{1}{e}$时,由于

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}(xe^{-x}-a)=-\infty,$$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{e^x}-a\right)=-a<0,$$

则原方程有两个实根.

例 21 设在区间$[0,+\infty)$上函数 $f(x)$有连续一阶导数,且 $f'(x)\geqslant k>0$,$f(0)<0$,试证方程 $f(x)=0$ 在$(0,+\infty)$内有且仅有一个实根.

分析 由 $f'(x)\geqslant k>0$ 知,$f(x)$在$(0,+\infty)$上严格递增,又 $f(0)<0$,因此,本题的关键是证明存在 $x_1\in(0,+\infty)$,使 $f(x_1)>0$. 而由题设 $f'(x)\geqslant k$ 知,曲线 $y=f(x)$应在直线 $y=kx+f(0)$的上方(如图 2-8). 只要求出直线 $y=kx+f(0)$ 与 x 轴的交点 $x_1=-\frac{f(0)}{k}$,则必有 $f(x_1)\geqslant0$.

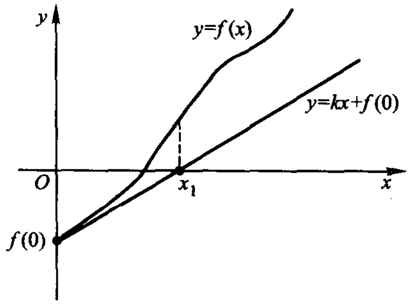


图 2-8

证 令 $x_1=-\frac{f(0)}{k}$,由 Lagrange 定理得

$$f(x_1)-f(0)=f'(\xi)x_1=f'(\xi)\left(-\frac{f(0)}{k}\right)\geqslant k\left(-\frac{f(0)}{k}\right)=-f(0),$$

则 $f(x_1)\geqslant0$.

若 $f(x_1)=0$,原题已证,

若 $f(x_1)>0$,由于 $f(0)<0$,由零点定理知,存在 $x_0\in(0,x_1)$,使 $f(x_0)=0$.

又 $f'(x)>0$，则方程 $f(x)=0$ 在 $(0,+\infty)$ 内有且仅有一个实根.

例 22　设 $f''(x)<0$，$f(0)=0$，证明对任何 $x_1>0$，$x_2>0$，有 $f(x_1+x_2)<f(x_1)+f(x_2)$.

分析　有两种思路可考虑，一种是原不等式等价于 $f(x_1+x_2)-f(x_2)<f(x_1)-f(0)$（不妨设 $x_1\leqslant x_2$），此时，应考虑用 Lagrange 定理；另一种思路是视 x_2 为 x，考虑函数 $G(x)=f(x_1+x)-f(x)-f(x_1)$，利用 $G(x)$ 的单调性.

证法一　原不等式等价于

$$f(x_1+x_2)-f(x_2)<f(x_1)-f(0).$$

不妨设 $x_1\leqslant x_2$，由 Lagrange 中值定理得

$$f(x_1+x_2)-f(x_2)=f'(\xi_2)x_1 \quad (x_2<\xi_2<x_1+x_2),$$

$$f(x_1)-f(0)=f'(\xi_1)x_1 \quad (0<\xi_1<x_1),$$

由 $f''(x)<0$，则 $f'(x)$ 单调减，$f'(\xi_2)<f'(\xi_1)$，

故
$$f(x_1+x_2)-f(x_2)<f(x_1)-f(0),$$

即
$$f(x_1+x_2)<f(x_1)+f(x_2).$$

证法二　令 $G(x)=f(x_1+x)-f(x)-f(x_1)$，

$$G'(x)=f'(x_1+x)-f'(x)=f''(\xi)x_1<0 \quad (x<\xi<x+x_1),$$

则 $G(x)$ 单调减，从而有 $F(x_2)<F(0)$，

即
$$f(x_1+x_2)-f(x_2)-f(x_1)<f(x_1)-f(0)-f(x_1)=0,$$

故
$$f(x_1+x_2)<f(x_1)+f(x_2).$$

例 23　设 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上连续，$f''(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 内存在且大于零，记 $F(x)=\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ $(x>a)$. 证明 $F(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 上单调增加.

分析　只要证明 $F'(x)>0$　$(x>a)$ 即可.

证
$$\begin{aligned}F'(x)&=\frac{f'(x)(x-a)-[f(x)-f(a)]}{(x-a)^2}\\&=\frac{1}{x-a}\left[f'(x)-\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right]\\&=\frac{1}{x-a}[f'(x)-f'(\xi)],\quad \xi\in(a,x).\end{aligned}$$

由于在 $(a,+\infty)$ 内 $f''(x)>0$，则 $f'(x)$ 单调增，从而有 $f'(x)>f'(\xi)$，$F'(x)>0$，

故 $F(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 内单调增.

例 24　设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内可导，且 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{|x|}=+\infty$. 求证：对任意实数 c，都存在 $\xi\in(-\infty,+\infty)$，使得 $f'(\xi)=c$.

分析 要证 $f'(\xi)=c$，只要证明 $f'(\xi)-c=0$，即 $(f(x)-cx)'\big|_{x=\xi}=0$，令 $g(x)=f(x)-cx$，本题就是要证 $g(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内一点处导数为零. 以下有两种思路考虑，一种是若能证明 $g(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有极值点，利用 Fermat 定理本题可以证明；另一种思路是，若能找到有限闭区间 $[a,b]$，使 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上满足 Rolle 定理条件，利用 Rolle 定理本题也可以证明.

证法一 令 $g(x)=f(x)-cx$，由 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{|x|}=+\infty$ 知

$$\lim_{x\to\infty}\frac{g(x)}{|x|}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{f(x)}{|x|}-\frac{cx}{|x|}\right)=+\infty.$$

从而有

$$\lim_{x\to\infty}g(x)=+\infty,$$

则存在 $M>0$，当 $|x|>M$ 时，$g(x)>g(0)$，由原题设知 $g(x)$ 在 $[-M,M]$ 上连续，则 $g(x)$ 在区间 $[-M,M]$ 上有最小值，事实上，$g(x)$ 在区间 $[-M,M]$ 上的最小值也是 $g(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上的最小值，不妨设该最小值在 $x=\xi$ 处取得，则该点也是 $g(x)$ 的极小值点，故 $g'(\xi)=0$，即 $f'(\xi)=c$.

证法二 由以上证明已得 $\lim\limits_{x\to\infty}g(x)=+\infty$，则存在 $M>0$，使得 $g(-M)>1+g(0)$，$g(M)>1+g(0)$. 由连续函数介值定理知存在 $A\in(-M,0)$，$B\in(0,M)$，使 $g(A)=g(B)=1+g(0)$，从而 $g(x)$ 在 $[A,B]$ 上满足 Rolle 定理条件，由 Rolle 定理知，存在 $\xi\in(A,B)$，使 $g'(\xi)=0$，

即

$$f'(\xi)=c.$$

例 25 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内二阶可导，且 $f''(x)<0$，$f(0)=f(1)=0$. 若 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上的最大值为 $M>0$，求证：对任意自然数 n.

1) 存在唯一 $x_n\in(0,1)$，使 $f'(x_n)=\dfrac{M}{n}$；

2) 极限 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，且 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=M$.

证 1) 先证 x_n 的存在性，由于 $f'(x_n)=\dfrac{M}{n}$ 等价于 $f'(x_n)-\dfrac{M}{n}=0$，也等价于 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[f(x)-\dfrac{M}{n}x\right]\bigg|_{x=x_n}=0$. 所以，令 $g(x)=f(x)-\dfrac{M}{n}x$，只要能找到一个使 $g(x)$ 满足 Rolle 定理条件的区间 $[a,b]\subseteq[0,1]$，x_n 的存在性立即得以证明.

而

$$g(0)=f(0)-0=0,\ g(1)=f(1)-\frac{M}{n}=-\frac{M}{n}<0,$$

由题设知 $\exists\,\xi\in(0,1)$，使 $f(\xi)=M$，此时

$$g(\xi)=f(\xi)-\frac{M}{n}\xi=M-\frac{M}{n}\xi=M\left(1-\frac{\xi}{n}\right)>0,$$

由连续函数介值定理知，存在 $\eta\in(\xi,1)$，使 $g(\eta)=0$. 则 $g(x)$ 在区间 $[0,\eta]$ 上满

足 Rolle 定理条件，则存在 $x_n\in(0,\eta)$，使 $g'(x_n)=0$，即

$$f'(x_n)=\frac{M}{n}.$$

下面证明 x_n 的唯一性，由于 $f''(x)<0,x\in(0,1),g''(x)=f''(x)<0$，则 $g'(x)$在$(0,1)$上严格单调减，所以 $g'(x)$在$(0,1)$上最多一个零点，唯一性得证.

2) 由于 $f''(x)<0$，则 $f'(x)$严格单调减，所以

$$f'(x_n)=\frac{M}{n}>\frac{M}{n+1}=f'(x_{n+1}),$$

由此可知
$$x_n<x_{n+1}<1,$$
即$\{x_n\}$为单调增上有界数列，所以$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，由于 $f'(\xi)=0$，$f'(x_n)=\dfrac{M}{n}>0$，而 $f'(x)$单调减，则 $x_n\leqslant\xi$，从而有 $a\leqslant\xi$.

由 $f'(x)$的连续性知，$f'(a)=\lim\limits_{n\to\infty}f'(x_n)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{M}{n}=0$，又 $f'(\xi)=0$，$f'(x)$在$(0,1)$上严格单调减，则 $a=\xi$.

$$\lim_{n\to\infty}f(x_n)=f(\xi)=M.$$

3. 讨论题

1) 如果函数 $f(x)$在 x_0 处取极大值，能否肯定存在 x_0 的邻域，使 $f(x)$在左半邻域单调增，而在右半邻域内单调减？

2) 如果 $f'(x_0)>0$，由此可断定 $f(x)$在 x_0 的某邻域内单调增吗？

3) 函数 $f(x)$在$[a,b]$上的最大(小)值点一定是 $f(x)$的极大(小)值点吗？

4) 设 $f(x)$是区间 I 上的连续函数，且在 I 上有唯一极值点 x_0. 当 $f(x_0)$为极大(小)值时，为什么 $f(x_0)$必为 $f(x)$在区间 I 上的最大(小)值？

5) 利用导数知识证明不等式常用的有哪些方法？

6) 讨论方程根的存在性和根的个数时，常用的方法有哪些？

4. 练习题

1. 设 $f(x)$二阶可导，且 $f'(0)=0,\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f''(x)}{|x|}=2$，则

(A) $f(0)$是 $f(x)$的极大值；

(B) $f(0)$是 $f(x)$的极小值；

(C) $(0,f(0))$是曲线 $y=f(x)$的拐点；

(D) $f(0)$不是 $f(x)$的极值，$(0,f(0))$也不是曲线 $y=f(x)$的拐点.

2. 设函数 $f(x)$满足关系式 $f''(x)+[f'(x)]^2=x$，且 $f'(0)=0$，则

(A) $f(0)$是 $f(x)$的极大值；

(B) $f(0)$是 $f(x)$的极小值；

(C) 点$(0,f(0))$是曲线 $y=f(x)$的拐点；

(D) $f(0)$不是 $f(x)$的极值，点$(0,f(0))$也不是曲线 $y=f(x)$的拐点.

3. 设 $f(x)=a\ln\frac{x}{a}-x\quad(a>0)$，且当 $x>0$ 时，$f(x)\leqslant-2$，试确定 a 的取值范围.

4. 作半径为 r 的球的外切正圆锥，试求该圆锥体体积的最小值.

5. 设函数 $f(x)$在$[0,+\infty)$上连续，在$(0,+\infty)$内二阶可导，$f''(x)>0$，$f(0)=0$，试证函数$\frac{f(x)}{x}$在$(0,+\infty)$内单调增.

6. 证明下列不等式：

1) $\sin\frac{x}{2}>\frac{x}{\pi},\quad x\in(0,\pi)$；

2) $(x^2-1)\ln x\geqslant(x-1)^2,\quad x\in(0,+\infty)$；

3) $\pi^e<e^\pi$；

4) $\ln\frac{b}{a}>\frac{2(b-a)}{a+b}$，其中 $b>a>0$；

5) $(x+y)\ln\frac{x+y}{2}\leqslant x\ln x+y\ln y$，其中 $x>0,y>0$.

7. 讨论方程 $\ln x-\frac{x}{e}+1=0$ 的实根个数.

8. 设当 $x>0$ 时，方程 $kx+\frac{1}{x^2}=1$ 有且仅有一个解，试求 k 的取值范围.

9. 设 $f(x)$可导，试证方程 $f(x)=0$ 的两个实根之间至少有方程 $f'(x)+f(x)=0$ 的一个实根.

10. 设 $f(x)$在$[0,+\infty)$上可导，且 $f(x)\geqslant-f'(x)$，$f(0)=1$. 证明：$f(x)\geqslant e^{-x}$.

11. 设 $f(x)$在$[a,b]$上可导，且 $f'_+(a)\cdot f'_-(b)<0$，试证明存在 $\xi\in(a,b)$，使 $f'(\xi)=0$.

第三章　一元函数积分学及其应用

第一讲　微积分基本公式与基本定理

1. 教学要求与学习注意点

1) 理解和掌握定积分的概念和性质，了解函数可积的充分条件和必要条件.

2) 熟悉积分上限的函数及其求导公式.

3) 掌握牛顿—莱布尼茨公式的条件与结论，能够正确运用该公式计算定积分.

这两节的内容丰富又非常基本，学习时要认真领会和掌握，以下几点值得注意：

1) 从概念上看，定积分与不定积分的取名虽只有一字之差，但却是两个完全不同的概念. 不定积分是一般形式的原函数，来源于求导运算的逆运算；而定积分却是一个数，是一个特定和式的极限，然而在一定条件下，两者之间却有着紧密的内在联系；当 $f(x)$ 连续时，积分上限为变量 x 的“定积分”$\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ 即为 $f(x)$ 的一个原函数，因此 $f(x)$ 的不定积分可表示为 $\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t+C$，其中 C 为任意常数. 这个联系使得微分学和积分学成为一个统一的整体，并且也为定积分的计算提供了一个有效的方法：Newton - Leibniz 公式.

2) 定积分的 4 条性质及有关推论在后续内容中反复用到，希望对每条性质的条件，结论都有清晰的了解.

3) 积分上限的函数是一类应用广泛的函数，由于其表达形式的特殊，学生往往掌握不好，从而影响了后续内容的学习、掌握好这类函数的关键是弄清上限变量与积分变量之间的区别：函数 $F(x)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ 的自变量是上限变量 x，在积分时，x 可看作为常数（积分变量 t 在 a 与 x 之间变动）；而在求 $F(x)$ 的导数时，则 x 是变量.

2. 典型例题

例 1　利用定积分定义求下列极限：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}(\sqrt[3]{n^2}+\sqrt[3]{2n^2}+\cdots+\sqrt[3]{n^3})$；

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{(n+k)(n+k+1)}{n^4}}$.

解题思路：利用定积分的定义，将所求极限化为“积分和式”的极限，从而化为定积分. 再计算相应的定积分，便可以求出极限值. 问题的关键是确定积分区间和被积函数.

解　(1)由于极限表达式中含有因子$\frac{1}{n^2}$，这使我们想到，如果将$[0,1]$区间n等分，则每个子区间的长度$\Delta x_k=\frac{1}{n}(k=1,2,\cdots,n)$；再将因子$\frac{1}{n^2}$写成$\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}$，将其中一个$\frac{1}{n}$视为$\Delta x_k$，将另一个$\frac{1}{n}$分别与括号中的各项相乘，这样便可得到$\frac{1}{n^2}(\sqrt[3]{n^2}+\sqrt[3]{2n^2}+\cdots+\sqrt[3]{n^3})=\left(\sqrt[3]{\frac{1}{n}}+\sqrt[3]{\frac{2}{n}}+\cdots+\sqrt[3]{\frac{n}{n}}\right)\frac{1}{n}$，这正是函数$f(x)=\sqrt[3]{x}$在区间$[0,1]$上的积分和，所以

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}(\sqrt[3]{n^2}+\sqrt[3]{2n^2}+\cdots+\sqrt[3]{n^3})&=\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{\frac{1}{n}}+\sqrt[3]{\frac{2}{n}}+\cdots+\sqrt[3]{\frac{n}{n}}\right)\cdot\frac{1}{n}\\&=\int_0^1\sqrt[3]{x}\,\mathrm{d}x=\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}\Big|_0^1=\frac{3}{4}.\end{aligned}$$

(2) 将极限表达式变形：

$$\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{(n+k)(n+k+1)}{n^4}}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\left(1+\frac{k}{n}\right)\left(1+\frac{k+1}{n}\right)}.$$

若直接考虑上式，不容易看出它是哪个函数在区间$[0,1]$上的积分和，为了用积分求这个极限，我们考虑用一个不等式“夹逼”这个和式：

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n}\right)\leqslant\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\left(1+\frac{k}{n}\right)\left(1+\frac{k+1}{n}\right)}\leqslant\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k+1}{n}\right),$$

即

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n}\right)\leqslant\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\left(1+\frac{k}{n}\right)\left(1+\frac{k+1}{n}\right)}\leqslant\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n}\right)+\frac{1}{n}.$$

根据定积分的定义知

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n}\right)=\int_0^1(1+x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}(1+x)^2\Big|_0^1=\frac{3}{2}.$$

又$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$，故由夹逼定理，得

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{(n+k)(n+k+1)}{n^4}}=\int_0^1(1+x)\mathrm{d}x=\frac{3}{2}.$$

例 2　设 $f(x)$在$[0,1]$上连续，且单调减，求证：对 $\forall\alpha\in[0,1]$，有 $\int_0^\alpha f(x)\mathrm{d}x\geqslant\alpha\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$

证法一　利用变上限定积分表示的函数单调性证明不等式. 要证 $\int_0^\alpha f(x)\mathrm{d}x\geqslant\alpha\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$. 等价于证 $\frac{\int_0^\alpha f(x)\mathrm{d}x}{\alpha}\geqslant\frac{\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x}{1}$ $(\alpha>0)$.

设 $F(x)=\frac{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}{x}$，则 $F'(x)=\frac{xf(x)-\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}{x^2}$. 因为 $f(x)$连续，利用积分中值定理有 $F'(x)=\frac{xf(x)-xf(\xi)}{x^2}$，其中 $0\leqslant\xi\leqslant x$. 因为 $f(x)$单调减，所以 $f(\xi)\geqslant f(x)$，从而 $F'(x)\leqslant0$，这说明 $F(x)$单调减. 于是，当 $1>\alpha>0$ 时，有$F(\alpha)\geqslant F(1)$，当 $\alpha=0$ 时，原不等式中等号自然成立；综上所述，原不等式成立.

证法二　利用积分中值定理.

注意到 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^\alpha f(x)\mathrm{d}x+\int_\alpha^1 f(x)\mathrm{d}x$，故原不等式 $\int_0^\alpha f(x)\mathrm{d}x\geqslant\alpha\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ 等价于$(1-\alpha)\int_0^\alpha f(x)\mathrm{d}x\geqslant\alpha\int_\alpha^1 f(x)\mathrm{d}x$.

利用积分中值定理，有

$$(1-\alpha)\int_0^\alpha f(x)\mathrm{d}x=(1-\alpha)\alpha f(\xi_1),\quad \alpha\int_\alpha^1 f(x)\mathrm{d}x=\alpha(1-\alpha)f(\xi_2),$$

其中 $0<\xi_1<\alpha,\alpha<\xi_2<1$. 因为 $f(x)$单调减，所以 $f(\xi_1)\geqslant f(\xi_2)$. 于是原不等式成立.

例 3　设函数 $f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续且单调增加，证明不等式

$$\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x\geqslant\frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

证法一　利用变上限定积分与函数的单调性.

令　$$F(x)=\int_a^x tf(t)\mathrm{d}t-\frac{a+x}{2}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t,\quad x\in[a,b].$$

因为 $f(x)$在$[a,b]$上连续，故有

$$\begin{aligned}F'(x)&=xf(x)-\frac{1}{2}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t-\frac{a+x}{2}f(x)=\frac{x-a}{2}f(x)-\frac{1}{2}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{2}\int_a^x[f(x)-f(t)]\mathrm{d}t,\end{aligned}$$

又因为 $f(x)$在$[a,b]$上单增，故有 $F'(x)\geqslant 0$，从而 $F(x)$在$[a,b]$上单调增加；又因为 $F(a)=0$，所以有 $F(b)\geqslant F(a)=0$，

即
$$\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x\geqslant\frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

证法二　利用定积分的性质.

因为 $f(x)$在$[a,b]$上单调增加，故有

$$\left(x-\frac{a+b}{2}\right)\left[f(x)-f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right]\geqslant 0,$$

从而有
$$\int_a^b\left(x-\frac{a+b}{2}\right)\left[f(x)-f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right]\mathrm{d}x\geqslant 0,$$

注意到 $\int_a^b\left(x-\frac{a+b}{2}\right)\mathrm{d}x=0$，从而 $\int_a^b\left(x-\frac{a+b}{2}\right)f\left(\frac{a+b}{2}\right)\mathrm{d}x=0$. 于是有 $\int_a^b\left(x-\frac{a+b}{2}\right)f(x)\mathrm{d}x\geqslant 0$，即 $\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x\geqslant\frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

证法三　利用积分中值定理.

$$\begin{aligned}\int_a^b\left(x-\frac{a+b}{2}\right)f(x)\mathrm{d}x&=\int_a^{\frac{a+b}{2}}\left(x-\frac{a+b}{2}\right)f(x)\mathrm{d}x+\int_{\frac{a+b}{2}}^b\left(x-\frac{a+b}{2}\right)f(x)\mathrm{d}x\\&=f(\xi_1)\int_a^{\frac{a+b}{2}}\left(x-\frac{a+b}{2}\right)\mathrm{d}x+f(\xi_2)\int_{\frac{a+b}{2}}^b\left(x-\frac{a+b}{2}\right)\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

其中 $a\leqslant\xi_1\leqslant\frac{a+b}{2}\leqslant\xi_2\leqslant b$. 而

$$\int_a^{\frac{a+b}{2}}\left[-\left(x-\frac{a+b}{2}\right)\right]\mathrm{d}x=\int_{\frac{a+b}{2}}^b\left(x-\frac{a+b}{2}\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{8}(b-a)^2,$$

因为 $f(x)$在$[a,b]$上单增，且 $\xi_2>\xi_1$，所以 $f(\xi_2)\geqslant f(\xi_1)$，从而有 $\int_a^b\left(x-\frac{a+b}{2}\right)f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{8}[f(\xi_2)-f(\xi_1)](b-a)^2\geqslant 0$，移项即得证.

例 4　设 $f(x)$在区间$[a,b]$上有二阶导数，$M=\max\limits_{x\in[a,b]}|f''(x)|$求证 $\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x-f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a)\right|\leqslant\frac{1}{24}M(b-a)^2$.

解题思路：由于等式中出现了函数 $f(x)$和它的二阶导数 $f''(x)$，所以需要将函数 $f(x)$作 Taylor 展开. 问题是在哪个点展开，以及展开成几阶 Taylor 公式. 由于出现了函数 $f(x)$在点$\frac{a+b}{2}$的值，因此应当在点$\frac{a+b}{2}$展开；另一方面，题目只假定 $f(x)$二阶可导，所以只能展开成带有拉格朗日余项的一阶 Taylor 公式

$$f(x)=f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)+\frac{1}{2}f''(\xi)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2,$$

其中 ξ 介于$\dfrac{a+b}{2}$和 x 之间. 顺便说明，将 Taylor 公式用于求“$\dfrac{0}{0}$”型不定式极限时，需要 Peano 余项，但是 Taylor 公式用于证明不等式或者等式时，泰勒展开必须是 Lagrange 余项. 上式两端同时积分得到

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a)+\frac{1}{2}\int_a^b f''(\xi)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2\mathrm{d}x.$$

注意 $\int_a^b f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)\mathrm{d}x=0$. 于是得到

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x-f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a)\right|=\frac{1}{2}\left|\int_a^b f''(\xi)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2\mathrm{d}x\right|$$
$$\leqslant\frac{1}{2}M\int_a^b\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2\mathrm{d}x=\frac{1}{6}M\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^3\Bigg|_a^b=\frac{1}{24}M(b-a)^3.$$

例 5 证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\int_n^{n+1}\dfrac{\sin x}{x}\mathrm{d}x=0$.

证 由积分中值公式，对任一正整数 n，$\exists\,\xi_n\in[n,n+1]$，使得 $\int_n^{n+1}\dfrac{\sin x}{x}\mathrm{d}x=\dfrac{\sin\xi_n}{\xi_n}\int_n^{n+1}\mathrm{d}x=\dfrac{\sin\xi_n}{\xi_n}$于是

$$0\leqslant\left|\int_n^{n+1}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x\right|=\left|\frac{\sin\xi_n}{\xi_n}\right|\leqslant\frac{1}{\xi_n}\leqslant\frac{1}{n}.$$

令 $n\to\infty$，由夹逼准则知 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_n^{n+1}\dfrac{\sin x}{x}\mathrm{d}x=0$.

例 6 设 $r\in[a,b]$，$\varphi(x)=\begin{cases}0, & x\neq r,\\ 1, & x=r.\end{cases}$证明 $\varphi(x)\in R[a,b]$，且 $\int_a^b\varphi(x)\mathrm{d}x=0$.

证 对于$[a,b]$的任一分划 $a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b$，及任意选取的 $\xi_k\in[x_{k-1},x_k]$ $(k=1,2,\cdots,n)$，因 $x=r$ 作为 ξ_k 至多被取到两次，故有 $\left|\sum\limits_{k=1}^n\varphi(\xi_k)\Delta x_k\right|\leqslant 2\lambda$，其中 $\lambda=\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n}\Delta x_k$. 令 $\lambda\to 0$，由夹逼准则知 $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{k=1}^n\varphi(\xi_k)\cdot\Delta x_k=0$.

所以 $\varphi(x)\in R[a,b]$. 且 $\int_a^b\varphi(x)\mathrm{d}x=0$

注 (1) 本例结论容易作如下推广：设函数 $h(x)$在区间$[a,b]$上有定义，并且在$[a,b]$上除有限个点外处处取值为零. 则 $h(x)\in R[a,b]$，且 $\int_a^b h(x)\mathrm{d}x=0$.

(2) 利用注(1)，我们可得到定积分的另外一个基本性质：设 $f(x)$在$[a,b]$上有定义，则改变 $f(x)$在$[a,b]$上有限个点处的函数值，不影响 $f(x)$在$[a,b]$上的可积性及积分值：为此设改变 $f(x)$在$[a,b]$上有限个点处的函数值后所得到的新的函数为 $g(x)$. 令 $h(x)=g(x)-f(x)$，由(2)知 $h(x)\in R[a,b]$，且

$\int_a^b h(x)\mathrm{d}x=0$，又 $g(x)=f(x)+h(x)$. 故当 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积时，$g(x)$ 在 $[a,b]$ 上也可积，且有

$$\int_a^b g(x)\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x+\int_a^b h(x)\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

例 7　求极限 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\int_1^x \mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t}{\ln x}$.

解　应用 L'Hospital 法则，得

$$\lim_{x\to1}\frac{\int_1^x \mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t}{\ln x}=\lim_{x\to1}\frac{\mathrm{e}^{x^2}}{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}.$$

例 8　设

$$f(x)=\begin{cases}x, & \text{当 } 0\leqslant x\leqslant1,\\ 2-x, & \text{当 } 1<x\leqslant2,\\ 0, & \text{当 } x<0 \text{ 或 } x>2.\end{cases}$$

求 $\varphi(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内的表达式

解

$$\varphi(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=\begin{cases}\int_0^x 0\mathrm{d}t=0, & \text{当 } x<0,\\ \int_0^x t\mathrm{d}t=\dfrac{x^2}{2}, & \text{当 } 0\leqslant x\leqslant1,\\ \int_0^1 t\mathrm{d}t+\int_1^x(2-t)\mathrm{d}t=1-\dfrac{(x-2)^2}{2}, & \text{当 } 1<x\leqslant2,\\ \int_0^1 t\mathrm{d}t+\int_1^2(2-t)\mathrm{d}t+\int_2^x 0\mathrm{d}t=1, & \text{当 } x>2.\end{cases}$$

例 9　设 $f\in C[a,b]$，且 $f(x)>0, x\in[a,b]$，

$$F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t+\int_b^x\frac{1}{f(t)}\mathrm{d}t, x\in[a,b].$$

证明：(1) $F'(x)\geqslant2$；

(2) 方程 $F(x)=0$ 在区间 (a,b) 内有且仅有一个根.

证　(1) $F'(x)=f(x)+\dfrac{1}{f(x)}\geqslant2\sqrt{f(x)\cdot\dfrac{1}{f(x)}}=2.$

(2) 由于 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续且 $F(a)=\int_b^a f(t)\mathrm{d}t+\int_b^a\dfrac{1}{f(t)}\mathrm{d}t$，

即 $F(a)=\int_b^a\dfrac{1}{f(t)}\mathrm{d}t<0, F(b)=\int_a^b f(t)\mathrm{d}t>0$. 因此 $F(x)=0$ 在 (a,b) 内至少有

一个根；又由(1)知，$F(x)$在$[a,b]$上是单调函数，故 $F(x)=0$ 在(a,b)内至多有一个根，从而 $F(x)=0$ 在(a,b)内恰有一个根.

3. 讨论题

1）若函数在区间上有原函数，这函数是否在该区间上一定可积！

2）对积分上限的函数求导时应注意些什么？

3）下面两种计算积分的方法对吗？为什么？

1° 由$(\arctan x)'=\dfrac{1}{1+x^2}$得$\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x=\arctan x\Big|_{-1}^{1}=\frac{\pi}{2}$.

2° 由 $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}=\int\frac{\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x}{\frac{1}{x^2}(1+x^2)}=-\int\frac{\mathrm{d}\left(\frac{1}{x}\right)}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}=-\arctan\frac{1}{x}+C$ 得

$$\int_{-1}^{1}\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x=-\arctan x\Big|_{-1}^{1}=-\frac{\pi}{2}.$$

4）如果 $f(x)$在区间$[a,b]$上可积、非负，但不恒等于零，能否断定

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x>0?$$

5）证明极限 $\displaystyle\lim_{p\to+\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^p x\mathrm{d}x=0$ 时，由积分中值定理，存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^p x\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}(\sin\xi)^p$，因为 $0<\xi<1$，所以 $0<\sin\xi<1$. 从而 $\displaystyle\lim_{p\to+\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^p x\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\lim_{p\to+\infty}(\sin\xi)^p=0$. 问这个证明有什么问题？

6）对于积分中值定理，经常有人问：结论中的 $\xi\in[a,b]$能否变成 $\xi\in(a,b)$？

7）函数 $f(x)=\begin{cases}x^2, & x\leqslant 0,\\ x+1, & x>0\end{cases}$ 与 $g(x)=\begin{cases}x^2, & x<0,\\ x+1, & x\geqslant 0\end{cases}$ 在$[-1,1]$上是否可积？$\displaystyle\int_{-1}^{1}g(x)\mathrm{d}x$ 与 $\displaystyle\int_{-1}^{1}f(x)\mathrm{d}x$ 是否相等？为什么？

8）计算$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\displaystyle\int_0^x\sqrt{1+t^4}\,\mathrm{d}t$、$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\displaystyle\int_x^1\sqrt{1+t^4}\,\mathrm{d}t$、$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\displaystyle\int_0^{\sqrt{x}}\sqrt{1+t^4}\,\mathrm{d}t$、$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\displaystyle\int_{\sqrt{x}}^x\sqrt{1+t^4}\,\mathrm{d}t$、$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\displaystyle\int_a^x(x-t)f(t)\mathrm{d}t$　($f(x)$连续)，并小结变上限积分的求导法？

4. 练习题

1）利用定积分的定义计算下列极限

1° $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(1+\cos\frac{1}{n}+\cos\frac{2}{n}+\cdots+\cos\frac{n-1}{n}\right)$；

2° $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n}\right)$.

2) 证明：$\sqrt{2}e^{-\frac{1}{2}} \leqslant \int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} e^{-x^2} dx \leqslant \sqrt{2}$.

3) 计算下列各题：

1° $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\int_0^x (e^t - 1 - t) dt}{x \sin^4 x}$；

2° 已知 $f(x)$ 连续且 $f(2) = 3$，求 $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\int_2^x \left[\int_t^2 f(u) du\right] dt}{(x-2)^2}$；

3° 设 $f(t)$ 连续，$g(x) = x \int_0^x f(t) dt$，求 $g''(0)$.

4) 求常数 a、b，使得 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{bx - \sin x} \int_0^x \dfrac{t^2}{\sqrt{a+t}} dt = 1$.

5) 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $f(x) > 0$. 求证：在 $[a,b]$ 上存在一点 ξ，使 $\int_a^{\xi} f(x) dx = \dfrac{1}{3} \int_a^b f(x) dx$

6) 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续，且 $F(x) = \int_0^x (x - 2t) f(t) dt$. 试证：若 $f(x)$ 单调减，则 $F(x)$ 单调增.

7) 设 $F(x) = \int_1^x \dfrac{e^t}{t} dt \ (x > 0)$. 问 x 取何值时，$F(x) \geqslant \ln x$.

8) 设 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续. 且 $f(x) > 0$. 试证：

1° $y = \int_0^x x f(t) dt$ 有唯一驻点；2° 驻点是 $y(x)$ 的极小值点.

9) 设 $f(x)$ 在 $[0,a]$ 上可积，且当 $x > 0$ 时，$f(x) > 0$，又满足关系式 $f(x) = \sqrt{\int_0^x f(t) dt}$，试求 $f(x)$.

第二讲 积分法及定积分的应用

1. 教学要求与学习注意点

掌握不定积分的两种基本积分法，能够用线性函数和一些常用的简单函数作为换元函数来计算某些不定积分，在学习两种基本积分方法时需要注意以下几点：

1) 第一类换元法是复合函数求导公式的逆向使用. 掌握第一类换元法的关键是熟悉一些常用函数的微分公式（逆向书写的），如 $a dx = d(ax + b)$，$nx^{n-1} dx =$

$dx^n(n\neq 0)$，$\frac{1}{x}dx=d\ln x$，$e^x dx=de^x$，$\cos x dx=d\sin x$，等等，要通过多做练习，达到熟能生巧的目的.

2）第二类换元法主要用于消去被积函数中的根式$\sqrt{a^2\pm x^2}$和$\sqrt{x^2-a^2}$，使用的换元函数是三角函数或双曲函数，对每种函数的适用范围要有清晰了解.

3）采用不同的换元函数不仅会造成计算繁简上的差异，而且计算结果在形式上也可能很不一样，检验结果是否正确的方法是将得到的函数求导，看是否等于被积函数.

4）分步积分法主要用于被积函数是两个不同类型的函数的乘积的情形，实施分部积分的关键是正确选择 $u(x)$ 与 $v'(x)$，使得 $v(x)$ 容易求得且转换后的 $\int u'(x)v(x)dx$ 比原先的 $\int u(x)v'(x)dx$ 容易计算.

5）有时在求如同 $\int e^{ax}\sin bx dx$ 这样的不定积分时，通过连续两次分部积分，会得出所求不定积分满足的一个方程，然后从方程中解出不定积分，这是计算不定积分的一种比较常用的方法，此外，分部积分法在建立不定积分的递推公式中有着特殊的作用.

6）掌握定积分的换元法和分部积分法，学习时需要注意：运用定积分的换元法和分部积分法可以得出一些与被积函数性质有关的积分公式以及一些重要积分的值，其中有些结论是十分有用的，应当记住它们并会应用，特别如：奇偶函数关于原点对称的区间上的积分的性质；周期函数在一个周期长度的区间上的积分值与区间起点无关的性质.

7）掌握微元法的思想方法，能用微元法推导面积、体积等几何量的计算公式，并计算一些实际问题.

8）用微元法建立如功，水压力及引力等物理量的积分表达式. 学习时需要注意以下几点：

① 一个物理问题的提出通常并不附带坐标系，而建立物理量的积分表达式则离不开坐标系，因而从实际情况出发建立恰当的坐标系对于物理量的计算是至关重要的，坐标系的选择是否适当常常会影响到积分表达式及其计算过程的繁简.

② 物理量的计算离不开量纲，计算时在同一个题中对同类量要采用统一的单位.

③ 在处理引力问题时，必须注意要按分量来合成，即引力的积分表达式要建立在各分量上.

2. 典型例题

例 1 求 $\int \frac{1}{\sin^2 x\cos^4 x}\mathrm{d}x$.

解法一
$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sin^2 x\cos^4 x}\mathrm{d}x &= \int \frac{(\sin^2 x+\cos^2 x)^2}{\sin^2 x\cos^4 x}\mathrm{d}x\\ &= \int \left(\frac{\sin^2 x}{\cos^4 x}+\frac{2}{\cos^2 x}+\frac{1}{\sin^2 x}\right)\mathrm{d}x\\ &= \int \tan^2 x\mathrm{d}\tan x+2\tan x-\cot x\\ &= \frac{1}{3}\tan^3 x+2\tan x-\cot x+C.\end{aligned}$$

解法二
$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sin^2 x\cos^4 x}\mathrm{d}x &= \int \frac{1}{\tan^2 x\cos^6 x}\mathrm{d}x = \int \frac{\sec^4 x}{\tan^2 x}\mathrm{d}\tan x\\ &= \int \frac{\tan^4 x+2\tan^2 x+1}{\tan^2 x}\mathrm{d}\tan x\\ &= \frac{1}{3}\tan^3 x+2\tan x-\cot x+C.\end{aligned}$$

例 2 求 $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin 2x+2\sin x}$.

解
$$\begin{aligned}\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin 2x+2\sin x} &= \int \frac{\mathrm{d}x}{2\sin x(\cos x+1)} = \int \frac{\mathrm{d}x}{4\sin \frac{x}{2}\cos \frac{x}{2}\cdot 2\cos^2 \frac{x}{2}}\\ &= \frac{1}{4}\int \frac{1}{\tan \frac{x}{2}\cos^2 \frac{x}{2}}\mathrm{d}\left(\tan \frac{x}{2}\right)\\ &= \frac{1}{4}\int \frac{1+\tan^2 \frac{x}{2}}{\tan \frac{x}{2}}\mathrm{d}\left(\tan \frac{x}{2}\right)\\ &= \frac{1}{4}\ln\left|\tan \frac{x}{2}\right|+\frac{1}{8}\tan^2 \frac{x}{2}+C.\end{aligned}$$

注 对于三角函数有理式的积分，最常用的方法是利用三角函数的恒等式将被积函数变形化简，变为可以积分的形式.

例 3 设 $f(\ln x)=\frac{\ln(1+x)}{x}$，求 $\int f(x)\mathrm{d}x$.

解 首先必须写出 $f(x)$ 的表达式，才能动手求 $\int f(x)\mathrm{d}x$.

令 $t=\ln x$. 则 $x=\mathrm{e}^t$. $\mathrm{d}x=\mathrm{e}^t\mathrm{d}t$. 于是 $f(\ln x)=f(t)=\frac{\ln(1+\mathrm{e}^t)}{\mathrm{e}^t}$，

$$\int f(x)\mathrm{d}x=\int \frac{\ln(1+\mathrm{e}^x)}{\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x=-\int \ln(1+\mathrm{e}^x)\mathrm{d}\mathrm{e}^{-x}$$

$$=-e^{-x}\ln(1+e^x)+\int e^{-x}\frac{e^x}{1+e^x}dx=-e^{-x}\ln(1+e^x)+\int\left(1-\frac{e^x}{1+e^x}\right)dx$$

$$=x-(1+e^{-x})\ln(1+e^x)+C.$$

例 4　设 $f'(\ln x)=\begin{cases}1, & 0<x\leqslant 1,\\ x, & x>1,\end{cases}$ 及 $f(0)=1$，求 $f(x)$.

解　设 $\ln x=t.\ x=e^t$，于是原式变为 $f'(t)=\begin{cases}1, & t\leqslant 0,\\ e^t, & t>0,\end{cases}$

所以，当 $t\leqslant 0$ 时，$f(t)=\int f'(t)dt=\int 1dt=t+C_1$，

当 $t>0$ 时，$f(t)=\int f'(t)dt=\int e^t dt=e^t+C_2$.

由于 $f'(t)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续(包括 $t=0$)，所以其原函数 $f(t)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内存在且连续，由 $f(t)$ 在 $t=0$ 连续，有

$\lim\limits_{t\to 0} f(t)=\lim\limits_{t\to 0^+} f(t)=f(0)$，而 $f(0)=1$ 即得 $C_1=1+C_2=1$，

故得 $C_1=1, C_2=0$. 所以 $f(t)=\begin{cases}t+1, & t\leqslant 0,\\ e^t, & t>0,\end{cases}$

即
$$f(x)=\begin{cases}x+1, & x\leqslant 0,\\ e^x, & x>0.\end{cases}$$

例 5　求下列不定积分：

1) $\int\frac{x^2}{(1-x)^{100}}dx$；　　2) $\int\frac{1+x}{\sqrt{x-x^2}}dx$；　　3) $\int\frac{dx}{e^{x/2}+e^x}$.

解　1) $\int\frac{x^2}{(1-x)^{100}}dx=\int\frac{[(1-x)-1]^2}{(1-x)^{100}}dx=\int\frac{(1-x)^2-2(1-x)+1}{(1-x)^{100}}dx$

$$=-\int[(1-x)^{-98}-2(1-x)^{-99}+(1-x)^{-100}]d(1-x)$$

$$=\frac{1}{97(1-x)^{97}}-\frac{1}{49(1-x)^{98}}+\frac{1}{99(1-x)^{99}}+C.$$

2) $\int\frac{1+x}{\sqrt{x-x^2}}dx=-\frac{1}{2}\int\frac{(1-2x)-3}{\sqrt{x-x^2}}dx$

$$=-\frac{1}{2}\left[\int\frac{1-2x}{\sqrt{x-x^2}}dx-\int\frac{3}{\sqrt{\frac{1}{4}-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}}dx\right]$$

$$=-\frac{1}{2}\left[\int\frac{d(x-x^2)}{\sqrt{x-x^2}}-3\int\frac{d(2x-1)}{\sqrt{1-(2x-1)^2}}\right]$$

$$=-\sqrt{x-x^2}+\frac{3}{2}\arcsin(2x-1)+C.$$

3) $\int \frac{1}{e^{x/2}+e^x}dx = \int \frac{e^{-\frac{x}{2}} \cdot e^{-\frac{x}{2}}}{e^{-\frac{x}{2}}+1}dx = -2\int \frac{e^{-\frac{x}{2}}}{e^{-\frac{x}{2}}+1}d(e^{-\frac{x}{2}})$

$$= -2\int \left(1-\frac{1}{e^{-\frac{x}{2}}+1}\right)d(e^{-\frac{x}{2}}) = -2e^{-\frac{x}{2}}+2\ln(e^{-\frac{x}{2}}+1)+C.$$

例 6 求下列不定积分：

1) $\int \frac{\ln\tan x}{\cos x\sin x}dx$； 2) $\int \frac{1}{1+\sin x}dx$； 3) $\int x\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx$.

解 1) 设取 $\varphi(x)=\tan x$. 则 $\varphi'(x)=\frac{1}{\cos^2 x}$，而被积函数恰好能分出这个因子，即得

$$\int \frac{\ln\tan x}{\cos x\sin x}dx = \int \frac{\ln\tan x}{\cos^2 x\tan x}dx = \int \frac{\ln\tan x}{\tan x}d(\tan x)$$

$$= \int \ln\tan x\, d(\ln\tan x) = \frac{1}{2}(\ln\tan x)^2+C.$$

2) 分母是二项式，设法化为单项式，即

$$\int \frac{dx}{1+\sin x} = \int \frac{1-\sin x}{\cos^2 x}dx = \int \sec^2 x dx + \int \frac{d\cos x}{\cos^2 x}$$

$$= \tan x - \sec x + C.$$

3) $\int x\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx = \int \frac{x(1-x)}{\sqrt{1-x^2}}dx$. 令 $x=\sin t$. 取 $t=\arcsin x$.

原式 $= \int \frac{\sin t(1-\sin t)}{\cos t}\cdot \cos t dt = \int \sin t dt - \int \sin^2 t dt$

$$= -\cos t - \int \frac{1-\cos 2t}{2}dt = -\cos t - \frac{1}{2}\left(t-\frac{1}{2}\sin 2t\right)+C$$

$$= -\sqrt{1-x^2}-\frac{1}{2}\arcsin x + \frac{x}{2}\sqrt{1-x^2}+C.$$

例 7 用多种方法求下列不定积分：

1) $\int x^3\sqrt{4-x^2}dx$； 2) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-4}}$.

解 1) **解法一** 用凑微分法

$$\int x^3\sqrt{4-x^2}dx = \frac{1}{2}\int x^2\sqrt{4-x^2}d(x^2)$$

$$= \frac{1}{2}\int [(4-x^2)-4]\sqrt{4-x^2}d(4-x^2)$$

$$= \frac{1}{2}\int [(4-x^2)^{\frac{3}{2}}-4(4-x^2)^{\frac{1}{2}}]d(4-x^2)$$

$$= \frac{1}{5}(4-x^2)^{\frac{5}{2}}-\frac{4}{3}(4-x^2)^{\frac{3}{2}}+C.$$

解法二　$\int x^3\sqrt{4-x^2}\,dx=\frac{1}{2}\int x^2\sqrt{4-x^2}\,d(x^2)$.

令 $\sqrt{4-x^2}=t$, $x^2=4-t^2$, $d(x^2)=(-2t)dt$.

$$\text{原式}=\frac{1}{2}\int(4-t^2)t(-2t)dt=-\int t^2(4-t^2)dt=-\left(\frac{4}{3}t^3-\frac{1}{5}t^5\right)+C$$
$$=-\frac{4}{3}(4-x^2)^{\frac{3}{2}}+\frac{1}{5}(4-x^2)^{\frac{5}{2}}+C.$$

解法三　设 $x=2\sin t$，取 $t=\arcsin\frac{x}{2}$，则

$$\int x^3\sqrt{4-x^2}\,dx=\int(2\sin t)^3\cdot 2\cos t\cdot 2\cos t\,dt=32\int\sin^3 t\cos^2 t\,dt$$
$$=-32\int\sin^2 t\cos^2 t\,d(\cos t)=-32\int(1-\cos^2 t)\cos^2 t\,d(\cos t)$$
$$=-32\left(\frac{\cos^3 t}{3}-\frac{\cos^5 t}{5}\right)+C=-\frac{4}{3}(4-x^2)^{\frac{3}{2}}+\frac{1}{5}(4-x^2)^{\frac{5}{2}}+C.$$

2) **解法一**　用第二类换元法.

在 $x>2$ 时，令 $x=2\sec t$. $0<t<\frac{\pi}{2}$,

$$\int\frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-4}}=\int\frac{1}{(2\sec t)^2\sqrt{4\sec^2 t-4}}\cdot 2\sec t\tan t\,dt=\frac{1}{4}\int\cos t\,dt$$
$$=\frac{1}{4}\sin t+C=\frac{1}{4}\cdot\frac{\sqrt{x^2-4}}{x}+C,$$

容易验知，上列结果在 $x<-2$ 中也适用.

解法二　用倒代换 $x=\frac{1}{t}$，当 $x>2$ 时，$0<t<\frac{1}{2}$.

$$\int\frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-4}}=\int\frac{1}{\left(\frac{1}{t}\right)^2\sqrt{\left(\frac{1}{t}\right)^2-4}}\cdot\left(-\frac{1}{t^2}\right)dt=-\int\frac{t}{\sqrt{1-4t^2}}dt$$
$$=\frac{1}{8}\int\frac{1}{\sqrt{1-4t^2}}d(1-4t^2)=\frac{1}{4}\sqrt{1-4t^2}+C=\frac{\sqrt{x^2-4}}{4x}+C.$$

例 8　求下列各积分：

1) $\int x\ln(1+x^2)dx$；　2) $\int\frac{3x\sin^2 x}{\cos^4 x}dx$；　3) $\int\frac{\arcsin x}{x^2\sqrt{1-x^2}}dx$；

4) $\int e^x\left(\frac{1}{x}+\ln x\right)dx$.

解　1) $\int x\ln(1+x^2)dx=\frac{1}{2}\int\ln(1+x^2)d(1+x^2)$

$$=\frac{1}{2}(1+x^2)\ln(1+x^2)-\frac{1}{2}\int(1+x^2)\cdot\frac{2x}{1+x^2}dx$$

$$=\frac{1}{2}(1+x^2)\ln(1+x^2)-\frac{1}{2}x^2+C.$$

2) $\int\frac{3x\sin^2 x}{\cos^4 x}\mathrm{d}x=\int 3x\tan^2 x\sec^2 x\mathrm{d}x=\int 3x\tan^2 x\mathrm{d}(\tan x)$

$=\int x\mathrm{d}(\tan^3 x)=x\tan^3 x-\int\tan^3 x\mathrm{d}x=x\tan^3 x+\int\frac{\sin^2 x}{\cos^3 x}\mathrm{d}(\cos x)$

$=x\tan^3 x+\int\left(\frac{1}{\cos^3 x}-\frac{1}{\cos x}\right)\mathrm{d}(\cos x)=x\tan^3 x-\frac{1}{2\cos^2 x}-\ln|\cos x|+C_1$

$=x\tan^3 x-\frac{1}{2}\tan^2 x-\ln|\cos x|+C.$

在用分部积分法之前，要将被积函数 $f(x)$先分解成 $u(x)$与 $v'(x)$的乘积，确认什么是 $u(x)$，什么是 $v'(x)$. 如上题，要确认 $u(x)=x, v'(x)=\frac{3\sin^2 x}{\cos^4 x}$，然后，由 $v'(x)$求 $v(x)$时，可采取把 $v'(x)\mathrm{d}x$ 凑成 $\mathrm{d}v(x)$的凑微分法，这里，当凑成 $\int 3x\tan^2 x\mathrm{d}(\tan x)$时，若就用分部积分法，则会得到比原积分更复杂的结果. 因此，本题必须确定幂函数是 $u(x)$，其余部分应全归入 $v'(x)$.

3) 先作变换，令 $\arcsin x=t$，则 $x=\sin t$，于是

$$\int\frac{\arcsin x}{x^2\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x=\int\frac{t}{\sin^2 t\cos t}\cos t\mathrm{d}t=\int t\csc^2 t\mathrm{d}t=-\int t\mathrm{d}(\cot t)$$

$$=-\left(t\cot t-\int\cot t\mathrm{d}t\right)=-t\cot t+\ln|\sin t|+C$$

$$=-\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\arcsin x+\ln|x|+C.$$

本题若不先作变换，而先作分部积分，则必须认清 $u(x)=\arcsin x, v'(x)=\frac{1}{x^2\sqrt{1-x^2}}$. 若不认清什么是 $u(x)$，而作

$$\int\frac{\arcsin x}{x^2\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x=\int\frac{\arcsin x}{x^2}\mathrm{d}(\arcsin x)=\frac{1}{2}\int\frac{1}{x^2}\mathrm{d}(\arcsin x)^2$$

$$=\frac{1}{2x^2}(\arcsin x)^2+\int\frac{(\arcsin x)^2}{x^3}\mathrm{d}x,$$

则所得结果比原积分更复杂，确认 $v'(x)=\frac{1}{x^2\sqrt{1-x^2}}$，要求 $v(x)$，需用换元法. 与其这里用换元法，不如一开始就先作换元. 对于既需用分部积分法又需用换元法计算的积分，一般都先作换元.

4) $\int e^x\left(\frac{1}{x}+\ln x\right)\mathrm{d}x=\int\frac{e^x}{x}\mathrm{d}x+\int e^x\ln x\mathrm{d}x$

$$=\int e^x d\ln x+\int e^x \ln x dx=e^x\ln x-\int e^x\ln x dx+\int e^x \ln x dx$$

$$=e^x\ln x+C.$$

有些积分,如$\int \frac{1}{x}e^x dx$、$\int e^x \ln x dx$、$\int \frac{\sin x}{x}dx$、$\int \ln|\sin x|dx$ 等是积不出来的(原函数存在,但不是初等函数),凡遇到与这些有关的积分,可把积分分成两部分,对一部分作分部积分后,期望能恰与另一部分抵消.这类积分只有在某些凑巧的特殊情况下才能积出.

例 9 设 $f(x)$的原函数为$\frac{\sin x}{x}$,求$\int xf'(x)dx$.

解 $$\int xf'(x)dx=\int xdf(x)=xf(x)-\int f(x)dx.$$

因为 $f(x)$的一个原函数为$\frac{\sin x}{x}$,所以$\int f(x)dx=\frac{\sin x}{x}+C$.

又 $f(x)=\left(\frac{\sin x}{x}\right)'=\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}$,于是有

$$\int xf'(x)dx=x\cdot\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}-\frac{\sin x}{x}+C=\cos x-\frac{2\sin x}{x}+C.$$

例 10 建立 $I_n=\int \tan^n x dx$ 的递推公式.

解 $$I_n=\int \tan^n x dx=\int \tan^{n-2} x\tan^2 x dx=\int \tan^{n-2} x(\sec^2 x-1)dx$$

$$=\int \tan^{n-2} x\sec^2 x dx-I_{n-2}=\int \tan^{n-2} x d(\tan x)-I_{n-2}$$

$$=\frac{1}{n-1}\tan^{n-1} x-I_{n-2}.$$

类似地可用分部积分法建立 $I_m=\int \frac{1}{\sin^m x}dx$ 的递推公式($m\geqslant 2$).

例 11 求不定积分$\int \frac{x^2e^x}{(x+2)^2}dx$.

解 选择 $u=x^2e^x$,$dv=\frac{1}{(x+2)^2}dx$,则有

$$\int \frac{x^2e^x}{(x+2)^2}dx=\int x^2e^x d\left(-\frac{1}{x+2}\right)=x^2e^x\left(-\frac{1}{x+2}\right)-\int\left(-\frac{1}{x+2}\right)d(x^2e^x)$$

$$=-\frac{x^2e^x}{x+2}+\int\frac{x^2e^x+2xe^x}{x+2}dx=-\frac{x^2e^x}{x+2}+\int xe^x dx$$

$$=-\frac{x^2e^x}{x+2}+xe^x-\int e^x dx=-\frac{x^2e^x}{x+2}+xe^x-e^x+C$$

注 经验不多的学生常选择 $e^x dx=du=de^x$,这是可以理解的.重要的是,

发现这种选择不能解决问题的时候，要当机立断作另外的选择，不能轻易放弃.

例 12 设 $f(x)$ 关于直线 $x=a$ 对称且可积，即 $\forall x\in\mathbf{R}$，有 $f(a-x)=f(a+x)$. 试证：$\forall b>0$，有

$$\int_{a-b}^{a+b} f(x)\mathrm{d}x=2\int_{a}^{a+b} f(x)\mathrm{d}x=2\int_{a-b}^{a} f(x)\mathrm{d}x.$$

证 $$\int_{a-b}^{a+b} f(x)\mathrm{d}x=\int_{a-b}^{a} f(x)\mathrm{d}x+\int_{a}^{a+b} f(x)\mathrm{d}x,$$

$$\int_{a-b}^{a} f(x)\mathrm{d}x \xlongequal{x=a-t} -\int_{b}^{0} f(a-t)\mathrm{d}t=\int_{0}^{b} f(a-t)\mathrm{d}t,\ \int_{a}^{a+b} f(x)\mathrm{d}x \xlongequal{x=a+t}$$

$\int_{0}^{b} f(a+t)\mathrm{d}t$，故得所证.

注 在上述结果中，若令 $a=0$，便得到偶函数 $f(x)$ 关于原点对称的区间上的积分公式 $\int_{-b}^{b} f(x)\mathrm{d}x=2\int_{0}^{b} f(x)\mathrm{d}x=2\int_{-b}^{0} f(x)\mathrm{d}x$，因此本题的结果是以上公式的推广. 这个结果也很有用，例如，由于函数 $y=g(\sin x)$（其中 g 为连续函数）关于直线 $x=\frac{\pi}{2}$ 对称，故有 $\int_{0}^{\pi} g(\sin x)\mathrm{d}x=2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} g(\sin x)\mathrm{d}x$.

特别地，有 $$\int_{0}^{\pi} \sin^3 x\mathrm{d}x=2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x\mathrm{d}x=2\cdot\frac{2}{3}=\frac{4}{3}.$$

$$\int_{0}^{\pi} \cos^4 x\mathrm{d}x=2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 x\mathrm{d}x=2\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{3}{8}\pi\text{，等等.}$$

例 13 设一圆锥的底半径为 r，高为 h，试用两种计算方法计算该锥体体积.

解 如图 3－1 所示，该锥体可以看成是以点 $(0,0)$，$(h,0)$ (h,r) 为顶点的平面三角形绕 x 轴旋转所得的旋转体，此三角形的斜边方程为 $y=\frac{r}{h}x$，$x\in[0,h]$ 或 $x=\frac{h}{r}y$，$y\in[0,r]$.

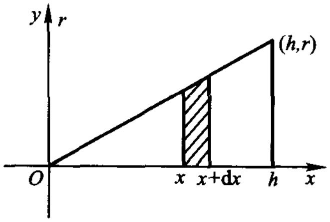


图 3－1

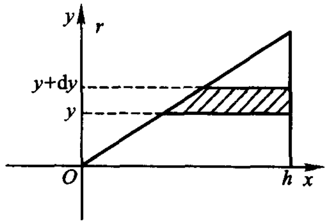


图 3－2

解法一（平面切片法） 在 $[0,h]$ 上任取一小区间 $[x,x+\mathrm{d}x]$，与此小区间相对应的窄曲边梯形绕 x 轴旋转所得的薄片的体积近似地等于以 $\frac{r}{h}x$ 为底半径，

$\mathrm{d}x$ 为高的圆柱形薄片的体积，故得体积元素 $\mathrm{d}V=\pi\left(\frac{r}{h}x\right)^2\mathrm{d}x$，从而

$$V=\int_0^h \pi\left(\frac{r}{h}x\right)^2\mathrm{d}x=\frac{\pi r^2}{h^2}\int_0^h x^2\mathrm{d}x=\frac{\pi r^2 h}{3}.$$

解法二(柱面切片法)　在$[0,r]$上任取一小区间$[y,y+\mathrm{d}y]$(如图 3-2)，与此小区间相应的窄曲边梯形绕 x 轴旋转所得的薄圆筒的体积近似地等于以 $2\pi y$ 为长，$\left(h-\frac{h}{r}y\right)$为宽，$\mathrm{d}y$ 为高的矩形薄片的体积(这里长、宽仅是个称呼，不表示量的大小)，故得体积元素 $\mathrm{d}V=2\pi y\left(h-\frac{h}{r}y\right)\mathrm{d}y$，从而

$$V=\int_0^r 2\pi y\left(h-\frac{h}{r}y\right)\mathrm{d}y=2\pi h\int_0^r y\mathrm{d}y-\frac{2\pi h}{r}\int_0^r y^2\mathrm{d}y=\frac{\pi r^2 h}{3}.$$

例 14　设曲线 $y=ax^2(a>0,x\geqslant 0)$与 $y=1-x^2$ 交于点 A. 过坐标原点 O 和点 A 的直线与曲线 $y=ax^2$ 围成一个平面图形. 问：a 为何值时，该图形绕 x 轴旋转一周所得的旋转体的体积最大?

解　当 $x\geqslant 0$ 时，解$\begin{cases}y=ax^2,\\ y=1-x^2\end{cases}$得两曲线交点为$\left(\frac{1}{\sqrt{1+a}},\frac{a}{1+a}\right)$，故直线 OA 的方程为 $y=\frac{ax}{\sqrt{1+a}}$，因此旋转体的体积为

$$V=\pi\int_0^{\frac{1}{\sqrt{1+a}}}\left(\frac{a^2x^2}{1+a}-a^2x^4\right)\mathrm{d}x=\frac{2\pi}{15}\cdot\frac{a^2}{(1+a)^{\frac{5}{2}}}.$$

因此有
$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}a}=\frac{2\pi}{15}\cdot\frac{2a(1+a)^{\frac{5}{2}}-a^2\cdot\frac{5}{2}(1+a)^{\frac{3}{2}}}{(1+a)^5}=\frac{\pi(4a-a^2)}{15(1+a)^{\frac{7}{2}}},$$

令$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}a}=0$ 得唯一驻点为 $a=4$，由于当 $0<a<4$ 时$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}a}>0$，当 $a>4$ 时$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}a}<0$，故 $a=4$为极大值点，也为最大值点. 即所求值为 $a=4$.

例 15　求曲线$\begin{cases}x=a\cos^3 t,\\ y=a\sin^3 t\end{cases}(a>0)$所围成的图形的面积.

解　此参数方程所表示的曲线为星形线，它关于 x 轴及 y 轴均对称，所以星形线所围图形面积等于此图形位于第一象限部分的面积的 4 倍，于是

$$\begin{aligned}A&=4\int_0^a y\mathrm{d}x\xlongequal{x=a\cos^3 t}4\int_{\frac{\pi}{2}}^0 a\sin^3 t(-3a\cos^2 t\sin t)\mathrm{d}t\\&=12a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^4 t-\sin^6 t)\mathrm{d}t=\frac{3}{8}\pi a^2.\end{aligned}$$

注　在利用定积分计算平面图形面积的时候，一条重要的原则是充分利用图形的对称性，这不仅能简化运算，还常能避免错误. 因此，熟悉一些常见曲线的方程与图形，如星形线、摆线、心形线、叶形线等等是很有用的.

例 16　用微元法证明：由平面图形 $0\leqslant a\leqslant x\leqslant b, 0\leqslant y\leqslant f(x)$ 绕 y 轴旋转所得的旋转体的体积为 $V=2\pi\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x$.

证　如图 3-3，在 $[a,b]$ 上任取一个小区间 $[x,x+\mathrm{d}x]$，以此小区间为底边的窄曲边梯形绕 y 轴旋转所得的圆筒形薄层的体积近似地等于长为 $2\pi x$，宽为 $f(x)$，厚为 $\mathrm{d}x$ 的矩形薄片的体积，由此得到体积元 $\mathrm{d}V=2\pi xf(x)\mathrm{d}x$，以 $2\pi xf(x)\mathrm{d}x$ 为被积表达式，在区间 $[a,b]$ 上积分，即得

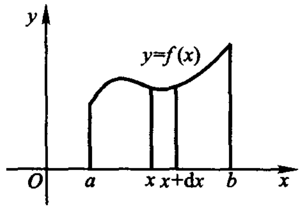


图 3-3

$$V=2\pi\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x.$$

上述方法称为“柱面切片法”，它与“平面切片法”一样，是微元法在不同情形下的具体运用. 运用这一方法可以推得，题中曲边梯形绕直线 $x=b$ 旋转所得的旋转体的体积为 $2\pi\int_a^b(b-x)f(x)\mathrm{d}x$.

例 17　为清除井底污泥，用缆绳将抓斗放入井底，抓起污泥后提出井口(如图 3-4). 已知井深 30 m，抓斗自重 400 N，缆绳每米重 50 N，抓斗抓起污泥重 2 000 N，提升速度为 3 m/s，在提升过程中，污泥以 20 N/s 的速率从抓斗缝隙中漏掉. 现将抓起污泥的抓斗提至井口，问克服重力需做多少焦耳的功?

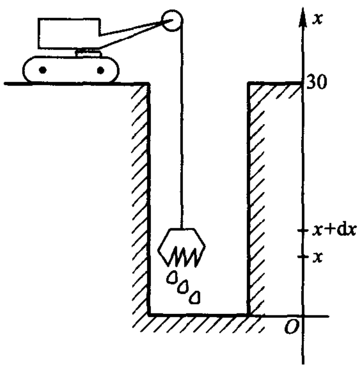


图 3-4

解　作 x 轴如图 3-4 所示，将装了污泥的抓斗提至井口需做功 $W=W_1+W_2+W_3$，其中 W_1 是克服抓斗自重所做的功，由题设 $W_1=400\times30=12\ 000$；W_2 是克服缆绳重力所做的功，由于将缆绳从 x 提升至 $x+\mathrm{d}x$ 时所做功为 $\mathrm{d}W_2=50(30-x)\mathrm{d}x$. 故

$$W_2=\int_0^{30}50(30-x)\mathrm{d}x=22\ 500.$$

W_3 是将污泥从井底提至井口所做的功，由于在时间间隔 $[t,t+\mathrm{d}t]$ 内提升污泥所做功为 $\mathrm{d}W_3=3(2\ 000-20t)\mathrm{d}t$，故 $W_3=\int_0^{10}3(2\ 000-20t)\mathrm{d}t=57\ 000$.

因此，共需做功 $W=12\ 000+22\ 500+57\ 000=91\ 500(\mathrm{J})$.

例 18　设星形线 $x=a\cos^3 t, y=a\sin^3 t$ 上每一点处的线密度等于该点到坐标原点的距离的立方，求星形线位于第一象限的弧段对位于坐标原点处的单位

质点的引力($a>0$).

解　在已给方程下,星形线位于第一象限的弧段对应于 $0\leqslant t\leqslant\frac{\pi}{2}$. 在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$上任取一个小区间$[t,t+\mathrm{d}t]$,对应于此小区间的小弧度的长度近似地为

$$\sqrt{\dot{x}^2(t)+\dot{y}^2(t)}=3a\cos t\sin t\mathrm{d}t,$$

故此小弧段的质量近似地为　$[x^2(t)+y^2(t)]^{\frac{3}{2}}\cdot 3a\cos t\sin t\mathrm{d}t.$

由此得到小弧段对位于坐标原点处的单位质点的引力在 x 轴方向的分量元素为

$$\mathrm{d}F_x=k\cdot\frac{[x^2(t)+y^2(t)]^{\frac{3}{2}}\cdot 3a\cos t\sin t\mathrm{d}t}{x^2(t)+y^2(t)}\cdot\frac{x(t)}{\sqrt{x^2(t)+y^2(t)}}$$

即

$$\mathrm{d}F_x=k\cdot 3a^2\cos^4 t\sin t\mathrm{d}t.$$

其中 k 为引力常数. 于是引力在 x 轴方向的分量为

$$F_x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}k\cdot 3a^2\sin t\cos^4 t\mathrm{d}t=\frac{3}{5}ka^2.$$

由于星形线及密度分布关于直线 $y=x$ 对称,故 $F_y=F_x$.

例 19　边长为 a 和 b 的矩形薄板与液面成 α 角斜沉于液体内,长边平行于液面而位于深 h 处,设 $a>b$,液体的密度为 γ,试求薄板每面所受的压力.

解　设坐标原点位于液面上,x 轴正向垂直向下,则矩形薄板位于区间$[h,h+b\sin\alpha]$上,在$[h,h+b\sin\alpha]$上任取一小区间$[x,x+\mathrm{d}x]$,对应此小区间的窄条矩形的面积为 $a\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\sin\alpha}$,所受的水压力近似地为 $\gamma gxa\frac{\mathrm{d}x}{\sin\alpha}$(其中 g 为重力加速度),故整个矩形薄板所受的水压力 F 为

$$F=\int_h^{h+b\sin\alpha}\gamma gx\frac{a}{\sin\alpha}\mathrm{d}x=\gamma g\left(\frac{1}{2}ab^2\sin\alpha+abh\right).$$

3. 讨论题

1) 考察不定积分 $I=\int\frac{\mathrm{d}x}{x+\sqrt{1+x^4}}(x>0)$. 用换元积分法,令 $x=\frac{1}{t}$,则 $\mathrm{d}x=-\frac{1}{t^2}\mathrm{d}t$,于是

$$I=\int\frac{\mathrm{d}x}{x+\sqrt{1+x^4}}=-\int\frac{\mathrm{d}t}{t+\sqrt{1+t^4}}=-I.$$ 从而得 $I=0$.

以上推导过程有什么错误.

2) 找出下列推理过程中的错误:

对于 $\int\frac{\cos x}{\sin x}\mathrm{d}x$ 进行分部积分:令 $\frac{1}{\sin x}=u,\cos x\mathrm{d}x=\mathrm{d}v$. 则 $\mathrm{d}u=-\frac{\cos x}{\sin^2 x}\mathrm{d}x$,$v=\sin x$. 于是$\int\frac{\cos x}{\sin x}\mathrm{d}x=\frac{1}{\sin x}\sin x+\int\sin x\cdot\frac{\cos x}{\sin^2 x}\mathrm{d}x$,从而$\int\frac{\cos x}{\sin x}\mathrm{d}x=1+$

$\int \frac{\cos x}{\sin x}\mathrm{d}x = 2+\int \frac{\cos x}{\sin x}\mathrm{d}x = \cdots = n+\int \frac{\cos x}{\sin x}\mathrm{d}x$，由此得到 $0=1=2=\cdots=n$，矛盾.

3）当用变换 $u=\tan x$ 计算定积分 $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi} \frac{\mathrm{d}x}{1+\cos^2 x}$ 时，有如下的计算结果：

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi} \frac{\mathrm{d}x}{1+\cos^2 x} \xlongequal{u=\tan x} \int_1^{-1} \frac{\mathrm{d}u}{u^2+2} = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan \frac{u}{\sqrt{2}}\right]\Bigg|_{+1}^{-1} = -\sqrt{2}\arctan \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

但这里的被积函数 $\frac{1}{1+\cos^2 x}$ 在 $\left[\frac{\pi}{4},\frac{3}{4}\pi\right]$ 上恒大于零，故积分结果必为正，因此这个结果肯定错误，究竟错在何处？

4）在计算三叶玫瑰线 $\rho=\sin 3\theta$ 所围图形的面积时，有人认为函数 $\rho=\sin 3\theta$ 的周期为 $\frac{2}{3}\pi$，所以面积为 $A=\int_0^{\frac{2}{3}\pi} \frac{1}{2}\sin^2 3\theta \mathrm{d}\theta$ 对吗？

5）为什么在计算引力时，一定要将积分表达式建立在引力的各分量上？

4. 练习题

1）求下列不定积分：

1° $\int \frac{x\mathrm{e}^x}{\sqrt{1+\mathrm{e}^x}}\mathrm{d}x$；　2° $\int \frac{\arctan x}{x^2(1+x^2)}\mathrm{d}x$；

3° $\int \frac{\ln^2 x}{x^4}\mathrm{d}x$；　4° $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{e}^{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$；

5° $\int \frac{x^2\mathrm{e}^x}{(x+2)^2}\mathrm{d}x$；　6° $\int \frac{1+x}{x(1+x\mathrm{e}^x)}\mathrm{d}x$；

7° $\int \frac{1}{1+\sin x}\mathrm{d}x$；　8° $\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x}$；

9° $\int \mathrm{e}^{-2x}\arctan \mathrm{e}^x\mathrm{d}x$；　10° $\int \frac{\ln x}{(1-x)^2}\mathrm{d}x$.

2）固定自然数 m，求积分 $I_n=\int x^m \ln^n x\mathrm{d}x$ 的递推公式，并求 $\int x^5\ln^2 x\mathrm{d}x$.

3）用定积分换元法证明 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+x^2}\mathrm{d}x \leqslant \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1+x^2}\mathrm{d}x$.

4）设 $f(x)=\int_1^x \frac{\ln t}{1+t}\mathrm{d}t\,(x>0)$，求 $f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)$.

5）设 $f(x)$ 有一个原函数 $\frac{\sin x}{x}$，计算 $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} xf'(x)\mathrm{d}x$.

6）设 $f(x)=\int_0^x \frac{\sin t}{\pi-t}\mathrm{d}t$，计算 $\int_0^{\pi} f(x)\mathrm{d}x$.

7）设 $f(x)$ 连续，求 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^x tf(x^2-t^2)\mathrm{d}t$.

8) 设 $f\in C^{1}[a,b]$，$f(a)=0$，求证 $\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x\leqslant\frac{(b-a)^2}{2}\max\limits_{x\in[a,b]}|f'(x)|$.

9) 设 $f'(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，求证 $\max\limits_{x\in[a,b]}|f(x)|\leqslant\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right|+\int_a^b |f'(x)|\,\mathrm{d}x$.

10) 设 $f(x)$ 在 $[0,a]$ 非负，$f(0)=0$，$f''(x)>0$，求证：

$$\int_0^a f(x)\mathrm{d}x>\frac{2}{3}a\int_0^a f(x)\mathrm{d}x.$$

11) 曲线 $r^2=4\cos 2\theta$ 与 x 轴在第一象限内所围图形记作 D，试在曲线 $r^2=4\cos 2\theta$ 上求一点 M，使直线 OM 把 D 分成面积相等的两部分.

12) 曲线 $y=\frac{\sqrt{x}}{1+x^2}$ 绕 x 轴旋转得一旋转体，若把它在 $x=0$ 与 $x=\xi$ 之间部分的体积记为 $V(\xi)$，试问 a 为何值时，$V(a)=\frac{1}{2}\lim\limits_{\xi\to+\infty}V(\xi)$.

13) 设某潜水艇的观察窗的形状为长，短半轴依次为 a，b 的半椭圆，短轴为其上沿，上沿与水面平行，且位于水下 c 处，试求观察窗所受的水压力.

14) 两细棒的线密度均为常数 ρ，其长度分别为 a 和 b，两棒放在一直线上，两棒距离为 c，求它们之间的引力.

15) 设半径为 1 的球正好有一半浸入水中，球的密度为 1，求将球从水中取出需作多少功？

第三讲　几类简单的微分方程及其应用、反常积分

1. 教学要求与学习注意点

1) 了解微分方程的基本概念：阶、解、通解、特解和初值条件等.

2) 能熟练识别变量可分离的方程，齐次微分方程，一阶线性微分方程，伯努利方程，并掌握它们的解法. 从中领会用变量代换的方法解微分方程. 变量代换是解微分方程的一个常用手段，它的作用如不定积分中第一类换元法，能够把一个较为复杂的微分方程化为一个较为简单的微分方程，在使用变量代换时，一定要搞清楚代换后的方程中的变量是什么，而且最终方程中有且只有两个变量.

3) 会用微元法建立微分方程，初步了解用微分方程解决实际问题的三个主要步骤：①建立微分方程；②确定定解条件；③求解微分方程.

4) 会用降阶法解如下类型的二阶微分方程：

$y''=f(x)$；$y''=f(x,y')$；$y''=f(y,y')$. 在求形如 $y''=f(y,y')$ 的方程时，令 $y'=p$ 后要注意 $y''=p\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$，否则变形后的方程中含有 x,y,p 三个变量，不能进一步求解.

5）理解两类反常积分的概念，能按定义讨论某些反常积分的收敛性及计算它们的值.

6）学习时要注意正确理解概念，如有的同学学习了无界函数的反常积分后，就认为无界函数也可以存在定积分，这就混淆了定积分和反常积分这两个不同的数学概念了. 另外，按定义直接判断反常积分的收敛性只适用于被积函数的原函数易于求得的简单情况.

2. 典型例题

例 1　求下列微分方程的通解：

（1）$y'=2x(y+1)$；　（2）$y'=1+x+y^2+xy^2$；

（3）$y'=\dfrac{1}{(x-y)^2}$；　（4）$y'=\dfrac{y}{2x}+\dfrac{1}{2y}\tan\dfrac{y^2}{x}$.

解　首先识别这些微分方程属于哪个类型，再确定其解法.

（1）分离变量后，得 $\dfrac{\mathrm{d}y}{y+1}=2x\mathrm{d}x$，两边积分得

$$\ln|y+1|=x^2+C_1,\quad y=Ce^{x^2}-1.$$

（2）将方程右边分解因式，然后分离变量得

$\dfrac{\mathrm{d}y}{1+y^2}=(1+x)\mathrm{d}x$. 积分得 $\arctan y=x+\dfrac{x^2}{2}+C$.

即
$$y=\tan\left(\frac{1}{2}x^2+x+C\right).$$

（3）不能直接分离变量，令 $x-y=u$，则 $y=-u+x$，$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=1-\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$ 代入原方程得 $1-\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\dfrac{1}{u^2}$，分离变量得 $\dfrac{u^2}{u^2-1}\mathrm{d}u=\mathrm{d}x$. 积分得 $u+\dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{u-1}{u+1}\right|=x+C_1$，将 $u=x-y$ 代回，即得通解 $\dfrac{x-y-1}{x-y+1}=Ce^{2y}$.

（4）方程变形为
$$2yy'=\frac{y^2}{x}+\tan\frac{y^2}{x}.$$

方程右边是以 $\dfrac{y^2}{x}$ 为中间变量的函数，令 $\dfrac{y^2}{x}=u$，$y^2=u\cdot x$

求导得 $2yy'=xu'+u$，代入方程得 $xu'+u=u+\tan u$.

分离变量得 $\dfrac{\mathrm{d}u}{\tan u}=\dfrac{\mathrm{d}x}{x}$，积分得 $\ln|\sin u|=\ln|x|+C_1$，以 $u=\dfrac{y^2}{x}$ 代回，得原方程

通解为 $\sin\dfrac{y^2}{x}=Cx$.

例 2　求下列微分方程的通解：

(1) $y'+\dfrac{xy}{1+x^2}=\dfrac{1}{2x(1+x^2)}$；　(2) $\cos y\mathrm{d}x+(x-2\cos y)\sin y\mathrm{d}y=0$；

(3) $(\tan x)\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-y=5$；　(4) $y'=\dfrac{y^2+x^2}{2xy}$.

解　(1) 这是一个一阶线性微分方程，用通解公式得 $P(x)=\dfrac{x}{1+x^2}$，$Q(x)=\dfrac{1}{2x(1+x^2)}$，方程的通解为 $y=\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\left[\int \mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}Q(x)\mathrm{d}x+C\right]$，$y=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}\left[\int\sqrt{1+x^2}\cdot\dfrac{1}{2x(1+x^2)}\mathrm{d}x+C\right]=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}\left[\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{|x|}{1+\sqrt{1+x^2}}+C\right]$.

(2) 将方程改写为 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}+x\tan y=2\sin y$.

这里 $P(y)=\tan y$. $\int P(y)\mathrm{d}y=\int\tan y\mathrm{d}y=-\ln|\cos y|$，$\mathrm{e}^{\int P\mathrm{d}y}=|\sec y|=\pm\sec y$，

$$x=(\pm\cos y)\left[\pm\int 2\tan y\mathrm{d}y+C\right]=(\cos y)(-2\ln|\cos y|+C),$$

即所求通解为 $x=(-2\cos y)\ln|\cos y|+C\cos y$.

注　在解微分方程时也可以视 x 为 y 的函数 $x=x(y)$，特别是判断方程是否为一阶线性微分方程时，常要考虑这种情况.

(3) 方程的解法较多，最简单的解法是直接分离变量求得通解. 分离变量得

$$\frac{\mathrm{d}y}{y+5}=\frac{\cos x}{\sin x}\mathrm{d}x,$$

积分得 $\ln|y+5|=\ln|\sin x|+C_1$，即 $y=C\sin x-5$.

(4) 将 $y'=\dfrac{y^2+x^2}{2xy}$ 改写成 $y'-\dfrac{y}{2x}=\dfrac{x^2}{2}y^{-1}$.

这是伯努利方程($n=-1$)，以 $2y$ 乘以方程两端得

$2yy'-\dfrac{1}{x}y^2=x^2$，即 $(y^2)'-\dfrac{1}{x}y^2=x^2$，

$$y^2=\mathrm{e}^{\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x}\left[\int\mathrm{e}^{-\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x}\cdot x^2\mathrm{d}x+C\right]=x\left(\frac{x^2}{2}+C\right).$$

例 3　设 $y(x)$ 是一个连续函数，且满足

$$y(x)=\cos 2x+\int_0^x y(t)\sin t\mathrm{d}t，求\ y(x).$$

解　这是一个积分式中含有未知函数的方程，称为积分方程，通常先把它化

为微分方程初值问题. 为此，在等式两端对自变量 x 求导，由于 $y(x)$ 连续，故等式右端可导，从而 $y(x)$ 可导，因此有

$$y'(x)=-2\sin 2x+y(x)\sin x$$

再确定初值条件 $y(0)=1$，

$$\begin{aligned}y(x)&=e^{\int\sin x\mathrm{d}x}\left[\int e^{-\int\sin x\mathrm{d}x}\cdot(-2\sin 2x)\mathrm{d}x+C\right]\\&=e^{-\cos x}\left[-\int 4e^{\cos x}\sin x\cos x\mathrm{d}x+C\right]\\&=e^{-\cos x}\left[4\int e^{\cos x}\cos x\mathrm{d}\cos x+C\right]\\&=e^{-\cos x}\left[4\cos xe^{\cos x}-4\int e^{\cos x}\mathrm{d}\cos x+C\right]\\&=4\cos x-4+Ce^{-\cos x},\quad y(0)=1,C=e.\end{aligned}$$

所以

$$y(x)=e^{1-\cos x}+4(\cos x-1).$$

例 4　已知微分方程 $y'+y=f(x)$. 其中 $f(x)=\begin{cases}x, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\1, & 1<x<+\infty.\end{cases}$ 试求函数 $y=y(x)$，它在 $[0,1]\cup(1,+\infty)$ 上满足方程，且满足初值条件 $y(0)=0$，又在 $x=1$ 处连续.

解　右端自由项 $f(x)$ 为分段函数，求解时，可在 $[0,1)$ 与 $(1,+\infty)$ 内分别求出方程的通解，然后令求出的解满足题设的两个条件：① $y(0)=0$；② $y(x)$ 在 $x=1$ 处连续.

当 $x\in[0,1]$ 时，$y'+y=x$. 通解为 $y=C_1e^{-x}+x-1$.

当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$y'+y=2$. 通解为 $y=C_2e^{-x}+2$.

由 $y(0)=0$，得 $C_1=1$ 因 $y(x)$ 在 $x=1$ 处连续，有

$$\lim_{x\to1^-}y(x)=\lim_{x\to1^+}y(x)，即\lim_{x\to1^-}(e^{-x}+x-1)=\lim_{x\to1^+}(C_2e^{-x}+2),$$

得 $e^{-1}=C_2e^{-1}+2$，$C_2=1-2e$.

故

$$y(x)=\begin{cases}e^{-x}+x-1, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\(1-2e)e^{-x}+2, & 1<x<+\infty.\end{cases}$$

例 5　容器内有 100 L 的盐水，含 10 kg 的盐，现在以每分钟 3 L 的均匀速率往容器内注入净水(假定净水与盐水立即调和)，又以每分钟 2 L 的均匀速率从容器中抽出盐水，问 60 min 后容器内盐水中盐的含量是多少?

分析　设在时刻 t，盐的含量为 $s(t)$，据题意，注入容器的净水为 $3t$ L，抽出容器的盐水为 $2t$ L，因此这时溶液总量为 $100+(3-2)t=100+t$，其浓度为 $\frac{s}{100+t}$；在时间间隔 $[t,t+\mathrm{d}t]$ 内，抽出容器的盐水为 $2\mathrm{d}t$，即容器中盐的改变量是

$\Delta s \doteq \frac{s}{100+t}(-2\mathrm{d}t)=-\frac{2s}{100+t}\mathrm{d}t$，由此得微分方程 $\mathrm{d}s=-\frac{2s}{100+t}\mathrm{d}t$.

解　设在时刻 t，盐的含量为 $s(t)$，据题意，在时间间隔$[t,t+\mathrm{d}t]$内，含盐量的改变量是 $\Delta s \doteq -\frac{2s}{100+t}\mathrm{d}t$，于是得微分方程 $\mathrm{d}s=-\frac{2s}{100+t}\mathrm{d}t$，并有初值条件 $s(0)=10$. 分离变量得 $\frac{\mathrm{d}s}{s}=-\frac{2\mathrm{d}t}{100+t}$，积分得 $s\doteq\frac{10^5}{(100+t)^2}$，当 $t=60$ 时，$s\doteq 3.9\ \mathrm{kg}$.

例 6　设 $\rho=\rho(\varphi)$为非负函数，$\rho(0)=1$，且对任一 $\varphi(0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi)$，极坐标曲线 $\rho=\rho(\varphi)$在区间$[0,\varphi]$上所对应的一段弧长等于该区间所对应的曲边扇形面积的 2 倍，求此曲线的方程.

分析　区间$[0,\varphi]$上所对应的一段弧长为 $\int_0^{\varphi}\sqrt{\rho^2+\rho'^2}\mathrm{d}\varphi$；对应的曲边扇形面积为 $\int_0^{\varphi}\frac{1}{2}\rho^2\mathrm{d}\varphi$；故按题意有

$$\int_0^{\varphi}\sqrt{\rho^2+\rho'^2}\mathrm{d}\varphi=2\int_0^{\varphi}\frac{1}{2}\rho^2\mathrm{d}\varphi=\int_0^{\varphi}\rho^2\mathrm{d}\varphi,$$

由此可导出微分方程.

解　按题意，有　$$\int_0^{\varphi}\sqrt{\rho^2+\rho'^2}\mathrm{d}\varphi=\int_0^{\varphi}\rho^2\mathrm{d}\varphi,$$

两端关于 φ 求导得 $\sqrt{\rho^2+\rho'^2}=\rho^2$，即 $\rho'=\pm\rho\sqrt{\rho^2-1}\,(\rho\geqslant 1)$.

(1) 若 ρ 不恒为 1，则分离变量得 $\frac{\mathrm{d}\rho}{\rho\sqrt{\rho^2-1}}=\pm\mathrm{d}\varphi$，积分得

$$\arccos\frac{1}{\rho}=\pm(\varphi+C),$$

即 $\rho=\sec(\varphi+C)$，因 $\varphi=0$，$\rho=1$，得 $C=0$ 故 $\rho=\sec\varphi$.

(2) 若 $\rho\equiv 1$，经验证知，它也满足 $\int_0^{\varphi}\sqrt{\rho^2+\rho'^2}\mathrm{d}\varphi=\int_0^{\varphi}\rho^2\mathrm{d}\varphi$ 且 $\rho(0)=1$，综合(1)与(2)，得所求曲线的方程为 $\rho=\sec\varphi$，或 $\rho\equiv 1$，这两条曲线在 xOy 面上分别是直线 $x=1$ 与单位圆 $x^2+y^2=1$.

例 7　有一盛满水的圆锥形漏斗，高为 10 cm，顶角为 60°，漏斗下面有一个面积为 0.5 cm^2 的小孔，水从小孔流出，由水力学中的托里拆利定律知道，水从孔口流出的流量（即通过孔口横截面的水的体积 V 对时间 t 的变化率）Q 可用公式：$Q=\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=0.62S\sqrt{2gh}$计算，其中 0.62 为流量系数，$S$ 为孔口横截面面积，g 为重力加速度，求水面高度变化的规律以及容器中的水全部流完所需要的时间.

解　设在时间间隔$[t,t+\mathrm{d}t]$内，水面的高度由 h 降至 $h+\mathrm{d}h\,(\mathrm{d}h<0)$，于是

$\mathrm{d}V=-\pi r^2\mathrm{d}h$，其中 $r=h\tan 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{3}h$，故 $\mathrm{d}V=-\frac{\pi h^2}{3}\mathrm{d}h$. 另一方面，据所给公式 $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=0.62S\sqrt{2gh}$，即 $\mathrm{d}V=0.62S\sqrt{2gh}\mathrm{d}t$.

于是有
$$0.62S\sqrt{2gh}\,\mathrm{d}t=-\frac{\pi h^2}{3}\mathrm{d}h.$$

分离变量并由初值条件 $t=0,h=10$ 积分
$$\int_0^t \mathrm{d}t=-\frac{\pi}{3\times 0.62S\sqrt{2g}}\int_{10}^h h^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}h.\quad (S=0.5).$$

得 $t=\frac{40\pi}{93\sqrt{2g}}(10^{\frac{5}{2}}-h^{\frac{5}{2}})$，令 $h=0$，得 $t\doteq 9.65$(秒).

例 8 设曲线 L 位于 xOy 平面的第一象限，L 上任意一点 $M(x,y)$ 处的切线与 y 轴相交，交点为 A，已知 $|\overrightarrow{MA}|=|\overrightarrow{OA}|$，且 L 过点 $\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)$，求 L 的方程.

解 设 L 的方程 $y=y(x)$，则 L 在点 M 处的切线方程为 $Y-y=y'(X-x)$. 取 $X=0$. 得点 A 的坐标为 $(0,y-xy')$. 由 $|\overrightarrow{MA}|=|\overrightarrow{OA}|$，有 $|y-xy'|=\sqrt{(x-0)^2+(y-y+xy')^2}$ 化简后得 $2yy'-\frac{y^2}{x}=-x$. 即 $(y^2)'-\frac{1}{x}y^2=-x$,
$y^2=\mathrm{e}^{\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x}\left(-\int x\mathrm{e}^{-\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x}+C\right)=x(-x+C)$，即 $y^2=-x^2+Cx$.

由初始条件 $y\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{3}{2}$ 得 $C=3$. 并由于曲线 L 在第一象限，故 L 的方程为 $y=\sqrt{3x-x^2}\,(0<x<3)$.

例 9 在某一人群中推广新技术是通过其中已掌握新技术的人进行的. 设该人群的总人数为 N，在 $t=0$ 时刻已掌握新技术的人数为 x_0，在任意时刻 t 已掌握新技术的人数为 $x(t)$（将 $x(t)$ 视为连续可微变量），其变化率与已掌握新技术和未掌握新技术人数之积成正比，比数常数 $k>0$，求 $x(t)$.

解 根据条件可得如下的初值问题 $\begin{cases}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=kx(N-x),\\ x(0)=x_0,\end{cases}$ 方程经分离变量后成为 $\frac{\mathrm{d}x}{x(N-x)}=k\mathrm{d}t$，由初值条件 $x(0)=x_0$，积分得 $\ln\frac{x}{N-x}-\ln\frac{x_0}{N-x_0}=Nkt$，即
$x(t)=\frac{x_0N\mathrm{e}^{Nkt}}{N+x_0(\mathrm{e}^{Nkt}-1)}$.

例 10 设函数 $y(x)\,(x\geqslant 0)$ 二阶可导且 $y'(x)>0$，$y(0)=1$. 过曲线 $y=y(x)$ 上任意一点 $P(x,y)$ 作该曲线的切线及 x 轴的垂线，上述两条直线与 x 轴

所围成的三角形的面积记为 S_1，区间$[0,x]$上以 $y=y(x)$为曲边的曲边梯形的面积记为 S_2，且 $2S_1-S_2$ 恒为 1，求曲线 $y=y(x)$的方程.

解　曲线 $y=y(x)$在点 $P(x,y)$处的切线方程为

$Y-y=y'(X-x)$，它与 x 轴的交点为$\left(x-\dfrac{y}{y'},0\right)$. 由于 $y(0)=1,y'(x)>0$，从而 $y(x)>y(0)=1>0(x>0)$，于是得

$$S_1=\frac{1}{2}|y|\left|x-\left(x-\frac{y}{y'}\right)\right|=\frac{y^2}{2y'}，又\ S_2=\int_0^x y(t)\,\mathrm{d}t.$$

由条件 $2S_1-S_2=1$ 得 $\dfrac{y^2}{y'}-\displaystyle\int_0^x y(t)\,\mathrm{d}t=1$，由此可知 $y'(0)=1$. 上式两端关于 x 求导并化简得 $yy''=y'^2$.

令 $p=y',y''=p\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$，则上述方程变为 $yp\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}=p^2$，因 $y'>0$，即 $p>0$，故 $y\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}=p$. 即$\dfrac{\mathrm{d}p}{p}=\dfrac{\mathrm{d}y}{y}$. 积分得 $p=C_1y$ 代入初值条件 $y(0)=1,y'(0)=1$ 可得 $C_1=1$，即$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=y$，于是 $y=C_2\mathrm{e}^x$ 代入 $y(0)=1$，可得 $C_2=1$，故曲线方程为 $y=\mathrm{e}^x$.

例 11　设子弹以 200 m/s 的速度射入厚 0.1 m 的木板，受到的阻力大小与子弹的速度的平方成正比，如果子弹穿出木板时的速度为 80 m/s，求子弹穿过木板的时间.

解　设子弹在木板中位移 s 与时间的关系为 $s=s(t)$，$s(0)=0$，$s'(0)=200$. 根据条件，可得初值问题

$$ms''=-ks'^2,\quad s'(0)=200,\quad s(0)=0.$$

记$\dfrac{k}{m}=\mu$，并令 $s'=p$，得 $p'=-\mu p^2$ 以及初值条件 $p(0)=200$，作积分 $-\displaystyle\int_{200}^{p}\frac{\mathrm{d}p}{p^2}=\int_0^t\mu\,\mathrm{d}t$ 得$\dfrac{1}{p}-\dfrac{1}{200}=\mu t$.

即 $s'=p=\dfrac{200}{200\mu t+1}$①. 又由初值条件 $t=0,s=0$ 得

$$s=\int_0^t\frac{200}{200\mu t+1}\mathrm{d}t=\frac{1}{\mu}\ln(200\mu t+1).\ ②$$

由①与②消去 t 得 $s=\dfrac{1}{\mu}\ln\dfrac{200}{s'}$. 因为木板的厚度为 0.1，子弹穿出木板时的速度为 80，在上式中代入 $s'=80,s=0.1$ 定出

$\mu=10(\ln 5-\ln 2)$. 于是在①式中代入 $\mu=10(\ln 5-\ln 2)$，$s'=80$

得
$$t=\frac{1}{10(\ln 5-\ln 2)}\left(\frac{1}{80}-\frac{1}{200}\right)=\frac{3}{4\,000(\ln 5-\ln 2)},$$

即子弹穿出木板的时间约为 0.000 818 5(秒).

例 12 已知函数 $f(x)$在$[0,+\infty)$上可导,$f(0)=1$,且满足等式 $f'(x)+f(x)-\dfrac{1}{x+1}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=0$.

求 $f'(x)$的表达式,并证明不等式 $\mathrm{e}^{-x}\leqslant f(x)\leqslant 1\quad(x\geqslant 0)$.

解 将题中等式变形得$(x+1)[f'(x)+f(x)]-\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=0$. 由于函数 $f(x)$在$[0,+\infty)$上可导,根据上式可知 $f(x)$在$[0,+\infty)$上二阶可导,在上式两端求导得

$$f''(x)+\left(1+\frac{1}{x+1}\right)f'(x)=0.$$

这是 $f'(x)$满足一个一阶线性齐次方程,其通解为 $f'(x)=\dfrac{C\mathrm{e}^{-x}}{x+1}$. 由于 $f'(0)=-f(0)=-1$,所以 $C=-1$,故 $f'(x)=-\dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{x+1}$.

当 $x\geqslant 0$ 时,因为 $f'(x)=-\dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{x+1}<0$,所以函数 $f(x)$单减,故 $f(x)\leqslant f(0)=1$.

当 $x\geqslant 0$ 时,由于

$$[f(x)-\mathrm{e}^{-x}]'=-\frac{\mathrm{e}^{-x}}{x+1}+\mathrm{e}^{-x}=\frac{x\mathrm{e}^{-x}}{x+1}\geqslant 0.$$

所以函数 $f(x)-\mathrm{e}^{-x}$单调增大,故 $f(x)-\mathrm{e}^{-x}\geqslant f(0)-\mathrm{e}^0=0$.

因此,不等式 $\mathrm{e}^{-x}\leqslant f(x)\leqslant 1$ 在 $x\geqslant 0$ 成立.

例 13 计算反常积分 $\int_0^1 \ln(1-x^2)\mathrm{d}x$.

解
$$\int_0^1 \ln(1-x^2)\mathrm{d}x=\int_0^1[\ln(1-x)+\ln(1+x)]\mathrm{d}x,$$

又
$$\int_0^1 \ln(1-x)\mathrm{d}x\xlongequal{1-x=t}\int_1^0 -\ln t\mathrm{d}t=\int_0^1 \ln t\mathrm{d}t,$$
$$\int_0^1 \ln(1+x)\mathrm{d}x\xlongequal{1+x=t}\int_1^2 \ln t\mathrm{d}t,$$

故 $\int_0^1 \ln(1-x^2)\mathrm{d}x=\int_0^1 \ln t\mathrm{d}t+\int_1^2 \ln t\mathrm{d}t=\int_0^2 \ln t\mathrm{d}t=(t\ln t-t)\Big|_0^2=2\ln 2-2$.

例 14 试求正数 a,使得 $\int_0^a \dfrac{x}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}\int_0^{+\infty}\dfrac{x}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x$. 它的几何意义是什么?

解
$$\int_0^a \frac{x}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x\xlongequal{x^2=t}\frac{1}{2}\int_0^{a^2}\frac{\mathrm{d}t}{(1+t)^2}=-\frac{1}{2(1+t)}\Bigg|_0^{a^2}=\frac{a^2}{2(1+a^2)},$$
$$\int_0^{+\infty}\frac{x}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x=\lim_{a\to+\infty}\int_0^a \frac{x}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x=\lim_{a\to+\infty}\frac{a^2}{2(1+a^2)}=\frac{1}{2}.$$

解　$\frac{a^2}{2(1+a^2)}=\frac{1}{4}$得 $a=1(a=-1$ 舍去). 它的几何意义是:由曲线 $y=\frac{x}{(1+x^2)^2}$,直线 $x=0,x=1$ 及 $y=0$ 所围成的平面图形面积与由曲线 $y=\frac{x}{(1+x^2)^2}$,直线 $x=1$ 及 $y=0$ 所界的平面无界区域图形的面积相等.

3. 讨论题

1) 微分方程的通解是否一定能够包含方程的所有解? 是否所有的微分方程都有通解?

2) 如何应用微分方程求解实际问题?

3) 在分离变量解微分方程的过程中,需要将方程作变形,会不会像解代数方程时产生"丢解"和"增解"现象?

4) 怎样认识微分方程中的未知函数及其自变量?

5) 已知微分方程的解,如何求微分方程?

6) 有些时候,微分方程通解中的任意常数受到限制,这是为什么? 怎样正确地把握任意常数的取值限制?

7) 在计算反常积分 $\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx$ 时,有人使用换元法得到 $\int_0^1 \frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^2}} \xlongequal{x=\sin t} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t dt=\frac{\pi}{4}$,这样的做法对吗? 为什么?

8) 下述算式是否正确?

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi} \frac{\cos x}{1+\sin x}dx=\ln(1+\sin x)\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi}=-\ln 2 .$$

9) 在计算反常积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{1+x^2}dx$ 时,有人认为:因为被积函数为奇函数,由奇函数在关于原点对称的区间上的积分为零,因此该反常积分为零,这种说法对吗?

4. 练习题

1) 若连续函数 $f(x)$满足关系式 $f(x)=\int_0^{3x} f\left(\frac{t}{3}\right)dt+1$,求 $f(x)$的表达式.

2) 求微分方程 $x\sqrt{1+y^2}dx+y\sqrt{1+x^2}dy=0$ 的通解.

3) 求微分方程 $y'+\frac{y}{(1+x^2)\arctan x}=1$ 的经过点 $\left(1,-\frac{2\ln 2}{\pi}\right)$的积分曲线.

4) 求微分方程 $ydx+(xy+x-e^y)dy=0$ 的通解.

5) 求微分方程 $xdy-ydx=y^2e^ydy$ 的通解.

6）求解定解问题$\begin{cases} y''+2x(y')^2=0, \\ y(0)=1, \quad y'(0)=0. \end{cases}$

7）设 $p(x)$在$[0,+\infty)$上连续非负，证明微分方程 $y'+p(x)y=0$ 的任意非零解满足 $\lim\limits_{x\to+\infty} y(x)=0$ 的充分必要条件是反常积分$\int_0^{+\infty} p(x)\mathrm{d}x$ 发散.

8）设一充满气体的气球突然扎了一个小孔，漏气的速率正比于气球内气体的质量，比例系数为 k，设球内原有气体 90 g，如果球破后 1 min 时球内还有气体 18 g，问球破后，经过多少时间，球内只剩下 1 g 气体？

9）设质量为 m 的船，以常速度 v_0 沿直线在静水中行驶，已知水的阻力与速度的立方成正比，且当 $v=v_0$ 时，阻力 $R=f_0$，如果在 $t=0$ 时关闭动力，求动力关闭后的速度 v 与经过的路程 x 的函数关系.

10）设曲线 L 过点$(1,0)$，点 $M(x,y)$为 L 上任意一点，L 在 M 处的切线为 MT，原点与 M 的连线为 OM，已知从直线 OM 到直线 MT 的转角为$\frac{\pi}{4}$，求曲线 L 的方程.

11）下列反常积分是否收敛？如果收敛求出它的值：

1° $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-ax}\cos bx\,\mathrm{d}x \quad (a>0,b>0)$； 2° $\int_0^2 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x(2-x)}}$；

3° $\int_0^1 \sqrt{\frac{x}{1-x}}\mathrm{d}x$.

第四章 无 穷 级 数

第一讲 常数项级数

1. 教学要求与学习注意点

1) 理解级数收敛，发散以及收敛级数的和的概念，掌握级数的基本性质及级数收敛的必要条件，掌握几何级数，调和级数及其收敛性结论，要切实弄懂并掌握级数的概念. 级数概念的本质是数列的极限问题，这与有限多项相加是完全不一样的，因此不能把加法的运算性质无条件地搬用到级数的运算中来.

2) 由于无穷级数的中心是收敛性理论，而一般的数项级数的收敛性问题可以转化为正项级数的收敛性问题来讨论，因此正项级数的内容属于级数理论的基础，要认真掌握.

3) 介绍的比较审敛法，比值审敛法、根值审敛法和积分审敛法，均只适用于正项级数. 又，这些审敛法所给出的都是正项级数收敛或发散的充分而非必要的条件，若不满足收敛性或发散性的条件，则需要找其他更为精细的审敛法则，或直接根据定义来审敛.

4) 如何根据所给级数的一般项的特点，来选择恰当的审敛法则；在使用比较审敛法时（主要用极限形式），如何选择用于比较的基本级数（主要用 p-级数），都具有较大的灵活性，因此要多做一些练习并注意总结规律.

5) 掌握交错级数的 Leibniz 审敛法，会估计收敛的交错级数的误差，掌握绝对收敛与条件收敛的概念以及绝对收敛与收敛的联系与区别. 了解绝对收敛级数具备条件收敛级数所没有的一些性质，绝对收敛级数在级数理论中有着重要的作用，不可忽视.

2. 典型例题

例 1 判别下列级数的收敛性，并求其中收敛级数的和：

(1) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt[n]{\ln n}}$； (2) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \ln \dfrac{n^2-1}{n^2}$.

解 (1) 令 $a_{n+1}=1/\sqrt[n+1]{\ln(n+1)}=e^{-\ln[\ln(n+1)]/n+1}$

因为 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(\ln x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x\ln x}=0$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln[\ln(n+1)]}{n+1}=0$.

因而 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=e^0=1\neq 0$，所以级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt[n]{\ln n}}$ 发散.

(2) 由于 $a_n=\ln\dfrac{n^2-1}{n^2}=\ln\left(\dfrac{n-1}{n}\cdot\dfrac{n+1}{n}\right)=\ln\dfrac{n-1}{n}-\ln\dfrac{n}{n+1}$.

故
$$S_n=\left(\ln\frac{1}{2}-\ln\frac{2}{3}\right)+\left(\ln\frac{2}{3}-\ln\frac{3}{4}\right)+\cdots+\left(\ln\frac{n-1}{n}-\ln\frac{n}{n+1}\right)$$
$$=\ln\frac{1}{2}-\ln\frac{n}{n+1}.$$

于是 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\ln\dfrac{1}{2}$. 所以级数收敛于 $\ln\left(\dfrac{1}{2}\right)$.

例 2 判定下列级数的收敛性：

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^2+2^n}{n^2 2^n}$； (2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt[3]{n+1}}\ln\dfrac{n+2}{n}$；

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^{n-1}}{(2n^2+\ln n+1)^{\frac{n+1}{2}}}$； (4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})^5\ln\dfrac{n-1}{n+1}$.

解 (1) $a_n=\dfrac{n^2+2^n}{n^2 2^n}=\dfrac{1}{2^n}+\dfrac{1}{n^2}$，因为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2^n}$ 收敛（$|q|=\dfrac{1}{2}<1$），$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ 收敛（p-级数，$p=2>1$），所以原级数收敛.

(2) 对级数的一般项先作分析：

当 $n\to\infty$ 时，$\ln\dfrac{n+2}{n}=\ln\left(1+\dfrac{2}{n}\right)\sim\dfrac{2}{n}$，$\dfrac{1}{\sqrt[3]{n+1}}\sim\dfrac{1}{\sqrt[3]{n}}$.

从而 $\dfrac{1}{\sqrt[3]{n+1}}\ln\dfrac{n+2}{n}$ 与 $\dfrac{1}{n^{\frac{4}{3}}}$ 同阶. 因此，利用极限审敛法有

$$\lim_{n\to\infty}n^{\frac{4}{3}}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{n+1}}\cdot\ln\left(\frac{n+2}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt[3]{n+1}}\cdot\frac{\ln\left(1+\frac{2}{n}\right)}{\frac{1}{n}}=2.$$

由 $p=\dfrac{4}{3}>1$ 知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{\frac{4}{3}}}$ 收敛，原级数收敛.

(3) 因为 $a_n=\dfrac{n^{n-1}}{n^{n+1}\left(2+\dfrac{\ln n}{n^2}+\dfrac{1}{n^2}\right)^{\frac{n+1}{2}}}=\dfrac{1}{n^2\left(2+\dfrac{\ln n}{n^2}+\dfrac{1}{n^2}\right)^{\frac{n+1}{2}}}\leqslant\dfrac{1}{n^2}$，

又 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ 收敛，所以原级数收敛.

(4) 由于一般项 $a_n=(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})^5\ln\dfrac{n-1}{n+1}$ 的形式较复杂，因此先设法简

化其一般项，而后再确定采用哪种审敛法.

当 $n\to\infty$ 时，$\ln\frac{n-1}{n+1}=\ln\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\sim\left(-\frac{2}{n+1}\right)\sim\left(-\frac{2}{n}\right)$,

$$\sqrt{n+1}-\sqrt{n}=\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\sim\frac{1}{2\sqrt{n}},$$

所以 $$a_n=(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})^5\ln\left(\frac{n-1}{n+1}\right)\sim\left(\frac{1}{2\sqrt{n}}\right)^5\left(-\frac{2}{n}\right)=\frac{-1}{2^4n^{\frac{7}{2}}}\quad(n\to\infty).$$

显然该级数是负项级数，由级数的基本性质知，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-a_n)$ 有相同的收敛性，而 $\lim\limits_{n\to\infty}n^{\frac{7}{2}}\cdot(-a_n)=\frac{1}{2^4}$，由极限审敛法知正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-a_n)$ 收敛.

故原级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})^5\ln\frac{n-1}{n+1}$ 收敛.

注 在判定级数收敛时，常用等价无穷小替代级数一般项中的一些因子，在题(2)、(4)中都用这种办法. 记住一些等价无穷小是十分有用的. 级数的一般项同为负或同为正均可用正项级数的审敛法判定级数的收敛性，因此正项级数的审敛法也可视为同号级数的审敛法.

例 3 讨论级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{\ln^q n}{n^p}(p,q>0)$ 的收敛性.

解 当 $p>1$ 时，取 $r\in(1,p)$，则级数 $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n^r}$ 收敛，并且，

$$n^r\cdot\frac{\ln^q n}{n^p}=\frac{\ln^q n}{n^{p-r}}\to0(n\to\infty),$$

所以由比较判别法极限形式知级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{\ln^q n}{n^p}$ 收敛.

当 $p\leqslant1$ 时，$\frac{\ln^q n}{n^p}\geqslant\frac{\ln^q n}{n}$. 由于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散，并且

$$n\cdot\frac{\ln^q n}{n}=\ln^q n\to+\infty\quad(n\to\infty),$$

所以由比较判别法的极限形式知级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{\ln^q n}{n^p}$ 发散.

注 与 $n^p(p>0)$ 相比较，$\ln^q n$ 是低阶无穷大量，所以在形如 $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n^p\ln^q n}$ 和 $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\frac{\ln^q n}{n^p}$ 的级数中，只要 $p>1$ 或 $p<1$. 由 $\frac{1}{n^p}$ 就可以完全确定其收敛或发散，$\ln^q n$ 不起作用. 仅在 $p=1$ 的临界情形，$\ln^q n$ 或 $\frac{1}{\ln^q n}$ 对于级数的收敛与发散才起作用.

例 4 讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{3^{\sqrt{n}}}$ 的收敛性，若收敛，是条件收敛还是绝对收敛？

解 利用比值判定准则：

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=3^{\sqrt{n}-\sqrt{n+1}}|x|=3^{-\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}}|x|\to|x|\quad(n\to\infty),$$

所以当 $|x|<1$ 时收敛，当 $|x|>1$ 时发散. 因为 $|x|>1$ 时，一般项不趋于零.

当 $x=1$ 时，级数变为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^{\sqrt{n}}}$，注意到 n 充分大时有 $\sqrt{n}>3\ln n$，所以 $3^{\sqrt{n}}>3^{\ln n}=n^{\ln 3}(\ln 3>1)$，从而由 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\ln 3}}$ 收敛推出 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^{\sqrt{n}}}$ 收敛.

当 $x=-1$ 时，级数变成 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^{\sqrt{n}}}$，这时级数绝对收敛.

当 $|x|>1$ 时，级数的一般项趋向无穷大，因而发散.

综上所述，当 $|x|\leqslant 1$ 时，级数绝对收敛.

当 $|x|>1$ 时，级数发散.

例 5 讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\sin(\pi\sqrt{a^2+n^2})(a\neq 0)$ 的收敛性.

解 考察级数的一般项

$$a_n=\sin(\pi\sqrt{a^2+n^2})=\sin\left[\pi(\sqrt{a^2+n^2}-n)+n\pi\right]=(-1)^n\sin\left[\pi(\sqrt{a^2+n^2}-n)\right],$$

所以 $a_n=(-1)^n\sin\frac{a^2\pi}{\sqrt{a^2+n^2}+n}$，这是一个 Leibniz 交错级数，收敛. 但是因为

$$|a_n|=\sin\frac{a^2\pi}{\sqrt{a^2+n^2}+n}\sim\frac{a^2\pi}{2n}(n\to\infty),$$

所以 $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 发散，因此原级数条件收敛.

例 6 讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left[1+\frac{(-1)^n}{n^p}\right](p>0)$ 的收敛性.

解 作泰勒展开 $\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+o(x^2)$.

于是当 $n\to\infty$ 时，

$$\ln\left[1+\frac{(-1)^n}{n^p}\right]=\frac{(-1)^n}{n^p}-\frac{1}{2n^{2p}}+o\left(\frac{1}{n^{2p}}\right),$$

因此
$$\sum_{n=2}^{\infty}\ln\left[1+\frac{(-1)^n}{n^p}\right]=\sum_{n=2}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n}{n^p}-\frac{1}{2n^{2p}}+o\left(\frac{1}{n^{2p}}\right)\right].$$

以下分三种情形讨论：

① 当 $p>1$ 时，$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^p}$，$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{2n^{2p}}$ 和 $\sum_{n=2}^{\infty}o\left(\frac{1}{n^{2p}}\right)$ 都是绝对收敛的，所以 $\sum_{n=2}^{\infty}\ln\left[1+\frac{(-1)^n}{n^p}\right]$ 绝对收敛.

② 当$\frac{1}{2}<p\leqslant 1$ 时，$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{2n^{2p}}$ 和 $\sum_{n=2}^{\infty}o\left(\frac{1}{n^{2p}}\right)$ 都绝对收敛，但是 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^p}$ 条件收敛，所以 $\sum_{n=2}^{\infty}\ln\left[1+\frac{(-1)^n}{n^p}\right]$ 条件收敛.

③ 当 $0<p\leqslant\frac{1}{2}$ 时，$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{2n^{2p}}$ 发散，因为 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{2n^{2p}}$ 是正项级数，所以 $\sum_{n=2}^{\infty}\left[\frac{1}{2n^{2p}}+o\left(\frac{1}{n^{2p}}\right)\right]$ 也是发散的.（用极限形式判别）. 因为 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^p}$ 收敛（条件收敛），所以原级数发散.

例 7 令 $a_k=\int_{-\infty}^{+\infty}x^{2k}\mathrm{e}^{-kx^2}\,\mathrm{d}x\quad(k=1,2,\cdots)$，讨论 $\sum_{k=1}^{\infty}a_k$ 的收敛性.

解 由分部积分法得到

$$\begin{aligned}
a_k&=\int_{-\infty}^{+\infty}x^{2k}\mathrm{e}^{-kx^2}\,\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty}x^{2k-1}\mathrm{d}\left(-\frac{1}{2k}\mathrm{e}^{-kx^2}\right)\\
&=-\frac{1}{2k}x^{2k-1}\mathrm{e}^{-kx^2}\Big|_{-\infty}^{+\infty}+\frac{2k-1}{2k}\int_{-\infty}^{+\infty}x^{2k-2}\mathrm{e}^{-kx^2}\,\mathrm{d}x\\
&=-\frac{2k-1}{(2k)^2}\int_{-\infty}^{+\infty}x^{2k-3}\mathrm{d}(\mathrm{e}^{-kx^2})\\
&=-\frac{2k-1}{(2k)^2}x^{2k-3}\mathrm{e}^{-kx^2}\Big|_{-\infty}^{+\infty}+\frac{(2k-1)(2k-3)}{(2k)^2}\int_{-\infty}^{+\infty}x^{2k-4}\mathrm{e}^{-kx^2}\,\mathrm{d}x\\
&=\cdots=\frac{(2k-1)(2k-3)\cdot\cdots\cdot 3\cdot 1}{(2k)^k}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-kx^2}\,\mathrm{d}x\ ,
\end{aligned}$$

于是 $a_k=\frac{(2k-1)(2k-3)\cdot\cdots\cdot 3\cdot 1}{(2k)^k}A$，其中 $A=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-kx^2}\,\mathrm{d}x$ 收敛.

从而$$\begin{aligned}\frac{a_{k+1}}{a_k}&=\frac{(2k+1)(2k-1)\cdot\cdots\cdot 3\cdot 1}{(2k+2)^{k+1}}\cdot\frac{(2k)^k}{(2k-1)(2k-3)\cdot\cdots\cdot 3\cdot 1}\\
&=\frac{2k+1}{2k+2}\left(\frac{k}{k+1}\right)^k\to\frac{1}{\mathrm{e}}<1.\end{aligned}$$

于是由比值审敛准则推出 $\sum_{k=1}^{\infty}a_k$ 收敛.

例 8 验证级数 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+(-1)^n}}$ 是否满足 Leibniz 定理的条件，并判定该级数是否收敛？

解 记 $a_n=\dfrac{1}{\sqrt{n+(-1)^n}}$，显然 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n+(-1)^n}}=0$.

当 n 为偶数时，

$a_n=\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}, a_{n+1}=\dfrac{1}{\sqrt{n+1+(-1)^{n+1}}}=\dfrac{1}{\sqrt{n}}$. 则 $a_n<a_{n+1}$.

当 n 为奇数时，

$a_n=\dfrac{1}{\sqrt{n-1}}, a_{n+1}=\dfrac{1}{\sqrt{n+1+(-1)^{n+1}}}=\dfrac{1}{\sqrt{n+2}}$. 则 $a_n>a_{n+1}$.

可见级数不满足 Leibniz 定理的条件 $a_{n+1}\leqslant a_n \quad (n=2,3,\cdots)$. 因此必须利用其他方法判定该级数的收敛性.

记级数的前 $2n$ 项之和为 S_{2n}，

$S_{2n}=\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)+\left(\dfrac{1}{\sqrt{5}}-\dfrac{1}{\sqrt{4}}\right)+\cdots+\left(\dfrac{1}{\sqrt{2n+1}}-\dfrac{1}{\sqrt{2n}}\right)$是单减数列，

且 $\quad S_{2n}=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}-\dfrac{1}{\sqrt{4}}\right)+\cdots+\left(\dfrac{1}{\sqrt{2n-1}}-\dfrac{1}{\sqrt{2n}}\right)+\dfrac{1}{\sqrt{2n+1}}>-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

知 S_{2n}有界，据单调有界原理得. $\lim\limits_{n\to\infty}S_{2n}=S$，又 $\lim\limits_{n\to\infty}a_{2n+1}=0$，从而 $\lim\limits_{n\to\infty}S_{2n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}(S_{2n}+a_{2n+1})=S$.

因此级数的部分和数列$\{S_n\}$存在极限 S，即级数收敛.

这里说明 Leibniz 定理中条件 $a_{n+1}\leqslant a_n$ 只是充分条件，某些交错级数虽不满足 $u_{n+1}\leqslant u_n$，也仍然有可能是收敛的.

3. 讨论题

1）面对一个正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$，可根据怎样的程序来选择恰当的审敛准则？

2）设 $a_n>0, b_n>0, \dfrac{a_{n+1}}{a_n}\leqslant\dfrac{b_{n+1}}{b_n}(n=1,2,\cdots)$且级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛，证明 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，有人作出证明如下：

因为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{b_{n+1}}{b_n}<1$，从而 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}<1$，由检比法知正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，这个证明对吗？

3）设正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，问级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n{}^2$ 是否也收敛？反之又如何？为什么？

4）设有两个级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$，若 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=l>0$，那么它们是否具有相同的收敛性？

5）设正项数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 单调减，且级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ 发散. 试问级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{a_n+1}\right)^n$ 是否收敛？并说明理由.

4. 练习题

1）判定下列级数的收敛性：

1° $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\ln n}{n^{\frac{5}{4}}}$；　　2° $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^5}{(2n)!}$；

3° $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{e^{\ln n}}{(\ln n)^n}$；　　4° $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{5^n n!}{(2n-1)^n}$.

2）判定下列级数的收敛性：

1° $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2+(-1)^n}{2^n}$；　　2° $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{(n+1)!}\right]$；

3° $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot(2n-1)}{2\cdot 5\cdot 8\cdot\cdots\cdot(3n-1)}$.

3）判定下列级数的收敛性：

1° $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt[3]{n(n^2+1)}}$；　　2° $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\dfrac{x}{n}\right)\quad(x>0)$；

3° $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{3n}{5n+2}\right)^n$；　　4° $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n!\left(\dfrac{x}{n}\right)^n\quad(x>0)$.

4）若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n^2$ 都收敛，证明下列级数收敛：

1° $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n b_n|$；　　2° $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)^2$；　　3° $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{|a_n|}{n}$.

5）判定下列级数的收敛性；若收敛，是绝对收敛还是条件收敛：

1° $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\cdot\dfrac{n^{10}}{2^n}$；　　2° $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n-\ln n}$；

3° $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}\ln\dfrac{n+1}{n}$；　　4° $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{\pi^{n+1}}\sin\dfrac{\pi}{n+1}$.

6）利用级数收敛的必要条件，证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2n)!}{a^{n!}}=0\quad(a>1)$.

7）判定级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int_0^{\frac{1}{n}}\dfrac{\sqrt{x}}{1+x^4}\mathrm{d}x$ 的收敛性.

8）设 $a_n>0(n=2,3,\cdots)$. $\dfrac{-\ln a_n}{\ln n}\geqslant 1+\lambda$，其中 $\lambda\geqslant 0$，试判定级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}a_n$ 的收敛性.

第二讲 幂级数与 Fourier 级数

1. 教学要求与学习注意点

1) 了解函数项级数收敛性的概念，掌握函数项级数的一致收敛性概念与判别方法，并了解一致收敛级数的性质，理解处处收敛和一致收敛的本质差异.

2) 了解幂级数收敛域的结构及和函数的概念，掌握比较简单的幂级数的收敛半径和收敛区间的求法. 当幂级数的收敛半径大于零时，幂级数及其和函数在其收敛区间内有良好的分析性质(连续性、可积、可导). 若幂级数的收敛域包含收敛区间的端点，则它在端点处可能绝对收敛，也可能条件收敛，但幂级数在收敛区间内则必定是绝对收敛的.

3) 了解函数的 Taylor 级数和函数展开成 Taylor 级数的充分必要条件. 要注意分清函数的 Taylor 级数和泰勒展开式这两个概念之间的区别和联系，会利用 e^x、$\sin x$、$\cos x$，$\ln(1+x)$和$(1+x)^\alpha$ 的 Maclaurin 展开式将一些简单的函数间接展开成幂级数.

4) 了解 Fourier 级数的概念与函数的 Fourier 级数的收敛定理；会将周期为 2π 的函数展开成 Fourier 级数.

5) 知道函数的奇延拓、偶延拓和周期延拓的概念，会将定义在区间$[-\pi,\pi]$(或$(-\pi,\pi]$或$[-\pi,\pi)$或$(-\pi,\pi)$)上的函数展开成 Fourier 级数；会将定义在区间$[0,\pi]$(或$[0,\pi)$或$(0,\pi]$或$(0,\pi)$)上的函数展开成正弦级数或余弦级数.

6) 会将周期为 $2l$ 的函数或定义在区间$[-l,l]$(或$(-l,l]$，$[-l,l)$或$(-l,l)$)上的函数展开成 Fourier 级数；会将定义在区间$[0,l]$(或$[0,l)$或$(0,l]$或$(0,l)$)上的函数展开成正弦级数或余弦级数.

2. 典型例题

例 1 讨论函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^n\ln^n x$ 在区间$(0,1]$上的一致收敛性.

解 对于函数 $u_n(x)=x^n\ln^n x$ 在$(0,1]$上求最大值.

$$u'_n(x)=n(x\ln x)^{n-1}(\ln x+1),x_1=1,x_2=\frac{1}{e},|u_n(x)|\leqslant e^{-n}.$$

于是由于正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}e^{-n}$ 收敛，得到 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^n\ln^n x$ 在区间$(0,1]$上一致收敛.

例 2 证明函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}e^{-nx}$ 在$(0,+\infty)$内不一致收敛，而在任意区间$[\delta,+\infty)(\delta>0)$上一致收敛.

证 取正数 $\varepsilon_0=\mathrm{e}^{-2}$，$x_n=\dfrac{1}{n}(n=1,2,\cdots)$，则对于任意自然数 n，有 $|r_n(x_n)|=\left|\sum\limits_{k=n+1}^{\infty}\mathrm{e}^{-kx_n}\right|>\mathrm{e}^{-(n+1)\cdot\frac{1}{n}}>\mathrm{e}^{-2}$，于是找到区间 $(0,+\infty)$ 内的一列点 $\{x_n\}$ 和趋向于 ∞ 的一列自然数列 $n=1,2,\cdots$，满足 $|r_n(x_n)|>\mathrm{e}^{-2}$. 这说明 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\mathrm{e}^{-nx}$ 在 $(0,+\infty)$ 内不一致收敛.

还可以用一般项 $u_n(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内不一致收敛于零证明 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\mathrm{e}^{-nx}$ 在 $(0,+\infty)$ 内不一致收敛，事实上，对 $\varepsilon_0=\mathrm{e}^{-2}$，$\exists\, x_n=\dfrac{1}{n}\in(0,+\infty)$，$n\in\mathbf{N}_+$ $|u_n(x_n)|=|\mathrm{e}^{-n\cdot\frac{1}{n}}|=\mathrm{e}^{-1}>\mathrm{e}^{-2}=\varepsilon_0$. 所以 $u_n(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内不一致收敛于零.

而对 $\forall\,\delta>0$，对于所有的 $x\in[\delta,+\infty)$，都有 $|\mathrm{e}^{-nx}|\leqslant\mathrm{e}^{-n\delta}$，因为正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\mathrm{e}^{-n\delta}$ 收敛得到 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\mathrm{e}^{-nx}$ 在 $[\delta,+\infty)$ 一致收敛.

例 3 证明函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^{n-1}(1-x)$ 在 $[0,1]$ 上不一致收敛.

证 因为 $S_n(x)=1-x^n$，它的和函数 $S(x)=\begin{cases}0, x=1,\\ 1, x\neq 1,\end{cases}$ $x\in[0,1]$，级数中的每一项都在 $[0,1]$ 上连续，但是和函数在 $[0,1]$ 上不连续，于是由和函数的连续性的逆否命题知，函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^{n-1}(1-x)$ 在 $[0,1]$ 上非一致收敛.

例 4 求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n-1}{2^n}x^{2n-1}$ 的收敛域及和函数，并求数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n-1}{2^n}$ 的和.

解 设 $u_n(x)=\dfrac{2n-1}{2^n}x^{2n-1}$，则有 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=\dfrac{1}{2}x^2<1$ 收敛，于是当 $|x|<\sqrt{2}$ 时收敛，$|x|>\sqrt{2}$ 时发散. 显然 $|x|=\sqrt{2}$ 时幂级数也发散（一般项不以零为极限）. 因此幂级数的收敛域是 $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$. 当 $x\in(-\sqrt{2},\sqrt{2})$ 时. 记 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n-1}{2^n}x^{2n-1}$，故 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n}{2^n}x^{2n-1}-\dfrac{x}{2}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{2^n}x^{2n}=S_1(x)-S_2(x)$，

则 $S_2(x)=\dfrac{x}{2-x^2}$，$\int_0^x S_1(t)\mathrm{d}t=\int_0^x\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n}{2^n}t^{2n-1}\right)\mathrm{d}t=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{2n}}{2^n}=\dfrac{x^2}{2-x^2}$，求导数得到

$$S_1(x)=\frac{4x}{(2-x^2)^2},\quad S(x)=S_1(x)-S_2(x)=\frac{2x+x^3}{(2-x^2)^2},$$

取 $x=1$，由上式得到

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}=S(1)=\left.\frac{2x+x^3}{(2-x^2)^2}\right|_{x=1}=3.$$

例 5　求级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)!!}x^{2n+1}$ 的收敛域及和函数.

解　因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(2n+1)!!}{(2n+3)!!}x^2=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x^2}{2n+3}=0<1$，所以级数收敛域为$(-\infty,+\infty)$.

$$\begin{aligned}S'(x)&=\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!!}\right)'=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n-1)!!}=1+x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!!}\\&=1+xS(x),\end{aligned}$$

于是 $S(x)$满足一阶线性常微分方程 $S'(x)-xS(x)=1$，并且 $S(0)=0$. 解这个微分方程得到 $S(x)=\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}\int_0^x\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t$.

例 6　将函数 $f(x)=\arctan\frac{1+x}{1-x}$展为 x 的幂级数.

解　因为 $f'(x)=\frac{1}{1+\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2}\cdot\frac{2}{(1-x)^2}=\frac{1}{1+x^2}$,

利用$\frac{1}{1+u^2}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^nu^n(|u|<1)$，从而

$$f'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^nx^{2n}(|x|<1)\text{，所以 }f(x)=\int_0^x f'(t)\mathrm{d}t+f(0),$$

于是　$$f(x)=\int_0^x\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^nt^{2n}\right)\mathrm{d}t+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}.$$

由于上式右端的幂级数当 $x=-1$ 时收敛，且 $f(x)$在 $x=-1$ 处连续，故 $f(x)=\frac{\pi}{4}+\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}(-1\leqslant x<1)$.

例 7　将函数 $f(x)=(1+x)\ln(1+x)$展开为 x 的幂级数.

解　因为　$f'(x)=1+\ln(1+x)=1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n$,　$x\in(-1,1)$,

故得

$$f(x)=f(x)-f(0)=\int_0^x f'(t)\mathrm{d}t=x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n(n+1)}x^{n+1},\quad x\in(-1,1).$$

上式右端的幂级数在 $x=\pm1$ 处均收敛，而 $f(x)$仅在 $x=1$ 处连续，在 $x=-1$ 处没有定义，所以 $f(x)$有幂级数展开式：

$$f(x)=x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n(n+1)}x^{n+1},\quad x\in(-1,1].$$

注　还可以直接用公式：

$$\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^{n}.$$

然后再乘以$(1+x)$也可以.

例 8　求级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n}(n+1)}{(2n+3)!}x^{2n}$ 的和函数.

解　容易求出所给级数的收敛半径为$+\infty$. 设其和函数为 $S(x)$：$S(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n}(n+1)}{(2n+1)!}x^{2n}, x\in(-\infty,+\infty)$.

由于所给级数中系数分母是奇数的阶乘，分子含$(-1)^n$，与 $\sin x$ 的展开式有类似之处，故考虑利用 $\sin x$ 的展开式. 因

$$\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{(2n+1)!}x^{2n+1}=x-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{(2n+3)!}x^{2n+3},$$

于是 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{(2n+3)!}x^{2n+3}=x-\sin x$ 或 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{(2n+3)!}x^{2n+2}=1-\frac{\sin x}{x}(x\neq0)$，

两端求导得

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2(n+1)(-1)^{n}}{(2n+3)!}x^{2n+1}=-\frac{1}{x^{2}}(x\cos x-\sin x)$$

或　$$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n}(n+1)}{(2n+3)!}x^{2n}=\frac{1}{2x^{3}}(\sin x-x\cos x).(x\neq0).$$

当 $x=0$ 时，由所给级数得 $S(0)=\frac{1}{6}$. 因此，

$$S(x)=\begin{cases}\frac{1}{2x^{3}}(\sin x-x\cos x), & 当\ x\neq0,\\ \frac{1}{6}, & 当\ x=0.\end{cases}$$

不难验证 $S(x)$在 $x=0$ 处连续，这符合幂级数的和函数的连续性质.

例 9　将下列函数在指定点 x_0 处展开成幂级数并指出展开式成立的区间：

① $\frac{1}{x^{2}}, x_{0}=1$；　② $\frac{1}{x^{2}+3x+2}, x_{0}=-4$；　③ $\sin 2x, x_{0}=\frac{\pi}{2}$.

解　① $\frac{1}{x}=\frac{1}{1+(x-1)}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}(x-1)^{n}, |x-1|<1$.

于是 $$\frac{1}{x^{2}}=-\left(\frac{1}{x}\right)'=-\left[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}(x-1)^{n}\right]'=-\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}n(x-1)^{n-1}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}(n+1)(x-1)^{n}, x\in(0,2).$$

② $$\frac{1}{x^{2}+3x+2}=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}=\frac{1}{-3+(x+4)}-\frac{1}{-2+(x+4)}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{x+4}{2}}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-\frac{x+4}{3}}=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x+4}{2}\right)^n-\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x+4}{3}\right)^n$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{n+1}}-\frac{1}{3^{n+1}}\right)(x+4)^n.$$

由于$-1<\frac{x+4}{2}<1$.并且$-1<\frac{x+4}{3}<1$.即$-6<x<-2$且$-7<x<-1$.于是展开式成立的区间为$(-6,-2)$.

③ $\sin 2x=-\sin 2\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2^{2n-1}}{(2n-1)!}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^{2n-1},\quad x\in(-\infty,+\infty).$$

例 10 将 $f(x)=\pi^2-x^2$ 在$[-\pi,\pi)$上展开成 Fourier 级数,并求级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$的和.

解 设已作周期延拓,显见延拓后的函数满足收敛定理的条件,且 $f(x)$是偶函数,故 $b_n=0(n=1,2,\cdots)$.而

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi^2-x^2)\mathrm{d}x=\frac{4}{3}\pi^2.$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi^2-x^2)\cos nx\mathrm{d}x=-\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^2\cos nx\mathrm{d}x=(-1)^{n-1}\frac{4}{n^2}(n=1,2,\cdots).$$

由于 $f(x)$在$[-\pi,\pi)$上连续,故

$$\pi^2-x^2=\frac{2}{3}\pi^2+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}\cos nx,\quad x\in[-\pi,\pi)$$

取 $x=0$,得

$$\pi^2=\frac{2}{3}\pi^2+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2},\text{从而有}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}=\frac{\pi^2}{12}.$$

例 11 将 $f(x)=2+|x|,x\in(-1,1]$展开为以 2 为周期的 Fourier 级数,并由此求级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$的和.

解 以 2 为周期,把 $f(x)$作周期延拓.因 $f(x)$是偶函数,故 $b_n=0(n=1,2,\cdots)$,$T=2$,即 $l=1$,所以

$$a_0=2\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=2\int_0^1(2+x)\mathrm{d}x=5;$$

$$a_n=2\int_0^1(2+x)\cos n\pi x\mathrm{d}x=\frac{2}{n^2\pi^2}(\cos n\pi-1)$$

$$=\frac{2}{n^2\pi^2}[(-1)^n-1](n=1,2,\cdots),$$

又 $f(x)$满足收敛定理的条件，并其延拓后的函数$(-1,1]$上连续，故

$$2+|x|=\frac{5}{2}-\frac{4}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}\cos(2k-1)\pi x,x\in(-1,1].$$

令 $x=0$，可得 $2=\frac{5}{2}-\frac{4}{\pi^2}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}$，即 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$.

又因为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{(2n-1)^2}+\frac{1}{(2n)^2}\right]=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}+\frac{1}{4}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$,

所以 $$\frac{3}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{8},\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}.$$

例 12 将函数 $f(x)=\begin{cases}x, & 0\leqslant x<\frac{\pi}{2},\\ 0, & \frac{\pi}{2}\leqslant x<\pi.\end{cases}$ 在$[0,\pi)$内展成以 2π 为周期的正弦级数和余弦级数，并求出级数之和函数 $S(x)$在 $x=-\frac{3}{2}\pi$ 处的值.

解 ① 展为正弦级数

将 $f(x)$延拓为$(-\pi,\pi)$上的奇函数并以 2π 为周期延拓为周期函数，其 Fourier 系数为 $a_n=0(n=0,1,2,\cdots)$；

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin nx\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\sin nx\mathrm{d}x=\frac{2}{n^2\pi}\sin\frac{n\pi}{2}-\frac{1}{n}\cos\frac{n\pi}{2},$$

又 $f(x)$满足收敛定理的条件并且其延拓后的函数在$[0,\pi)$上连续，故 $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{n^2\pi}\sin\frac{n}{2}\pi-\frac{1}{n}\cos\frac{n}{2}\pi\right)\sin nx,x\in[0,\pi)$，因为和函数 $S(x)$以 2π 为周期，故

$$S\left(-\frac{3}{2}\pi\right)=S\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{f\left(\frac{\pi}{2}+0\right)+f\left(\frac{\pi}{2}-0\right)}{2}=\frac{0+\frac{\pi}{2}}{2}=\frac{\pi}{4}.$$

② 展为余弦级数：

将 $f(x)$延拓为$(-\pi,\pi)$上的偶函数，并以 2π 为周期延拓为周期函数，其 Fourier 系数为 $b_n=0(n=1,2,\cdots)$；

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4},$$

$$\begin{aligned}a_n&=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos nx\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\cos nx\mathrm{d}x\\&=\frac{2}{\pi}\left[\frac{\pi}{2n}\sin\frac{n\pi}{2}+\frac{1}{n^2}\left(\cos\frac{n\pi}{2}-1\right)\right](n=1,2,\cdots),\end{aligned}$$

又 $f(x)$满足收敛定理的条件并且延拓后的函数在$[0,\pi)$连续，故

$$f(x)=\frac{\pi}{8}+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{\pi}{2n}\sin\frac{n}{2}\pi+\frac{1}{n^2}\left(\cos\frac{n}{2}\pi-1\right)\right]\cos nx,x\in[0,\pi),$$

且 $$S\left(-\frac{3}{2}\pi\right)=S\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{f\left(\frac{\pi}{2}+0\right)+f\left(\frac{\pi}{2}-0\right)}{2}=\frac{\pi}{4}.$$

3. 讨论题

1) 怎样证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$在某个区间上非一致收敛?

2) 幂级数与其逐项求导或逐项积分后的级数具有相同的收敛半径,但未必具有相同的收敛域,那么关于收敛域之间的关系是否有一般性的结论?

3) 设幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛半径为 R,试问幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^{kn+m}$的收敛半径为多少? 其中 k,m 都是给定的正整数. 有人这样解答,因为 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛半径为 R,所以$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\frac{1}{R}$,于是当

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}x^{k(n+1)+m}}{a_nx^{kn+m}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\cdot|x^k|=\frac{1}{R}|x^k|<1.$$ 即$|x|<\sqrt[k]{R}$时,幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^{kn+m}$收敛,因此它的收敛半径为$\sqrt[k]{R}$,对吗?

4) 函数 $f(x)$的"Taylor 级数"与 $f(x)$的"Taylor 展开式"是一个概念吗?

5) 用间接法将函数展开成幂级数的好处是什么? 其理论依据是什么?

6) 函数 $f(x)$的 Fourier 级数的和函数 $F(x)$与 $f(x)$有什么关系!

7) 将函数 $f(x)$展开成 Fourier 级数时应该注意什么?

8) 既然函数的 Fourier 级数展开式是唯一的,那么为什么定义在$[0,\pi]$上的函数 $f(x)$既可以展开成正弦级数,又可以展开成余弦级数?

4. 练习题

1) 求函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})2^nx^{2n}$的收敛域.

2) 设函数 $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}$.

1° 对于任意固定的正数 $\delta>1$,证明级数在$[\delta,+\infty)$上一致收敛;

2° 证明 $f(x)$在$(1,+\infty)$上连续;

3° 证明 $f(x)$在$(1,+\infty)$上可导,并且 $f'(x)$连续.

3) 将函数 $f(x)=\frac{x+4}{2x^2-5x-3}$展开成$(x-1)$的幂级数,并指明展开式成立的区间.

4）求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{2n+1}{n}x^{2n}$ 的收敛域及和函数.

5）将函数 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\dfrac{\mathrm{e}^x-1}{x}\right)$ 展开成 x 的幂级数，指明展开式成立的区间，并求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{(n+1)!}$ 的和.

6）求数项级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{n+1}{n!2^n}$ 的和.

7）将函数 $f(x)=x\sin x$ 在 $(-\pi,\pi)$ 内展开成 Fourier 级数.

8）将函数 $f(x)=\begin{cases}|x|, & |x|\leqslant 1,\\ 1, & 1<|x|\leqslant\dfrac{3}{2}\end{cases}$ 展开成 Fourier 级数.

9）将函数 $f(x)=3+|x|\ (-1\leqslant x\leqslant +1)$ 展开成以 2 为周期的 Fourier 级数.

10）利用对展开式 $x=2\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}\sin nx$ 逐项积分，求 x^2 在 $(-\pi,\pi)$ 内的 Fourier 级数.

11）将函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2x}{l}, & 0\leqslant x\leqslant\dfrac{l}{2},\\ l, & \dfrac{l}{2}<x\leqslant l\end{cases}$ 展开成正弦级数，并指出展开式成立的范围.

12）证明：当 $0\leqslant x\leqslant\pi$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos nx}{n^2}=\dfrac{1}{12}(3x^2-6\pi x+2\pi^2)$.

第三部分　习题选解

第一章 函数、极限、连续

习 题 1.1

(A)

5. 分别写出实数集 A 下无界、上无界和无界的定义.

解 设 $A\subseteq\mathbf{R}$,且 A 非空. 若对 $\forall l\in\mathbf{R}$,总 $\exists x_0\in A$ 使 $x_0\leqslant l$,称集合 A 下无界.

若 $\forall L\in\mathbf{R}$, $\exists x_0\in A$,使 $x_0\geqslant L$,那么称非空集 A 上无界.

若 $\forall M>0$, $\exists x_0\in A$,使 $|x_0|\geqslant M$,那么称集合 A 无界.

6. 设 $A\subseteq\mathbf{R}$,证明 A 有界 $\Leftrightarrow\exists M>0$,使得 $\forall x\in A$,恒有 $|x|\leqslant M$.

证 必要性("$\Rightarrow$")

由于 A 有界,所以 A 有上界且有下界. 于是,$\exists L,l$,使 $\forall x\in A$,恒有 $l\leqslant x\leqslant L$. 取 $M=\max\{|L|,|l|\}$,则 $|x|\leqslant M$, $\forall x\in A$.

充分性("$\Leftarrow$")由 $\exists M>0$,使 $\forall x\in A$,恒有 $|x|\leqslant M$,即 $\forall x\in A$, $-M\leqslant x\leqslant M$,即 A 有上界 M 和下界 $-M$,即 A 有界.

7. 设 $A\subseteq\mathbf{R}$,试写出 A 的下确界 $\inf A$ 的定义.

解 设 $A\subseteq\mathbf{R}$, $A\neq\varnothing$. 若存在 $S\in\mathbf{R}$,满足:

(1) $\forall x\in A$,都有 $x\geqslant S$;

(2) $\forall\varepsilon>0$, $\exists x_0\in A$,使 $x_0<S+\varepsilon$,则称 S 是 A 的下确界,记作 $\inf A$.

14. 设 $y=f(x)=\dfrac{ax+b}{cx-a}$,证明 $x=f(y)$,其中 a,b,c 为常数,且 $a^2+bc\neq0$.

证 如果 $a=0$ 或 $bc=0$,结论显然成立.

如果 $a\neq0$, $bc\neq0$,由于 $a^2+bc\neq0$,所以 $\dfrac{a}{c}\notin R(f)$.

$$f[f(x)]=f(y)=\frac{ay+b}{cy-a}=\frac{a\dfrac{ax+b}{cx-a}+b}{c\dfrac{ax+b}{cx-a}-a}=x.$$

即 $x=f(y)$.

17. 设 $f:x\mapsto x^3-x$, $\varphi:x\mapsto \sin 2x$. 试求 $(f\circ\varphi)(x)$, $(\varphi\circ f)(x)$, $(f\circ f)(x)$.

解 $(f\circ\varphi)(x)=f[\varphi(x)]=f(\sin 2x)=\sin^3 2x-\sin 2x$.

$(\varphi\circ f)(x)=\varphi[f(x)]=\varphi(x^3-x)=\sin 2(x^3-x)$.

$$(f\circ f)(x)=f(x^3-x)=(x^3-x)^3-(x^3-x)=x^9-3x^7+3x^5-2x^3+x.$$

20. 将一圆形金属片，自圆心处剪去一扇形后，围成一无底圆锥形的杯子. 试将该杯的容积表示为余下部分中心角 θ 的函数，并指出其定义区间.

解 设圆锥的底半径为 R_1，则 $2\pi R_1=\theta R$，即 $R_1=\dfrac{\theta R}{2\pi}$. 圆锥体高 $H=\sqrt{R^2-\dfrac{\theta^2R^2}{4\pi^2}}$，故无底圆锥体的容积为

$$V=\frac{1}{3}\pi R_1^2H=\frac{1}{24}\frac{R^3\theta^2}{\pi^2}\sqrt{4\pi^2-\theta^2},\theta\in(0,2\pi).$$

(B)

4. 研究下列两组函数：

(1) $f:x\mapsto\sqrt{x^2-1}$, $g:x\mapsto\sqrt{1-x^2}$;

(2) $f(x)=\begin{cases}2x, x\in[-1,1],\\ x^2, x\in(1,3),\end{cases}$ $\quad g(x)=\dfrac{1}{2}\arcsin\left(\dfrac{x}{2}-1\right)$.

它们能否进行复合运算？若能，试在能进行复合运算的集合上写出复合函数 $(f\circ g)(x)$ 与 $(g\circ f)(x)$ 的表达式.

解 (1) $D(f)=(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$, $R(f)=[0,+\infty)$, $D(g)=[-1,1]$, $R(g)=[0,1]$. 由于 $R(g)\cap D(f)=\{1\}$, $R(f)\cap D(g)=[0,1]$，故 $f\circ g$, $g\circ f$ 均无意义. 但如果限定 g 的定义域为 $\{0\}$. 则 $f\circ g$ 有意义，且 $(f\circ g)(0)=f[g(0)]=f(1)=0$；同样限制 f 的定义域为 $[-\sqrt{2},-1]\cup[1,\sqrt{2}]$，则 f 的值域为 $[0,1]$，于是 $g\circ f$ 在 $[-\sqrt{2},-1]\cup[1,\sqrt{2}]$ 上有定义，且 $(g\circ f)(x)=g(\sqrt{x^2-1})=\sqrt{1-(\sqrt{x^2-1})^2}=\sqrt{2-x^2}$.

(2) $D(f)=[-1,3)$, $D(g)=[0,4]$, $R(f)=[-2,9)$, $R(g)=\left[-\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{4}\right]$. 由于 $D(f)\cap R(g)=\left[-\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{4}\right]$，所以 $\forall x\in D(g)$, $(f\circ g)(x)=f\left[\dfrac{1}{2}\arcsin\left(\dfrac{x}{2}-1\right)\right]=\arcsin\left(\dfrac{x}{2}-1\right)$. 由于 $R(f)\not\subseteq D(g)$，所以 f 与 g 不能复合. 又因为 $D(g)\cap R(f)=$

$[0,4]$，且 $x\in[0,2]$时，$f(x)\in[0,4]$，所以

$$(g\circ f)(x)=\begin{cases}g(2x)=\dfrac{1}{2}\arcsin(x-1), & x\in[0,1],\\ g(x^2)=\dfrac{1}{2}\arcsin\left(\dfrac{x^2}{2}-1\right), & x\in(1,2].\end{cases}$$

5. 求分段函数

$$f(x)=\begin{cases}x^2-1, & x\in[-1,0),\\ x^2+1, & x\in[0,1].\end{cases}$$

的反函数表达式，并画出它们的图像.

解　当 $x\in[-1,0)$时，$f^{-1}:y\mapsto-\sqrt{y+1}$，$y\in(-1,0]$，当 $x\in[0,1]$时，$f^{-1}:y\mapsto\sqrt{y-1}$，$y\in[1,2]$. 所以

$$f^{-1}(x)=\begin{cases}-\sqrt{x+1}, & -1<x\leqslant 0,\\ \sqrt{x-1}, & 1\leqslant x\leqslant 2.\end{cases}$$

6. 设 $f(x)$，$g(x)$都是区间$[a,b]$上的单调增函数，并且在该区间上，$f(x)\leqslant g(x)$. 试证 $f[f(x)]\leqslant g[g(x)]$.

证　$\forall x\in[a,b]$，令 $x_1=f(x)$，$x_2=g(x)$，则 $x_1\leqslant x_2$，$f[f(x)]=f(x_1)\leqslant f(x_2)\leqslant g(x_2)=g[g(x)]$.

7. 设有函数 $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$，并且对任何 $x,y\in\mathbf{R}$，都有

$$f(xy)=f(x)f(y)-x-y,$$

试求 $f(x)$的表达式.

解　由题设：$\forall x\in\mathbf{R}$，$y=1$，恒有 $f(x)=f(x)f(1)-x-1$，即$[f(1)-1]f(x)=x+1$；又由于对 $x=1$，$y=1$ 有 $f(1)=f^2(1)-2$. 所以 $f(1)=2$ 或 $f(1)=-1$. 于是 $f(x)=x+1$ 或 $f(x)=-\dfrac{1}{2}(x+1)$. 而 $f(x)=-\dfrac{1}{2}(x+1)$与题设不符，舍去.

8. 设有函数 $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$，并且对任何 $x,y\in\mathbf{R}$，都有

$$f(xy)=xf(x)+yf(y),$$

证明 $f(x)\equiv 0$.

证　取 $x=1$，$y=1$，由题设得 $f(1)=f(1)+f(1)$，即 $f(1)=0$. 又由于 $\forall x\in\mathbf{R}$ 及 $y=1$，有 $f(x)=xf(x)+f(1)=xf(x)$，即$(1-x)f(x)=0$，于是 $\forall x\in\mathbf{R}$，$f(x)=0$.

9. 设 $f\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=x^2+\dfrac{1}{x^2}$，试求 $f(x)$与 $f\left(x-\dfrac{1}{x}\right)$.

解　由于 $f\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=x^2+\dfrac{1}{x^2}=\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}+2\right)-2=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-2$，所以

$f(x)=x^2-2, x\in(-\infty,-\sqrt{2}]\cup[\sqrt{2},+\infty)$. 于是 $f\left(x-\frac{1}{x}\right)=x^2+\frac{1}{x^2}-4$, $x\in(-\infty,-\sqrt{2}+1]\cup[\sqrt{2}-1,+\infty)$.

习 题 1.2

(A)

1. 下列说法能否作为 a 是数列$\{a_n\}$的极限的定义？为什么？

(1) 对于无穷多个 $\varepsilon>0$,存在 $N\in\mathbf{N}_+$,当 $n>N$ 时,不等式$|a_n-a|<\varepsilon$ 成立；

(2) 对于任给的 $\varepsilon>0$,存在 $N\in\mathbf{N}_+$,当 $n\geqslant N$ 时,有无穷多项 a_n,使不等式$|a_n-a|<\varepsilon$成立；

(3) 对于给定的很小的正数 $\varepsilon_0=10^{-10}$,不等式$|a_n-a|<10^{-10}$恒成立.

解 (1) 不能,有无穷多个 $\varepsilon>0$ 满足(2.2)式,不能推出对任意 $\varepsilon>0$ 满足(2.2)式.

(2) 不能,例如发散数列 $1,\frac{1}{2},1,\frac{1}{3},\cdots,1,\frac{1}{n},\cdots$. 对 $\forall\varepsilon>0$, $\exists N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$,当 $n>N$ 时,有无穷多项 a_n 满足$|a_n-0|<\varepsilon$.

(3) 不能,如数列$\left\{10^{-11}\sin\frac{1}{n}\right\}$. $\varepsilon_0=10^{-10}$, $\left|10^{-11}\sin\frac{1}{n}-0\right|<10^{-10}$恒成立. 但 $\lim\limits_{n\to+\infty}10^{-11}\sin\frac{1}{n}$不存在.

2. 说明下列表述都可作为 a 是$\{a_n\}$极限的定义：

(2) 对任给的 $\varepsilon>0$,存在 $N\in\mathbf{N}_+$,当 $n>N$ 时,不等式$|a_n-a|\leqslant\varepsilon$ 成立；

(3) 对任给的 $\varepsilon>0$,存在 $N\in\mathbf{N}_+$,当 $n>N$ 时,不等式$|a_n-a|<k\varepsilon$ 成立,其中 k 是正常数；

(4) 对于任给的 $m\in\mathbf{N}_+$,存在 $N\in\mathbf{N}_+$,当 $n>N$ 时,不等式$|a_n-a|<\frac{1}{m}$成立；

(5) 对于任给的 $\varepsilon>0$,存在 $N\in\mathbf{N}_+$,使不等式$|a_{N+p}-a|<\varepsilon$ 对于任意的正整数 p 都成立.

解 (2) $\forall\varepsilon>0,\frac{\varepsilon}{10}>0$. 则$\exists N\in\mathbf{N}_+$,当 $n>N$ 时,

$$|a_n-a|\leqslant\frac{\varepsilon}{10}<\varepsilon. \text{所以} \lim_{n\to\infty}a_n=a.$$

(3) $\forall\varepsilon>0, \frac{\varepsilon}{k}>0$. 则 $\exists N\in\mathbf{N}_+$，当 $n>N$ 时，

$$|a_n-a|<k\cdot\frac{\varepsilon}{k}=\varepsilon\Rightarrow\lim_{n\to\infty}a_n=a.$$

(4) $\forall\varepsilon>0$，$\exists m\in\mathbf{N}_+$，使 $\frac{1}{m}<\varepsilon$，反之也成立.

(5) 由题设，$\forall\varepsilon>0$，$\exists N\in\mathbf{N}_+$，对一切 $n>N$，恒有 $|a_n-a|<\varepsilon$.

3. 若 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 是两个发散数列，它们的和与积是否发散？为什么？若其中一个收敛，一个发散，它们的和与积的收敛性又如何？

解　若 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ 均发散，和与积不一定发散.

如 $a_n=(-1)^n$，$b_n=(-1)^{n+1}$，$a_n+b_n=0$，收敛. $a_n\cdot b_n=-1$ 收敛.

若 $\{a_n\}$ 收敛，$\{b_n\}$ 发散. $\{a_n+b_n\}$ 一定发散.

(假设 $c_n=a_n+b_n$ 收敛. 由极限的有理运算法则知. $b_n=c_n-a_n$ 收敛矛盾，所以 $\{c_n\}$ 发散.)

$\{a_n\cdot b_n\}$ 不一定收敛，也不一定发散.

$\left(\text{如}a_n=\frac{1}{n}, b_n=n^2, \{a_n\cdot b_n\}=\{n\}\text{发散}. a_n=\frac{1}{n^2}, b_n=n, \{a_n\cdot b_n\}=\left\{\frac{1}{n}\right\}\text{收敛}.\right)$

如果 $\{a_n\}$ 收敛且 $\lim a_n\neq 0$，$\{b_n\}$ 发散则 $\{a_n\cdot b_n\}$ 一定发散.

$\Big($假设 $c_n=a_n\cdot b_n$ 收敛. 则 $b_n=\frac{c_n}{a_n}$ 且 $\lim a_n\neq 0$. 由有理运算法则 $\{b_n\}$ 收敛产生矛盾.$\Big)$

5. 若把保序性中的条件 $a_n\leqslant b_n$ 改为 $a_n<b_n$，是否仍得到结论 $a<b$?

解　不能. 例如 $a_n=\frac{1}{n}$，$b_n=\frac{10}{n}$，$\forall n\in\mathbf{N}_+$，$a_n<b_n$. 但 $a=\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=\lim\limits_{n\to+\infty}b_n=0=b$.

6. 下列结论是否正确？若正确，请给出证明；若不正确，请举出反例.

(1) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=|A|$；

(2) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=|A|$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A\ (A\neq 0)$；

(3) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=0$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$；

(4) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}a_{n+1}=A$；

(5) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=1$；

(6) 若对任何实数 α，$\lim\limits_{n\to\infty}\alpha a_n=\alpha A$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$.

解　(1) 正确. 由于 $||a_n|-|A||\leqslant|a_n-A|$，且 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=A$，所以 $\forall\varepsilon>0$，$\exists N\in\mathbf{N}_+$，使 $\forall n>N$，恒有 $||a_n|-|A||\leqslant|a_n-A|<\varepsilon$. 即 $\lim\limits_{n\to+\infty}|a_n|=|A|$.

(2) 不正确. 如 $a_n=(-1)^n$，$\lim\limits_{n\to+\infty}|a_n|=1$，但 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n$ 不存在.

(3) 正确. 由 $\lim\limits_{n\to+\infty}|a_n|=0$ 可知 $\forall\varepsilon>0$, $\exists N\in\mathbf{N}_+$, 当 $n>N$ 时, $\big||a_n|-0\big|=|a_n|=|a_n-0|<\varepsilon$. 故 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=0$.

(4) 正确. 由 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=A$ 知 $\forall\varepsilon>0$, $\exists N_1\in\mathbf{N}_+$, 当 $n>N_1$ 时, $|a_n-A|<\varepsilon$ 成立. 即 $\forall\varepsilon>0$, 取 $N=N_1-1$, 那么当 $n>N_1$ 时, $|a_{n+1}-A|<\varepsilon$ 成立, 故 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_{n+1}=A$.

(5) 不正确. 如 $a_n=\dfrac{\alpha^n}{n!}(\alpha\in\mathbf{R})$, $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=1$, 而 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=0$.

(6) 正确. 由于对 $\forall\alpha\in\mathbf{R}$, $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha a_n=\alpha A$, 所以对 $\alpha=1$, 应有 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$.

7. 用 $\varepsilon-N$ 定义证明下列极限：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sin\dfrac{n\pi}{2}=0$;　　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}(n-\sqrt{n^2-n})=\dfrac{1}{2}$;

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\cos n}{n^2}=0$;　　(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$.

解　(1) $\forall\varepsilon>0$. 取 $N=\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]$. 当 $n>N$ 时, 恒有

$$\left|\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi}{2}-0\right|\leqslant\frac{1}{n}<\varepsilon \text{ 故 } \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi}{2}=0.$$

(2) $\forall\varepsilon>0$. 取 $N=\left[\dfrac{1}{2\varepsilon}\right]$. $\forall n>N$, 恒有

$$\left|n-\sqrt{n^2-n}-\frac{1}{2}\right|=\frac{n}{2(n+\sqrt{n^2-n})^2}\leqslant\frac{1}{2n}<\varepsilon,$$

故 $\lim\limits_{n\to+\infty}(n-\sqrt{n^2-n})=\dfrac{1}{2}$.

(3) $\forall\varepsilon>0$. 取 $N=\left[\dfrac{2}{\varepsilon}\right]$. 对 $\forall n>N$, 恒有

$$\left|\frac{1+\cos n}{n^2}\right|\leqslant\frac{2}{n^2}<\frac{2}{n}<\varepsilon, \text{故 } \lim_{n\to+\infty}\frac{1+\cos n}{n^2}=0.$$

(4) **解法一**　令 $\sqrt[n]{n}=1+x_n$, 则 $x_n>0$ 由二项式公式

$$n=1+nx_n+\frac{1}{2}n(n-1)x_n^2+\cdots+x_n^n\geqslant1+\frac{1}{2}n(n-1)x_n^2,$$

从而有

$$1\leqslant\sqrt[n]{n}=1+x_n\leqslant1+\sqrt{\frac{2}{n}},$$

由夹逼性知 $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{n}=1$.

解法二　由于 $\left|\sqrt[n]{n}-1\right|=\dfrac{n-1}{1+\sqrt[n]{n}+(\sqrt[n]{n})^2+\cdots+(\sqrt[n]{n})^{n-1}}<\dfrac{n-1}{\frac{1}{2}(n-1)\sqrt{n}}=\dfrac{2}{\sqrt{n}}$, 所以 $\forall\varepsilon>0$, 取 $N=\left[\dfrac{4}{\varepsilon^2}\right]$, 当 $n>N$ 时, $\left|\sqrt[n]{n}-1\right|<\varepsilon$ 成立. 故 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$.

8. 试写出数列无上界, 无下界的定义.

解　如果$\forall M>0$，总$\exists n_0\in\mathbf{N}_+$，使$a_{n_0}>M$，称数列$\{a_n\}$无上界.

如$\forall M>0$，总$\exists n_0\in\mathbf{N}_+$，使$a_{n_0}<-M$. 称$\{a_n\}$无下界.

9. 设由数列$\{a_n\}$的奇数项与偶数项组成的两个子列收敛于同一个常数a，证明$\{a_n\}$也收敛于a.

证　$\forall\varepsilon>0$，由于$\lim\limits_{n\to\infty}a_{2m}=a$，$\lim\limits_{n\to\infty}a_{2m+1}=a$，$\exists N_1,N_2\in\mathbf{N}_+$，对$\forall m>N_i$，$i=1,2$，恒有$|a_{2m}-a|<\varepsilon$，$|a_{2m+1}-a|<\varepsilon$. 所以取$N=\max\{N_1,N_2\}$，当$n>N$时，$|a_n-a|<\varepsilon$成立，其中$n=2m$或$n=2m+1$，故$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$.

10. 求下列数列的极限：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)(n+2)(n+3)}{5n^3}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{5}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\left(1+\dfrac{2}{n}\right)\left(1+\dfrac{3}{n}\right)=\dfrac{1}{5}$.

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3^n+(-2)^n}{3^{n+1}+(-2)^{n+1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{1}{3}+\left(-\dfrac{2}{3}\right)^n\dfrac{1}{3}}{1+\left(-\dfrac{2}{3}\right)^{n+1}}=\dfrac{1}{3}$.

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1+2+\cdots+n}{n+2}-\dfrac{n}{2}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n(n+1)}{2(n+2)}-\dfrac{n}{2}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{-n}{2(n+2)}=-\dfrac{1}{2}$.

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}(\sqrt{n+4}-\sqrt{n})=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4}{\sqrt{1+\dfrac{4}{n}}+1}=2$.

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{2}\sqrt[4]{2}\sqrt[8]{2}\cdots\sqrt[2^n]{2})=\lim\limits_{n\to\infty}2^{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^n}\right)}$

$$=\lim_{n\to\infty}2^{\left(1-\frac{1}{2^n}\right)}=2.$$

(6) 由于$\sqrt[n]{2}\leqslant\sqrt[n]{2+\sin^2 n}\leqslant\sqrt[n]{3}$，且$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{3}=1$，所以

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{2+\sin^2 n}=1.$$

(7) $\dfrac{1+4+\cdots+n^2}{n^3+n}\leqslant\dfrac{1}{n^3+1}+\dfrac{4}{n^3+2}+\cdots+\dfrac{n^2}{n^3+n}\leqslant\dfrac{1+4+\cdots+n^2}{n^3+1}$,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+4+\cdots+n^2}{n^3+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{6}\frac{(n+1)(2n+1)}{n^2+1}=\frac{1}{3},$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+4+\cdots+n^2}{n^3+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{6}\frac{n(n+1)(2n+1)}{n^3+1}=\frac{1}{3},$$

所以由夹逼性$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^3+1}+\dfrac{4}{n^3+2}+\cdots+\dfrac{n^2}{n^3+n}\right)=\dfrac{1}{3}$.

(8) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)^n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)^{n+1}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{-1}=\mathrm{e}$.

(9) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^n=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{-1}{n}\right)^{-n}\right]^{-1}=\mathrm{e}^{-1}$.

(10) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n-4}\right)^{n+4}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n-4}\right)^{n-4}\left(1+\dfrac{1}{n-4}\right)^{8}=\mathrm{e}$.

11. 判别下列数列的敛散性.

(1) $a_n=\frac{1}{3+1}+\frac{1}{3^2+1}+\cdots+\frac{1}{3^n+1}$.

$0\leqslant a_n\leqslant\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{3^n}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3^n}\right)\leqslant\frac{1}{2}$,$\{a_n\}$有界,

因为 $$a_{n+1}=a_n+\frac{1}{3^{n+1}+1}\geqslant a_n,\{a_n\}\text{单调增}.$$

由单调有界准则,$\{a_n\}$收敛.

(2) $a_n=\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{2^n}\right)$.

$$0\leqslant a_n\leqslant 1,\text{且 } a_{n+1}=a_n\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)\leqslant a_n.$$

故$\{a_n\}$单减有下界.从而$\{a_n\}$收敛.

(3) $a_1=\sqrt{2},a_2=\sqrt{2+\sqrt{2}},\cdots,a_n=\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}},\cdots$.

$0<a_1=\sqrt{2}<2,0<a_2=\sqrt{2+a_1}<2$,由数学归纳法证得 $0<a_n=\sqrt{2+a_{n-1}}<2,n=1,2,\cdots$.

$$a_{n+1}-a_n=\sqrt{2+a_n}-a_n=\frac{(2-a_n)(a_n+1)}{\sqrt{2+a_n}+a_n}>0,$$

故$\{a_n\}$为单增有界数列,即$\{a_n\}$收敛.

设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$,则 $A\geqslant 0$. 由 $a_{n+1}=\sqrt{a_n+2}$得

$$A=\sqrt{A+2},\text{所以 } A=2.$$

(4) $a_n=1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}$.

因为 $a_n<1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}$ (因为 $k\geqslant 2$ 时,$2^{k-1}<k!$)

$$=2\left(1-\frac{1}{2^n}\right)<2,$$

且 $a_{n+1}=a_n+\frac{1}{(n+1)!}>a_n$,故$\{a_n\}$单增有上界.$\{a_n\}$收敛.

注意,还可用下述方法证明 a_n 的有界性.

$$a_n<1+\frac{1}{2\cdot 1}+\frac{1}{3\cdot 2}+\cdots+\frac{1}{n(n-1)}=1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)$$
$$=2-\frac{1}{n}<2.$$

(5) $a_n=1+\frac{\sin 1}{1^2}+\frac{\sin 2}{2^2}+\cdots+\frac{\sin n}{n^2}$.

$$\begin{aligned}|a_{n+p}-a_n| &= \left|\frac{\sin(n+1)}{(n+1)^2}+\frac{\sin(n+2)}{(n+2)^2}+\cdots+\frac{\sin(n+p)}{(n+p)^2}\right| \\ &\leqslant \frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\cdots+\frac{1}{(n+p)^2} \\ &\leqslant \frac{1}{n(n+1)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\cdots+\frac{1}{(n+p-1)(n+p)} \\ &\leqslant \frac{1}{n}-\frac{1}{n+p}<\frac{1}{n},\end{aligned}$$

则 $\forall \varepsilon>0$，取 $N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$，当 $n>N$ 时，$\forall p\in \mathbf{N}_+$，有 $|a_{n+p}-a_n|<\varepsilon$，由 Cauchy 原理知，原数列 $\{a_n\}$ 收敛.

13. 求下列数列的极限点：

(1) $\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{3}{4},\frac{1}{8},\frac{7}{8},\cdots,\frac{1}{2^n},\frac{2^n-1}{2^n},\cdots$.

因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}=0,\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^n-1}{2^n}=1$，所以此数列有两个极限点 0，1.

(2) $a_n=3\left(1-\frac{1}{n}\right)+2(-1)^n$.

因为 $\lim\limits_{n\to\infty}a_{2n}=5,\lim\limits_{n\to\infty}a_{2n+1}=1$，所以此数列有两个极限点 5，1.

(3) $a_n=\frac{n+(-1)^n n}{2}+\frac{1}{n}$.

由于 $\lim\limits_{n\to\infty}a_{2n+1}=0$，所以此数列有唯一的极限点 0.

14. 设 $0<x_1<1,x_{n+1}=1-\sqrt{1-x_n}$，证明：数列 $\{x_n\}$ 收敛，并求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 与 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}$.

解　因为 $0<x_1<1$. 设 $0<x_{n-1}<1$，由数学归纳法证得 $0<x_n<1$.

又因为 $\frac{x_{n+1}}{x_n}=\frac{1-\sqrt{1-x_n}}{x_n}=\frac{1}{1+\sqrt{1-x_n}}<1$，即 $x_{n+1}<x_n$，$\{x_n\}$ 单调减，由单调有界准则知 $\{x_n\}$ 收敛.

设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$. 由等式 $x_{n+1}=1-\sqrt{1-x_n}$ 得 $A=1-\sqrt{1-A}$，故 $A=0$，或 $A=1$（舍），故 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\sqrt{1-x_n}}=\frac{1}{2}.$$

15. 设 $a>0,x_1>0,x_{n+1}=\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{a}{x_n}\right)$，证明：$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\sqrt{a}$.

证　因为 $a>0,x_1>0$，所以 $x_2=\frac{1}{2}\left(x_1+\frac{a}{x_1}\right)\geqslant\sqrt{a}>0$，由数学归纳法可知

$x_n \geqslant \sqrt{a}$，从而

$$\frac{x_{n+1}}{x_n}=\frac{1}{2}\left(1+\frac{a}{x_n^2}\right)\leqslant\frac{1}{2}(1+1)=1\text{，即 } x_{n+1}<x_n\text{，}$$

故$\{a_n\}$单减有下界. 故$\{a_n\}$收敛.

设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=A$. 由于 $x_{n+1}=\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{a}{x_n}\right)$且 $x_n\geqslant\sqrt{a}>0$，所以 $A>0$ 且 $A=\frac{1}{2}\left(A+\frac{a}{A}\right)$. 故 $A=\sqrt{a}$.

16. 设$\{a_n\}$单调增，$\{b_n\}$单调减，$\lim\limits_{n\to\infty}(b_n-a_n)=0$. 证明：$\{a_n\}$与$\{b_n\}$都收敛，并且有相同的极限.

证　由于$\{a_n\}$单调增，$\{b_n\}$单调减，所以$\{b_n-a_n\}$单调减，又由于 $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n-a_n)=0$，即 0 为单减数列$\{b_n-a_n\}$的下确界，所以 $\forall n\in\mathbf{N}_+$，$b_n-a_n\geqslant 0$，即 $b_n\geqslant a_n$. 故单增数列$\{a_n\}$有上界 b_1，单调减数列$\{b_n\}$有下界 a_1. 从而$\{a_n\}$与$\{b_n\}$均收敛. 且 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n=\lim\limits_{n\to\infty}[(b_n-a_n)+a_n]=\lim\limits_{n\to\infty}(b_n-a_n)+\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

(B)

1. 判别数列$\{x_n\}$的收敛性，其中

$$x_n=a_0+a_1q+a_2q^2+\cdots+a_nq^n\ (|q|<1,|a_k|\leqslant M,k=0,1,2,\cdots).$$

解　若 $q=0$，$x_n=a_0$，$\{x_n\}$收敛.

若 $0<|q|<1$，由于$|a_k|\leqslant M,k=1,2,\cdots$，所以 $\forall n,p\in\mathbf{N}_+$，

$$|x_{p+n}-x_n|=|a_{n+1}q^{n+1}+\cdots+a_{n+p}q^{n+p}|,$$

$$\leqslant M|q|^{n+1}\frac{1-|q|^p}{1-|q|}<\frac{M}{1-|q|}|q|^{n+1}.$$

注意到 $\ln|q|<0$. 对 $\forall\varepsilon>0$，取 $N=\left[\frac{\ln(1-|q|)\varepsilon-\ln M}{\ln|q|}\right]\in\mathbf{N}_+$，对 $\forall n>N,p\in\mathbf{N}_+$，恒有$|x_{n+p}-x_n|<\varepsilon$，由 Cauchy 收敛原理知$\{x_n\}$收敛.

2. 求下列数列的极限：

$$(1)\ \lim_{n\to\infty}\frac{x^n-2}{x^n+2}=\begin{cases}\text{不存在，} & x=-1,\\ -\frac{1}{3}, & x=1,\\ -1, & |x|<1,\\ \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-\frac{2}{x^n}}{1+\frac{2}{x^n}}=1, & |x|>1.\end{cases}$$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[1-\frac{1}{3}+\frac{1}{9}-\frac{1}{27}+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{3^{n-1}}\right]=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1-\left(-\frac{1}{3}\right)^n}{1+\frac{1}{3}}=\frac{3}{4}$.

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(2^2-1)(3^2-1)\cdots(n^2-1)}{2^2\cdot 3^2\cdot\cdots\cdot n^2}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(2-1)(3-1)\cdots(n-1)(2+1)(3+1)\cdots(n+1)}{2^2\cdot 3^2\cdot\cdots\cdot n^2}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n-1)!(n+1)!}{2(n!)^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{2n}=\frac{1}{2}$.

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2\sin^2 n+\cos^2 n}$

解　因为 $1\leqslant\sqrt[n]{2\sin^2 n+\cos^2 n}=\sqrt[n]{1+\sin^2 n}\leqslant\sqrt[n]{2}$，由夹逼性

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{2\sin^2 n+\cos^2 n}=1.$$

(5) **解法一**　$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{3n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{3n}}{\left(1+\frac{2}{n}\right)^{3n}}=\frac{e^3}{e^6}=\frac{1}{e^3}$.

解法二　$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{3n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{-1}{n+2}\right)^{-(n+2)}\left(1-\frac{1}{n+2}\right)^2\right]^{-3}=e^{-3}$.

(6) **解法一**　$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^3-1}{n^3-2}\right)^{4n^3}=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{-1}{n^3}\right)^{-n^3}\right]^{-4}\Big/\left[\left(1+\frac{-2}{n^3}\right)^{-\frac{n^3}{2}}\right]^{-8}=e^4$.

解法二　$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^3-1}{n^3-2}\right)^{4n^3}=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n^3-2}\right)^{n^3-2}\left(1+\frac{1}{n^3-2}\right)^2\right]^4=e^4$.

3. 证明：

(1) 若 $a_n\to 0$，则 $b_n=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\to 0(n\to\infty)$；

(2) 若 $a_n\to a$，则 $b_n\to a(n\to\infty)$，b_n 同(1).

解　(1) 由 $a_n\to 0(n\to\infty)$知：$\forall\varepsilon>0$，$\exists N_1\in\mathbf{N}_+$，使 $\forall n>N_1$，$|a_n|<\frac{\varepsilon}{2}$.

而由 $\frac{1}{n}\to 0(n\to\infty)$知：$\exists N_2\in\mathbf{N}_+$. 使 $\forall n>N_2$，$\frac{|a_1+\cdots+a_{N_1}|}{n}<\frac{\varepsilon}{2}$，

从而 $|b_n|=\left|\frac{a_1+\cdots+a_{N_1}}{n}+\frac{a_{N_1+1}+\cdots+a_n}{n}\right|<\frac{\varepsilon}{2}+\left(1-\frac{N_1}{n}\right)\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon$，

故 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=0$.

(2) 令 $\bar{a}_n=a_n-a$. 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\bar{a}_n=0$. 由结论(1)，

$$\lim_{n\to\infty}\bar{b}_n=\lim_{n\to\infty}\frac{\bar{a}_1+\cdots+\bar{a}_n}{n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_1+\cdots+a_n}{n}-a\right)=0,$$

即 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=a$.

4. 证明下列数列收敛，并求其极限：

(1) $x_n=\dfrac{n^k}{a^n}(a>1,k>0)$.

证 因为 $a>1,a^{\frac{1}{k}}>1$，令 $a^{\frac{1}{k}}=1+b(a>b>0)$，则

$$\frac{n^k}{a^n}=\left[\frac{n}{(1+b)^n}\right]^k=\left[\frac{n}{1+nb+\frac{1}{2}n(n-1)b^2+\cdots+b^n}\right]^k\leqslant\left[\frac{n}{nb+\frac{n}{2}(n-1)b^2}\right]^k$$

$$=\left[\frac{1}{b+\frac{1}{2}b^2(n-1)}\right]^k.\text{注意到}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{b+\frac{1}{2}b^2(n-1)}=0,\text{则}\lim_{n\to\infty}\frac{n^k}{a^n}=0.$$

(2) $a_n=\underbrace{\sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a+\cdots+\sqrt{a}}}}}_{n\text{重}}\quad(a>0)$.

证 显然 $a_n>0$. $a_1=\sqrt{a}<1+\sqrt{a}$. 设 $a_{n-1}<1+\sqrt{a}$，则 $a_n=\sqrt{a+\sqrt{a_{n-1}}}<\sqrt{a+\sqrt{a}+1}<\sqrt{a}+1$. 由数学归纳法知. $\forall n\in\mathbf{N}_+$，$0<a_n<\sqrt{a}+1$. 即 $\{a_n\}$ 有界.

又由数学归纳法：$a_1=\sqrt{a}$，$a_2=\sqrt{a+a_1}>\sqrt{a}>a_1$，假设 $a_n>a_{n-1}$，那么 $a_{n+1}=\sqrt{a+a_n}>\sqrt{a+a_{n-1}}=a_n$. 故 $\{a_n\}$ 为单增数列. 从而 $\{a_n\}$ 收敛.

设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$，由 $a_{n+1}=\sqrt{a+a_n}$ 可知 $A=\sqrt{a+A}$.

注意到 $0<a_n<\sqrt{a}+1$，可得 $A=\dfrac{1+\sqrt{1+4a}}{2}$，即 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\dfrac{1+\sqrt{1+4a}}{2}$.

(3) $0<x_1<\sqrt{3}$，$x_{n+1}=\dfrac{3(1+x_n)}{3+x_n}$.

证 因为 $0<x_1<\sqrt{3}$，所以 $x_n>0$.（$\forall n\in\mathbf{N}_+$）.

$$x_2-\sqrt{3}=\frac{(3-\sqrt{3})(x_1-\sqrt{3})}{3+x_1}<0.\text{所以 }0<x_2<\sqrt{3}.$$

假设 $0<x_{n-1}<\sqrt{3}$，那么 $x_n-\sqrt{3}=\dfrac{(3-\sqrt{3})(x_{n-1}-\sqrt{3})}{3+x_{n-1}}<0$，由数学归纳法知 $0<x_n<\sqrt{3}$，即 $\{x_n\}$ 有界.

因为 $x_{n+1}-x_n=\dfrac{3-x_n^2}{3+x_n}=\dfrac{(\sqrt{3}-x_n)(\sqrt{3}+x_n)}{3+x_n}>0$，所以 $x_{n+1}>x_n$，$\{x_n\}$ 单调增. 故 $\{x_n\}$ 收敛.

设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=A$，则 $0\leqslant A\leqslant\sqrt{3}$. 且 $A=\dfrac{3(1+A)}{3+A}$，即 $A=\sqrt{3}$. 故 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\sqrt{3}$.

(4) $a_1=1, a_n=1+\dfrac{1}{a_{n-1}+1}\quad(n=2,3,\cdots)$.

证 由 $a_1=1<\sqrt{2}, a_n>0$ 且 $a_n-\sqrt{2}=\dfrac{-(a_{n-1}-\sqrt{2})(\sqrt{2}-1)}{a_{n-1}+1\quad(n=1,2,\cdots)}$ 知 $a_n-\sqrt{2}$ 与 $a_{n-1}-\sqrt{2}$ 异号. 从而 $0<a_{2m-1}<\sqrt{2}, a_{2m}>\sqrt{2}$. $m=1,2,\cdots$.

又因为 $a_{n+2}-a_n=1+\dfrac{1}{1+\left(1+\dfrac{1}{1+a_n}\right)}-a_n=\dfrac{2(2-a_n^2)}{2a_n+3}, n=1,2,\cdots$,

所以 $\{a_{2m}\}$ 单调减，$\{a_{2m-1}\}$ 单调增.

由单调收敛准则，$\{a_{2m}\}$，$\{a_{2m-1}\}$ 均收敛.

不妨设 $\lim\limits_{m\to\infty} a_{2m}=A$，则 $A\geqslant\sqrt{2}$. 又因为 $a_{2m+2}=\dfrac{3a_{2m}+4}{2a_{2m}+3}$，所以 $A=\dfrac{3A+4}{2A+3}$，即 $A=\sqrt{2}$.

同理可证 $\lim\limits_{m\to\infty} a_{2m-1}=\sqrt{2}$，故 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\sqrt{2}$.

5. $\{a_n\}$ 为一单增数列，并且有一子列收敛于 a，证明 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=a$.

证法一 设 $\{a_{n_k}\}$ 为 $\{a_n\}$ 的收敛于 a 的子列.

假设 $\{a_n\}$ 无上界，则 $\forall M>0$. $\exists n_0\in\mathbf{N}_+$，使 $a_{n_0}>M$. 又因为 $\{a_n\}$ 单调增，所以 $a_{n_0+p}>a_{n_0}>M$，$\exists p_0\in\mathbf{N}_+$ 使 $a_{n_0+p_0}\in\{a_{n_k}\}$，所以 $\{a_{n_k}\}$ 无界与已知矛盾. 所以 $\{a_n\}$ 有上界. 由单调收敛原理，$\{a_n\}$ 收敛且 $a_{n_k}\to a$. $(k\to\infty)$.

证法二 由 $\{a_n\}$ 的子列 $\{a_{n_k}\}$ 收敛于 a 知；$\forall\varepsilon>0$，$\exists N_1\in\mathbf{N}_+$，使 $\forall k>N_1$，$|a_{n_k}-a|<\varepsilon$. 取 $N=n_{N_1+1}$. $\forall n>N$ 存在 $k\in\mathbf{N}_+$，使 $a_{n_k}, a_{n_{k+1}}\in\{a_{n_k}\}$ 且 $n_k\leqslant n\leqslant n_{k+1}$. 再注意到 $\{a_n\}$ 单调增可得 $a_{n_k}\leqslant a_n\leqslant a_{n_{k+1}}$. 从而

$$|a_n-a|\leqslant\max\{|a_{n_k}-a|,|a_{n_{k+1}}-a|\}<\varepsilon,$$

故 $\{a_n\}$ 收敛于 a.

6. 设 $a_n=1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}+\cdots+\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$，证明数列 $\{a_n\}$ 收敛.

证 由于 $\forall n,p\in\mathbf{N}_+$，$|a_{n+p}-a_n|=\left|\dfrac{1}{n+1}-\dfrac{1}{n+2}+\cdots+\dfrac{(-1)^{p-1}}{n+p}\right|$.

当 p 为偶数时，$\left(\dfrac{1}{n+1}-\dfrac{1}{n+2}\right)+\cdots+\left(\dfrac{1}{n+p-1}-\dfrac{1}{n+p}\right)>0$.

当 p 为奇数时，$\left(\dfrac{1}{n+1}-\dfrac{1}{n+2}\right)+\cdots+\left(\dfrac{1}{n+p-2}-\dfrac{1}{n+p-1}\right)+\dfrac{1}{n+p}>0$.

利用上述结论易得 $|a_{n+p}-a_n|=\dfrac{1}{n+1}-\left(\dfrac{1}{n+2}-\dfrac{1}{n+3}+\cdots+\dfrac{(-1)^{p-1}}{n+p}\right)<$

$\frac{1}{n+1}$. 所以 $\forall \varepsilon>0$，只要取 $N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$，则 $\forall n>N$ 及 $p\in\mathbf{N}_+$，恒有 $|a_{n+p}-a_n|<\varepsilon$. 故 $\{a_n\}$ 为 Cauchy 列，因而收敛.

7. 设 $\{[a_n,b_n]\}$ 为一列闭区间，若满足条件：(1)它是递缩的：$[a_1,b_1]\supseteq[a_2,b_2]\supseteq\cdots\supseteq[a_n,b_n]\supseteq\cdots$；(2)$\lim\limits_{n\to\infty}(b_n-a_n)=0$，则称 $\{[a_n,b_n]\}$ 为一个**闭区间套**. 试利用单调有界原理证明**闭区间套定理**：任何闭区间套必有唯一的公共点，即存在唯一的 $\{\xi\}$，使 $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}[a_n,b_n]=\{\xi\}$.

证 数列 $\{a_n\}$ 单增，$\{b_n\}$ 单减且 $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n-a_n)=0$. 由习题 1.2(A)第 16 题，$\{a_n\}$，$\{b_n\}$ 均收敛. 且 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\xi$ 且 $a_n\leqslant\xi\leqslant b_n$，即 $\forall n\in\mathbf{N}_+$，$\xi\in\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}[a_n,b_n]$. 由极限的唯一性知 $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}[a_n,b_n]=\{\xi\}$.

8. 利用闭区间套定理(第 7 题)证明 Weierstrass 定理.

证 设 $\{x_n\}$ 是有界数列，则必存在 $a_1,b_1\in\mathbf{R}$，使得 $\forall n\in\mathbf{N}_+$，都有 $x_n\in[a_1,b_1]$. 等分 $[a_1,b_1]$ 为两个子区间，则至少有一个含 $\{x_n\}$ 的无穷多项，记该子区间为 $[a_2,b_2]$(若两个子区间都含 $\{x_n\}$ 的无穷多项，则可任取其一). 等分 $[a_2,b_2]$，按照同样的方法又可得含 $\{x_n\}$ 无穷多项的子区间 $[a_3,b_3]$. 照此办理，可得一个闭区间列 $\{[a_k,b_k]\}$，满足：

$$[a_1,b_1]\supseteq[a_2,b_2]\supseteq\cdots\supseteq[a_k,b_k]\supseteq\cdots,$$

$$b_k-a_k=\frac{b_1-a_1}{2^{k-1}}\to 0(k\to\infty),$$

因此它是一个闭区间套. 根据闭区间套定理，存在唯一的 $\xi\in\mathbf{R}$，使得 $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}[a_k,b_k]=\{\xi\}$，并且 $\lim\limits_{n\to\infty}a_k=\lim\limits_{n\to\infty}b_k=\xi$.

由于每个闭区间都含数列 $\{x_n\}$ 的无穷多项，所以我们能在每个 $[a_k,b_k]$ 中选取 $\{x_n\}$ 的一项 x_{n_k}，并使 $n_1<n_2<\cdots<n_k<\cdots$，从而得到 $\{x_n\}$ 的一个子列 $\{x_{n_k}\}$，满足：

$$a_k\leqslant x_{n_k}\leqslant b_k(\forall k\in\mathbf{N}_+).$$

根据夹逼原理，$\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k}=\xi$.

习 题 1.3

(A)

3. 设 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=a$，且 $f(x)$ 在 x_0 有定义. 问在 $x\to x_0$ 的过程中，x 可否取

到 x_0？是否必有 $a=f(x_0)$？

解　可以取到 x_0. 但未必有 $a=f(x_0)$. 例 $f(x)=\begin{cases}x\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 1, & x=0,\end{cases}$

$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0\neq f(0)=1$.

5. 下列命题是否正确？若正确，请给出证明；若不正确，请举出反例.

(1) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=a$ 的充要条件是 $\lim\limits_{x\to x_0}|f(x)|=|a|$；

(2) 若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=a$，则 $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)]^2=a^2$；

(3) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}f\left(\dfrac{1}{n}\right)=a$，则 $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=a$；

(4) 若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)+g(x)]$ 都存在，则 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$ 必存在；

(5) 若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)g(x)$ 都存在，则 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$ 必存在；

(6) 若在 x_0 的某邻域内 $f(x)>0$，并且 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=a$，那么必有 $a>0$.

解　(1) 不正确. $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=a$，则 $\lim\limits_{x\to x_0}|f(x)|=|a|$. 但反过来不成立.

例
$$f(x)=\begin{cases}1, & x\geqslant 0,\\ -1, & x<0,\end{cases}\quad |f(x)|=1,\lim_{x\to 0}|f(x)|=1,$$

但 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 不存在.

(2) 正确. 因为 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=a$，$\exists U(x_0,\delta_1)$ 与 $M>0$，使得 $\forall x\in U(x_0,\delta_1)$，$|f(x)+a|\leqslant M$. 从而 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0(\delta<\delta_1)$，使得 $\forall x\in U(x_0,\delta)$，

$$|[f(x)]^2-a^2|=|f(x)+a||f(x)-a|<M\cdot\frac{\varepsilon}{M}=\varepsilon,$$

即
$$\lim_{x\to x_0}[f(x)]^2=a^2.$$

(3) 不正确. $\lim\limits_{n\to\infty}\sin\dfrac{\pi}{\frac{1}{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\sin n\pi=0$. 但 $\lim\limits_{x\to 0^+}\sin\dfrac{\pi}{x}$ 不存在.

(4) 正确. 由极限的有理运算法则 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)+g(x)]-\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$.

(5) 不正确. 取 $f(x)=x$，$g(x)=\sin\dfrac{1}{x}$，$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}f(x)g(x)=0$，但 $\lim\limits_{x\to 0}g(x)$ 不存在.

如果 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=a\neq 0$，且 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)g(x)$ 存在，则 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$ 存在.

(6) 不正确. 如 $f(x)=\begin{cases}x^2, & x\neq 0,\\ 1, & x=0,\end{cases}$ $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$.

9. 下列运算有无错误？若错，错在何处？

(1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=\dfrac{\lim\limits_{x\to0}\sin x}{\lim\limits_{x\to0}x}=\dfrac{0}{0}=1$； (2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}=\dfrac{\lim\limits_{x\to\infty}\sin x}{\lim\limits_{x\to\infty}x}=0$；

(3) $\lim\limits_{x\to0}x\sin\dfrac{1}{x}=\lim\limits_{x\to0}x\lim\limits_{x\to0}\sin\dfrac{1}{x}=0$.

答：(1) 错. 分母极限为零. (2) 错. $\lim\limits_{x\to\infty}\sin x$ 不存在.

(3) 错. $\lim\limits_{x\to0}\sin\dfrac{1}{x}$不存在.

10. 用定义证明下列各题：

(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x=\dfrac{\pi}{2}$； (4) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2}{x+1}=\dfrac{1}{2}$.

解 (2) $\forall x>0$，由 $0<\dfrac{\pi}{2}-\arctan x=\left|\arctan x-\dfrac{\pi}{2}\right|<\varepsilon<\dfrac{\pi}{2}\Leftrightarrow$ $\tan\left(\dfrac{\pi}{2}-\arctan x\right)=\cot(\arctan x)<\tan\varepsilon\Leftrightarrow\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{\tan(\arctan x)}<\dfrac{1}{\cot\varepsilon}\Leftrightarrow x>\cot\varepsilon$，可得 $\forall\varepsilon>0$. 如 $\varepsilon<\dfrac{\pi}{2}$. 取 $X=\cot\varepsilon>0$；如 $\varepsilon>\dfrac{\pi}{2}$，$0<\varepsilon-\dfrac{n\pi}{2}<\dfrac{\pi}{2}$，取 $X=\cot\left(\varepsilon-\dfrac{n\pi}{2}\right)>0$，那么 $\forall x>X$. $\left|\arctan x-\dfrac{\pi}{2}\right|<\varepsilon$，即 $\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x=\dfrac{\pi}{2}$.

(4) 不妨设 $|x-1|<1$. 则 $1<x+1<3$，$1<2x+1<5$. $\forall\varepsilon>0$，取 $\delta=\min\left(1,\dfrac{2}{5}\varepsilon\right)>0$，则 $\forall x\in U(1,\delta)$，有

$$\left|\frac{x^2}{x+1}-\frac{1}{2}\right|=\frac{2x+1}{2(x+1)}|x-1|<\frac{5}{2}|x-1|<\varepsilon.$$

11. 用 Heine 定理证明下列极限不存在：

(1) $\lim\limits_{x\to0}\cos\dfrac{1}{x}$； (2) $\lim\limits_{x\to+\infty}x(1+\sin x)$.

解 (1) 取 $x_n=\dfrac{1}{2n\pi}$，$y_n=\dfrac{1}{2n\pi+\pi/2}$，那么当 $n\to+\infty$时，$x_n\to0$，$y_n=0$，$\cos\dfrac{1}{x_n}=1\to1(n\to+\infty)$，$\cos y_n=0\to0(n\to+\infty)$，由 Heine 定理 $\lim\limits_{x\to0}\cos\dfrac{1}{x}$不存在.

(2) 取 $x_n=2n\pi\to+\infty$，$y_n=2n\pi-\dfrac{\pi}{2}\to+\infty(n\to+\infty)$，那么 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n(1+\sin x_n)=\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=+\infty$，$\lim\limits_{n\to+\infty}y_n(1+\sin y_n)=\lim\limits_{n\to+\infty}0=0$. 则 $\lim\limits_{x\to+\infty}x(1+\sin x)$不存在.

12. 求下列极限：

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x(\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x})}{2x}=\sqrt{2}.$

(6) $$\lim_{x\to 1}\left(\frac{2}{1-x^2}-\frac{3}{1-x^3}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{2(1+x+x^2)-3(1+x)}{(1-x^2)(1+x+x^2)}=\lim_{x\to 1}\frac{2x+1}{(1+x)(1+x+x^2)}=\frac{1}{2}.$$

(8) $$\begin{aligned}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin(x+\Delta x)-\sin x}{\Delta x}&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin x\cos\Delta x+\cos x\sin\Delta x-\sin x}{\Delta x}\\&=\lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{(\cos\Delta x-1)\sin x}{\Delta x}+\cos x\frac{\sin\Delta x}{\Delta x}\right]\\&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-2\sin^2\dfrac{\Delta x}{2}\sin x}{\Delta x}+\cos x\\&=\cos x.\end{aligned}$$

(10) $$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[n]{1+x}-1}{x}(n\in\mathbf{N}_+)$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt[n]{1+x})^n-1}{x\left[(\sqrt[n]{1+x})^{n-1}+(\sqrt[n]{1+x})^{n-2}+\cdots+\sqrt{1+x}+1\right]}=\frac{1}{n}.$$

13. 利用两个重要极限求下列极限：

(2) $$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x(1-\cos x)}{x^3\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{\sin^2\dfrac{x}{2}}{2\left(\dfrac{x}{2}\right)^2}\cdot\frac{1}{\cos x}=\frac{1}{2}.$$

(3) $$\lim_{x\to n\pi}\frac{\sin x}{x-n\pi}=\lim_{x\to n\pi}\frac{(-1)^n\sin(n\pi-x)}{n\pi-x}=(-1)^n.$$

(4) 令 $t=1-x$，$\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\tan\dfrac{\pi x}{2}=\lim\limits_{t\to 0}t\cot\dfrac{\pi}{2}t=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\dfrac{\pi}{2}t}{\sin\dfrac{\pi}{2}t}\cdot\dfrac{\cos\dfrac{\pi t}{2}}{\dfrac{\pi}{2}}=\dfrac{2}{\pi}.$

(7) 因为 $\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\dfrac{\pi}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\pi\dfrac{\sin\dfrac{\pi}{x}}{\dfrac{\pi}{x}}=\pi$. 由 Heine 定理，$\lim\limits_{n\to\infty}2^n\sin\dfrac{\pi}{2^n}=\pi.$

(8) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^{\frac{x}{2}}\right]^2=\mathrm{e}^2$. 由 Heine 定理，$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{3^n}\right)^{3^n}=\mathrm{e}^2.$

14. 讨论下列函数的极限是否存在：

(1) $f(x)=\dfrac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}$，　$x\to 0$；　　(2) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, & x<0\\(1+x)^{\frac{1}{x}}, & x>0,\end{cases}$ $x\to 0$；

(3) $f(x)=\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}$， $x\to\infty$.

解 (1) 由 $\lim\limits_{x\to0^+}2^{\frac{1}{x}}=+\infty$，$\lim\limits_{x\to0^-}2^{\frac{1}{x}}=0$ 知 $f(0+0)=0$，$f(0-0)=1$. 从而 $\lim\limits_{x\to0}f(x)$不存在.

(2) $f(0+0)=\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}$，$f(0-0)=\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}\frac{\sin x}{x}=1$，$f(0+0)\neq f(0-0)$，故 $\lim\limits_{x\to0}f(x)$不存在.

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}=0$.

15. 用夹逼原理证明 $\lim\limits_{x\to0}x\left[\frac{1}{x}\right]=1$，[ ]表示取整.

证 由 $x\neq0$ 时， $\frac{1}{x}-1\leqslant\left[\frac{1}{x}\right]\leqslant\frac{1}{x}$. 于是，当 $x>0$ 时，$1-x\leqslant x\left[\frac{1}{x}\right]\leqslant1$，当 $x<0$ 时，$1\leqslant x\left[\frac{1}{x}\right]\leqslant1-x$，

由夹逼准则，$\lim\limits_{x\to0}x\left[\frac{1}{x}\right]=1$.

16. 试确定常数 a 与 b，使 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+3}{x-2}+ax+b\right)=0$.

解 因为 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+3}{x-2}+ax+b\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\frac{(1+a)x^2-2ax+3}{x-2}+b\right]=0$，

所以 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(1+a)x^2-2ax+3}{x-2}=-b$，于是 $1+a=0$，即 $a=-1$，$b=-2$.

17. 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x-1}{3x+1}\right)^{3x-1}$； (2) $\lim\limits_{x\to1}(2-x)^{\sec\frac{\pi x}{2}}$；

(3) $\lim\limits_{x\to0^+}(\cos\sqrt{x})^{\frac{1}{x}}$； (4) $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{\pi+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{1+\mathrm{e}^{\frac{4}{x}}}+\arctan\frac{1}{x}\right)$.

解 (1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x-1}{3x+1}\right)^{3x-1}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\left[\left(1+\frac{-1}{3x}\right)^{-3x}\right]^{-1}}{\left(1+\frac{1}{3x}\right)^{3x}}\left(\frac{1-\frac{1}{3x}}{1+\frac{1}{3x}}\right)^{-1}=\frac{1}{\mathrm{e}^2}$，

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x-1}{3x+1}\right)^{3x-1}=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{-2}{3x+1}\right)^{\frac{3x+1}{-2}}\right]^{-2}\left(\frac{3x-1}{3x+1}\right)^{-2}=\mathrm{e}^{-2}.$$

(2) 因为$\lim\limits_{x\to1}\left(\sec\frac{\pi}{2}x\right)\ln(2-x)=\lim\limits_{x\to1}\frac{\ln(2-x)}{\cos\frac{\pi}{2}x}$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{1-x}{\sin\frac{\pi}{2}(1-x)}\ln[1+(1-x)]^{\frac{1}{1-x}}$$

$$=\frac{2}{\pi},$$

所以$\lim\limits_{x\to 1}(2-x)^{\sec\frac{\pi}{2}x}=\lim\limits_{x\to 1}e^{(\sec\frac{\pi}{2}x)\ln(2-x)}=e^{\frac{2}{\pi}}$.

(3) 因为$\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{x}\ln\cos\sqrt{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\cos\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x})^2}\ln[1+(\cos\sqrt{x}-1)]^{\frac{1}{\cos\sqrt{x}-1}}=-\frac{1}{2}$,

所以$\lim\limits_{x\to 0^+}(\cos\sqrt{x})^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0^+}e^{\frac{1}{x}\ln(\cos\sqrt{x})}=e^{-\frac{1}{2}}$.

(4) $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\frac{\pi+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\arctan\frac{1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\frac{\pi e^{-\frac{4}{x}}+e^{-\frac{3}{x}}}{e^{-\frac{4}{x}}+1}+\arctan\frac{1}{x}\right)=\frac{\pi}{2}$,

$\lim\limits_{x\to 0^-}\left(\frac{\pi+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\arctan\frac{1}{x}\right)=\pi-\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}$,

故$\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\pi+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\arctan\frac{1}{x}\right)=\frac{\pi}{2}$.

(B)

1. 证明 Dirichlet 函数 $D(x)=\begin{cases}1, x\in\mathbf{Q},\\0, x\in\mathbf{R}\backslash\mathbf{Q}\end{cases}$ 在任何 $x\in\mathbf{R}$ 处的极限都不存在.

证 由实数的稠密性，$\forall a\in\mathbf{Q}$，$\exists\{x_n\}\subseteq\mathbf{Q}$，$\{y_n\}\subseteq\mathbf{R}\backslash\mathbf{Q}$，且 $x_n\to a$，$y_n\to a(n\to+\infty)$，但 $D(x_n)=1$，$D(y_n)=0$，所以 $\forall a\in\mathbf{Q}$，$\lim\limits_{x\to a}D(x)$不存在. 同理可证 $\forall b\in\mathbf{R}\backslash\mathbf{Q}$. $\lim\limits_{x\to b}D(x)$不存在.

2. 设 $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 是周期函数，若 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=a$，则 $f(x)\equiv a$.

证 用反证法. 设 $f(x)\not\equiv a$，不妨设 $f(x_0)=b\neq a$，则可构造一点列$\{x_0+nT\}$. T 为 $f(x)$的最小正周期，则 $f(x_0+nT)=f(x_0)=b$，即 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_0+nT)=b\neq a$ 与 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=a$ 矛盾.

3. 设$[a,b]$是一个有限闭区间，如果 $\forall x_0\in[a,b]$，$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在，证明：$f(x)$在$[a,b]$上有界.

证 反证法. 若 $f(x)$在$[a,b]$上无界，则 $\exists\{x_n\}\subseteq[a,b]$，使 $f(x_n)\to\infty(n\to\infty)$. 又由于$\{x_n\}\subseteq[a,b]$有界数列. 则必存在收敛子列$\{x_{n_k}\}$. 设 $x_{n_k}\to x_0(k\to\infty)$，则 $x_0\in[a,b]$且 $\lim\limits_{k\to+\infty}f(x_{n_k})=\infty$. 与 $\forall x_0\in[a,b]$，$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在矛盾.

4. 设 $f:(a,b)\to\mathbf{R}$ 是无界函数，证明：$\exists\{x_n\}\subseteq(a,b)$，使得 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=\infty$.

证 因为 $f:(a,b)\to\mathbf{R}$ 是无界函数. 故 $\forall n\in\mathbf{N}_+$，$\exists x_n\in(a,b)$，使 $f(x_n)>n$. 这样便得到一个数列 $\{x_n\}\subseteq(a,b)$，使得 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=\infty$.

5. 设 $f:[a,+\infty)\to\mathbf{R}$，证明：$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 存在 $\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0$，$\exists M>0$，使得 $\forall x_1,x_2>M$，恒有 $|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$.

证 必要性 设 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=a$，则 $\forall\varepsilon>0$，$\exists M>0$，当 $x>M$ 时，恒有 $|f(x)-a|<\frac{\varepsilon}{2}$. 任取 $x_1,x_2>M$. 则

$$|f(x_i)-a|<\frac{\varepsilon}{2},\quad i=1,2,$$

于是 $|f(x_1)-f(x_2)|\leqslant|f(x_1)-a|+|f(x_2)-a|<\varepsilon$.

充分性 任取两个数列 $\{x_n\},\{y_n\}\subseteq[a,+\infty)$，且

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}y_n=+\infty.$$

(i) 证明数列 $\{f(x_n)\},\{f(y_n)\}$ 收敛.

由 $\forall\varepsilon>0$，$\exists M>0$，使 $\forall x_1,x_2>M$，有 $|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$. 及 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=+\infty$ 知：对上述的 $M>0$，$\exists N\in\mathbf{N}_+$，使 $\forall m,n>N$ 有 $x_m,x_n>M$. 从而 $|f(x_m)-f(x_n)|<\varepsilon$，即对数列 $\{f(x_n)\}$ 来说：$\forall\varepsilon>0$，$\exists N\in\mathbf{N}_+$，$\forall m,n>N$ 恒有 $|f(x_m)-f(x_n)|<\varepsilon$. 由数列的 Cauchy 收敛原理知数列 $\{f(x_n)\}$ 收敛. 不妨设 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=a$.

同理可证 $\{f(y_n)\}$ 收敛.

(ii) 证明 $\{f(y_n)\}$ 也收敛于 a.

由 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=\lim\limits_{n\to\infty}x_n=+\infty$ 及已知条件 $\forall\varepsilon>0$，$\exists N\in\mathbf{N}_+$，当 $n>N$ 时，使 x_n，$y_n>M$，则 $|f(x_n)-a|<\frac{\varepsilon}{2}$，且 $|f(x_n)-f(y_n)|<\frac{\varepsilon}{2}$，进而

$$|f(y_n)-a|\leqslant|f(x_n)-f(y_n)|+|f(x_n)-a|<\varepsilon,$$

即 $\lim\limits_{n\to\infty}f(y_n)=a$. 由(i)、(ii)，命题得证.

习　题　1.4

(A)

2. 下列说法是否正确？为什么？

(1) 无穷小量是很小很小的数，无穷大量是很大很大的数；

(2) 无穷小量就是数 0；数 0 是无穷小量；

(3) 无穷大量一定是无界变量；

(4) 无界变量一定是无穷大量；

(5) 无穷大量与有界量的乘积是无穷大量；

(6) 无限多个无穷小之和仍为无穷小.

解　(1) 不正确. 无穷小量和无穷大量都是变量，不是常数.

(2) 错误. 无穷小量是以 0 为极限的变量，数 0 是无穷小量. 除此之外，其他任意常数都不是无穷小量.

(3) 正确.

(4) 错误. $y=x\sin\frac{1}{x}$是无界变量，但 $\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\frac{1}{x}$不存在，非无穷大.

(5) 错误. x 无穷大量. $\sin\frac{1}{x}$有界变量. 但 $x\sin\frac{1}{x}$不是无穷大.

(6) 错误. $\forall m\in\mathbf{N}_+$，$\frac{1}{\sqrt{n^2+m}}\to0(n\to+\infty)$都是无穷小量.

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)=1.$$

3. 下列运算是否正确？如有错误，请指出错在何处.

(1) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\frac{x-x}{x^3}=0$；

(2) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin\left(x^2\sin\frac{1}{x}\right)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{x}=\lim\limits_{x\to0}x\sin\frac{1}{x}=0.$

解　(1) 错. 利用无穷小的等价代换求极限时，只能对分子和分母中的无穷小因子进行.

(2) 错误. 这里应用了等价无穷小代换 $\sin\left(x^2\sin\frac{1}{x}\right)\sim x^2\sin\frac{1}{x}(x\to0)$，这是错误的. 因为这里疏忽了无穷小 $\alpha(x)$与 $\beta(x)$作阶的比较时的前提条件：分母 $\beta(x)$不能等于零. 这里 $\beta(x)=x^2\sin\frac{1}{x}$，当 x 取 $x_n=\frac{1}{n\pi}(n\in\mathbf{N}_+)$时，$\beta(x_n)=0$，且 $x_n\to+\infty$.

正确的解法为当 $x\neq0$ 时，$\forall\varepsilon>0$，取 $\delta=\varepsilon$，则 $\forall\,|x|<\delta$ 有

$$\left|\frac{\sin\left(x^2\sin\frac{1}{x}\right)}{x}\right|\leqslant\frac{\left|x^2\sin\frac{1}{x}\right|}{|x|}\leqslant|x|<\varepsilon,$$

故 $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin\left(x^2\sin\frac{1}{x}\right)}{x}=0.$$

4. 当 $x\to 0$ 时，下列函数哪些是 x 的高阶无穷小？哪些是 x 的同阶或等价无穷小？哪些是 x 的低阶无穷小？并指出无穷小的阶数.

(1) $x^4+\sin 2x, x\in\mathbf{R}$；　(2) $\sqrt{x(1-x)}, x\in(0,1)$；

(3) $\frac{2}{\pi}\cos\frac{\pi}{2}(1-x), x\in\mathbf{R}$；　(4) $2x\cos x\sqrt[3]{\tan^2 x}, x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$；

(5) $\csc x-\cot x, x\in(0,\pi)$.

解 (1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^4+\sin 2x}{2x}=1$，所以 $x^4+\sin 2x$ 与 x 同阶.

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{x(1-x)}}=\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{\frac{x}{1-x}}=0$，$\sqrt{x(1-x)}$ 是 x 的低阶无穷小.

因为 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}}=1$，所以 $\sqrt{x(1-x)}$ 是 $\frac{1}{2}$ 阶无穷小.

(3) $$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{2}{\pi}\cos\frac{\pi}{2}(1-x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{\pi}{2}x}{\frac{\pi}{2}x}=1$$，所以 $\frac{2}{\pi}\cos\frac{\pi}{2}(1-x)\sim x$.

(4) $$\lim_{x\to 0}\frac{2x\cos x\sqrt[3]{\tan^2 x}}{x^{\frac{5}{3}}}=\lim_{x\to 0}2\cos x\left(\frac{\tan x}{x}\right)^{\frac{2}{3}}=2,$$

所以 $2x\cos x\sqrt[3]{\tan^2 x}$ 是 x 的高阶无穷小，阶为 $\frac{5}{3}$.

(5) 因为 $$\lim_{x\to 0}\frac{\csc x-\cot x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}\cdot\frac{x}{\sin x}=\frac{1}{2},$$

所以 $\csc x-\cot x$ 与 x 同阶.

6. 证明下列关系式：

(1) $\arcsin x=x+o(x), x\to 0$；

(4) $\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}\sim\frac{1}{4}x^3, x\to 0$；

(5) $\sqrt{x+\sqrt{1+\sqrt{x}}}\sim\sqrt{x}, x\to+\infty$；

(6) $1+\cos(\pi x)\sim\frac{\pi^2}{2}(x-1)^2, x\to 1$.

解 (1) 令 $t=\arcsin x, -\frac{\pi}{2}\leqslant t\leqslant\frac{\pi}{2}$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=\lim\limits_{t\to 0}\frac{t}{\sin t}=1$，

所以 $\arcsin x\sim x$，即 $x\to 0$，$\arcsin x=x+o(x)$.

(4) $$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{\frac{1}{4}x^3}=4\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3\left[\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x}\right]}$$

$$=4\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1-\cos x}{x^2}\cdot\frac{1}{\cos x}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x}}=1.$$

(5) 因为 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{1+\sqrt{\dfrac{1}{x}+\sqrt{\dfrac{1}{x^3}}}}=1$,

所以$\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}\sim\sqrt{x}$, $x\to+\infty$.

(6) 因为 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1+\cos\pi x}{\dfrac{\pi^2}{2}(x-1)^2}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2}{\pi^2}\dfrac{2\cos^2\dfrac{\pi}{2}x}{(x-1)^2}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{4}{\pi^2}\cdot\dfrac{\sin^2\dfrac{\pi}{2}(1-x)}{(1-x)^2}=1$,

所以 $1+\cos\pi x\sim\dfrac{\pi^2}{2}(x-1)^2$, $x\to 1$.

7. 利用无穷小的等价代换求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{\sin^2 x}$;　　(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x^2-2(1-\cos^2 x)}{3x^3+4\tan^2 x}$;

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\sin^2 x}-1}{x\tan x}$;　　(4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan(\tan x)}{\sin 2x}$;

(5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\sqrt[3]{1+\tan x}-1)(\sqrt{1+x^2}-1)}{\tan x-\sin x}$;　　(6) $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{(1-\sqrt{\cos x})\tan x}{(1-\cos x)^{\frac{3}{2}}}$.

解　(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{\sin^2 x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{1}{2}x^2}{\sin^2 x}=\dfrac{1}{2}$.

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x^2-2(1-\cos^2 x)}{3x^3+4\tan^2 x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x^2-2\sin^2 x}{3x^3+4\tan^2 x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5-2\dfrac{\sin^2 x}{x^2}}{3x+4\dfrac{\tan^2 x}{x^2}}=\dfrac{3}{4}$.

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\sin^2 x}-1}{x\tan x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{1}{2}\sin^2 x}{x^2}=\dfrac{1}{2}$.

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan(\tan x)}{\sin 2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{2x}=\dfrac{1}{2}$.

(5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\sqrt[3]{1+\tan x}-1)(\sqrt{1+x^2}-1)}{\tan x-\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(\dfrac{1}{3}\tan x\right)\cdot\left(\dfrac{1}{2}x^2\right)}{\dfrac{1}{2}x^3}=\dfrac{1}{3}$.

$\left(\text{由第 6 题(4)知}: x\to 0, \tan x-\sin x\sim\dfrac{1}{2}x^3\right)$

(6) $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{(1-\sqrt{\cos x})\tan x}{(1-\cos x)^{\frac{3}{2}}}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{(1-\sqrt{1+(\cos x-1)})\tan x}{(1-\cos x)^{\frac{3}{2}}}$

$$=\lim_{x\to0^-}\frac{-\frac{1}{2}(\cos x-1)x}{\left(\frac{1}{2}x^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

$$=\lim_{x\to0^-}\frac{-\frac{1}{4}x^2x}{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{2}}x^3}=-\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

(B)

1. 设 P 是曲线 $y=f(x)$ 上的动点. 若点 P 沿该曲线无限远离坐标原点时，它到某定直线 L 的距离趋于 0，则称 L 为曲线 $y=f(x)$ 的**渐近线**. 若直线 L 的斜率 $k\neq0$，称 L 为**斜渐近线**.

(1) 证明：直线 $y=kx+b$ 为曲线 $y=f(x)$ 斜（或水平）渐近线充分必要条件为

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x},\qquad b=\lim_{x\to\infty}(f(x)-kx).$$

(2) 求曲线 $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x+1}(x\in\mathbf{R}\setminus\{-1\})$ 的斜渐近线方程.

证 (1) $f(x)$ 的点 $P(x,f(x))$ 到直线 $y=kx+b$ 的距离

$$d=\frac{|f(x)-kx-b|}{\sqrt{1+k^2}}.$$

且 $y=kx+b$ 为 $y=f(x)$ 的渐近线 $\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to\infty}d=0\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-kx-b)=0$.

充分性　由于 $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-kx)=b$，所以 $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-kx-b)=0$.

必要性　因为 $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-kx-b)=0$，所以 $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-kx)=b$.

因为 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$，所以 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}[f(x)-kx-b]=0$. 所以 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{f(x)}{x}-k-\dfrac{b}{x}\right)=0$. 从而 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=k$.

(2) $k=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+1}{x(x+1)}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x}}=1$，$b=\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-kx]=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\dfrac{x^2+1}{x+1}-x\right]=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-x}{1+x}=-1$，所以 $y=f(x)$ 的斜渐近线为 $y=x-1$.

2. 确定 a,b,c 的值，使下列极限等式成立：

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2-x+1}-ax+b)=0$；

(2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{a(x-1)^2+b(x-1)+c-\sqrt{x^2+3}}{(x-1)^2}=0$.

解　(1) 如果 $a\leqslant 0$. 则无论 b 取何值 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\sqrt{x^2-x+1}-ax+b\right]=+\infty$，所以 $a>0$，由 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\sqrt{x^2-x+1}-ax+b\right]=0$ 可知 $b=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[ax-\sqrt{x^2-x+1}\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(a^2-1)x^2+x-1}{ax+\sqrt{x^2-x+1}}$存在. 所以 $a=1$, $b=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x-1}{x+\sqrt{x^2-x+1}}=\dfrac{1}{2}$.

(2) 由 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{a(x-1)^2+b(x-1)+c-\sqrt{x^2+3}}{(x-1)^2}=0$ 知 $f(x)=a(x-1)^2+b(x-1)+c-\sqrt{x^2+3}$是$(x-1)^2$ 的高阶无穷小，所以 $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=0\Rightarrow c=2$，$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{x-1}=0\Rightarrow b=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x^2+3}-2}{x-1}=\dfrac{1}{2}$. 将 $c=2$，$b=\dfrac{1}{2}$代入 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{(x-1)^2}=0$ 可得 $a=$

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x^2+3}-2-\frac{1}{2}(x-1)}{(x-1)^2}=\lim_{x\to 1}\frac{2\sqrt{x^2+3}-(x+3)}{2(x-1)^2}=\lim_{x\to 1}\frac{3}{2(2\sqrt{x^2+3}+x+3)}=\frac{3}{16}.$$

习　题　1.5

(A)

2. 两个在 x_0 处不连续函数之和在 x_0 是否一定不连续？若其中一个在 x_0 处连续，一个在 x_0 处不连续，则它们的和在 x_0 处是否一定不连续？

证　两个在 x_0 处不连续函数之和在 x_0 不一定连续，不一定不连续.

如：$f(x)=\dfrac{1}{x}$，$g(x)=-\dfrac{1}{x}+\sin x$，$h(x)=\sin\dfrac{1}{x}$在 $x_0=0$ 处均不连续. 但 $f(x)+g(x)$在 $x_0=0$ 处连续，$f(x)+h(x)$在 $x_0=0$ 处不连续.

如果一个函数在 x_0 处连续，另一个不连续，两个之和一定不连续.

3. 证明：若 f 连续，则$|f|$也连续，逆命题成立吗？

证　因为 $\forall\varepsilon>0$，由 f 在 x_0 处连续可知：$\exists\delta>0$，使得 $\forall x$，只要 $|x-x_0|<\delta$，有 $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$，从而

$$\big||f(x)|-|f(x_0)|\big|\leqslant|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon,$$

故 $\lim\limits_{x\to x_0}|f(x)|=|f(x_0)|$. 命题得证. 逆命题不成立，如 $f(x)=\begin{cases}1, & x\geqslant 0,\\ -1, & x<0,\end{cases}$ $|f(x)|$在 $x=0$ 连续，但 $f(x)$在 $x=0$ 不连续.

4. 设 $f,g\in C[a,b]$，记

$$\varphi(x)=\max_{x\in[a,b]}\{f(x),g(x)\},\psi(x)=\min_{x\in[a,b]}\{f(x),g(x)\}$$

证明：$\varphi,\psi\in C[a,b]$.

证 $\varphi(x)=\max\limits_{x\in[a,b]}\{f(x),g(x)\}=\dfrac{f(x)+g(x)+|f(x)-g(x)|}{2}$,

$$\psi(x)=\min_{x\in[a,b]}\{f(x),g(x)\}=\frac{f(x)+g(x)-|f(x)-g(x)|}{2}.$$

因为 $f(x),g(x)\in C[a,b]$，由连续函数的有理运算性质. 及第 3 题可知 $\varphi(x)$，$\psi(x)\in C[a,b]$.

5. 设函数 f 在 $(-\infty,+\infty)$ 上满足 Lipschitz 条件：

$\exists L>0$，使得 $\forall x,y\in(-\infty,+\infty)$，恒有 $|f(x)-f(y)|\leqslant L|x-y|$，

证明：f 在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致连续.

证 由函数 f 在 $(-\infty,+\infty)$ 上满足 Lipschitz 条件可知：$\forall\varepsilon>0$，取 $\delta=\dfrac{\varepsilon}{L}>0$，当 $|x_1-x_2|<\delta$ 时，有 $|f(x_1)-f(x_2)|\leqslant L|x_1-x_2|<\varepsilon$，所以 f 在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致连续.

7. 设函数 $f:I\to\mathbf{R}$ 在 $x_0\in I$ 处连续，且 $f(x_0)>0$. 证明：存在 x_0 的一个邻域，在该邻域内，$f(x)\geqslant q>0$.

证 取 $\varepsilon_0=\dfrac{1}{2}f(x_0)>0$，由 f 的连续性，$\exists\ \delta_0>0$，$\forall x\in U(x_0,\delta)$，恒有 $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon_0$. 即 $f(x_0)-\varepsilon_0<f(x)<\varepsilon_0+f(x_0)$，取 $q=f(x_0)-\varepsilon_0=\dfrac{1}{2}f(x_0)>0$ 即可.

8. 讨论下列函数在指定点处的连续性. 若是间断点，说明它的类型：

(3) $f(x)=2^{\frac{1}{x-3}},x=3$；　　(4) $f(x)=\begin{cases}x\sin\dfrac{1}{x}, & x<0,\\ 1, & x\geqslant 0,\end{cases}\ x=0.$

解 (3) $f(3+0)=\lim\limits_{x\to 3^+}2^{\frac{1}{x-3}}=+\infty$，$f(3-0)=0$，所以 $x=3$ 为第二类间断点.

(4) $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}x\sin\dfrac{1}{x}=0$，$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=1$，所以 $x=0$ 为跳跃间断点.

9. 讨论下列函数的连续性. 若有间断点，说明间断点的类型：

(2) $f(x)=e^{x+\frac{1}{x}}$；　　(4) $f(x)=\begin{cases}e^{-\frac{1}{x^2}}, & x\neq 0,\\ 2, & x=0;\end{cases}$

(5) $f(x)=\begin{cases}\sin\dfrac{1}{x^2-1}, & x<0,\\ \dfrac{x^2-1}{\cos\dfrac{\pi}{2}x}, & x\geqslant 0.\end{cases}$

解　(2) $f(x)=e^{x+\frac{1}{x}}$ 在 $x\neq 0$ 的所有点处连续.

$f(0+0)=\lim\limits_{x\to 0^+}e^{x+\frac{1}{x}}=+\infty$，$f(0-0)=\lim\limits_{x\to 0^-}e^{x+\frac{1}{x}}=0$. $x=0$ 为第二类间断点.

(4) $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}e^{-\frac{1}{x^2}}=0\neq f(0)=2$，$x=0$ 为可去间断点. $\forall x\neq 0$，$f(x)$连续.

(5) $\lim\limits_{x\to -1}\sin\dfrac{1}{x^2-1}$不存在，$x=-1$ 为第二类间断点.

$f(0+0)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x^2-1}{\cos\dfrac{\pi}{2}x}=-1$，$f(0-0)=\lim\limits_{x\to 0^-}\sin\dfrac{1}{x^2-1}=\sin(-1)$，故 $x=0$ 为 $f(x)$的跳跃间断点.

因为 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{\cos\dfrac{\pi}{2}x}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x+1)}{\sin\dfrac{\pi}{2}(1-x)}=-\dfrac{4}{\pi}$，$x=1$ 为 $f(x)$ 可去间断点. 由于 $\lim\limits_{x\to 2k+1}\dfrac{x^2-1}{\cos\dfrac{\pi}{2}x}(k=1,2,\cdots)$不存在. 故 $x=(2k+1)(k\in\mathbf{N}_+)$为 $f(x)$ 的第二类间断点.

$f(x)$在$(-\infty,-1)\cup(-1,0)\cup(0,1)\cup\left(\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}(2k-1,2k+1)\right)$上连续

10. 求下列函数的极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\arctan x}{\sqrt{x+\ln x}}$；　　(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+2x)}{\sin 3x}$；

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\cot x-\dfrac{e^{2x}}{\sin x}\right)$；　　(4) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$；

(5) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(1+\cos x)^{\tan x}$

解　(1) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\arctan x}{\sqrt{x+\ln x}}=\dfrac{\pi}{4}$.

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+2x)}{\sin 3x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\ln(1+2x)}{2x}\cdot\dfrac{3x}{\sin 3x}\cdot\dfrac{2}{3}\right)=\dfrac{2}{3}$.

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\cot x-\dfrac{e^{2x}}{\sin x}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-1+1-e^{2x}}{\sin x}$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\cos x-1}{x}+\frac{1-e^{2x}}{2x}\cdot 2\right)\frac{x}{\sin x}=-2.$$

(4) 因为 $\lim\limits_{x\to 0}[1+(\cos x-1)]^{\frac{1}{\cos x-1}}=\mathrm{e}$，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-1}{x^2}=-\dfrac{1}{2}$，

所以 $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to 0}\left[(1+\cos x-1)^{\frac{1}{\cos x-1}}\right]^{\frac{\cos x-1}{x^2}}=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$.

(5) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(1+\cos x)^{\tan x}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left[(1+\cos x)^{\frac{1}{\cos x}}\right]^{\sin x}=\mathrm{e}$.

11. 证明：

(1) $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^{x_0+\Delta x}-\mathrm{e}^{x_0}}{\Delta x}=\mathrm{e}^{x_0}$；　　(2) $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{(x_0+\Delta x)^{\alpha}-x_0^{\alpha}}{\Delta x}=\alpha x_0^{\alpha-1}(\alpha\in\mathbf{R})$.

解　(1) $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^{x_0+\Delta x}-\mathrm{e}^{x_0}}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\mathrm{e}^{x_0}\dfrac{\mathrm{e}^{\Delta x}-1}{\Delta x}=\mathrm{e}^{x_0}$.

(2) $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{(x_0+\Delta x)^{\alpha}-x_0^{\alpha}}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}x_0^{\alpha}\dfrac{\left(1+\dfrac{\Delta x}{x_0}\right)^{\alpha}-1}{\Delta x}=x_0^{\alpha}\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\alpha\cdot\dfrac{\Delta x}{x_0}}{\Delta x}=\alpha x_0^{\alpha-1}$.

12. 试确定常数 a,b，使下列函数在 $x=0$ 处连续：

(2) $f(x)=\begin{cases}\arctan\dfrac{1}{x}, & x<0,\\ a+\sqrt{x}, & x\geqslant 0;\end{cases}$　　(3) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin ax}{x}, & x>0,\\ 2, & x=0,\\ \dfrac{1}{bx}\ln(1-3x), & x<0.\end{cases}$

解　(2) $f(0+0)=a$，$f(0-0)=\lim\limits_{x\to 0^-}\arctan\dfrac{1}{x}=-\dfrac{\pi}{2}$.

因为 $f(0)=a=f(0+0)=f(0-0)$ 时，即 $a=-\dfrac{\pi}{2}$. $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

(3) $f(0+0)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sin ax}{x}=a$，$f(0-0)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{bx}\ln(1-3x)=-\dfrac{3}{b}$，
$f(0)=2$，故 $a=2$，$b=-\dfrac{3}{2}$.

14. 用介值定理证明：当 n 为奇数时，方程

$$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0=0$$

至少有一个根，其中 $a_i\in\mathbf{R}$ 为常数$(i=0,1,\cdots,n)$，$a_n\neq 0$.

证　令 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$，不妨设 $a_n>0$，由于 n 为奇数，$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$，$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$，于是存在 $x_1>0>x_2$，使 $f(x_1)f(x_2)<0$，由零点定理在 $[x_2,x_1]$ 内至少存在一点 ξ，使 $f(\xi)=0$.

15. 设 $f\in C[a,b]$，$a<x_1<x_2<\cdots<x_n<b$. 证明至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使

$$f(\xi)=\frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{n}\lambda_i f(x_i),$$

其中 $\lambda=\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i$，且 $\lambda_i>0(i=1,2,\cdots,n)$.

证　因为 $f\in C[a,b]$ 且 $a<x_1<x_2<\cdots<x_n<b$，所以 $f(x)\in C[x_1,x_n]$，由定理 5.5 $f(x)$ 在 $[x_1,x_n]$ 上必取得最大值 M 与最小值 m. 且 $m\leqslant f(x_i)\leqslant M, i=1,2,\cdots,n$. 于是 $\left(\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i\right)m\leqslant\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i f(x_i)\leqslant\left(\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i\right)M$，即 $m\leqslant\dfrac{1}{\lambda}\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i f(x_i)\leqslant M$.

由介值定理，至少存在一点 $\xi\in[x_1,x_2]\subset(a,b)$ 使 $f(\xi)=\dfrac{1}{\lambda}\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i f(x_i)$.

(B)

1. 设函数 $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 满足可加性，即对任何 $x_1,x_2\in\mathbf{R}$，$f(x_1+x_2)=f(x_1)+f(x_2)$，并且 f 在 $x=0$ 处连续，证明 f 在 $\mathbf{R}$ 上连续.

证　由 f 的可加性知 $f(0)=f(0+0)=f(0)+f(0)$，即 $f(0)=0$. 又 f 在 $x=0$ 连续. 知 $\forall x_0\in\mathbf{R}$，恒有 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}f[(x-x_0)+x_0]=\lim\limits_{x\to x_0}[f(x-x_0)+f(x_0)]=f(x_0)$. 故 f 在 x_0 处连续，由 x_0 的任意性 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上连续.

2. 设 $f\in C[a,+\infty)$，并且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 存在，证明 f 在 $[a,+\infty)$ 上有界.

证　由 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 存在（不妨设为 A）知：对 $\varepsilon_0=1>0$，$\exists M>0$，使 $\forall x\in(M,+\infty)$，恒有 $|f(x)-A|<1$，即 $\forall x\in(M,+\infty)$，$A-1<f(x)<1+A$，于是 $f(x)$ 在 $(M,+\infty)$ 有界. 又由 $f(x)\in C[a,+\infty)$ 知，对上述的 M，$f(x)\in C[a,M]$，即 $f(x)$ 在 $[a,M]$ 上有界. 故 $f(x)$ 在 $[a,M]\cup(M,+\infty)=[a,+\infty)$ 上有界.

3. 设 $f\in C(a,b)$，并且 $f(a+0)$ 与 $f(b-0)$ 存在（包括极限为无穷大）且异号，证明：在 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使 $f(\xi)=0$.

证　不妨设 $f(a+0)>0$，则 $f(b-0)<0$，由极限的局部保号性可知：$\exists x_1,x_2$，$a<x_1<x_2<b$ 使 $f(x_1)>0$，$f(x_2)<0$. 因为 $f\in C(a,b)$，所以 $f\in C[x_1,x_2]$. 由介值定理知：至少存在一点 $\xi\in(x_1,x_2)\subset(a,b)$，使 $f(\xi)=0$.

4. 设 $f\in C(-\infty,+\infty)$，并且 f 是奇函数，证明方程 $f(x)=0$ 至少有一个根. 若 f 是严格单调的，则 $x=0$ 是它的唯一根.

证　因为 $f(x)$ 是奇函数，所以 $f(-x)=-f(x)$，则 $f(0)=0$.

如果 f 是严格单增的连续函数，那么 $\forall x>0$，$f(x)>f(0)=0$，而 $\forall x<0$，$f(x)<f(0)=0$，即 $\forall x\neq 0$. $f(x)\neq 0$. 故 $x=0$ 是 $f(x)=0$ 唯一根. 同理可证 $f(x)$ 严格单减函数. $x=0$ 仍是 $f(x)=0$ 的唯一根.

5. 证明：若 $a_n>|a_{n-1}|+|a_{n-2}|+\cdots+|a_1|+|a_0|$，则方程

$$a_n\cos nx+a_{n-1}\cos(n-1)x+\cdots+a_1\cos x+a_0=0$$

在 $(0,2\pi)$ 内至少有 $2n$ 个根.

证　令 $f(x)=a_n\cos nx+a_{n-1}\cos(n-1)x+\cdots+a_1\cos x+a_0$. 将 $(0,2\pi)$ 平均分成 $2n$ 个小区间，其中第 k 个子区间为 $\left[\dfrac{(k-1)\pi}{n},\dfrac{k\pi}{n}\right]$. 可以证明：

$f\left(\frac{k-1}{n}\pi\right)\cdot f\left(\frac{k\pi}{n}\right)<0$. 从而至少存在一点 $\xi_k\in\left(\frac{(k-1)}{n}\pi,\frac{k\pi}{n}\right)$ 使 $f(\xi_k)=0$. 即在 $(0,2\pi)$ 上 $f(x)=0$ 至少有 $2n$ 个根.

下面证明: $f\left(\frac{k-1}{n}\pi\right)\cdot f\left(\frac{k}{n}\pi\right)<0$.

如 k 为偶数,则 $f\left(\frac{k}{n}\pi\right)=a_n+a_{n-1}\cos\frac{(n-1)k\pi}{n}+\cdots+a_1\cos\frac{k\pi}{n}+a_0\geqslant a_n-a_{n-1}-\cdots-a_1+a_0\geqslant a_n-(|a_{n-1}|+\cdots+|a_1|+|a_0|)>0$,而 $f\left(\frac{k-1}{n}\pi\right)=-a_n+a_{n-1}\cos\frac{(n-1)(k-1)}{n}\pi+\cdots+a_1\cos\frac{(k-1)\pi}{n}+a_0\leqslant -a_n+|a_{n-1}|+\cdots+|a_1|+|a_0|<0$.

故 k 为偶数时, $f\left(\frac{k-1}{n}\pi\right)\cdot f\left(\frac{k\pi}{n}\right)<0$.

同理可证 k 为奇数时,结论成立.

综合练习题

1. 设有一对新出生的兔子,两个月之后成年. 从第三个月开始,每个月产一对小兔,且新生的每对小兔也在出生两个月之后成年,第三个月开始每月生一对小兔. 假定出生的兔均无死亡,(1)问一年后共有几对兔子? (2)问 n 个月之后有多少对兔子? (3)若 n 个月之后有 F_n 对兔子,试求 $\lim\limits_{n\to\infty}=\frac{F_n}{F_{n+1}}$(题中所讲的一对兔子均是雌雄异性的).

说明:该问题是意大利数学家 Fibonacci 于 13 世纪初(1202 年)研究兔子繁殖过程中数量变化规律时提出来的,其中的数列 $\{F_n\}$ 被后人称为 Fibonacci 数列. 有趣的是,极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{F_n}{F_{n+1}}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}\approx 0.618$ 正是"黄金分割"数,在优选法及许多领域得到很多新的应用.

解 第 n 月有小兔 F_n 对,且这 F_n 对小兔到第 $n+1$ 月均成熟,所以第 $n+2$ 月新生小兔 F_n 对,故 $F_{n+2}=F_{n+1}+F_n$.

(1) $F_1=1,F_2=1,F_3=2,F_4=3,F_5=5,F_6=8,F_7=13,F_8=21,F_9=34,F_{10}=55,F_{11}=89,F_{12}=144,F_{13}=233$.

(2) 差分方程 $F_{n+2}=F_{n+1}+F_n$ 的特征方程为 $x^2=x+1$,解之得特征根 $x_1=\frac{1+\sqrt{5}}{2},x_2=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$,则 $F_n=c_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n+c_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$,由 $F_1=1,F_2=$

1 得 $c_1=\frac{1}{\sqrt{5}}, c_2=-\frac{1}{\sqrt{5}}$，所以

$$F_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right].$$

（3）$$\lim_{n\to\infty}\frac{F_n}{F_{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(1+\sqrt{5})^n-(1-\sqrt{5})^n}{2^n}\cdot\frac{2^{n+1}}{(1+\sqrt{5})^{n+1}-(1-\sqrt{5})^{n+1}}$$

$$=2\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{5}+1}\left[\frac{1-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^n}{1-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^{n+1}}\right]=\frac{2}{\sqrt{5}+1}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

2. 所谓**蛛网模型**是在研究市场经济的一种循环现象中提出来的，现以猪肉的产量与价格之间的关系为例来说明. 若去年猪肉的产量供过于求，它的价格就会降低；价格降低会使今年养猪者减少，使猪肉的产量供不应求，于是肉价上扬；价格上扬又使明年猪肉产量增加，造成新的供过于求，如此循环下去. 设 x_n 为第 n 年的猪肉产量，y_n 为其价格，由于当年的产量确定当年价格，所以 $y_n=f(x_n)$，称为**需求函数**. 而第 n 年的价格又决定第 $n+1$ 年的产量，故 $x_{n+1}=g(y_n)$，称为**供应函数**. 产销关系呈现出如下过程：

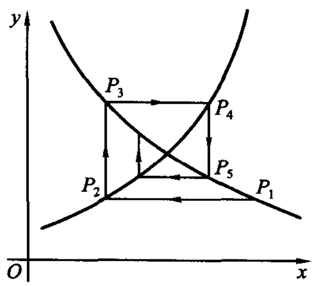
$$x_1\to y_1\to x_2\to y_2\to x_3\to y_3\to x_4\to\cdots.$$

在平面直角坐标系中描出下面的点列：

$$\begin{array}{ll} P_1(x_1,y_1), & P_2(x_2,y_1), \\ P_3(x_2,y_2), & P_4(x_3,y_2), \\ \cdots & \cdots \\ P_{2k-1}(x_k,y_k), & P_{2k}(x_{k+1},y_k),(k=1,2,\cdots), \end{array}$$

其中所有的点 P_{2k} 都满足 $x=g(y)$，P_{2x-1} 满足 $y=f(x)$，如图所示. 由于这种关系很像一个蛛网，所以称为蛛网模型.

据统计，某城市 1991 年猪肉产量为 30 万吨，肉价为 6 元/kg；1992 年猪肉产量为 25 万吨，肉价为 8 元/kg. 已知 1993 年的猪肉产量为 28 万吨. 若维持目前的消费水平和生产模式，并假定猪肉当年的价格与当年的产量之间、来年的产量与当年的价格之间都是线性关系.



（第 2 题图）

（1）试确定需求函数 $y_n=f(x_n)$ 和供应函数 $x_{n+1}=g(y_n)$；

（2）求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_{n+1}$ 与 $\lim\limits_{n\to\infty}y_{n+1}$；

（3）问若干年后猪肉的产量与价格是否会趋于稳定？若能够稳定，求出稳定的产量和价格.

解 (1) 设 $x_{n+1}=ay_n+c, y_n=-bx_n+d$. 将 $x_1=30, y_1=6, x_2=25, y_2=8, x_3=28$ 代入上式，则 $a=\frac{3}{2}, c=16, b=\frac{2}{5}, d=18$. 即需求函数为 $y_n=-\frac{2}{5}x_n+18$，供应函数 $x_{n+1}=\frac{3}{2}y_n+16$.

(2) 将 $y_n=-\frac{2}{5}x_n+18$ 代入 $x_{n+1}=\frac{3}{2}y_n+16$ 得

$$
\begin{aligned}
x_{n+1}&=-\frac{3}{5}x_n+43\\
&=\left(-\frac{3}{5}\right)\left[-\frac{3}{5}x_{n-1}+43\right]+43=\left(-\frac{3}{5}\right)^2x_{n-1}+43\left[1+\left(-\frac{3}{5}\right)\right]\\
&=\cdots\\
&=\left(-\frac{3}{5}\right)^nx_1+\left[1+\left(-\frac{3}{5}\right)+\cdots+\left(-\frac{3}{5}\right)^{n-1}\right]\times 43,
\end{aligned}
$$

$$
x_{n+1}=\left(-\frac{3}{5}\right)^nx_1+\frac{1-\left(-\frac{3}{5}\right)^n}{1+\frac{3}{5}}\times 43,
$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}x_{n+1}=\frac{5}{8}\times 43=\frac{215}{8}$，进而 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=-\frac{2}{5}\lim\limits_{n\to\infty}x_n+18=\frac{29}{4}$.

(3) 经过若干年后猪肉的产量与价格将趋于稳定，稳定后的价格为 $\frac{29}{4}=7.25$ 元/kg. 产量为 $\frac{215}{8}$ 万吨.

第二章　一元函数微分学及其应用

习　题　2.1

(A)

1. 用导数定义求下列函数的导数：

(1) $f(x)=\cos x$；　　(2) $f(x)=\ln x$；

(3) $f(x)=\begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0, \\ 0, & x=0, \end{cases}$ 求 $f'(0)$；　　(4) $f(x)=x|x|$，求 $f'(0)$.

解　(1) $(\cos x)'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\cos(x+\Delta x)-\cos x}{\Delta x}$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-2\sin\left(x+\dfrac{\Delta x}{2}\right)\sin\dfrac{\Delta x}{2}}{\Delta x}=-\sin x.$$

(2) $(\ln x)'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\ln(x+\Delta x)-\ln x}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{1}{\Delta x}\ln\left(1+\dfrac{\Delta x}{x}\right)$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{x}\ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}=\frac{1}{x}.$$

(3) $f'(0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta x^2\sin\dfrac{1}{\Delta x}}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta x\sin\dfrac{1}{\Delta x}=0.$

(4) $f'(0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta x|\Delta x|-0}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}|\Delta x|=0.$

2. 已知函数 f 在 x_0 处可导，求下列极限：

(1) $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0-\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$；　　(2) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{h}$；

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}n\left[f\left(x_0+\dfrac{1}{n}\right)-f(x_0)\right]$；　　(4) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{x_0f(x)-xf(x_0)}{x-x_0}$.

解 (1) $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0-\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=-\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0-\Delta x)-f(x_0)}{-\Delta x}=-f'(x_0)$.

(2) $$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\left[\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}+\frac{f(x_0-h)-f(x_0)}{-h}\right]=2f'(x_0).$$

(3) $$\lim_{n\to\infty} n\left[f\left(x_0+\frac{1}{n}\right)-f(x_0)\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{f\left(x_0+\frac{1}{n}\right)-f(x_0)}{\frac{1}{n}}=f'(x_0).$$

(4) $$\lim_{x\to x_0}\frac{x_0f(x)-xf(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\left[\frac{x_0[f(x)-f(x_0)]}{x-x_0}-f(x_0)\right]$$
$$=x_0f'(x_0)-f(x_0).$$

5. 问曲线 $y=x^{3/2}$ 上哪一点的切线与直线 $y=3x-1$ 平行?

解 曲线 $y=x^{3/2}$ 上点 $P(x_0,x_0^{3/2})$处切线的斜率为 $k=\frac{3}{2}\sqrt{x_0}$. 令$\frac{3}{2}\sqrt{x_0}=3$ 得 $x_0=4$. 所以(4,8)处切线平行于 $y=3x-1$.

7. 设 f 是偶函数,且 $f'(0)$存在,证明 $f'(0)=0$.

证 因为 f 为偶函数,所以 $f(-x)=f(x)$,从而
$$f'(0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(-\Delta x)-f(0)}{\Delta x}$$
$$=-\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(-\Delta x)-f(0)}{-\Delta x}=-f'(0)$$

8. 设函数 φ 在 $x=a$ 处连续,$f(x)=(x-a)\varphi(x)$,证明:函数 f 在 $x=a$ 处可导;若 $g(x)=|x-a|\varphi(x)$,函数 g 在 $x=a$ 处可导吗?

解 因为$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta x\varphi(a+\Delta x)-0\cdot\varphi(a)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\varphi(a+\Delta x)=\varphi(a)$,所以 f 在 a 处可导. 且 $f'(a)=\varphi(a)$.

因为$$g'_+(a)=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{|\Delta x|\varphi(a+\Delta x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^+}\varphi(a+\Delta x)=\varphi(a),$$
$$g'_-(a)=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{|\Delta x|\varphi(a+\Delta x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{-\Delta x\varphi(a+\Delta x)}{\Delta x}=-\varphi(a),$$
所以 $g(x)=|x-a|\varphi(x)$在 $x=a$ 处不可导.

10. 设 $f(x)=\begin{cases}\sin x, & x<0,\\ x, & x\geqslant 0,\end{cases}$ 试求 $f'(x)$.

解 $x<0$,$f'(x)=(\sin x)'=\cos x$;$x>0$,$f'(x)=(x)'=1$,$x=0$,

$$f'_+(0)=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{\Delta x}{\Delta x}=1,$$

$f'_-(0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\dfrac{f(\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\dfrac{\sin\Delta x}{\Delta x}=1$,从而 $f'(0)=1$. 即

$$f'(x)=\begin{cases}\cos x, & x<0,\\ 1, & x\geqslant 0.\end{cases}$$

11. 试确定 a,b 的值,使函数

$$f(x)=\begin{cases}x^2, & x\leqslant 1,\\ ax+b, & x>1\end{cases}$$

在 $x=1$ 处连续且可导.

解　因为 $f(1+0)=\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(ax+b)=a+b$;$f(1-0)=\lim\limits_{x\to 1^-}x^2=1$,

由 $f(x)$在 $x=1$ 连续得 $a+b=1$. 又因为$f'_+(1)=\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\dfrac{f(\Delta x+1)-f(1)}{\Delta x}=$

$\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\dfrac{a(\Delta x+1)+b-1}{\Delta x}=a$,

$$f'_-(1)=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(\Delta x+1)-f(1)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{(1+\Delta x)^2-1}{\Delta x}=2,$$

所以由 $f(x)$在 $x=1$ 处可导知:$a=2$,进而 $b=-1$.

12. 已知

$$f(x)=\begin{cases}x^2, & x\geqslant 0,\\ -x, & x<0,\end{cases}$$

求 $f'_+(0)$,$f'_-(0)$,问 $f'(0)$是否存在?

解　$f'_+(0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\dfrac{f(\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\dfrac{\Delta x^2-0}{\Delta x}=0$,

$$f'_-(0)=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{-(\Delta x)-0}{\Delta x}=-1,$$

所以 $f'(0)$不存在.

13. 设物体绕定轴旋转,转角 θ 是时间 t 的函数 $\theta=\theta(t)$. 若旋转是非匀速的,试确定物体在 t_0 时刻的角速度.

解　设 t 时刻物体的角速度为 $\omega(t)$,则从 t_0 时刻到 $t_0+\Delta t$ 的平均角速度为 $\bar{\omega}=\dfrac{\theta(t_0+\Delta t)-\theta(t_0)}{\Delta t}$,所以 $\omega(t)=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\bar{\omega}=\theta'(t_0)$.

14. 设质点在力的作用下所作的功 $W=f(t)$,若功 W 随时间 t 的变化是非均匀的,试求 t_0 时刻的瞬时功率.

解　t_0 时刻的瞬时功率 $P(t_0)=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{W(t_0+\Delta t)-W(t_0)}{\Delta t}=W'(t_0)$.

15. 设 $N=N(x)$ 表示 x 个劳动力所生产的某产品的数量，若每个劳动力生产的产品数量相同，则 $\dfrac{N}{x}$ 是常数，称为**劳动生产率**. 实际上，产品的产量 N 并不是随劳动力 x 的增加而均匀增长的. 试求劳动力数量为 x_0 时的劳动生产率(称为**边际劳动生产率**).

解 劳动力数量为 x_0 时的劳动生产率 $P(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{N(x_0+\Delta x)-N(x_0)}{\Delta x}=N'(x_0)$.

16. 证明：双曲线 $xy=1$ 上任一点处的切线与两坐标轴构成的三角形面积都等于 2.

解 $xy=1$ 上 $P(x,y)$ 处切线方程为 $Y-y=-\dfrac{1}{x^2}(X-x)$，从而它与两坐标轴构成的三角形面积为 $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{2}{x}\times 2x\right)=2$.

17. 设有可导函数 $f,g:(a,b)\to\mathbf{R}$. 若 $\forall x\in(a,b)$，$f(x)\leqslant g(x)$，则 $\forall x\in(a,b)$，$f'(x)\leqslant g'(x)$，对吗？

解 不对. 如 $f(x)=x$. $g(x)=1-x$. $\forall x\in\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$，$f(x)\leqslant g(x)$. 但 $\forall x\in\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$，$f'(x)=1>g'(x)=-1$.

18. 设 $f(0)=0$，$f'(0)=2$，求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{\sin 2x}$.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{\sin 2x}=\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{f(x)-f(0)}{x}\cdot\dfrac{2x}{\sin 2x}\cdot\dfrac{1}{2}\right]=f'(0)\cdot\dfrac{1}{2}=1$.

(B)

1. 若函数 f 在 $x=0$ 处连续，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$ 存在. 试证 f 在 $x=0$ 处可导.

证 由 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$ 存在，且 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续可知 $f(0)=\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$，而 $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$ 存在，即 $f(x)$ 在 $x=0$ 可导.

2. 设 f 是定义在 $(-\infty,+\infty)$ 上的函数，$f(x)\neq 0$，$f'(0)=1$，且

$$\forall x,y\in(-\infty,+\infty),\ f(x+y)=f(x)f(y).$$

证明：f 在 $(-\infty,+\infty)$ 上可导，且 $f'(x)=f(x)$.

证 因为 $\forall x,y\in(-\infty,+\infty)$，$f(x+y)=f(x)f(y)$，且 $f(x)\neq 0$ 可知 $f(1)=f(1+0)=f(1)f(0)$，从而 $f(0)=1$. 进而，

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x)f(\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}f(x)\cdot\frac{f(\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=f(x)\cdot f'(0)=f(x).$$

3. 设函数 f 在 $x=a$ 处可导，$f(a)\neq 0$，试求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{f\left(a+\frac{1}{n}\right)}{f(a)}\right]^n$.

证　因为 f 在 $x=a$ 处可导，所以 $f(a+h)-f(a)=h\cdot f'(a)+h\cdot\alpha(h)$，其中 $\lim\limits_{h\to 0}\alpha(h)=0$，从而

$$\lim_{h\to 0}\left[\frac{f(a+h)}{f(a)}\right]^{\frac{1}{h}}=\lim_{h\to 0}\left\{\left[1+h\cdot\frac{f'(a)+\alpha(h)}{f(a)}\right]^{\frac{f(a)}{f'(a)+\alpha(h)}\frac{1}{h}}\right\}^{\frac{f'(a)+\alpha(h)}{f(a)}}=\mathrm{e}^{\frac{f'(a)}{f(a)}}.$$

故由 Heine 定理，$\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{f\left(a+\frac{1}{n}\right)}{f(a)}\right]^n=\mathrm{e}^{\frac{f'(a)}{f(a)}}$.

4. 设曲线 $y=f(x)$在原点与 $y=\sin x$ 相切，试求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}n^{\frac{1}{2}}\sqrt{f\left(\frac{2}{n}\right)}$.

解　因为 $y=f(x)$在原点与 $y=\sin x$ 相切，所以 $f(0)=0,f'(0)=1$. 从而

$$\lim_{n\to\infty}n^{\frac{1}{2}}\sqrt{f\left(\frac{2}{n}\right)}=\lim_{n\to\infty}\sqrt{2}\sqrt{\frac{f\left(\frac{2}{n}\right)-f(0)}{\frac{2}{n}}}=\sqrt{2f'(0)}=\sqrt{2}.$$

5. 设 $n\in\mathbf{N}_+$，试讨论函数

$$f(x)=\begin{cases}x^n\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0\end{cases}$$

在 $x=0$ 处的连续性与可导性以及 $f'(x)$在 $x=0$ 处的连续性.

解　因为 $\forall n\in\mathbf{N}_+,\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}x^n\sin\dfrac{1}{x}=0=f(0)$，所以 $f(x)$在 $x=0$ 连续. 又由于 $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^n\sin\frac{1}{x}-0}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}x^{n-1}\sin\dfrac{1}{x}$，所以当 $n=1$ 时，$f'(0)$不存在，即 $f(x)$在 $x=0$ 不可导；当 $n>1$ 时，$f(x)$在 $x=0$ 可导. 且 $f'(0)=0$. 进而有，当 $n\geqslant 2$ 时，

$$f'(x)=\begin{cases}nx^{n-1}\sin\dfrac{1}{x}-x^{n-2}\cos\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

又因为当 $n=2$ 时，$\lim\limits_{x\to 0}f'(x)=\lim\limits_{x\to 0}\left(2x\sin\dfrac{1}{x}-\cos\dfrac{1}{x}\right)$不存在；当 $n>2$ 时，

$\lim\limits_{x\to 0}f'(x)=0=f'(0)$，故当 $n\geqslant 3$ 时，$f'(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

6. 设 $f\in C[a,b]$，$f(a)=f(b)=0$，且 $f'_+(a)\cdot f'_-(b)>0$. 证明：至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使 $f(\xi)=0$.

证　由于 $f'_+(a)\cdot f'_-(b)>0$，因此不妨设 $f'_+(a)>0$，则 $f'_-(b)>0$，即 $f'_+(a)=\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}>0$，$f'_-(b)=\lim\limits_{x\to b^-}\dfrac{f(x)-f(b)}{x-b}>0$.

由极限的保号性知：$\exists\, x_1,x_2$ 使 $a<x_1<x_2<b$，且

$$\frac{f(x_1)-f(a)}{x_1-a}>0,\ \frac{f(x_2)-f(b)}{x_2-b}>0,$$

进而可知，$f(x_1)>f(a)=0$，$f(x_2)<f(b)=0$，由零点定理可知至少存在一点 $\xi\in(x_1,x_2)\subset(a,b)$，使 $f(\xi)=0$.

习　题　2.2

(A)

1. 求下列函数的导数：

(9) $y=\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$；　　(12) $y=\dfrac{e^x\sec x+1}{x^2\log_a\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}}$　$(a>0)$.

解　(9)
$$y'=\frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}\left(x+\sqrt{x+\sqrt{x}}\right)'$$
$$=\frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}\left[1+\frac{(x+\sqrt{x})'}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}}\right]$$
$$=\frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}\left[1+\frac{1+\dfrac{1}{2\sqrt{x}}}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}}\right]$$
$$=\frac{1+2\sqrt{x}+4\sqrt{x}\sqrt{x+\sqrt{x}}}{8\sqrt{x}\sqrt{x+\sqrt{x}}\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}.$$

(12)
$$y'=\left(\frac{e^x\sec x+1}{x^2\log_a\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}}\right)'=-3\ln a\left(\frac{e^x\sec x+1}{x^2\ln x}\right)'$$

$$=-3\ln a\,\frac{(e^x\sec x+1)'(x^2\ln x)-(x^2\ln x)'(e^x\sec x+1)}{(x^2\ln x)^2}$$

$$=-3\ln a\,\frac{e^x\sec x(1+\tan x)x\ln x+(2\ln x+1)(e^x\sec x+1)}{x^3\ln^2 x}$$

3. 求下列函数的导数：

(11) $y=\ln\sqrt{x\sin x\sqrt{1-e^x}}$；　(13) $y=x^{a^a}+a^{x^a}+a^{a^x}\quad(a>0)$；

(14) $y=x+x^x+x^{x^x}$；　(16) $y=e^{\arcsin\sqrt{x}}$；

(17) $y=\ln(\ln\sqrt{x^2+1})$；　(19) $y=\sqrt[3]{\dfrac{1-\sin 2x}{1+\sin 2x}}$；

(20) $y=\arctan\left(\dfrac{1}{2}\tan\dfrac{x}{2}\right)$.

解　(11) $y'=\left(\ln\sqrt{(x\sin x)\sqrt{1-e^x}}\right)'=\dfrac{1}{2}\left[\ln x+\ln\sin x+\dfrac{1}{2}\ln(1-e^x)\right]'$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{x}+\frac{\cos x}{\sin x}+\frac{-e^x}{2(1-e^x)}\right].$$

(13) $y'=(x^{a^a})'+(a^{x^a})'+(a^{a^x})'=a^ax^{(a^a-1)}+(a^{x^a}\ln a)(x^a)'+a^{a^x}\ln a\,(a^x)'$

$$=a^ax^{a^a-1}+ax^{a-1}a^{x^a}\ln a+a^{a^x+x}\ln^2 a.$$

(14) 因为$(x^x)'=(e^{x\ln x})'=e^{x\ln x}\left(x\cdot\dfrac{1}{x}+\ln x\right)=x^x(1+\ln x)$

$$(x^{x^x})'=(e^{x^x\ln x})'=e^{x^x\ln x}[(x^x)'\ln x+x^x(\ln x)']$$

$$=x^x\cdot x^{x^x}\cdot\left[(1+\ln x)\ln x+\frac{1}{x}\right].$$

所以 $y'=(x)'+(x^x)'+(x^{x^x})'=1+x^x(1+\ln x)+x^x\cdot x^{x^x}\left[(1+\ln x)\ln x+\dfrac{1}{x}\right]$.

(16) $y'=e^{\arcsin\sqrt{x}}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x}}=\dfrac{e^{\arcsin\sqrt{x}}}{2\sqrt{x(1-x)}}$.

(17) $y'=\dfrac{1}{\ln\sqrt{1+x^2}}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}\cdot\dfrac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}=\dfrac{x}{(1+x^2)\ln\sqrt{1+x^2}}$.

(19) 因为 $\ln y=\dfrac{1}{3}[\ln(1-\sin 2x)-\ln(1+\sin 2x)]$，所以 $\dfrac{y'}{y}=$
$\dfrac{1}{3}\left[\dfrac{-2\cos 2x}{1-\sin 2x}-\dfrac{2\cos 2x}{1+\sin 2x}\right]$，所以 $y'=\sqrt[3]{\dfrac{1-\sin 2x}{1+\sin 2x}}\left(\dfrac{-4}{3\cos 2x}\right)$.

(20) $y'=\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{4}\tan^2\dfrac{x}{2}}\cdot\dfrac{1}{2}\sec^2\dfrac{x}{2}\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{\sec^2\dfrac{x}{2}}{4+\tan^2\dfrac{x}{2}}$.

4. 已知 $y=f\left(\dfrac{3x-2}{3x+2}\right)$，$f'(x)=\arctan x^2$. 试求$\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=0}$.

解 令 $u=\frac{3x-2}{3x+2}$. 则 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}f(u)}{\mathrm{d}u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=f'(u)\cdot\frac{12}{(3x+2)^2}$

$$=\frac{12}{(3x+2)^2}\arctan\left(\frac{3x-2}{3x+2}\right)^2,\text{故}\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}=\frac{3\pi}{4}.$$

5. 设有分段函数 $f(x)=\begin{cases}\varphi(x), & x\geqslant x_0,\\ \psi(x), & x<x_0,\end{cases}$ 函数 φ 与 ψ 均可导,问 $f'(x)=\begin{cases}\varphi'(x), & x\geqslant x_0,\\ \psi'(x), & x<x_0\end{cases}$ 是否成立?

解 不一定成立.

$f'(x)=\begin{cases}\varphi'(x), & x>x_0,\\ \psi'(x), & x<x_0\end{cases}$ 但在 $x=x_0$ 处 $f(x)$ 是否可导需用定义来验证.

如 $f(x)=\begin{cases}\sin x; & x\geqslant 0,\\ -x, & x<0,\end{cases}$ $f'_+(0)=1, f'_-(0)=-1, f(x)$ 在 $x=0$ 处不可导.

6. 求下列函数的导数(f,g 是可导函数):

(1) $y=f(x^2)$;

(2) $y=\sqrt{f^2(x)+g^2(x)}$;

(3) $y=f(\sin^2 x)+f(\cos^2 x)$;

(4) $y=f(\mathrm{e}^x)\mathrm{e}^{g(x)}$;

(5) $y=\begin{cases}1-x, & -\infty<x<1,\\ (1-x)(2-x), & 1\leqslant x\leqslant 2,\\ -(2-x), & 2<x<+\infty;\end{cases}$

(6) $y=\begin{cases}\dfrac{x}{1+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$

解 (1) $y'=2xf'(x^2)$.

(2) $y'=\dfrac{f(x)f'(x)+g(x)g'(x)}{\sqrt{f^2(x)+g^2(x)}}$.

(3) $y'=f'(\sin^2 x)\sin 2x-f'(\cos^2 x)\sin 2x$

$=(\sin 2x)[f'(\sin^2 x)-f'(\cos^2 x)]$.

(4) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\mathrm{d}f(\mathrm{e}^x)}{\mathrm{d}x}\mathrm{e}^{g(x)}+f(\mathrm{e}^x)(\mathrm{e}^{g(x)})'=f'(\mathrm{e}^x)\mathrm{e}^{x+g(x)}+f(\mathrm{e}^x)\mathrm{e}^{g(x)}g'(x)$.

(5) $f'_+(1)=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{(1-x)(2-x)}{x-1}=-1$,

$f'_-(1)=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{1-x}{x-1}=-1$,

$f'_+(2)=\lim\limits_{x\to2^+}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to2^+}\dfrac{-(2-x)-0}{x-2}=1$,

$f'_-(2)=\lim\limits_{x\to2^-}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to2^-}\dfrac{(1-x)(2-x)-0}{x-2}=1$,

所以$f'(1)=-1, f'(2)=1$，故

$$f'(x)=\begin{cases}-1, & -\infty<x\leqslant 1,\\ 2x-3, & 1<x\leqslant 2,\\ 1, & 2<x<+\infty.\end{cases}$$

(6) 因为 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}=0$，$\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}=1$，所以 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}-0}{x-0}$不存在.

故 $y'=\begin{cases}\dfrac{1+\left(1+\dfrac{1}{x}\right)e^{\frac{1}{x}}}{\left(1+e^{\frac{1}{x}}\right)^2}, & x\neq 0,\\ \text{不可导}, & x=0.\end{cases}$

7. 确定 a,b,c,d 的值，使曲线 $y=ax^4+bx^3+cx^2+d$ 与 $y=11x-5$ 在点$(1,6)$相切，经过点$(-1,8)$并在点$(0,3)$有一水平的切线.

解　依题意可知：

$(ax^4+bx^3+cx^2+d)|_{x=1}=6$，即 $a+b+c+d=6$，$(ax^4+bx^3+cx^2+d)'|_{x=1}=(11x-5)'|_{x=1}$，即 $4a+3b+2c=11$，$(ax^4+bx^3+cx^2+d)|_{x=-1}=8$，得 $a-b+c+d=8$，$(ax^4+bx^3+cx^2+d)'|_{x=0}=3$，得 $d=3$，故 $a=3, b=-1, c=1, d=3$.

8. 证明：双曲线 $xy=a$ 上任一点处的切线介于两坐标轴间的一段被切点所平分.

解　双曲线上任一点 $P\left(x_0,\dfrac{a}{x_0}\right)$的切线方程 $y-\dfrac{a}{x_0}=-\dfrac{a}{x_0^2}(x-x_0)$与 x 轴交点$A(2x_0,0)$，与 y 轴交点 $B\left(0,\dfrac{2a}{x_0}\right)$. 所以$|PA|=\sqrt{x_0^2+\left(\dfrac{a}{x_0}\right)^2}=|PB|$. 命题得证.

9. 求下列函数指定阶的导数：

(2) $f(x)=x\operatorname{sh}x$，求 $f^{(100)}(x)$；　　(4) $f(x)=\dfrac{1}{x^2-3x+2}$，求 $f^{(n)}(x)$.

解　(2) $f^{(100)}(x)=(\operatorname{sh}x)^{(100)}x+100(\operatorname{sh}x)^{(99)}(x)'=x\operatorname{sh}x+100\operatorname{ch}x$.

(4) $f(x)=\dfrac{1}{(x^2-3x+2)}=\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{1}{x-1}$，

$$f^{(n)}(x)=\left(\frac{1}{x-2}\right)^{(n)}-\left(\frac{1}{x-1}\right)^{(n)}=\frac{(-1)^n n!}{(x-2)^{n+1}}-\frac{(-1)^n n!}{(x-1)^{n+1}}.$$

10. 设 $f(x)=x(x-1)(x-2)\cdots(x-n)(n\in\mathbf{N}_+)$，求 $f'(0)$及 $f^{(n+1)}(x)$.

解　$f'(x)=(x-1)(x-2)\cdots(x-n)+x[(x-1)(x-2)\cdots(x-n)]'$，$f'(0)=(-1)^n n!$，$f(x)=x^{n+1}-(1+2+\cdots+n)x^n+\cdots+(-1)^n n!x$，所以 $f^{(n+1)}(x)=(n+1)!$.

12. 证明：

(1) 可导偶（奇）函数的导函数为奇（偶）函数；

(2) 可导周期函数的导函数为具有相同周期的周期函数.

解 (1) 设 $f(x)$ 可导，且 $f(x)=f(-x)$ 为偶函数，

则 $f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(-x-\Delta x)-f(-x)}{\Delta x}=-f'(-x)$,

所以 $f'(x)$ 为奇函数. 同理可证可导奇函数的导函数为偶函数.

(2) $f(x)$ 可导，且 $f(x)$ 为周期函数，最小正周期为 T，则

$$f'(x+T)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+T+\Delta x)-f(x+T)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=f'(x),$$

命题得证.

13. 设 $f(x)$ 二阶可导，$F(x)=\lim\limits_{t\to\infty}t^2\left[f\left(x+\dfrac{\pi}{t}\right)-f(x)\right]\sin\dfrac{x}{t}$，求 $F'(x)$（$t\in\mathbf{R}$ 且与 x 无关）.

解
$$F(x)=\lim_{t\to\infty}t^2\left[f\left(x+\frac{\pi}{t}\right)-f(x)\right]\sin\frac{x}{t}$$
$$=\lim_{t\to\infty}\left[\frac{f\left(x+\frac{\pi}{t}\right)-f(x)}{\frac{\pi}{t}}\cdot\frac{\sin\frac{x}{t}}{\frac{x}{t}}\cdot\pi x\right]=\pi xf'(x).$$

因为 $f(x)$ 二阶可导，所以 $F(x)$ 一阶可导，且 $F'(x)=\pi[f'(x)+xf''(x)]$.

14. 求由下列方程确定的隐函数的导数：

(4) $\ln(x^2+y)=x^3y+\sin x$，求 $\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}$；

(6) $y=1+xe^y$，求 $\left.\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=0}$.

解 (4) 将 $x=0$ 代入方程 $\ln(x^2+y)=x^3y+\sin x$，得 $y=1$.

将方程两边对 x 求导得

$$\frac{2x+y'}{x^2+y}=3x^2y+x^3y'+\cos x,\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}=1$$

(6) 当 $x=0$ 时，$y=1$. 方程两端对 x 求导得

$$y'=e^y+xe^yy',\quad y'\Big|_{x=0}=e.$$

将 $y'=e^y+xe^yy'$ 两端再对 x 求导得 $y''=2e^yy'+xe^y(y')^2+xe^yy''$. 将 $x=0$，$y=1$，$y'=e$ 代入得

$$y''\Big|_{x=0}=2e^2.$$

15. 求由 Kepler 方程 $y=x+\varepsilon\sin y(0<\varepsilon<1)$所确定的曲线在点(0,0)处的切线方程.

解　将 $y=x+\varepsilon\sin y$ 两端对 x 求导可得：$y'=1+\varepsilon y'\cos y$，所以 $y'|_{x=0}=\frac{1}{1-\varepsilon}$，故过(0,0)切线方程为 $y=\frac{1}{1-\varepsilon}x$.

16. 对给定的函数两边取自然对数然后再求导的方法称为**对数求导法**. 例如，对函数

$$y=2^x\sin x\sqrt{1+x^2}$$

两边取自然对数，得

$$\ln|y|=x\ln 2+\ln|\sin x|+\frac{1}{2}\ln(1+x^2).$$

由此方程确定了 y 是 x 的隐函数，应用隐函数求导法得

$$\frac{y'}{y}=\ln 2+\cot x+\frac{x}{1+x^2}$$

从而

$$\begin{aligned}y'&=y\left(\ln 2+\cot x+\frac{x}{1+x^2}\right)\\&=2^x\sin x\sqrt{1+x^2}\left(\ln 2+\cot x+\frac{x}{1+x^2}\right).\end{aligned}$$

试用对数求导法求下列函数导数：

(2) $y=\sqrt[5]{\frac{x-5}{\sqrt[3]{x^2+2}}}$；　　(4) $y=(\tan 2x)^{\cot\frac{x}{2}}$.

解　(2) $y=\sqrt[5]{\frac{x-5}{\sqrt[3]{x^2+2}}}$，两边取对数 $\ln|y|=\frac{1}{5}\left[\ln|x-5|-\frac{1}{3}\ln(x^2+2)\right]$，所以$\frac{y'}{y}=\frac{1}{5}\left[\frac{1}{x-5}-\frac{2x}{3(x^2+2)}\right]$，故 $y'=\frac{1}{5}\sqrt[5]{\frac{x-5}{\sqrt[3]{x^2+2}}}\left[\frac{1}{x-5}-\frac{2x}{3(x^2+2)}\right]$.

(4) 由 $y=(\tan 2x)^{\cot\frac{x}{2}}$ 知 $\ln y=\cot\frac{x}{2}\ln(\tan 2x)$，两端对 x 求导得

$$\frac{y'}{y}=\frac{-1}{2}\csc^2\frac{x}{2}\ln(\tan 2x)+\frac{2\cot\frac{x}{2}}{\tan 2x}\sec^2 2x,$$

所以 $y'=(\tan 2x)^{\cot\frac{x}{2}}\left[-\frac{1}{2}\csc^2\frac{x}{2}\ln(\tan 2x)+2\cot\frac{x}{2}\cot 2x\sec^2 2x\right]$.

17. 若两条曲线在它们交点处的切线互相垂直，则称两曲线在该点**正交**. 若一曲线族中每条曲线与另一曲线族中与它相交的曲线均正交，则称它们是**正交曲线族**. 证明：双曲线族 $xy=C_1$ 与 $x^2-y^2=C_2$(其中 C_1 与 C_2 为任意非零常数)

是正交曲线族.

解　曲线 $xy=C_1$. 在 $(x,y)=\left(x,\dfrac{C_1}{x}\right)$ 处切线斜率 $k_1=-\dfrac{C_1}{x^2}$，曲线 $x^2-y^2=C_2$ 在 $(x,y)=\left(x,\dfrac{C_1}{x}\right)$ 处切线斜率 $k_2=\dfrac{x}{y}=x\cdot\dfrac{x}{C_1}=\dfrac{x^2}{C_1}$，于是 $k_1\cdot k_2=-1$，即 $xy=C_1$ 与 $x^2-y^2=C_2$ 在其交点 (x,y) 处正交.

18. 求下列参数方程所确定的函数的导数：

(5) $\begin{cases}x=f(t),\\ y=tf(t)-f(t),\end{cases}$ 求 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$，其中 $f''(t)$ 存在且 $f'(t)$ 不为零.

解　(5) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{tf'(t)+f(t)-f'(t)}{f'(t)}=t-1+\dfrac{f(t)}{f'(t)}$,

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(t-1+\frac{f(t)}{f'(t)}\right)\cdot\frac{1}{\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\left\{1+\frac{[f'(t)]^2-f(t)f''(t)}{[f'(t)]^2}\right\}\cdot\frac{1}{f'(t)}$$

$$=\frac{2}{f'(t)}-\frac{f(t)f''(t)}{[f'(t)]^3}.$$

19. 设曲线 Γ 由极坐标方程 $r=r(\theta)$ 所确定，试求该曲线上任意一点的切线斜率，并将所得公式用于求心形线 $r=a(1-\cos\theta)(a>0)$ 上任一点的斜率.

解　曲线 $r=r(\theta)$ 的参数方程为 $\begin{cases}x=r(\theta)\cos\theta,\\ y=r(\theta)\sin\theta,\end{cases}$ 曲线上点 $(\theta,r(\theta))$ 处切线斜率 $k=\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{r'(\theta)\sin\theta+r(\theta)\cos\theta}{r'(\theta)\cos\theta-r(\theta)\sin\theta}$.

心形线 $r=a(1-\cos\theta)$ 上任一点 $(\theta,r(\theta))$ 处切线斜率为

$$k_{心}=\frac{\sin^2\theta-\cos^2\theta+\cos\theta}{2\sin\theta\cos\theta-\sin\theta}.$$

20. 求曲线 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}(a>0)$ 在点 $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{4}a,\dfrac{\sqrt{2}}{4}a\right)$ 处的切线方程和法线方程. 证明：在它的任一点处的切线介于坐标轴间部分的长为一常量.

解　$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}(a>0)$ 的参数方程为 $\begin{cases}x=a\cos^3\theta,\\ y=a\sin^3\theta\end{cases}(0\leqslant\theta\leqslant2\pi)$，所以 $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{4}a,\dfrac{\sqrt{2}}{4}a\right)$ 处切线方程为 $y-\dfrac{\sqrt{2}}{4}a=-\left(x-\dfrac{\sqrt{2}}{4}a\right)$，法线方程为 $y-\dfrac{\sqrt{2}}{4}a=x-\dfrac{\sqrt{2}}{4}a$.

21. 落在平静水面上的石头使水面上产生同心波纹. 若最外一圈波半径的增大率为 6 m/s，问在 2 秒末被扰动水面面积的增大率为多少？

解　依题可知. t 秒末被扰动水面面积为 $S=S(t)=\pi(6t)^2=36\pi t^2$，$\left.\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}\right|_{t=2}=72\pi t\Big|_{t=2}=144\ \pi$，即在 2 秒时被扰水面增大率 $144\ \pi\mathrm{m}^2/\mathrm{s}$.

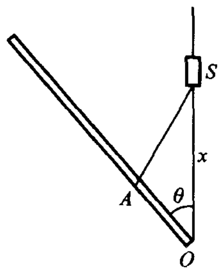
22. 在中午 12 时，甲船以 6 km/h 的速率向东行驶，乙船在甲船之北 16 km 处以 8 km/h 的速率向南行驶，求下午一时两船相离的速率.

解　t 时刻两船的距离为 $s=\sqrt{(16-8t)^2+(6t)^2}$，两船在下午一时相离的速率 $\left.\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right|_{t=1}=-2.8\ \mathrm{m/h}$.

23. 当油船破裂时，有体积为 $V\mathrm{m}^3$ 的石油漏入海中. 假定石油在海面上以厚度均匀的圆形扩散开来，已知油层的厚度随时间的变化规律为 $h(t)=\frac{k}{\sqrt{t}}(t>0)$，试求油层向外扩散的速率.

解　设 t 时刻圆形油层的半径为 $r=r(t)$，则 $\pi r^2h(t)=V$，即 $r=r(t)=\sqrt{\frac{V}{k\pi}}t^{\frac{1}{4}}$，故油层向外扩散的速率为 $\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{4}\sqrt{\frac{V}{k\pi}}t^{-\frac{3}{4}}$.

24. 一个开窗子的机构是由一些刚性细杆做成，如右图. 其中 S 为滑块，设 $AO=3$ cm，$AS=4$ cm，求滑块的垂直速度 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ 与 θ 的角速度 $\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$ 之间的关系.



（第 24 题图）

解　由三角形余弦定理可知：在 $\triangle OAS$ 中：$4^2=3^2+x^2-2\cdot 3\cdot x\cos\theta$. 两边对 t 求导数得

$$(x-3\cos\theta)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+3x\sin\theta\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=0.$$

25. 在距火箭发射塔 4 000 m 处安装一台摄影机. 为使摄影机的镜头始终对准火箭，摄影机的仰角应随着火箭的上升不断增加. 假设火箭发射后垂直上升到距离地面 3 000 m 处时，其速度为 600 m/s. 试求在此时刻摄影机仰角的变化率.

解　设 t 时刻火箭离地面高度为 $h=h(t)m$，摄像机仰角 $\theta=\theta(t)$，则 $\tan\theta=\frac{h(t)}{4\ 000}$，于是 $(\sec^2\theta)\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{4\ 000}\frac{\mathrm{d}h(t)}{\mathrm{d}t}$. 当火箭上升到距地面 3 000 m 时. $\tan\theta=\frac{3}{4}$，$\sec^2\theta=\frac{25}{16}$，$\left.\frac{\mathrm{d}h(t)}{\mathrm{d}t}\right|_{h=3\ 000}=600\ \mathrm{m/s}$，于是 $\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{4\ 000}\times 600\times\frac{16}{25}=0.096$ 弧度/s. 即此时摄像机仰角的变化为 0.096 弧度/s.

(B)

1. 设 $f(x)=a_1\sin x+a_2\sin 2x+\cdots+a_n\sin nx(a_i\in\mathbf{R},i=1,2,\cdots,n)$

且 $|f(x)|\leqslant|\sin x|$，证明：

$$|a_1+2a_2+\cdots+na_n|\leqslant 1.$$

解 由 $f'(x)=a_1\cos x+2a_2\cos 2x+\cdots+na_n\cos nx$ 得 $f'(0)=a_1+2a_2+\cdots+na_n$. 又由导数定义 $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$，及 $|f(x)|\leqslant|\sin x|$ 可得

$|a_1+2a_2+\cdots+na_n|=|f'(0)|=\lim\limits_{x\to 0}\left|\dfrac{f(x)}{x}\right|\leqslant\lim\limits_{x\to 0}\left|\dfrac{\sin x}{x}\right|=1.$

2. 设函数 $\varphi:(-\infty,x_0]\to\mathbf{R}$ 是二阶可导函数. 选择 a,b,c，使函数

$$f(x)=\begin{cases}\varphi(x), & x\leqslant x_0,\\ a(x-x_0)^2+b(x-x_0)+c, & x>x_0\end{cases}$$ 在 $\mathbf{R}$ 上二阶可导.

解 要使 f 在 $\mathbf{R}$ 上二阶可导. 则 $f(x)$ 与 $f'(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上连续，于是，

$f(x_0+0)=\lim\limits_{x\to x_0^+}[a(x-x_0)^2+b(x-x_0)+c]=c=\lim\limits_{x\to x_0^-}\varphi(x)=\varphi(x_0)=f(x_0-0).$

即 $c=\varphi(x_0)$. 又由 $f'_+(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0^+}\dfrac{[a(x-x_0)^2+b(x-x_0)+c]-\varphi(x_0)}{x-x_0}=b$,

$f'_-(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0^-}\dfrac{\varphi(x)-\varphi(x_0)}{x-x_0}=\varphi'(x_0)$ 可得 $b=\varphi'(x_0)$，于是

$$f'(x)=\begin{cases}\varphi'(x), & x\leqslant x_0,\\ 2a(x-x_0)+\varphi'(x_0), & x>x_0.\end{cases}$$ 再由

$f''_+(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0^+}\dfrac{f'(x)-f'(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0^+}\dfrac{[2a(x-x_0)+\varphi'(x_0)]-\varphi'(x_0)}{x-x_0}=2a$,

$f''_-(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0^-}\dfrac{f'(x)-f'(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0^-}\dfrac{\varphi'(x)-\varphi'(x_0)}{x-x_0}=\varphi''(x_0)$，可得 $a=\dfrac{1}{2}\varphi''(x_0)$.

3. 确定 a,b 的值，使函数

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}(1-\cos ax), & x<0,\\ 0, & x=0,\\ \dfrac{1}{x}\ln(b+x^2), & x>0\end{cases}$$

在 $(-\infty,+\infty)$ 内处处可导，并求它的导函数.

解 由于 $f(0+0)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x}\ln(b+x^2)$ 存在且等于 $f(0)=0$，所以 $\ln(b+x^2)$ 应是 x 的高阶无穷小 $(x\to 0)$. 即 $\lim\limits_{x\to 0}\ln(b+x^2)=0$，即 $b=1$. 又因为

$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x^2}\ln(1+x^2)=1,\ f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x^2}(1-\cos ax)=\frac{a^2}{2},$$

所以$\frac{a^2}{2}=1$，即 $a=\pm\sqrt{2}$.

$$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{\pm\sqrt{2}x\sin(\pm\sqrt{2}x)-1+\cos(\pm\sqrt{2}x)}{x^2}, & x<0,\\ 1, & x=0\\ \dfrac{2}{1+x^2}-\dfrac{1}{x^2}\ln(1+x^2), & x>0.\end{cases}$$

4. 如果函数 $u=\varphi(x)$在 x_0 处可导，而 $y=f(u)$在 $u_0=\varphi(x_0)$处可导，那么复合函数 $y=f[\varphi(x)]$在 x_0 处可导，这是大家所熟知的. 问下列三种情况是否成立？为什么？

(1) 如果 $u=\varphi(x)$在 x_0 处不可导，而 $y=f(u)$在 $u_0=\varphi(x_0)$处可导，那么复合函数 $y=f[\varphi(x)]$在 x_0 处一定不可导；

(2) 如果 $u=\varphi(x)$在 x_0 处可导，而 $y=f(u)$在 $u_0=\varphi(x_0)$处不可导，那么复合函数 $y=f[\varphi(x)]$在 x_0 处一定不可导；

(3) 如果 $u=\varphi(x)$在 x_0 处不可导，$y=f(u)$在 $u_0=\varphi(x_0)$处也不可导，那么复合函数 $y=f[\varphi(x)]$在 x_0 处一定不可导.

解　(1) 不成立. 例如 $u=|x|$在 $x_0=0$ 处不可导，$y=u^2$ 在 $u_0=|x_0|=0$ 处可导. 复合函数 $y=x^2$ 在 $x_0=0$ 处可导.

(2) 不成立. 例如 $u=\sin^2 x$ 在 $x_0=0$ 处可导，$y=|u|$在 $u_0=0$ 处不可导，复合函数 $y=\sin^2 x$ 在 $x_0=0$ 处可导.

(3) 不成立. 如 $\varphi(x)=\begin{cases}-x, & x\geqslant 0,\\ 0, & x<0\end{cases}$ 在 $x_0=0$ 不可导，$f(u)=\begin{cases}0, & u\leqslant 0,\\ u, & u>0\end{cases}$ 在 $u_0=\varphi(x_0)=0$ 不可导，但复合函数 $y=f[\varphi(x)]=0$ 在$(-\infty,+\infty)$处处可导.

6. 设函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^2e^{n(x-1)}+ax+b}{e^{n(x-1)}+1}$，试确定常数 a,b，使 $f(x)$连续、可导，并求 $f'(x)$.

解　$f(1)=(1+a+b)/2$. 如果 $x<1$，由于 $\lim\limits_{n\to\infty}e^{n(x-1)}=0$，所以 $f(x)=ax+b$，如果 $x>1$，由于 $\lim\limits_{n\to\infty}e^{n(x-1)}=+\infty$，$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^2+(ax+b)e^{-n(x-1)}}{1+e^{-n(x-1)}}=x^2$. 于是

$$f(x)=\begin{cases}ax+b, & x<1,\\ (1+a+b)/2, & x=1,\\ x^2, & x>1.\end{cases}$$

由 $f(x)$在 $x=1$ 的连续性可得 $a+b=1$.
又由 $f(x)$在 $x=1$ 可导及 $f'_-(1)=a$，$f'_+(1)=2$ 知 $a=2$，于是 $b=-1$.

$$f'(x)=\begin{cases}2, & x\leqslant 1,\\ 2x, & x>1.\end{cases}$$

7. 设 $f(x)=\arctan x$，求 $f^{(n)}(0)$.

解 $f'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$，于是 $(1+x^2)f'(x)=1$，两边对 x 求 $n-1$ 阶导数得 $(1+x^2)f^{(n)}(x)+C_{n-1}^1(1+x^2)'f^{(n-1)}(x)+C_{n-1}^2(1+x^2)''f^{(n-2)}(x)=0$，于是，$f^{(n)}(0)+2C_{n-1}^2 f^{(n-2)}(0)=0$，即 $f^{(n)}(0)=-(n-1)(n-2)f^{(n-2)}(0)$，由 $f'(0)=1$，$f''(0)=0$ 可得当 $n=2m$ 时，$f^{(2m)}(0)=0$；当 $n=2m+1$ 时，$f^{(2m+1)}(0)=(-1)^m\cdot(2m)!$，$m=0,1,2,\cdots$.

8. 利用恒等式

$$\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cdots\cos\frac{x}{2^n}=\frac{\sin x}{2^n\sin\frac{x}{2^n}}$$

求出表示和式

$$S_n=\frac{1}{2}\tan\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\tan\frac{x}{4}+\cdots+\frac{1}{2^n}\tan\frac{x}{2^n}$$

的公式.

解 对恒等式两边取对数可得

$$\ln\left|\cos\frac{x}{2}\right|+\ln\left|\cos\frac{x}{4}\right|+\cdots+\ln\left|\cos\frac{x}{2^n}\right|=\ln|\sin x|-\ln\left|2^n\sin\frac{x}{2^n}\right|,$$

两边对 x 求导

$$-\frac{1}{2}\tan\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\tan\frac{x}{4}-\cdots-\frac{1}{2^n}\tan\frac{x}{2^n}=\cot x-\frac{1}{2^n}\cot\frac{x}{2^n},$$

于是

$$S_n=\frac{1}{2^n}\cot\frac{x}{2^n}-\cot x.$$

10. 设 $y=y(x)$ 由方程 $\begin{cases}x=3t^2+2t+3,\\ e^y\sin t-y+1=0\end{cases}$ 所确定，求 $\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=0}$.

解 将 $t=0$ 代入方程可得 $x=3$，$y=1$.

由 $e^y\sin t-y+1=0$ 可得 $\dfrac{dy}{dt}=\dot{y}=\dfrac{e^y\cos t}{1-e^y\sin t}$，$\dot{y}|_{t=0}=e$.

将 $e^y\sin t-y+1=0$ 两边对 t 求二阶导数，将 $t=0$，$y=1$，$\dot{y}|_{t=0}=e$ 代入可得 $\ddot{y}|_{t=0}=2e^2$，又 $\dot{x}|_{t=0}=2$ $\ddot{x}|_{t=0}=6$ 代入

$$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=0}=\left.\frac{\dot{x}\ddot{y}-\ddot{x}\dot{y}}{\dot{x}^3}\right|_{t=0}=\frac{2\times2e^2-6e}{2^3}=\frac{(2e-3)e}{4}.$$

习　题　2.3

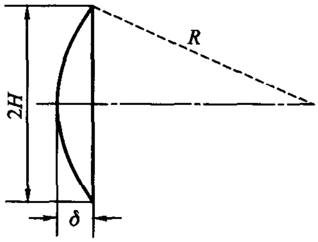
(A)

6. 如图，一透镜的凸面半径是 R，口径是 $2H$，$H \ll R$（即 H 比 R 小得多，可以忽略不计），厚度是 δ.

(1) 证明：$\delta \approx \frac{H^2}{2R}$；

(2) 设 $H=25$ mm，$R=100$ mm，求 δ 的近似值；

(3) 设 $R=150$ mm，$\delta=3$ mm，求 H 的近似值.



（第 6 题图）

解　(1) $\delta=R-R\sqrt{1-\left(\frac{H}{R}\right)^2}$，由 $H \ll R$，$x \ll 1$ 时，$(1+x)^\alpha \approx 1+\alpha x$ 可知 $\sqrt{1-\left(\frac{H}{R}\right)^2} \approx 1+\frac{1}{2}\left(-\frac{H^2}{R^2}\right)$，于是 $\delta \approx \frac{H^2}{2R}$.

(2) 当 $H=25$ mm，$R=100$ mm 时，$\delta \approx \frac{25^2}{200}(\text{mm})=3.125(\text{mm})$.

(3) $R=150$ mm，$\delta=3$ mm 时，$H \approx \sqrt{2R\delta}=30(\text{mm})$.

7. 有一批半径为 1 cm 的球，为了提高球面的光洁度，要镀上一层铜，厚度为 0.01 cm. 试估计每只球需用多少克的铜（铜的密度是 8.9 g/cm^3）.

解　设需用 m 克铜，则

$$\begin{aligned} m &= \left[\frac{4}{3}\pi(1+0.01)^3-\frac{4}{3}\pi\cdot 1^3\right]\times 8.9 \\ &= \frac{4}{3}\pi(1.01^3-1^3)\times 8.9 \\ &\approx \frac{4\times 8.9}{3}\pi[3\times 1^2\times(0.01)] \\ &\approx 1.118(\text{克}). \end{aligned}$$

8. 钟摆摆动的周期 T 与摆长 l 的关系是 $T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$，其中 g 是重力加速度. 现有一只挂钟，当摆长为 10 cm 时走得很准确. 由于摆长没有校正好，长了 0.01 cm. 问这只钟每天慢多少秒？

解　$l_0=10$ cm. 当 $l=l_0+0.01$(cm) 时，

$$\Delta T=T(l_0)-T(l) \approx \frac{2\pi}{\sqrt{g}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{l_0}}\times 0.01=2\pi\sqrt{\frac{l_0}{g}}\cdot\frac{0.01}{2l_0},$$

由 $T=2\pi\sqrt{\dfrac{l_0}{g}}=1$ 秒，于是一个周期慢 $\dfrac{0.01}{2\times10}=0.000\ 5$（秒）. 每天慢 $0.000\ 5\times3\ 600\times24=43.2$（秒）.

9. 求由方程 $e^{x+y}-xy=0$ 所确定的隐函数 $y=f(x)$ 的微分 dy.

解 对方程 $e^{x+y}-xy=0$ 两边求微分得 $e^{x+y}d(x+y)=d(xy)$，即 $e^{x+y}(dx+dy)=xdy+ydx$，于是 $dy=\dfrac{y-e^{x+y}}{e^{x+y}-x}dx$.

10. 求由参数方程 $x=3t^2+2t+3, e^y\sin t-y+1=0$ 所确定的函数 $y=f(x)$ 的微分 dy.

解 由题设可知：$dx=(6t+2)dt$，从而 $dt=\dfrac{dx}{6t+2}$. 对 $e^y\sin t-y+1=0$ 两端求微分得 $e^y\sin t dy+e^y\cos t dt=dy$. 于是 $dy=\dfrac{e^y\cos t}{1-e^y\sin t}dt=\dfrac{e^y\cos t}{(1-e^y\sin t)(6t+2)}dx$.

11. 求下列函数 y 关于自变量 x 的二阶微分：

(2) $xy+y^2=1$.

解 (2) 由 $xy+y^2=1$ 知：

$$ydx+xdy+2ydy=0, \text{即 } dy=-\frac{y}{x+2y}dx,$$

上式两端再求微分， $2dydx+xd^2y+2(dy)^2+2yd^2y=0$，

于是， $d^2y=-\dfrac{2(dy)^2+2dydx}{x+2y}=\dfrac{2y(x+y)}{(x+2y)^3}dx^2$.

由于 $(x+y)y=xy+y^2=1$，于是 $d^2y=\dfrac{2}{(x+2y)^3}dx^2$.

(B)

1. 有人说“若 $y=f(x)$ 在 x_0 点可导，则当 $\Delta x\to0$ 时，该函数在 x_0 点的微分 dy 是 Δx 的同阶无穷小.”这种说法是否正确？为什么？

答 不正确. 如 $f(x)=x^2, dy|_{x_0=0}=0$ 是 Δx 高阶无穷小. 如果 $f'(x_0)\neq0$，则 $dy|_{x_0}=f'(x_0)\Delta x$ 是 Δx 的同阶无穷小.

2. 证明：函数 $f:U(x_0)\to\mathbf{R}$ 在 x_0 处可微（可导）的充要条件是存在一个关于 Δx 的线性函数 $L(\Delta x)=\alpha\Delta x$，使

$$\lim_{\Delta x\to0}\frac{|f(x_0+\Delta x)-f(x_0)-L(\Delta x)|}{|\Delta x|}=0.$$

证

必要性 因为 f 在 x_0 处可微，所以存在一个关于 Δx 的线性函数 $L(\Delta x)=\alpha\Delta x$，使 $f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=\alpha\Delta x+o(\Delta x)$，于是 $\lim\limits_{\Delta x\to0}\dfrac{|f(x_0+\Delta x)-f(x_0)-L(\Delta x)|}{|\Delta x|}=$

$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left|\dfrac{o(\Delta x)}{\Delta x}\right|=0$. 必要性得证.

充分性　由题设存在 $L(\Delta x)=\alpha\Delta x$，使 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{|f(x_0+\Delta x)-f(x_0)-L(\Delta x)|}{\Delta x}=0$，于是 $f(x_0+\Delta x)-f(x_0)-\alpha\Delta x=o(\Delta x)$，即存在一个关于 Δx 的线性函数 $L(\Delta x)=\alpha\Delta x$ 使 $f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=\alpha\Delta x+o(\Delta x)$. 故 f 在 x_0 处可微.

习　题　2.4

(A)

3. 能否用下面的方法证明 Cauchy 定理？为什么？

对 f,g 分别应用 Lagrange 定理得，

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(\xi)(b-a)}{g'(\xi)(b-a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

答　不能，因为对 f,g 分别应用 Lagrange 定理得到的两个 ξ 不一定相等. 而 Cauchy 定理中的 $\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$ 中的 ξ 是相同的.

5. 设 $a_i\in\mathbf{R}(i=0,1,\cdots,n)$，并且满足 $a_0+\dfrac{a_1}{2}+\dfrac{a_2}{3}+\cdots+\dfrac{a_n}{n+1}=0$，证明：$a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n=0$ 在 $(0,1)$ 内至少有一个实根.

证　取 $F(x)=a_0x+\dfrac{1}{2}a_1x^2+\dfrac{1}{3}a_2x^3+\cdots+\dfrac{1}{n+1}a_nx^{n+1}$，则 $F(0)=F(1)=0$. 由 Rolle 定理知至少存在一个 $\xi\in(0,1)$，使 $F'(\xi)=0$，即 $a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n=0$ 在 $(0,1)$ 内至少有一实根.

8. 设 $f,g:[a,b]\to\mathbf{R}$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，并且 $\forall x\in(a,b)$，$f'(x)=g'(x)$，证明：在 $[a,b]$ 上 $f(x)=g(x)+C$（$C\in\mathbf{R}$ 是常数）.

证　取 $F(x)=f(x)-g(x)$，则 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上满足 Lagrange 定理的条件且 $F'(x)=0$，$\forall x\in(a,b)$. 由推论 4.2 知在 $[a,b]$ 上 $F(x)\equiv C$，即 $\forall x\in[a,b]$，$f(x)=g(x)+C$.

9. 应用 Lagrange 定理证明：在闭区间 $[-1,1]$ 上，$\arcsin x+\arccos x=\dfrac{\pi}{2}$.

证　令 $F(x)=\arcsin x+\arccos x$，则 $\forall x\in[-1,1]$，$F'(x)=0$.

由推论 4.2 知：$\forall x\in[-1,1]$，$F(x)=C=F(1)=\dfrac{\pi}{2}$.

10. 设 $f:(-1,1)\to\mathbf{R}$ 可微，$f(0)=0$，$|f'(x)|\leqslant 1$. 证明：在 $(-1,1)$ 内，$|f(x)|<1$.

证 若 $x=0$，则 $|f(x)|=0<1$.

若 $0<x<1$ $(-1<x<0)$，在区间 $[0,x]$ $([x,0])$ 上用 Lagrange 定理，存在 $\xi\in(0,x)$ $(\xi\in(x,0))$，使 $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(\xi)$，即 $\dfrac{|f(x)|}{|x|}=|f'(\xi)|\leqslant 1$，从而 $|f(x)|\leqslant|x|<1$. 综上所述，$\forall x\in(-1,1)$，$|f(x)|<1$.

11. 设函数 f 可微，证明：$f(x)$ 的任何两个零点之间必有 $f(x)+f'(x)$ 的零点.

证 令 $F(x)=f(x)e^x$，则 $F'(x)=[f(x)+f'(x)]e^x$. 任取 $f(x)$ 的任两个零点 x_1,x_2，不妨设 $x_1<x_2$，则 $F(x)$ 在 $[x_1,x_2]$ 上满足 Rolle 定理的条件. 那么至少存在 $\xi\in(x_1,x_2)$ 使 $F'(\xi)=0$，即 $[f(\xi)+f'(\xi)]e^{\xi}=0$，即 $\exists\,\xi\in(x_1,x_2)$，使 $f(\xi)+f'(\xi)=0$.

12. 证明下列不等式：

(1) $|\arctan x-\arctan y|\leqslant|x-y|$；

(2) $\dfrac{a-b}{a}<\ln\dfrac{a}{b}<\dfrac{a-b}{b}$ $(a>b>0)$；

(3) $e^x>xe$ $\quad(x>1)$.

证 (1) 令 $f(u)=\arctan u$，则 $\forall\,x,y\in\mathbf{R}$. $f(u)$ 在 $[x,y]$ $([y,x])$ 上满足 Lagrange 定理的条件，从而存在 $\xi\in(x,y)$ $((y,x))$ 使

$$\frac{f(x)-f(y)}{x-y}=f'(\xi)=\frac{1}{1+\xi^2}\leqslant 1,$$

于是 $|f(x)-f(y)|\leqslant|x-y|$，即 $|\arctan x-\arctan y|\leqslant|x-y|$.

(2) 取 $f(x)=\ln x$，由于 $a>b>0$，所以 $f(x)$ 在 $[b,a]$ 上满足 Lagrange 定理的条件，故 $\exists\,\xi\in(b,a)$，使 $\ln a-\ln b=(a-b)\dfrac{1}{\xi}$，又 $\dfrac{1}{a}<\dfrac{1}{\xi}<\dfrac{1}{b}$，故 $\dfrac{a-b}{a}<\ln a-\ln b=\ln\dfrac{a}{b}<\dfrac{a-b}{b}$.

(3) 对 $\forall\,x>1$，在 $[1,x]$ 上对 e^u 用 Lagrange 中值定理得 $\exists\,\xi\in(1,x)$ 使

$$e^x-e^1=e^{\xi}(x-1)>e^1(x-1)=xe-e,$$

即 $e^x>xe$.

13. 设 $f,g:[a,b]\to R$ 是可导函数，且 $g'\neq 0$，证明：存在 $c\in(a,b)$，使

$$\frac{f(a)-f(c)}{g(c)-g(b)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

证 取 $F(x)=f(a)g(x)-f(x)g(x)+f(x)g(b)$，则 $F(a)=F(b)=f(a)g(b)$，且 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 上可导. 由 Rolle 定理

知：$\exists c\in(a,b)$，使

$$F'(c)=0,\text{即}[f(a)-f(c)]g'(c)=[g(c)-g(b)]f'(c).$$

又因为 $g'(x)\neq 0$，所以 $g(c)\neq g(b)$（否则由 Rolle 定理，$\exists\xi\in(c,b)$，使 $g'(\xi)=0$）. 故 $\exists c\in(a,b)$，使 $\dfrac{f(a)-f(c)}{g(c)-g(b)}=\dfrac{f'(c)}{g'(c)}$.

14. 证明方程 $x^5+x-1=0$ 有唯一的正根.

证　取 $f(x)=x^5+x-1$，则 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 连续，因为 $f(0)=-1<0$，$f(1)=1>0$，由连续函数零点定理知 $\exists x_0\in(0,1)$，使 $f(x_0)=0$，即 $x^5+x-1=0$ 至少有一个正根 x_0. 假设 $\bar{x}_0\in(-\infty,+\infty)$ 是 $f(x)=0$ 的另一根，那么由 Rolle 定理可知，$\exists\xi$ 介于 x_0 与 $\bar{x}_0$ 之间，使 $f'(\xi)=0$. 这与 $f'(\xi)=5\xi^4+1>1$ 矛盾. 故 $x^5+x-1=0$ 只有唯一的正根 x_0.

15. 在下列求极限的过程中都应用了 L'Hospital 法则，解法有无错误？

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(x^2+1)'}{(x-1)'}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{1}=0$；

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x+x}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(\sin x+x)'}{(x)'}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\cos x+1}{1}$，极限不存在；

(3) 设 f 在 x_0 处二阶可导，则

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-2f(x_0)+f(x_0-h)}{h^2}&=\lim_{h\to 0}\frac{f'(x_0+h)-f'(x_0-h)}{2h}\\&=\lim_{h\to 0}\frac{f''(x_0+h)+f''(x_0-h)}{2}=f''(x_0).\end{aligned}$$

解　(1) 有错误，当 $x\to 0$ 时，$\dfrac{x^2+1}{x-1}$ 即非 $\dfrac{0}{0}$ 或 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 型不定式，不能用 L'Hospital 法则求其极限.

(2) 有错误，由于 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(\sin x+x)'}{(x)'}$ 不存在，所以不能用 L'Hospital 法则. 正确的解法为 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x+x}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1}{x}\sin x+1\right)=1$.

(3) 有错误，由题设 f 仅在 x_0 处二阶可导，所以 $\forall\,|h|\neq 0$，$f''(x_0\pm h)$ 不一定存在，更谈不上连续，所以只能用一次 L'Hospital 法则，即第二，三个等号均不一定成立，正确的解法为

因为 f 在 x_0 二阶可导，所以 $f'(x)$ 在 x_0 附近连续，于是

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{h^2}&=\lim_{h\to 0}\frac{f'(x_0+h)-f'(x_0-h)}{2h}\\&=\frac{1}{2}\lim_{h\to 0}\left[\frac{f'(x_0+h)-f'(x_0)}{h}+\frac{f'(x_0-h)-f'(x_0)}{-h}\right]=f''(x_0).\end{aligned}$$

16. 求下列极限：

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\cot^2 x-\dfrac{1}{x^2}\right)$；　　(6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-x}{x^2\sin x}$；

(8) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\tan x)^{\tan 2x}$；　　(10) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}-(1+x)^{\frac{1}{x}}}{x}$；

(11) $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{\mathrm{e}}\right]^{\frac{1}{x}}$；　　(12) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1^x+2^x+3^x}{3}\right)^{\frac{1}{x}}$.

解 (4) 原式$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\cot^2 x-1}{x^2}\overset{\frac{0}{0}}{=\!=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x\cot^2 x-x^2\cdot 2\cot x\cdot\csc^2 x}{2x}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x\sin x-x}{\sin^3 x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x\sin x-x}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin^2 x+\cos^2 x-1}{3x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-2\sin^2 x}{3x^2}=-\frac{2}{3}.$$

(6) 原式$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sec^2 x-1}{3x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x}{3x^2\cos^2 x}=\dfrac{1}{3}$.

(8) 由于$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\tan 2x\ln\tan x=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\ln\tan x}{\cot 2x}\overset{\frac{0}{0}}{=\!=}\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\sec^2 x}{\tan x}\cdot\dfrac{1}{-2\csc^2 2x}=-1$. 原式$=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\mathrm{e}^{\tan 2x\ln\tan x}=\mathrm{e}^{-1}$.

(10) 原式$\overset{\frac{0}{0}}{=\!=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{[(1+x)^{\frac{1}{x}}]'}{-1}=\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\cdot\dfrac{1}{1+x}\cdot\dfrac{(1+x)\ln(1+x)-x}{x^2}$

$$=\mathrm{e}\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)\ln(1+x)-x}{x^2}\overset{\frac{0}{0}}{=\!=}\mathrm{e}\lim_{x\to 0}\frac{1+\ln(1+x)-1}{2x}=\frac{\mathrm{e}}{2}.$$

(11) 原式$=\lim\limits_{x\to 0}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}[\frac{1}{x}\ln(1+x)-1]}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}}\overset{\frac{0}{0}}{=\!=}\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x}-1}{2x}}=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$

(12) 原式$=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+2^x+3^x)-\ln 3}{x}}\overset{\frac{0}{0}}{=\!=}\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{2^x\ln 2+3^x\ln 3}{1+2^x+3^x}}=\mathrm{e}^{\frac{1}{3}\ln 6}=\sqrt[3]{6}$.

17. 试用三种方法求$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\cos\dfrac{1}{n}\right)^{n^2}$.

解 由 Heine 定理，只需用三种方法求$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\cos\dfrac{1}{x}\right)^{x^2}$.

方法一 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\cos\dfrac{1}{x}\right)^{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[1+\left(\cos\dfrac{1}{x}-1\right)\right]^{\frac{1}{\cos\frac{1}{x}-1}\cdot x^2\left(\cos\frac{1}{x}-1\right)}=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$，

其中$\lim\limits_{x\to+\infty}x^2\left(\cos\dfrac{1}{x}-1\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}x^2\left[-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{x^2}\right)\right]=-\dfrac{1}{2}$.

方法二　$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\cos\dfrac{1}{x}\right)^{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[1+\left(-2\sin^2\dfrac{1}{2x}\right)\right]^{-\frac{1}{2\sin^2\frac{1}{2x}}\cdot\frac{-2\sin^2\frac{1}{2x}}{\frac{1}{x^2}}}=e^{-\frac{1}{2}}$.

方法三　$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\cos\dfrac{1}{x}\right)^{x^2}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln\cos\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}}}\xlongequal{\frac{0}{0}}e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\tan\frac{1}{x}}{-2\cdot\frac{1}{x}}}=e^{-\frac{1}{2}}$.

18. 试确定 a,b，使极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1+a\cos 2x+b\cos 4x}{x^4}$ 存在，并求它的值.

解　要使 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1+a\cos 2x+b\cos 4x}{x^4}$ 存在，必使 $\lim\limits_{x\to0}(1+a\cos 2x+b\cos 4x)=0$ 且 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1+a\cos 2x+b\cos 4x}{x^2}=0$. 于是 $1+a+b=0$，$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1+a\cos 2x+b\cos 4x}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\left[\dfrac{1-\cos 2x}{x^2}+b\,\dfrac{\cos 4x-\cos 2x}{x^2}\right]=2-3b=0$，即 $b=\dfrac{1}{3}$，$a=-\dfrac{4}{3}$. 进而

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}\frac{1+a\cos 2x+b\cos 4x}{x^4}&=\lim_{x\to0}\frac{3-4\cos 2x+\cos 4x}{x^4}\\&\xlongequal{\frac{0}{0}}\lim_{x\to0}\frac{8\sin 2x-4\sin 4x}{12x^3}\\&=\frac{1}{3}\lim_{x\to0}\left(\frac{2\sin 2x}{x}\cdot\frac{1-\cos 2x}{x^2}\right)=\frac{8}{3}.\end{aligned}$$

19. 设函数 f 具有一阶连续导数，$f''(0)$ 存在，且 $f'(0)=0$，$f(0)=0$，

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)}{x}, & x\neq0,\\ a, & x=0.\end{cases}$$

(1) 确定 a 使 $g(x)$ 处处连续；

(2) 对以上所确定的 a，证明 $g(x)$ 具有一阶连续导数.

解　(1) 由于 $\lim\limits_{x\to0}g(x)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0)=0$，所以当 $a=0$，$g(x)$ 处处连续.

(2) $x\neq0$，$g'(x)=\dfrac{xf'(x)-f(x)}{x^2}$ 连续，

$$\begin{aligned}x=0,\ g'(x)&=\lim_{x\to0}\frac{g(x)-g(0)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x^2}\xlongequal{\frac{0}{0}}\lim_{x\to0}\frac{f'(x)}{2x}\\&=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{f'(x)-f'(0)}{x-0}=\frac{1}{2}f''(0).\end{aligned}$$

又因为 $\lim\limits_{x\to0}g'(x)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{xf'(x)-f(x)}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\left[\dfrac{f'(x)-f'(0)}{x}-\dfrac{f(x)}{x^2}\right]$

$$=f''(0)-\frac{1}{2}f''(0)=\frac{1}{2}f''(0)=g'(0),$$

故 $g(x)$ 具有一阶连续导数.

(B)

1. 设函数 $f:[0,1]\to\mathbf{R}$ 在 $[0,1]$ 上连续,在 $(0,1)$ 内可导,且 $f(1)=0$. 证明:存在点 $x_0\in(0,1)$,使

$$nf(x_0)+x_0f'(x)=0.$$

证 取 $F(x)=x^nf(x)$,则 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上满足 Rolle 定理条件,因而存在 $x_0\in(0,1)$,使 $F'(x_0)=0$,即

$$nx_0^{n-1}f(x_0)+x_0^nf'(x_0)=0,$$

故 $\exists\, x_0\in(0,1)$,使

$$nf(x_0)+x_0f'(x_0)=0.$$

2. 设 f 在 $[a,b]$ 上可微,且 a 与 b 同号,证明:存在 $\xi\in(a,b)$,使

(1) $2\xi[f(b)-f(a)]=(b^2-a^2)f'(\xi)$;

(2) $f(b)-f(a)=\xi\left(\ln\dfrac{b}{a}\right)f'(\xi)$;

证 (1) 取 $g(x)=x^2$,由于 a,b 同号,所以 $0\notin[a,b]$,对 $f(x),g(x)$ 在 $[a,b]$ 上应用 Cauchy 中值定理即可。

(2) 取 $g(x)=\ln x$,对 $f(x),g(x)$ 在 $[a,b]$ 上应用 Cauchy 定理即可.

3. 设 f 在 $[a,b]$ 上连续,在 (a,b) 内可微,且 $f(a)=f(b)=0$,证明:$\forall\lambda\in\mathbf{R}$,$\exists\, c\in(a,b)$,使得 $f'(c)=\lambda f(c)$.

证 令 $F(x)=f(x)e^{-\lambda x}$,对 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上应用 Rolle 定理即可.

5. 设 $f,g:[a,b]\to\mathbf{R}$ 在 $[a,b]$ 上连续,在 (a,b) 内可导,证明:存在 $\xi\in(a,b)$,使

$$\begin{vmatrix} f(a) & f(b) \\ g(a) & g(b) \end{vmatrix}=(b-a)\begin{vmatrix} f(a) & f'(\xi) \\ g(a) & g'(\xi) \end{vmatrix}.$$

证 取 $F(x)=f(a)g(x)-f(x)g(a)=\begin{vmatrix} f(a) & f(x) \\ g(a) & g(x) \end{vmatrix}$,在 $[a,b]$ 上对 $F(x)$ 应用 Lagrange 中值定理即可.

6. 设 f 在 $x=0$ 的某邻域内 n 阶可导,$f(0)=f'(0)=\cdots=f^{(n-1)}(0)=0$,试用 Cauchy 定理证明:

$$f(x)=\frac{f^{(n)}(\theta x)}{n!}x^n,\theta\in(0,1).$$

证 取 $g(x)=x^n$,在 $[0,x]$ 上,$f(x),f'(x),f''(x),\cdots,f^{(n-1)}(x),g(x)$, $g'(x),g''(x),\cdots,g^{(n-1)}(x)$ 满足 Cauchy 中值定理的条件,于是,

$$\frac{f(x)}{x^n}=\frac{f(x)-f(0)}{g(x)-g(0)}=\frac{f'(\xi_1)}{g'(\xi_1)}=\frac{f'(\xi_1)-f'(0)}{g'(\xi_1)-g'(0)}=\frac{f''(\xi_2)}{g''(\xi_2)}=\cdots=\frac{f^{(n-1)}(\xi_{n-1})-f^{(n-1)}(0)}{g^{(n-1)}(\xi_{n-1})-g^{(n-1)}(0)}$$
$$=\frac{f^{(n)}(\xi_n)}{g^{(n)}(\xi_n)}=\frac{f^{(n)}(\theta x)}{n!},$$

其中 $\xi_1\in(0,x),\xi_k\in(0,\xi_{k-1}),k=2,3,\cdots,n,\theta\in(0,1),\theta x=\xi_n$.

故　$f(x)=\dfrac{f^{(n)}(\theta x)}{n!}x^n,\theta\in(0,1)$.

7. 设抛物线 $y=-x^2+Bx+C$ 与 x 轴有两个交点 $x=a,x=b(a<b)$. 函数 f 在$[a,b]$上二阶可导,$f(a)=f(b)=0$,并且曲线 $y=f(x)$与 $y=-x^2+Bx+C$ 在(a,b)内有一个交点. 证明:存在 $\xi\in(a,b)$,则 $f''(\xi)=-2$.

证　令 $F(x)=f(x)+x^2-Bx-C$,$F(x)$在$[a,b]$上二阶可导,且 $F(a)=F(b)=0$. 设曲线 $y=f(x)$与 $y=-x^2+Bx+C$ 在(a,b)内的交点为$(c,f(c))$,则 $F(c)=0$. 在$[a,c]$与$[c,b]$上对 $F(x)$应用 Rolle 定理,$\exists\xi_1\in(a,c),\xi_2\in(c,b)$使 $F'(\xi_1)=0=F'(\xi_2)$.

再在$[\xi_1,\xi_2]$上对 $F'(x)$使用 Rolle 定理,$\exists\xi\in(\xi_1,\xi_2)\subset(a,b)$,使 $F''(\xi)=0$,即 $\exists\xi\in(a,b)$,使 $f''(\xi)=-2$.

8. 设 f 在$[a,b]$上二阶可微,$f(a)=f(b)=0$,$f'_+(a)f'_-(b)>0$,则方程 $f''(x)=0$ 在(a,b)内至少有一个根.

证　因为 $f'_+(a)f'_-(b)>0$,不妨设 $f'_+(a)>0$,则 $f'_-(b)>0$.

由 $f'_+(a)=\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}>0\Rightarrow\exists x_1>a$ 使 $f(x_1)>f(a)=0$,

再由 $f'_-(b)=\lim\limits_{x\to b^-}\dfrac{f(x)-f(b)}{x-b}>0$ 得 $\exists x_2<b$,且 $x_1<x_2$ 使 $f(x_2)<0$.

f 在$[a,b]$上二阶可导知 f 在$[a,b]$上连续,由连续函数零点定理可得 $\exists c\in(a,b)$使 $f(c)=0$,对 $f(x)$在$[a,c]$,$[c,b]$上分别应用 Rolle 定理,$\exists\xi_1\in(a,c),\xi_2\in(c,b)$,使 $f'(\xi_1)=f'(\xi_2)=0$. 又对 $f'(x)$在$[\xi_1,\xi_2]$上应用 Rolle 定理,$\exists\xi\in(\xi_1,\xi_2)\subset(a,b)$使 $f''(\xi)=0$.

习　题　2.5

(A)

2. 写出下列函数的 Maclaurin 公式:

(1) $f(x)=\dfrac{1}{1-x}$;　　(2) $f(x)=\ln(1-x)$;

(3) $f(x)=\operatorname{ch} x$； (4) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-2x}}$.

解 (1) $f(x)=\dfrac{1}{1-x}=1-(-x)+(-x)^2-(-x)^3+\cdots+$

$$(-1)^n(-x)^n+(-1)^{n+1}\frac{(-x)^{n+1}}{(1-\theta x)^{n+2}}.$$

$$=1+x+x^2+x^3+\cdots+x^n+\frac{x^{n+1}}{(1-\theta x)^{n+2}},$$

$x\in(-\infty,1),\theta\in(0,1)$.

(2) $f(x)=\ln(1-x)=\ln[1+(-x)]$

$$=(-x)-\frac{1}{2}(-x)^2+\frac{1}{3}(-x)^3-\frac{1}{4}(-x)^4+\cdots+$$

$$(-1)^{n-1}\frac{(-x)^n}{n}+(-1)^n\frac{(-x)^{n+1}}{(n+1)(1-\theta x)^{n+1}},$$

$$=-\left[x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+\cdots+\frac{x^n}{n}+\frac{x^{n+1}}{(n+1)(1-\theta x)^{n+1}}\right],$$

其中 $x\in(-\infty,1),\theta\in(0,1)$.

(3) 因为 $f(x)=\operatorname{ch} x, f'(x)=\operatorname{sh} x, f''(x)=\operatorname{ch} x,\cdots f^{(2n-1)}(x)=\operatorname{sh} x$, $f^{(2n)}(x)=\operatorname{ch} x$,故 $f^{(2n-1)}(0)=0, f^{(2n)}(0)=1(n\in\mathbf{N}_+)$,故

$$f(x)=\operatorname{ch} x=1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots+\frac{x^{2m}}{(2m)!}+\frac{x^{2m+2}}{(2m+2)!}\operatorname{ch}\theta x,\theta\in(0,1),x\in(-\infty,+\infty).$$

(4) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-2x}}=[1+(-2x)]^{-\frac{1}{2}}$

$$=1-\frac{1}{2}(-2x)+\frac{1}{2!}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)(-2x)^2+\cdots+$$

$$\frac{1}{n!}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)\cdots\left(-\frac{1}{2}-n+1\right)(-2x)^n+$$

$$\frac{1}{(n+1)!}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)\cdots\left(-\frac{1}{2}-n\right)\frac{(-2x)^{n+1}}{(1-2\theta x)^{n+\frac{3}{2}}}$$

$$=1+x+\frac{4!}{2^2(2!)^2}x^2+\cdots+\frac{(2n)!}{2^n(n!)^2}x^n+\frac{(2n+2)!}{2^{n+1}[(n+1)!]^2}\frac{x^{n+1}}{(1-2\theta x)^{n+\frac{3}{2}}}.$$

其中 $x\in(-\infty,\frac{1}{2}),\theta\in(0,1)$.

3. 求下列函数在指定点处带 Peano 余项的 Taylor 公式：

(3) $f(x)=\mathrm{e}^{2x},x_0=1$； (4) $f(x)=\sin x,x_0=\dfrac{\pi}{4}$.

解 (3) $f(x)=\mathrm{e}^{2x}=\mathrm{e}^2\mathrm{e}^{2(x-1)}$

$$=\mathrm{e}^2\left[1+2(x-1)+\frac{2^2}{2!}(x-1)^2+\cdots+\frac{2^n}{n!}(x-1)^n+\right.$$

$$o((x-1)^{n+1})\Big],$$

其中 $x\to 1$.

（4） $f^{(n)}(x)=\sin\left(x+\dfrac{n\pi}{2}\right)$，于是

$$f^{(n)}\left(\frac{\pi}{4}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{n\pi}{2}\right)=\begin{cases}(-1)^k\dfrac{1}{\sqrt{2}}, & n=2k,\\[2ex] (-1)^k\dfrac{1}{\sqrt{2}}, & n=2k+1.\end{cases}$$

故

$$\sin x=\frac{1}{\sqrt{2}}\Big[1+\left(x-\frac{\pi}{4}\right)-\frac{1}{2!}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2-\frac{1}{3!}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^3+\cdots+$$
$$\frac{(-1)^n}{(2n)!}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^{2n}+\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^{2n+1}+o\left(\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^{n+1}\right)\Big],$$ x 在

$\dfrac{\pi}{4}$的附近.

4. 设 $f(x)=x^2\sin x$，求 $f^{(99)}(0)$.

解　$f(x)$的 Maclaurin 公式为

$$f(x)=x^2\Big[x-\frac{1}{3!}x^3+\cdots+(-1)^{48}\frac{x^{97}}{(97)!}+\cdots+$$
$$(-1)^{m-1}\frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!}+(-1)^m\frac{\cos\theta x}{(2m+1)!}x^{2m+1}\Big]$$
$$=x^3-\frac{1}{3!}x^5+\cdots+\frac{x^{99}}{(97)!}+\cdots+(-1)^{m-1}\frac{x^{2m+1}}{(2m-1)!}+(-1)^m\frac{\cos\theta x}{(2m+1)!}x^{2m+3},$$
$$x\in(-\infty,+\infty),$$

故$\dfrac{f^{(99)}(0)}{99!}=\dfrac{1}{(97)!}$，即 $f^{(99)}(0)=99\times 98$.

7. 求下列极限：

（1） $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^x\sin x-x(1+x)}{x^3}$；　　（2） $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left[\left(x^3-x^2+\frac{x}{2}\right)e^{\frac{1}{x}}-\sqrt{1+x^6}\right]$；

（3） $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left[x-x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]$；　　（4） $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{x^2}{2}+1-\sqrt{1+x^2}}{x^2\sin x^2}$.

解　（1） $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^x\sin x-x(1+x)}{x^3}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left[1+x+\dfrac{1}{2}x^2+o_1(x^3)\right]\left[x-\dfrac{1}{6}x^3+o_2(x^3)\right]-x-x^2}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{3}x^3+o_3(x^3)}{x^3}=\frac{1}{3}.$$

(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\left(x^3-x^2+\frac{x}{2}\right)e^{\frac{1}{x}}-\sqrt{x^6+1}\right]$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left[\left(x^3-x^2+\frac{x}{2}\right)e^{\frac{1}{x}}-x^3\left(1+\frac{1}{x^6}\right)^{\frac{1}{2}}\right]$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left[\left(x^3-x^2+\frac{x}{2}\right)\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{6x^3}+o_1\left(\frac{1}{x^3}\right)\right)-x^3\left(1+\frac{1}{2x^6}+o_2\left(\frac{1}{x^6}\right)\right)\right]$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{6}+\frac{1}{12x}+\frac{1}{12x^2}-\frac{1}{2x^3}+\alpha(x)\right]=\frac{1}{6},$$

其中 $\alpha(x)=\left(x^3-x^2+\frac{x}{2}\right)o_1\left(\frac{1}{x^3}\right)-x^3o_2\left(\frac{1}{x^6}\right)$，且

$$\lim_{x\to+\infty}\alpha(x)=\lim_{x\to+\infty}\left[\left(1-\frac{1}{x}+\frac{1}{2x^2}\right)\frac{o_1\left(\frac{1}{x^3}\right)}{\frac{1}{x^3}}-\frac{o_2\left(\frac{1}{x^6}\right)}{\frac{1}{x^6}}\cdot\frac{1}{x^3}\right]=0.$$

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left[x-x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]=\lim\limits_{x\to\infty}\left[x-x^2\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{3x^3}+o\left(\frac{1}{x^3}\right)\right)\right]$

$$=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{3x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right]=\frac{1}{2}.$$

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{x^2}{2}+1-\sqrt{1+x^2}}{x^2\sin x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{x^2}{2}+1-\left[1+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2!}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)x^4+o(x^4)\right]}{x^4}$

$$=\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{8}+\frac{o(x^4)}{x^4}\right]=\frac{1}{8}.$$

8. 设 $f(0)=0,f'(0)=1,f''(0)=2$，求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-x}{x^2}$.

解 $f(x)$带 Peano 余项的 Maclaurin 公式为

$$f(x)=x+x^2+o(x^2),$$

故

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x+x^2+o(x^2)-x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\left[1+\frac{o(x^2)}{x^2}\right]=1.$$

(B)

1. 设函数 $f:[0,2]\to\mathbf{R}$ 在$[0,2]$上二阶可导，并且满足$|f(x)|\leqslant 1,|f''(x)|\leqslant 1$，证明：在$[0,2]$上必有$|f'(x)|\leqslant 2$.

证　$\forall x_0\in[0,2]$，$f(x)$在 $x=x_0$ 处的带 Lagrange 余项的 Taylor 公式为

$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2!}f''(\xi)(x-x_0)^2$，$\xi$ 介于 x 与 x_0 之间，

则 $f(2)=f(x_0)+f'(x_0)(2-x_0)+\frac{1}{2}f''(\xi_1)(2-x_0)^2,\quad \xi_1\in(x_0,2)$，

$$f(0)=f(x_0)+f'(x_0)(-x_0)+\frac{1}{2}f''(\xi_2)(-x_0)^2,\qquad \xi_2\in(0,x_0).$$

$$f(2)-f(0)=2f'(x_0)+\frac{1}{2}f''(\xi_1)(2-x_0)^2-\frac{1}{2}f''(\xi_2)x_0^2.$$

又因为 $|f(x)|\leqslant 1,|f''(x)|\leqslant 1,x\in[0,2]$，故

$$\begin{aligned}2|f'(x_0)|&\leqslant|f(2)|+|f(0)|+\frac{1}{2}x_0^2|f''(\xi_2)|+\frac{1}{2}(2-x_0)^2|f''(\xi_1)|\\&\leqslant 2+\frac{1}{2}[x_0^2+(2-x_0)^2]\end{aligned}$$

又因为当 $0\leqslant x_0\leqslant 2$ 时，$2\leqslant x_0^2+(2-x_0)^2\leqslant 4$，所以 $|f'(x_0)|\leqslant 2$，

故 $\forall x\in[0,2]$，$|f'(x)|\leqslant 2$.

2. 设 $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 二阶可导，并且 $|f(x)|<k_0$，$|f''(x)|<k_2$，k_0,k_2 为正常数.

(1) 写出 $f(x+h)$ 与 $f(x-h)$ 的 Taylor 公式($h>0$)；

(2) 证明：$\forall h>0$，$|f'(x)|\leqslant\frac{k_0}{h}+\frac{h}{2}k_2$；

(3) 求 $\varphi(h)=\frac{k_0}{h}+\frac{h}{2}k_2$ 在$(0,+\infty)$上的最小值.

(4) 证明：$k_1\leqslant\sqrt{2k_0k_2}$，其中 $k_1=\sup\limits_{x\in\mathbf{R}}|f'(x)|$.

解　(1) $f(x+h)=f(x)+f'(x)h+\frac{f''(\xi_1)}{2!}h^2,\quad \xi_1\in(x,x+h)$，

$$f(x-h)=f(x)-f'(x)h+\frac{f''(\xi_2)}{2!}h^2,\quad \xi_2\in(x-h,x).$$

(2) 由(1)知 $f(x+h)-f(x-h)=2f'(x)h+\frac{h^2}{2}[f''(\xi_1)-f''(\xi_2)]$，

则 $|f'(x)|\leqslant\left|\frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}\right|+\frac{h}{4}(|f''(\xi_1)|+|f''(\xi_2)|)$

$$\leqslant\frac{k_0}{h}+\frac{h}{2}k_2.$$

(3) $\varphi'(h)=-\frac{k_0}{h^2}+\frac{1}{2}k_2$，令 $\varphi'(h)=0$ 得驻点 $h_0=\sqrt{\frac{2k_0}{k_2}}$. 又因为 $\varphi''(h)=\frac{2k_0}{h^3}>0$，故 $\varphi_{\min}(h)=\varphi(h_0)=\sqrt{2k_0k_2}$.

(4) 由于 $\forall x\in\mathbf{R}$ 和 $h>0$, $|f'(x)|\leqslant\varphi(h)$, 所以 $|f'(x)|\leqslant\varphi(h_0)$, 由上确界定义 $k_1=\sup\limits_{x\in\mathbf{R}}|f'(x)|\leqslant\sqrt{2k_0k_2}$.

3. 设 $f\in C^{(3)}[0,1]$, $f(0)=1$, $f(1)=2$, $f'\left(\frac{1}{2}\right)=0$, 证明:至少存在一点 $\xi\in(0,1)$, 使 $|f'''(\xi)|\geqslant 24$.

证 f 在 $x_0=\frac{1}{2}$ 处的 Taylor 展开式为

$$f(x)=f\left(\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2!}f''\left(\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{3!}f'''(\xi)\left(x-\frac{1}{2}\right)^3,$$

其中 ξ 介于 x 与 $\frac{1}{2}$ 之间. 于是

$$1=f(0)=f\left(\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}f''\left(\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{6}f'''(\xi_1)\left(-\frac{1}{2}\right)^3,\quad \xi_1\in\left(0,\frac{1}{2}\right),$$

$$2=f(1)=f\left(\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}f''\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{6}f'''(\xi_2)\left(\frac{1}{2}\right)^3,\qquad \xi_2\in\left(\frac{1}{2},1\right),$$

两式相减得 $\frac{1}{48}[f'''(\xi_2)+f'''(\xi_1)]=1$, 即 $f'''(\xi_1)+f'''(\xi_2)=48$, 故 $f'''(\xi_1)$ 与 $f'''(\xi_2)$ 中至少有一个大于 24. 即 $\exists\,\xi\in(0,1)$, 使 $f'''(\xi)>24$.

4. 设函数 f 在 $x=0$ 的某邻域内有二阶导数, 且

$$\lim_{x\to 0}\left(1+x+\frac{f(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}^3.$$

试求 $f(0)$, $f'(0)$, $f''(0)$ 及 $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\frac{f(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$.

解 由 $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+x+\frac{f(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\left[1+x+\frac{f(x)}{x}\right]}{x}}=\mathrm{e}^3$ 可知 $\lim\limits_{x\to 0}\ln\left[1+x+\frac{f(x)}{x}\right]=0$, 即 $\lim\limits_{x\to 0}\left[1+x+\frac{f(x)}{x}\right]=1$, 从而 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=0$, 故 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$. 又由 f 在 $x=0$ 的某邻域内有二阶导数知: $f(x)$, $f'(x)$ 在 $x=0$ 连续, 故 $f(0)=\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$, 从而

$$\begin{aligned}f'(0)&=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=0.\end{aligned}$$

令 $g(x)=\left[1+\left(x+\frac{f(x)}{x}\right)\right]^{\frac{1}{x+\frac{f(x)}{x}}}$, 则 $\lim\limits_{x\to 0}g(x)=\mathrm{e}$. 又因为 $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+x+\frac{f(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}}=$

$\lim\limits_{x\to 0} g(x)^{\frac{1}{x}\left[x+\frac{f(x)}{x}\right]}=e^3$，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^2}\overset{\frac{0}{0}}{=\!=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)}{2x}=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)-f'(0)}{x-0}=\dfrac{f''(0)}{2}$，所以 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\left[x+\dfrac{f(x)}{x}\right]=1+\dfrac{1}{2}f''(0)=3$，即 $f''(0)=4$，故 $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\dfrac{f(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}\left[\left(1+\dfrac{f(x)}{x}\right)^{\frac{x}{f(x)}}\right]^{\frac{f(x)}{x^2}}=e^{\frac{1}{2}f''(0)}=e^2$.

习　题　2.6

(A)

1. 单调可微函数的导函数仍为单调可微函数，对吗？

解　不对. 导函数不一定可微. 且即使导函数可微. 我们知道，函数的单调性与区间有关，例如 $f(x)=\operatorname{sh}x$，$f'(x)=\operatorname{ch}x$，对不同的区间有下列各种情况：

(1) $\operatorname{sh}x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 是单增函数，但 $\operatorname{ch}x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 不是单调函数.

(2) $\operatorname{sh}x$ 在 $(-\infty,0)$ 是单增函数，但 $\operatorname{ch}x$ 在 $(-\infty,0)$ 是单减函数.

(3) $\operatorname{sh}x$ 在 $(0,+\infty)$ 是单增函数，但 $\operatorname{ch}x$ 在 $(0,+\infty)$ 也是单增函数.

3. 求下列函数的单调区间：

(4) $y=x+|\sin 2x|$.

解　$$y=\begin{cases} x+\sin 2x, & m\pi\leqslant x<(2m+1)\dfrac{\pi}{2},\\ x-\sin 2x, & (2m+1)\dfrac{\pi}{2}\leqslant x<(m+1)\pi,\end{cases}$$ 则

$$y'=\begin{cases} 1+2\cos 2x, & m\pi<x<(2m+1)\dfrac{\pi}{2},\\ 1-2\cos 2x, & (2m+1)\dfrac{\pi}{2}<x<(m+1)\pi.\end{cases}$$

而 $x=\dfrac{n\pi}{2}$，为 y 的不可导点. 其中 $m,n=0,\pm1,\pm2,\cdots$.

$1+2\cos 2x=0$ 在 $\left(m\pi,(2m+1)\dfrac{\pi}{2}\right)$ 内有唯一根 $x_{m_2}=m\pi+\dfrac{\pi}{3}$，

$1-2\cos 2x=0$ 在 $\left((2m+1)\dfrac{\pi}{2},(m+1)\pi\right)$ 内有唯一根 $x_{m_1}=m\pi+\dfrac{5\pi}{6}$.

且当 $x\in\left(m\pi,m\pi+\dfrac{\pi}{3}\right)\cup\left(m\pi+\dfrac{\pi}{2},m\pi+\dfrac{5\pi}{6}\right)$，$y'>0$，严格单增.

当 $x\in\left(m\pi+\frac{\pi}{3},m\pi+\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(m\pi+\frac{5\pi}{6},(m+1)\pi\right)$，$y'<0$，严格单减.

6. 如果 $y=f(x)$ 在 x_0 处取得极值，是否一定有 $f'(x_0)=0$.

解 不一定，如果 $y=f(x)$ 在 x_0 可导，则 $f'(x_0)=0$，如果 $f(x)$ 在 x_0 处不可导，则 $f'(x_0)$ 不存在. 例如 $f(x)=|x|$ 在 $x=0$ 取得极小值，但 $f'(0)$ 不存在.

7. 求下列函数的极值：

(5) $f(x)=\left(1+x+\frac{x^2}{2}+\cdots+\frac{x^n}{n!}\right)e^{-x}$； (6) $f(x)=|x|e^{-|x-1|}$.

解 (5) $f'(x)=-\frac{x^n}{n!}e^{-x}$，令 $f'(x)=0$ 得驻点 $x=0$.

若 n 为偶数，则 $f'(x)\leqslant 0$，$f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上严格单减，无极值. 若 n 为奇数，当 $x>0$ 时，$f'<0$；当 $x<0$ 时，$f'>0$，$x=0$ 为极大值点，极大值 $f(0)=1$.

(6) $f'(x)=\begin{cases}-(x+1)e^{x-1}, & x<0,\\ (x+1)e^{x-1}, & 0<x<1,\\ -(x-1)e^{1-x}, & x>1.\end{cases}$ $x=0,1$ 为不可导点.

令 $f'(x)=0$ 得驻点 $x=-1$. 故

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
f'	$+$	0	$-$	不可导	$+$	不可导	$-$
f	严格单调增	极大值点（极大值为 e^{-2}）	严格单减	极小值点（极小值为 0）	严格单增	极大值点（极大值为 1）	严格单减

故 $f(x)$ 有极大值 $f(-1)=\frac{1}{e^2}$，$f(1)=1$ 及极小值 $f(0)=0$.

8. 试问 a 为何值时，函数 $f(x)=a\sin x+\frac{1}{3}\sin 3x$ 在 $x=\frac{\pi}{3}$ 处取得极值？是极大值还是极小值？并求出此极值.

解 $f'(x)=a\cos x+\cos 3x$，$f'\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}a-1$，

$$f''(x)=-a\sin x-3\sin 3x,\quad f''\left(\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}a.$$

因为 $f(x)\in C^{\infty}(-\infty,+\infty)$，所以要使 $x=\frac{\pi}{3}$ 处取得极值，则 $f'\left(\frac{\pi}{3}\right)=0$.

即 $a=2$，又因为 $f''\left(\frac{\pi}{3}\right)=-\sqrt{3}<0$，故 $f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt{3}$ 为极大值.

10. 设 $3a^2-5b<0$，试证方程 $x^5+2ax^3+3bx+4c=0$ 有唯一实根.

证 取 $f(x)=x^5+2ax^3+3bx+4c$，则 $f'(x)=5x^4+6ax^2+3b$，由于 $3a^2-$

$5b<0$所以 $f'(x)>0$，即 $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$严格单增.

又由 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$，$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$知. $f(x)=0$ 在$(-\infty,+\infty)$有唯一实根.

11. 设常数 $k>0$，试确定 $f(x)=\ln x-\dfrac{x}{\mathrm{e}}+k$ 在$(0,+\infty)$内零点的个数.

解　$f'(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\mathrm{e}}$，令 $f'(x)=0$ 得驻点 $x=\mathrm{e}$，在$(0,+\infty)$内无不可导点.

当 $x>\mathrm{e}$ 时，$f'(x)<0$，当 $0<x<\mathrm{e}$ 时，$f'(x)>0$. 故 $f(x)$有唯一的极值 $f(\mathrm{e})=k>0$，且 $f(\mathrm{e})$为极大值.

又因为 $\lim\limits_{x\to0^+}\left(\ln x-\dfrac{x}{\mathrm{e}}+k\right)=-\infty$，由零点定理知$\exists x_1\in(0,\mathrm{e})$，使 $f(x_1)=0$.

而且由于当 $x\in(0,\mathrm{e})$时，$f'(x)>0$，即 $f(x)$在$(0,\mathrm{e})$严格单增，所以 x_1 是 $f(x)=0$ 在$(0,\mathrm{e})$内唯一的根.

又因为 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0$. 所以 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x\left(\dfrac{\ln x}{x}-\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)+k\right]=-\infty$. 类似可证在$(\mathrm{e},+\infty)$内$f(x)$有唯一的零点 x_2.

综上所述，$f(x)$在$(0,+\infty)$内有且仅有两个零点 $x_1\in(0,\mathrm{e})$，$x_2\in(\mathrm{e},+\infty)$.

12. 求下列函数在给定区间上的最大值和最小值.

(2) $f(x)=\sin^3 x+\cos^3 x$，$x\in\left[\dfrac{\pi}{6},\dfrac{3\pi}{4}\right]$；

(4) $f(x)=\max\{x^2,(1-x)^2\}$，$x\in[0,1]$.

解　(2) $f'(x)=3\sin x\cos x(\sin x-\cos x)$，令 $f'(x)=0$ 得驻点 $x_1=\dfrac{\pi}{2}$，$x_2=\dfrac{\pi}{4}$. 又 $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=1$，$f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，$f\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{1}{8}+\dfrac{3\sqrt{3}}{8}$，$f\left(\dfrac{3\pi}{4}\right)=0$.

故 $f(x)$的最大值为 $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=1$，最小值 $f\left(\dfrac{3\pi}{4}\right)=0$.

(4) $$f(x)=\max\{x^2,(1-x)^2\}=\begin{cases}(x-1)^2, & 0\leqslant x<\dfrac{1}{2},\\ x^2, & \dfrac{1}{2}\leqslant x\leqslant 1,\end{cases}$$

$$f'(x)=\begin{cases}2(x-1), & x\in\left[0,\dfrac{1}{2}\right),\\ 2x, & x\in\left(\dfrac{1}{2},1\right).\end{cases}$$

所以 $f(x)$无驻点，只有一不可导点 $x=\dfrac{1}{2}$. 又 $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{4}$，$f(0)=f(1)=$

1，故 $f(x)$ 的最大值为 $f(0)=f(1)=1$，最小值 $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}$.

13. 证明下列不等式：

(2) $|3x-x^3|\leqslant 2, x\in[-2,2]$； (3) $x^x\geqslant \mathrm{e}^{-\frac{1}{\mathrm{e}}}, x\in(0,+\infty)$.

证 (2) 令 $f(x)=3x-x^3$，则 $f(x)$ 在 $[-2,2]$ 上的最大值为 2，最小值为 -2，即 $\forall x\in[-2,2]$，$-2\leqslant f(x)\leqslant 2$，即 $|f(x)|\leqslant 2$.

(3) 取 $f(x)=x^x$，那么 $f'(x)=x^x(\ln x+1)$，则 $x=\mathrm{e}^{-1}$ 是 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内唯一的驻点，且当 $x>\mathrm{e}^{-1}$ 时，$f'(x)>0$，当 $0<x<\mathrm{e}^{-1}$ 时，$f'(x)<0$. 故 $x=\mathrm{e}^{-1}$ 是 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内唯一的极值点，且为极小值.

故 $\forall x\in(0,+\infty)$，$f(x)=x^x\geqslant(\mathrm{e}^{-1})^{\mathrm{e}^{-1}}=\mathrm{e}^{-\frac{1}{\mathrm{e}}}$.

17. 设某银行中的总存款量与银行付给存户利率的平方成正比，若银行以 20% 的年利率把总存款的 90% 贷出，问它给存户支付的年利率定为多少时才能获得最大利润？

解 设银行给存户支付的年利率为 x，则其所获利润为

$T(x)=20\%\times 90\%\times kx^2-x\cdot kx^2, 0<x<100\%$，

$T'(x)=0.36\,kx-3\,kx^2$，于是 $T(x)$ 在 $(0,1)$ 内有唯一驻点 $x_0=0.12$.

$T''(x_0)=-0.36\,k<0$，于是 $T(x)$ 在 $(0,1)$ 内有最大值 $T(0.12)$.

故当 $x=12\%$ 时，银行获利最大.

18. 已知轮船的燃料费与速度的立方成正比，当速度为 10 km/h，每小时的燃料费为 80 元，又其他费用每小时需 480 元. 问轮船的速度多大时，才能使 20 km 航程的总费用最少？此时每小时的总费用等于多少？

解 设轮船的速度为 v，此时 20 km 航程的总费用为 T，则

$$T=T(v)=\frac{20}{v}\cdot 480+\frac{20}{v}\cdot\left(\frac{80}{10^3}\right)v^3, v\in[0,+\infty),$$

$T'(v)=-\dfrac{9\,600}{v^2}+3.2v$. 令 $T'(v)=0$ 得 $v_0=10\sqrt[3]{3}$(km/h).

由于 $v_0=10\sqrt[3]{3}$ 是唯一驻点. 由定理 6.3 知，v_0 即是 $T(v)$ 的最小值点. 故轮船的速度为 $10\sqrt[3]{3}$ km/h 时，20 km 航程的总费用最少. 此时每小时的总费用为 $480+\left(\dfrac{80}{10^3}\right)(10\sqrt[3]{3})^3=720$ 元.

19. 曲线 $y=4-x^2$ 与 $y=2x+1$ 相交于 A、B 两点，C 为弧段 AB 上的一点，问 C 点在何处时 $\triangle ABC$ 的面积最大？求此面积.

解 $A(1,3)$，$B(-3,-5)$，设 $C(x,4-x^2)$，则 $\triangle ABC$ 面积为

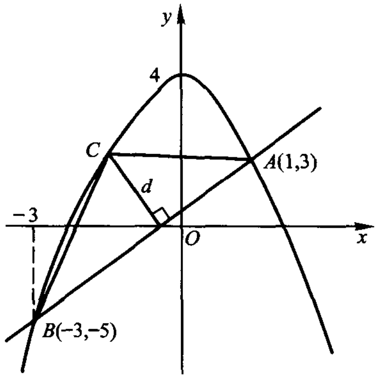
$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}|AB|\cdot d,$$

$|AB|=\sqrt{(-3-1)^2+(-5-3)^2}=4\sqrt{5}$,

$d=\dfrac{|x^2+2x-3|}{\sqrt{5}}$ 为 C 到直线 AB 的距离,故

$S^2=4(x^2+2x-3)^2,\quad x\in[-3,1]$,

则 S^2 在$[-3,1]$上最大值为 $S^2\Big|_{x=-1}=8^2$,故当 C 取在曲线上$(-1,3)$处时,$\triangle ABC$ 面积最大为 8.



(第 19 题图)

20. 用仪器测量某零件的长度 n 次,得到 n 个略有差别的数:$a_1,a_2,\cdots,a_n$. 证明:用算术平均值

$$\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_i$$

作为该零件的长度 x 的近似值,能使

$$f(x)=(x-a_1)^2+(x-a_2)^2+\cdots+(x-a_n)^2$$

达到最小.

解　$f'(x)=2\sum\limits_{i=1}^{n}(x-a_1)=2\left[nx-\sum\limits_{i=1}^{n}a_i\right]$. 令 $f'(x)=0$ 得唯一驻点 $\bar{x}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}a_i$. 又因为 $f''(x)=2n>0$,故 $\bar{x}$ 为 $f(x)$的极小值点,从而 $\bar{x}$ 为 $f(x)$ 的最小值点. 故用 $\bar{x}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}a_i$ 作为该零件长度 x 的近似值,能使 $f(x)$达到最小.

22. 讨论下列函数的凸性与相应曲线拐点:

(2) $f(x)=x+\sin x$.

解　(2) $f'(x)=1+\cos x$,$f''(x)=-\sin x$,令 $f''(x)=0$ 得 $x_n=n\pi,n\in\mathbf{N}$.

当 $x\in(2n\pi,2n\pi+\pi)$时,$f''(x)<0$,即 f 在$(2n\pi,(2n+1)\pi)$为凹函数;

当 $x\in((2n+1)\pi,2(n+1)\pi)$时,$f''(x)>0$,故 f 在$((2n+1)\pi,2(n+1)\pi)$为凸函数.

23. 证明下列不等式:

(1) $\dfrac{1}{2}(a^n+b^n)>\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^n\quad(a,b>0,a\neq b,n>1)$;

(2) $x\ln x+y\ln y>(x+y)\ln\dfrac{x+y}{2}\quad(x,y>0,x\neq y)$.

证　(1) 取 $f(x)=x^n$,则 $f'(x)=nx^{n-1}$,$f''(x)=n(n-1)x^{n-2}>0$ 当$(x>0)$,

故 $f(x)$在$(0,+\infty)$上为严格凸函数,进而$\forall a,b>0,a\neq b$.有

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)<\frac{f(a)+f(b)}{2},\text{即}\left(\frac{a+b}{2}\right)^n<\frac{1}{2}(a^n+b^n).$$

(2) 取 $f(u)=u\ln u$,则 $f'(u)=\ln u+1,f''(u)=\frac{1}{u}>0,u>0$.

故 $f(u)$在$(0,+\infty)$上严格凸,从而$\forall x,y>0,x\neq y$.

$$\frac{x+y}{2}\ln\frac{x+y}{2}<\frac{x\ln x+y\ln y}{2},$$

即

$$(x+y)\ln\frac{x+y}{2}<x\ln x+y\ln y.$$

24. 设在区间 I 上,$f''(x)>0,a,a+h,a-h(h>0)$是 I 内三点,证明:

$$f(a+h)+f(a-h)>2f(a).$$

证 因为 $f''(x)>0$,所以 $f(x)$是 I 上严格凸函数,又因为 $a,a+h,a-h\in I$,所以 $f\left[\frac{(a+h)+(a-h)}{2}\right]=f(a)<\frac{1}{2}[f(a+h)+f(a-h)]$,即

$$f(a+h)+f(a-h)>2f(a).$$

25. 设 $0<x_1<x_2<\cdots<x_n<\pi$,证明:

$$\sin\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right)>\frac{1}{n}(\sin x_1+\sin x_2+\cdots+\sin x_n).$$

证 取 $f(x)=\sin x,x\in[0,\pi]$,因为 $f''=-\sin x<0,x\in(0,\pi)$,所以 $f(x)$是$(0,\pi)$上的严格凹函数.由定理 6.6,取 $\lambda_i=\frac{1}{n},i=1,2,\cdots,n$.

可得

$$f\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i\right)>\sum_{i=1}^{n}\lambda_i f(x_i),\text{即}$$

$$\sin\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right)>\frac{1}{n}(\sin x_1+\sin x_2+\cdots+\sin x_n).$$

26. 利用 $f(x)=-\ln x(x>0)$是凸函数(因而 $\ln x$ 为凹函数)证明:

(1) $x_1^{\lambda_1}x_2^{\lambda_2}\cdots x_n^{\lambda_n}\leqslant\lambda_1x_1+\lambda_2x_2+\cdots+\lambda_nx_n$(其中 $x_i>0,\lambda_i\geqslant0,\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i=1$);

(2) 当 $x_i>0(i=1,2,\cdots,n)$时,

$$\frac{n}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}}\leqslant\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}\leqslant\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}.$$

证 (1) 因为 $f(x)=-\ln x$ 是$(0,+\infty)$上的凸函数,且 $x_i>0,\lambda_i\geqslant0$,及 $\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i=1$,所以 $f\left(\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_ix_i\right)\leqslant\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_if(x_i)$,

即 $\ln(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2+\cdots+\lambda_nx_n)\geqslant\lambda_1\ln x_1+\lambda_2\ln x_2+\cdots+\lambda_n\ln x_n$,

即 $\ln(\lambda_1 x_1+\lambda_2 x_2+\cdots+\lambda_n x_n)\geqslant\ln(x_1^{\lambda_1}x_2^{\lambda_2}\cdots x_n^{\lambda_n})$.

由 $\ln x$ 的单调增可知：$\lambda_1 x_1+\lambda_2 x_2+\cdots+\lambda_n x_n\geqslant x_1^{\lambda_1}x_2^{\lambda_2}\cdots x_n^{\lambda_n}$.

(2) 令 $\lambda_i=\frac{1}{n}, i=1,2,\cdots,n$. 由结论(1)可知：$\forall x_i>0, i=1,2,\cdots,n$

$$\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}\leqslant\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}.$$

令 $\lambda_i=\frac{1}{n}, x_i=\frac{1}{y_i}, i=1,2,\cdots,n$. 则由结论(1)，当且仅当 $y_i>0$ 时，

$$\frac{1}{n}\left(\frac{1}{y_1}+\frac{1}{y_2}+\cdots+\frac{1}{y_n}\right)\geqslant\left(\frac{1}{y_1}\frac{1}{y_2}\cdots\frac{1}{y_n}\right)^{\frac{1}{n}},$$

即

$$\sqrt[n]{y_1y_2\cdots y_n}\geqslant\frac{n}{\frac{1}{y_1}+\frac{1}{y_2}+\cdots+\frac{1}{y_n}},$$

故

$$\frac{n}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}}\leqslant\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}\leqslant\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}.$$

(B)

1. 证明定理 6.4.

证　由于 f 在 x_0 处 n 阶可导，且 $f'(x_0)=f''(x_0)=\cdots=f^{(n-1)}(x_0)=0$，所以 $f(x)$ 在 x_0 处带 Peano 余项的 n 阶 Taylor 公式为

$$f(x)=f(x_0)+\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n+o((x-x_0)^n),$$

从而

$$f(x)-f(x_0)=\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n+o((x-x_0)^n).$$

如果 n 为偶数，类似于定理 6.3 的证明可得结论(1).

如果 n 为奇数，由于上式右端第二项是第一项的高阶无穷小，因此在 x_0 的充分小邻域内，$f(x)-f(x_0)$ 的符号取决于第一项，当 $x<x_0$ 时，$f(x)-f(x_0)$ 与 $f^{(n)}(x_0)$ 异号；当 $x>x_0$ 时，$f(x)-f(x_0)$ 与 $f^{(n)}(x_0)$ 同号. 故在 x_0 的充分小邻域内，$f(x)-f(x_0)$ 不定号. 即 x_0 非极值点.

2. 证明下列不等式：

(3) $\sin x+\tan x>2x\quad\left(0<x<\frac{\pi}{2}\right)$；

(4) $\frac{|a+b|}{\pi+|a+b|}\leqslant\frac{|a|}{\pi+|a|}+\frac{|b|}{\pi+|b|}(a,b\in\mathbf{R})$.

证 (3) 令$f(t)=\sin t+\tan t-2t$,那么 $f'(t)=\cos t+\sec^2 t-2$,

$$f''(t)=\frac{(2-\cos^3 t)\sin t}{\cos^3 t}>0,x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right),$$

故 $f'(t)$在$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$上严格增,于是$\forall t\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$,$f'(t)>f'(0)=0$,进而 $f(x)$是$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$上的严格增函数,即$\forall x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

$$f(x)>f(0),即 \sin x+\tan x>2x.$$

(4) 取 $f(x)=\frac{x}{\pi+x}$,则 $f'(x)=\frac{\pi}{(\pi+x)^2}>0$,即 $f(x)$为严格单增函数. 因而对$\forall a,b\in\mathbf{R}$,由于$|a+b|\leqslant|a|+|b|$,所以

$$\frac{|a+b|}{\pi+|a+b|}\leqslant\frac{|a|+|b|}{\pi+|a|+|b|}\leqslant\frac{|a|}{\pi+|a|}+\frac{|b|}{\pi+|b|}.$$

3. 证明:方程 $\sin x=x$ 只有一个实根.

证 显然 $\sin x=x$ 在$(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$上无解.

对$[-1,1]$,取 $f(x)=x-\sin x$,则 $f'(x)=1-\cos x\geqslant0$,且当且仅当 $x=0$ 时$f'(x)=0$. 即 $f(x)$在$[-1,1]$严格单增. 又 $f(0)=0$,故 $x=0$ 是 $\sin x=x$ 的唯一的实根.

4. 设 $0\leqslant x_1<x_2<x_3\leqslant\pi$,证明:$\frac{\sin x_2-\sin x_1}{x_2-x_1}>\frac{\sin x_3-\sin x_2}{x_3-x_2}$.

证 令 $f(x)=\sin x$,在$[x_1,x_2]$及$[x_2,x_3]$上分别应用 Lagrange 中值定理得$\exists\xi_1\in(x_1,x_2)$及$\xi_2\in(x_2,x_3)$使

$$\frac{\sin x_2-\sin x_1}{x_2-x_1}=\cos\xi_1,\frac{\sin x_3-\sin x_2}{x_3-x_2}=\cos\xi_2.$$

又因为 $0\leqslant x_1<\xi_1<x_2<\xi_2<x_3\leqslant\pi$,且 $\cos x$ 在$[0,\pi]$上严格减,

故 $\cos\xi_1>\cos\xi_2$. 从而

$$\frac{\sin x_2-\sin x_1}{x_2-x_1}>\frac{\sin x_3-\sin x_2}{x_3-x_2}.$$

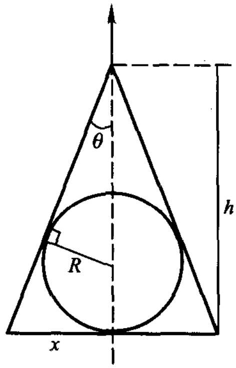
5. 设 $f(x)=(x-x_0)^n g(x)$,$n\in\mathbf{N}_+$,$g(x)$在 x_0 处连续,且 $g(x_0)\neq0$. 问 $f(x)$在 x_0 处有无极值?

解 因 $g(x_0)\neq0$. 不妨设 $g(x_0)>0(<0)$,又 $g(x)$在 x_0 处连续,由函数极限的局部保号性可知:$\exists U(x_0,\delta)$,使$\forall x\in U(x_0,\delta)$,$g(x)>0(<0)$. 于是,$\forall x\in U(x_0,\delta)$,当 n 为偶数时,$f(x)-f(x_0)=(x-x_0)^n g(x)>0$. 也即 x_0 为$f(x)$的极小(大)值点;当 n 为奇数时,如 $x\in(x_0-\delta,x_0)$,$f(x)-f(x_0)<0\ (>0)$;如 $x\in(x_0,x_0+\delta)$,$f(x)-f(x_0)>0(<0)$. 故 x_0 非极值点.

综上所述,当 n 为奇数时,x_0 不是 $f(x)$的极值点;当 n 为偶数时,若$g(x_0)>0$,x_0

为 $f(x)$ 的极小值点，若 $g(x_0)<0$，x_0 为 $f(x)$ 的极大值点.

6. 求半径为 R 的球的外切正圆锥的最小体积.



（第 6 题图）

解　设正圆锥的半顶角为 $\theta\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$，底半径为 x. 体积为 V，则 $\frac{R}{h-R}=\sin\theta$，$\frac{x}{h}=\tan\theta$，进而

$h=R\left(1+\frac{1}{\sin\theta}\right)$，$x=h\tan\theta=R\left(1+\frac{1}{\sin\theta}\right)\tan\theta$. 从而

$$V=\frac{1}{3}\pi x^2h=\frac{1}{3}\pi R^3\frac{(1+\sin\theta)^3}{\sin\theta\cos^2\theta},\quad \theta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right),$$

那么 $$\frac{dV}{d\theta}=\frac{1}{3}\pi R^3\frac{(1+\sin\theta)^2\cos\theta[3\cos^2\theta\sin\theta-(1+\sin\theta)(\cos^2\theta-2\sin^2\theta)]}{\sin^2\theta\cos^4\theta}$$

$$=\frac{1}{3}\pi R^3(1+\sin\theta)^3\frac{3\sin\theta-1}{\sin^2\theta\cos^2\theta}.$$

令 $\frac{dV}{d\theta}=0$，并考虑到 $\theta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，$\sin\theta+1\neq0$，$\cos\theta\neq0$，得 $\sin\theta=\frac{1}{3}$，即 $\theta=\arcsin\frac{1}{3}$ 是 V 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上的唯一驻点. 又因为此实际问题一定存在最小值，故 $\theta=\arcsin\frac{1}{3}$ 一定是 V 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上的最小值点. $h\Big|_{\theta=\arcsin\frac{1}{3}}=4R$，$x\Big|_{\theta=\arcsin\frac{1}{3}}=\sqrt{2}R$，最小体积 $V=V\Big|_{\theta=\arcsin\frac{1}{3}}=\frac{8}{3}\pi R^3$.

7. 求常数 k 的取值范围，使当 $x>0$ 时，方程 $kx+\frac{1}{x^2}=1$ 有且仅有一个根.

解　① $k=0$，则方程变为 $\frac{1}{x^2}=1$，则在 $(0,+\infty)$ 有且仅有唯一解 $x^*=1$.

令 $f(x)=kx+\frac{1}{x^2}-1$.

② 如果 $k>0$，$f'(x)=k-\frac{2}{x^3}$，令 $f'(x)=0$ 得在 $(0,+\infty)$ 上 $f(x)$ 有唯一驻点 $x_0=\sqrt[3]{\frac{2}{k}}$. 又 $f''\left(\sqrt[3]{\frac{2}{k}}\right)>0$，因而 $f(x)$ 在 x_0 处取得极小值. 即

$$f\left(\sqrt[3]{\frac{2}{k}}\right)=\min_{x\in(0,+\infty)}f(x)=\frac{3}{2}\sqrt[3]{2k^2}-1.$$

若 $k>\frac{2\sqrt{3}}{9}$，则 $f(x)>f(x_0)>0$，$x\in(0,+\infty)$，即方程 $f(x)=0$ 无解；如果

$k<\frac{2\sqrt{3}}{9}$,由于 $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=+\infty=\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$,所以 $f(x)=0$ 在$(0,+\infty)$内有两个根. 若 $k=\frac{2\sqrt{3}}{9}$,x_0 是 $f(x)=0$ 在$(0,+\infty)$唯一的根.

③ 如果 $k<0$,则 $f'(x)<0(x\in(0,+\infty))$,所以 $f(x)$在$(0,+\infty)$上严格单减. 又因为 $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$. 故 $f(x)$在$(0,+\infty)$上有唯一的正根.

综上所述,当 $k=\frac{2\sqrt{3}}{9}$或 $k\leqslant 0$ 时,方程 $f(x)=0$,即 $kx+\frac{1}{x^2}=1$ 有且仅有一个根.

8. 设某产品的成本函数为 $C=aq^2+bq+c$,需求函数为 $q=\frac{1}{e}(d-p)$,其中 C 为成本,q 为需求量(即产量),p 为单价;a,b,c,d,e 都是正的常数,且 $d>b$. 求使利润最大的产量及最大的利润.

解 由需求量(即产量)$q=\frac{1}{e}(d-p)$得产品单价 $p=d-eq$,从而利润 $T=T(q)=pq-C=-(e+a)q^2+(d-b)q-c$.

经计算知:当 $q=\frac{d-b}{2(a+e)}$时,利润 T 取得最大值. 且最大利润为 $T\left(\frac{d-b}{2(a+e)}\right)=\frac{(d-b)^2}{4(a+e)}-c$.

10. 有人说"若 $f'(x_0)>0$,则存在 x_0 的某邻域,在此邻域内 $f(x)$单调增". 这种说法正确吗? 如果正确,请给出证明;如果不正确,请举例说明并给出正确结论.

解 不正确. 如

$$f(x)=\begin{cases} x+2x^2\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0, \\ 0, & x=0, \end{cases} \quad f'(x)=\begin{cases} 1+4x\sin\frac{1}{x}-2\cos\frac{1}{x}, & x\neq 0, \\ 1, & x=0. \end{cases}$$

当 $x_n=\frac{1}{(2n+1)\pi}$,$k=0,\pm1,\pm2,\cdots$时,$f'(x_n)=3>0$.

当 $y_n=\frac{1}{2n\pi}$时,$f'(y_n)=-1<0$.

即在原点的任一邻域内,$f'(x)$有取正值的点也有取负值的点,因为 $f'(x)$ 在 $x\neq 0$ 的一切点都连续,故 $f(x)$在原点的任一邻域内都不单调. 正确的结论应为

若 $f'(x_0)>0$,且 $f'(x)$在 x_0 连续,则存在 x_0 的某邻域,在此邻域内 $f(x)$ 单调增.

第三章　一元函数积分学及其应用

习　题　3.1

(A)

1. 用定积分的定义求下列积分的值.

(1) $\int_0^1 x\mathrm{d}x$；　　　　(2) $\int_0^1 \mathrm{e}^x\mathrm{d}x$

解　(1) 因为 $f(x)=x\in C[0,1]$，所以 $f(x)\in\mathscr{R}[0,1]$.

将$[0,1]n$ 等分，则第 k 个区间为$\left[\frac{k-1}{n},\frac{k}{n}\right]$，取 $\xi_k=\frac{k}{n}$，　$k=1,2,\cdots,n$，

由定积分定义 $\int_0^1 x\mathrm{d}x=\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k}{n}\cdot\frac{1}{n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n(n+1)}{2n^2}=\frac{1}{2}$.

(2) 由于 $\mathrm{e}^x\in\mathscr{R}[0,1]$，故采用(1) 中相同的划分法，与 ξ_k 的取法，则

$$\int_0^1 \mathrm{e}^x\mathrm{d}x=\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\mathrm{e}^{\frac{k}{n}}\cdot\frac{1}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}\left[1-(\mathrm{e}^{\frac{1}{n}})^n\right]}{1-\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}}=\mathrm{e}-1.$$

5. 设 $f\in\mathscr{R}[-a,a]$，根据定积分几何意义说：

$$\int_{-a}^{a}f(x)\mathrm{d}x=\begin{cases}0, & f\text{ 为奇函数},\\ 2\int_0^a f(x)\mathrm{d}x, & f\text{ 为偶函数}.\end{cases}$$

解　$\int_{-a}^{a}f(x)\mathrm{d}x$ 表示由 $y=f(x)$，$x=a$，$x=-a$，及 x 轴所围面积的代数和. 如果 f 为奇函数，则 f 的图像关于原点对称，则所围图形的正面积与负面积相同. 即 $\int_0^a f(x)\mathrm{d}x$ 与 $\int_{-a}^0 f(x)\mathrm{d}x$ 大小相等，符号相反，故 $\int_{-a}^{a}f(x)\mathrm{d}x=0$. 如果 f 为偶函数，f 的图像关于 y 轴对称，$\int_0^a f(x)\mathrm{d}x$ 与 $\int_{-a}^0 f(x)\mathrm{d}x$ 表示两块面积相等，且符号相同，故 $\int_{-a}^{a}f(x)\mathrm{d}x=2\int_0^a f(x)\mathrm{d}x$.

6. 设 f 是周期为 T 的周期函数，且在任一有限区间上可积. 根据定积分的

几何意义说明：

$$\int_a^{a+T} f(x)\mathrm{d}x=\int_0^T f(x)\mathrm{d}x,$$

其中 a 为任一常数.

解　因为 f 是周期为 T 的周期函数，由周期函数的几何特性知：任一周期内由 f 所围曲边梯形面积的代数和相同，即 $\int_a^{a+T} f(x)\mathrm{d}x=\int_0^T f(x)\mathrm{d}x$.

7. 设 $f\in C[a,b]$，试说明任意改变 f 在有限个点上的值不影响它的可积性和积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 的值.

解　设将 f 改变有限个点的函数值后所得函数记为 f^*，则由 $f\in C[a,b]$ 知：f^* 只有有限个可去间断点，所以 $f^*\in\mathscr{R}[a,b]$. 为求 $\int_a^b f^*\mathrm{d}x$，则可用某种特殊的分法和取点方式. 现将 $[a,b]$ 划分使 f^* 的所有间断点都是分点，且 ξ_k 不取区间的端点，则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b f^*\mathrm{d}x$.

8. 研究下列函数在所给区间上的可积性，并说明理由：

(1) $f(x)=x^2+\cos x,\quad x\in(-\infty,+\infty)$；

(2) $f(x)=\operatorname{sgn} x,\quad x\in[-1,1]$；

(3) $f(x)=\dfrac{1}{x^2-2},\quad x\in[-2,2]$；

(4) $f(x)=\tan x,\quad x\in[0,2]$；

(5) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, & x\neq 0,\\ 1, & x=0;\end{cases}\quad x\in[-1,1]$

解　(1) 不可积. $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 连续，但 $(-\infty,+\infty)$ 非有限区间.

(2) 可积. $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上只有唯一的间断点 $x=0$，且为第Ⅰ类间断点.

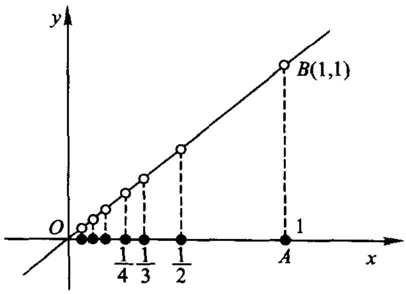
(3) 不可积. $f(x)$ 在 $[-2,2]$ 上无界.

(4) 不可积. 由于 $f(x)=\tan x$ 在 $[0,2]$ 上无界.

(5) 可积. 因为 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上连续.

9. 下列命题是否正确？若正确，给予证明；否则，举出反例：

(1) 若 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\geqslant 0$，则在 $[a,b]$ 上必有 $f(x)\geqslant 0$；



(第 9 题(2))

(2) 若 $f\in\mathscr{R}[a,b]$，则 f 在 $[a,b]$ 上有有限个间断点；

(3) 若 $|f|\in\mathscr{R}[a,b]$，则 $f\in\mathscr{R}[a,b]$；

(4) 若 f 与 g 在 $[a,b]$ 上都不可积，则 $f+g$ 在 $[a,b]$ 上也不可积；

(5) $f\in\mathscr{R}[a,b]\Leftrightarrow f^2\in\mathscr{R}[a,b]$；

(6) 若 $f\in C[a,b]$，$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=0$，则 $\exists\, c\in(a,b)$，使 $f(c)=0$.

解 (1) 不正确. 如 $\int_{-1}^{2} x\mathrm{d}x=\frac{3}{2}>0$，但 $f(x)=x$ 在 $[-1,2]$ 不定号.

(2) 不正确. 例如 $f(x)=\begin{cases}0, & x=\frac{1}{n}, n\in\mathbf{N}_+,\\ x, & x\neq\frac{1}{n}.\end{cases}$ $f(x)$ 在 $[0,1]$ 有无限多个间断点，但 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可积，且 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\triangle ABO$ 的面积 $=\frac{1}{2}$.

(3) 不正确. 例如 $f(x)=\begin{cases}1, & x\text{ 为有理数},\\ -1, & x\text{ 为无理数},\end{cases}$ 则 $|f(x)|=1$ 在 $[0,1]$ 可积，但 $f(x)$ 不可积.（因为将 $[0,1]$ 任意划分成 n 个小区间，如果在第 k 个子区间上取 ξ_k 为有理点. 则积分和 $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k=1$，如果在第 k 个子区间上取 ξ_k 为无理点，则积分和 $S_n=-1$. 即对同一种分割法，不同的 ξ_k 的取法，和式的极限不同，由定积分定义知 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上不可积）.

(4) 不正确. $f(x)=\begin{cases}1, & x\text{ 为有理数},\\ -1, & x\text{ 为无理数},\end{cases}$ $g(x)=-f(x)$. 由本题(3)知 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $[0,1]$ 上均不可积，但 $f(x)+g(x)=0$ 在 $[0,1]$ 上连续，故可积.

(5) 不正确. 由定积分性质 1.5 知：$f\in\mathscr{R}[a,b]\Rightarrow f^2\in\mathscr{R}[a,b]$. 但 $f^2\in\mathscr{R}[a,b]$ 可积，f 不一定可积. 如上题中 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上不可积，但 $f^2(x)=1$ 在 $[0,1]$ 上连续，故可积.

(6) 正确. 用反证法，假设 $\forall\, x\in(a,b)$，$f(x)\neq 0$，则 $f(x)$ 在 (a,b) 上定号.（即 $f(x)$ 在 (a,b) 上要么恒正，要么恒负. 否则由连续函数的零点定理，必存在 $c\in(a,b)$，使 $f(c)=0$）. 由定积分的几何意义知，$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\neq 0$，这与已知矛盾. 故原命题成立.

10. 设 $f,g\in C[a,b]$.

(1) 如果在 $[a,b]$ 上 $f(x)\geqslant 0$，且 $f(x)\not\equiv 0$，证明：

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x>0;$$

(2) 如果在 $[a,b]$ 上 $f(x)\geqslant 0$，且 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=0$，证明 $f(x)\equiv 0$；

(3) 如果在$[a,b]$上 $f(x)\geqslant g(x)$，且 $f(x)\not\equiv g(x)$，证明：

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x>\int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

证 (1) 依题意可知，$\exists x_0\in[a,b]$，使 $f(x_0)>0$，由连续函数的保号性得 $\exists\delta>0$ 及 $q>0$，使 $\forall x\in U(x_0,\delta)$，$f(x)\geqslant q>0$，于是

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^{x_0-\delta} f(x)\mathrm{d}x+\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f(x)\mathrm{d}x+\int_{x_0+\delta}^{b} f(x)\mathrm{d}x$$
$$\geqslant\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f(x)\mathrm{d}x=q\delta>0.$$

(2) 假设 $\exists x_0\in[a,b]$，使 $f(x_0)\neq 0$. 由(1)知，$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x>0$. 而这与已知矛盾. 故 $\forall x\in[a,b]$，$f(x)=0$，即 $f(x)\equiv 0$，$x\in[a,b]$.

(3) 由题设 $F(x)=f(x)-g(x)\geqslant 0$，且 $F(x)\not\equiv 0$. 则由(1)知，$\int_a^b F(x)\mathrm{d}x>0$，即 $\int_a^b (f(x)-g(x))\mathrm{d}x>0$. 由定积分线性性质知，(3)中结论成立.

11. 判别下列积分的大小：

(1) $\int_0^1 \mathrm{e}^x\mathrm{d}x$ 和 $\int_0^1 \mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x$；

(2) $\int_1^2 2\sqrt{x}\mathrm{d}x$ 和 $\int_1^2 \left(3-\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x$；

(3) $\int_0^1 \ln(1+x)\mathrm{d}x$ 和 $\int_0^1 \frac{\arctan x}{1+x}\mathrm{d}x$.

解 (1) 当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时，$0\leqslant x^2\leqslant x$，且仅当 $x=0,1$ 时 $x^2=x$. 那么由 e^u 在$[0,1]$上严格单增知，$\mathrm{e}^{x^2}<\mathrm{e}^x(x\in(0,1))$，故

$$\int_0^1 \mathrm{e}^x\mathrm{d}x>\int_0^1 \mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x.$$

(2) 令 $F(x)=2\sqrt{x}-3+\frac{1}{x}$，则 $F'(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{x^2}=\frac{\sqrt{x^3}-1}{x^2}>0$，$x\in(1,2)$，故 $F(x)$在$[1,2]$上严格单增. 从而 $F(x)>F(1)=0$，$x\in[1,2]$. 进而 $\int_1^2 2\sqrt{x}\mathrm{d}x>\int_1^2\left(3-\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x$.

(3) 令 $F(x)=(1+x)\ln(1+x)-\arctan x$，则 $F'(x)=\frac{x^2}{1+x^2}+\ln(1+x)>0$，$x\in(0,1)$，故 $F(x)$在$[0,1]$严格单增. 从而 $F(x)>F(0)=0$. 于是 $\forall x\in[0,1]$，$\ln(1+x)>\frac{\arctan x}{1+x}$. 故 $\int_0^1 \ln(1+x)\mathrm{d}x>\int_0^1\frac{\arctan x}{1+x}\mathrm{d}x$.

12. 证明下列不等式：

(1) $1<\int_0^1 e^{x^2}dx<e$;　　　(2) $84<\int_{-6}^8\sqrt{100-x^2}dx<140$.

证　(1) 因为 $\forall x\in(0,1),1<e^{x^2}<e$,由第 10 题(1)知,$\int_0^1(e^{x^2}-1)dx>0$,$\int_0^1(e-e^{x^2})dx>0$,即 $\int_0^1 1\cdot dx<\int_0^1 e^{x^2}dx<\int_0^1 edx$,而 $\int_0^1 dx=1$,$\int_0^1 edx=e$,故 $1<\int_0^1 e^{x^2}dx<e$.

(2) 当 $x\in(-6,8)$时,$6\leqslant\sqrt{100-x^2}\leqslant 10$,且仅当 $x=0$ 时,$\sqrt{100-x^2}=10$,$x=8$ 时,$\sqrt{100-x^2}=6$. 故由第 10 题(1)

$$\int_{-6}^8(\sqrt{100-x^2}-10)dx<0,\quad \int_{-6}^8(\sqrt{100-x^2}-6)dx>0,$$

故
$$84=\int_{-6}^8 6dx<\int_{-6}^8\sqrt{100-x^2}dx<\int_{-6}^8 10dx=140.$$

13. 利用定理 1.2 证明:若有界函数 f 在有限区间 I 上可积,则 f 在 I 的任一子区间上也可积.

证　由定理 1.2 知,有界函数 f 在 I 上可积$\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$,当 $d<\delta$ 时,$\sum_{k=1}^n\omega_k\cdot\Delta x_k<\varepsilon$. 任取$[a,b]$的一个子区间$[c,d]\subseteq I$,将$[c,d]$任意分割为 m 个小子区间,以$[c,d]$的划分作为 I 的任一分割的一部分,则

$$\sum_{k=1}^n\omega_k\cdot\Delta x_k=\sum_{I-[c,d]}\omega_k\cdot\Delta x_k+\sum_{[c,d]}\omega_k\cdot\Delta x_k\geqslant\sum_{[c,d]}\omega_k\cdot\Delta x_k,$$

所以对 $\forall\varepsilon>0,\exists\delta^*=\delta>0$,当 $d<\delta$ 时,$\sum_{[c,d]}\omega_k\cdot\Delta x_k<\varepsilon$,即由定理 1.2,$f$ 在 I 的任一子区间可积.

14. 设 f 在$[a,b]$上二阶可导,$\forall x\in[a,b],f'(x)>0,f''(x)>0$,证明

$$(b-a)f(a)<\int_a^b f(x)dx<\frac{b-a}{2}[f(a)+f(b)].$$

证　因为 $\forall x\in[a,b],f'(x)>0$,则 $f(x)$在$[a,b]$上严格单增,从而 $f(x)>f(a),x\in(a,b]$,故

$$\int_a^b f(x)dx>\int_a^b f(a)dx>(b-a)f(a).$$

下面证明:
$$\int_a^b f(x)dx<\frac{b-a}{2}[f(a)+f(b)].$$

因为 $\forall x\in[a,b],f''(x)>0$,则 $f(x)$在$[a,b]$上严格凸. 从而曲线 $y=f(x)$位于直线 $AB:y=f(a)+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$的上方. 即 $\forall x\in(a,b)$,

$$\left[f(a)+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)\right]-f(x)>0.$$

故 $$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x<\int_a^b\left[f(a)+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)\right]\mathrm{d}x$$
$$=f(a)(b-a)+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\frac{(b-a)^2}{2}=\frac{b-a}{2}[f(a)+f(b)],$$
其中 $\int_a^b(x-a)\mathrm{d}x$ 表示由 $y=0,y=x-a,x=b$ 所围三角形面积,因此 $\int_a^b(x-a)\mathrm{d}x=\frac{(b-a)^2}{2}$.

(B)

1. 设 f 与 g 在任一有限区间上可积.

(1) 如果 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$,那么 f 与 g 在 $[a,b]$ 上是否相等?

(2) 如果在任一区间 $[a,b]$ 上都有 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$,那么 f 是否恒等于 g?

(3) 如果(2)中 f 与 g 都是连续函数,那么又有怎样的结论?

解 (1) 不一定. $f(x)=x,g(x)=-x,x\in[-1,1]$,则 $g(x)\neq f(x)$,但
$$\int_{-1}^1 f(x)\mathrm{d}x=0=\int_{-1}^1 g(x)\mathrm{d}x.$$

(2) 不一定. 例 $f(x)=1,g(x)=\begin{cases}1, & x\neq 0,\\ 0 & x=0,\end{cases}$ 则 $\forall\,[a,b]\subset\mathbf{R}$,
$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b g(x)\mathrm{d}x=b-a,\text{但 } f(x)\not\equiv g(x).$$

(3) 由习题 3.1(A)第 10 题(2)可知,如果 f 与 g 都是连续函数,那么 f 恒等于 g.

3. 设函数 f 在 $[0,a]$ 上连续,在 $(0,a)$ 内可导,且 $3\int_{\frac{2a}{3}}^a f(x)\mathrm{d}x=f(0)a$,证明:$\exists\,\xi\in(0,a)$,使 $f'(\xi)=0$.

证 如果 $a=0$,结论显然成立. 如果 $a\neq 0$,由于 $f\in C[0,a]$. 则 $f\in C\left[\frac{2a}{3},a\right]$. 由积分中值定理,$3\int_{\frac{2a}{3}}^a f(x)\mathrm{d}x=af(c)$,其中 $c\in\left[\frac{2a}{3},a\right]$,故 $f(0)a=af(c)$,由 $a\neq 0$ 知,$f(c)=f(0)$,且 $c\neq 0$,从而 $f(x)$ 在 $[0,c]$ 上满足 Rolle 定理的条件,则 $\exists\,\xi\in(0,c)\subset(0,a)$,使 $f'(\xi)=0$.

4. 设 f 与 g 在区间 $[a,b]$ 上连续,证明 Cauchy 不等式:
$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\leqslant\left(\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}.$$

证　因为 $\forall\lambda\in\mathbf{R}$，$\int_a^b[\lambda f(x)-g(x)]^2\mathrm{d}x\geqslant 0$. 故关于 λ 的二次方程

$$\lambda^2\left[\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\right]+\lambda\left[2\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\right]+\left[\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x\right]=0,$$

要么无实数解，要么有两相等实数解. 从而其根的判别式

$$\Delta=\left[2\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\right]^2-4\left[\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\right]\cdot\left[\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x\right]\leqslant 0,$$

即
$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\leqslant\left(\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}.$$

5. f 与 g 在区间 $[a,b]$ 上连续，利用 Cauchy 不等式证明 Minkowski 不等式：

$$\left(\int_a^b[f(x)+g(x)]^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}\leqslant\left(\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}.$$

证　因为 f 与 g 在区间 $[a,b]$ 上连续知，Cauchy 不等式成立，即

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\leqslant\left(\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}.$$ 于是

$$\begin{aligned}0&\leqslant\int_a^b[f(x)+g(x)]^2\mathrm{d}x=\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x+2\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x+\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x\\&\leqslant\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x+2\left(\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}+\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x\\&=\left[\left(\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}\right]^2,\end{aligned}$$

故
$$\left[\int_a^b[f(x)+g(x)]^2\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{2}}\leqslant\left(\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}.$$

6. 设 f 是 $[a,b]$ 上的连续函数，利用 Cauchy 不等式证明：

$$\int_a^b \mathrm{e}^{f(x)}\mathrm{d}x\int_a^b \mathrm{e}^{-f(x)}\mathrm{d}x\geqslant(b-a)^2.$$

证　由于 $\forall x\in[a,b]$，$\mathrm{e}^{f(x)}$ 与 $\mathrm{e}^{-f(x)}$ 都是正值函数. 取 $h(x)=(\mathrm{e}^{f(x)})^{\frac{1}{2}}$，$g(x)=(\mathrm{e}^{-f(x)})^{\frac{1}{2}}$，由 $f\in C[a,b]$ 知，$h(x)$ 与 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，由 Cauchy 不等式知：

$$\begin{aligned}\left(\int_a^b \mathrm{e}^{f(x)}\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_a^b \mathrm{e}^{-f(x)}\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}&\geqslant\int_a^b(\mathrm{e}^{f(x)})^{\frac{1}{2}}(\mathrm{e}^{-f(x)})^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x\\&=\int_a^b\mathrm{d}x=b-a>0,\end{aligned}$$

故
$$\int_a^b \mathrm{e}^{f(x)}\mathrm{d}x\int_a^b \mathrm{e}^{-f(x)}\mathrm{d}x\geqslant(b-a)^2.$$

习　题　3.2

(A)

3. 用 Newton-Leibniz 公式计算下列定积分：

(4) $\int_{-1}^{1}|x|\,\mathrm{d}x$；　　(6) 设 $f(x)=\begin{cases}x, & x\leqslant 0,\\ x^2, & x>0,\end{cases}$ 求 $\int_{-1}^{1}f(x)\mathrm{d}x$；

(8) $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\tan^2 t\mathrm{d}t$.

解　(4) $\int_{-1}^{1}|x|\,\mathrm{d}x=\int_{-1}^{0}-x\mathrm{d}x+\int_{0}^{1}x\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}x^2\Big|_{-1}^{0}+\frac{1}{2}x^2\Big|_{0}^{1}=1$

或　$\int_{-1}^{1}|x|\,\mathrm{d}x=2\int_{0}^{1}|x|\,\mathrm{d}x=2\int_{0}^{1}x\mathrm{d}x=x^2\Big|_{0}^{1}=1$．（$|x|$是偶函数）

(6) $\int_{-1}^{1}f(x)\mathrm{d}x=\int_{-1}^{0}f(x)\mathrm{d}x+\int_{0}^{1}f(x)\mathrm{d}x=\int_{-1}^{0}x\mathrm{d}x+\int_{0}^{1}x^2\mathrm{d}x$

$$=\frac{1}{2}x^2\Big|_{-1}^{0}+\frac{1}{3}x^3\Big|_{0}^{1}=-\frac{1}{6}.$$

(8) $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\tan^2 t\mathrm{d}t=\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}(\sec^2 t-1)\mathrm{d}t=(\tan t-t)\Big|_{0}^{\frac{\pi}{4}}=1-\frac{\pi}{4}.$

4. 求下列函数的导数：

(5) $y=\int_{\sqrt{x}}^{\sqrt[3]{x}}\ln(1+t^6)\mathrm{d}t$；

(6) $y=\int_{\sin x}^{\cos x}\cos(\pi t^2)\mathrm{d}t$．

(7) $y=\int_{x^2}^{x^3}(x+t)\varphi(t)\mathrm{d}t$，其中 φ 为连续函数.

解　(5) $y=\int_{0}^{\sqrt[3]{x}}\ln(1+t^2)\mathrm{d}t+\int_{\sqrt{x}}^{0}\ln(1+t^6)\mathrm{d}t$，于是

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\ln\left[1+(\sqrt[3]{x})^2\right]\cdot\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}-\ln(1+x^3)\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

(6) $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{\sin x}^{0}\cos(\pi t^2)\mathrm{d}t+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{0}^{\cos x}\cos(\pi t^2)\mathrm{d}t$

$$=-\cos(\pi\sin^2 x)\cos x-\cos(\pi\cos^2 x)\sin x.$$

(7) $y=x\int_{x^2}^{x^3}\varphi(t)\mathrm{d}t+\int_{x^2}^{x^3}t\varphi(t)\mathrm{d}t$,

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}&=\int_{x^2}^{x^3}\varphi(t)\mathrm{d}t+x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{x^2}^{x^3}\varphi(t)\mathrm{d}t+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{x^2}^{x^3}t\varphi(t)\mathrm{d}t,\\&=\int_{x^2}^{x^3}\varphi(t)\mathrm{d}t+x[3x^2\varphi(x^3)-2x\varphi(x^2)]\\&\quad+[3x^2\cdot x^3\varphi(x^3)-2x\cdot x^2\varphi(x^2)]\\&=\int_{x^2}^{x^3}\varphi(t)\mathrm{d}t+3x^3(1+x^2)\varphi(x^3)-2x^2(1+x)\varphi(x^2).\end{aligned}$$

5. 指出下列运算中有无错误，错在何处：

(1) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\int_0^{x^2}\sqrt{t+1}\mathrm{d}t\right)=\sqrt{x^2+1}$;

(2) $\int_0^{x^2}\left(\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sqrt{t+1}\right)\mathrm{d}t=\sqrt{x^2+1}$;

(3) $\int_{-1}^{1}\dfrac{\mathrm{d}x}{x}=\ln|x|\Big|_{-1}^{1}=0$;

(4) $\int_0^{2\pi}\sqrt{1-\cos^2x}\mathrm{d}x=\int_0^{2\pi}\sin x\mathrm{d}x=-\cos x\Big|_0^{2\pi}=0.$

解　(1) 有错误. 由复合函数求导法及微积分第一基本定理可知

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\int_0^{x^2}\sqrt{t+1}\mathrm{d}t\right)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x^2}\left(\int_0^{x^2}\sqrt{t+1}\mathrm{d}t\right)\frac{\mathrm{d}x^2}{\mathrm{d}x}=2x\sqrt{x^2+1}.$$

(2) 有错误. $\int_0^{x^2}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\sqrt{t+1})\mathrm{d}t=\sqrt{t+1}\Big|_0^{x^2}=\sqrt{x^2+1}-1.$

(3) 有错误. $\dfrac{1}{x}$ 在$[-1,1]$无界，则 $\dfrac{1}{x}$ 在$[-1,1]$不可积.

(4) 有错误. $\sqrt{1-\cos^2x}=|\sin x|$，当 $x\in[0,2\pi]$. 故正确的解法为

$$\int_0^{2\pi}\sqrt{1-\cos^2x}\mathrm{d}x=\int_0^{2\pi}|\sin x|\mathrm{d}x=\int_0^{\pi}\sin x\mathrm{d}x+\int_{\pi}^{2\pi}(-\sin x)\mathrm{d}x=4.$$

6. 求由参数方程 $x=\int_0^t\sin^2u\mathrm{d}u,y=\int_0^{t^2}\cos\sqrt{u}\mathrm{d}u$ 所确定的函数 $y=f(x)$的一阶导数.

解　$\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\sin^2t,\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=2t\cos t$，故 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\cdot\dfrac{1}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\dfrac{2t\cos t}{\sin^2t}.$

7. 求由方程 $\int_0^y\mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t+\int_0^{x^2}t\mathrm{e}^t\mathrm{d}t=0$ 所确定隐函数 $y=f(x)$的一阶导数.

解　方程两边同时对 x 求导可得

$$\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)\mathrm{e}^{y^2}+2x(x^2\mathrm{e}^{x^2})=0,\quad 故\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-2x^3\mathrm{e}^{x^2-y^2}.$$

9. 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x \sin t^2\,\mathrm{d}t}{\sin^3 x}$； (2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_0^x (\arctan t)^2\,\mathrm{d}t}{\sqrt{x^2+1}}$

解 (1) 原式$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x \sin t^2\,\mathrm{d}t}{x^3}\overset{\frac{0}{0}}{=\!=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x^2}{3x^2}=\dfrac{1}{3}$.

(2) 原式$\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=\!=}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(\arctan x)^2}{\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}}=\left(\dfrac{\pi}{2}\right)^2=\dfrac{\pi^2}{4}$.

10. 求函数 $y=\int_0^x \sqrt{t}(t-1)(t+1)^2\,\mathrm{d}t$ 的定义域，单调区间和极值点.

解 定义域为$[0,+\infty)$. $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\sqrt{x}(x-1)(x+1)^2$，

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{(x-1)(x+1)^2}{2\sqrt{x}}+\sqrt{x}(x+1)^2+2\sqrt{x}(x-1)(x+1).$$

令 $y'=0$ 得驻点 $x_1=0,x_2=1$.

当 $0<x<1$ 时，$y'<0$；当 $x>1$ 时，$y'>0$.

故单减区间$(0,1)$，单增区间$(1,+\infty)$，$x=1$ 为极小值点. 无极大值点.

11. 设 $f(x)=\begin{cases}x^2, & x\leqslant 0,\\ \sin x, & x>0.\end{cases}$

(1) 求函数 $F(x)=\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$； (2) 讨论函数 $F(x)$的连续性和可导性.

解 (1) 若 $x=0$，$F(x)=F(0)=0$；

若 $x>0$，$F(x)=\int_0^x \sin t\mathrm{d}t=-\cos t\Big|_0^x=1-\cos x$；

若 $x<0$，$F(x)=\int_0^x t^2\,\mathrm{d}t=\dfrac{1}{3}t^3\Big|_0^x=\dfrac{1}{3}x^3$.

故
$$F(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{3}x^3, & x<0,\\ 1-\cos x, & x\geqslant 0.\end{cases}$$

(2) 因为 $\lim\limits_{x\to 0^+}F(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(1-\cos x)=0$，$\lim\limits_{x\to 0^-}F(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{3}x^3=0$，所以 $F(0+0)=F(0-0)=F(0)$，即 $F(x)$在 $x=0$ 处连续.

又由于$\dfrac{1}{3}x^3$，$1-\cos x$ 分别是$(-\infty,0)$与$(0,+\infty)$上的连续可微函数，因此 $F(x)$在$(-\infty,+\infty)$上连续，且在$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$上可导.

又因为 $F'_+(0)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{F(x)-F(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1-\cos x}{x}=0$，

$$F'_-(0)=\lim_{x\to0^-}\frac{F(x)-F(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^-}\frac{\frac{1}{3}x^3}{x}=0.$$

故 $F(x)$在 $x=0$ 处可导.综上所述 $F(x)$在$(-\infty,+\infty)$连续可导.

12. 如果函数 f 在有限区间 I 上连续,F 为 f 在 I 上的一个原函数,试问下列式子哪些正确? 哪些不正确? 为什么?

(1) $\int_a^x f(t)\mathrm{d}t=F(x)+C$　(其中 a 为 I 中一点,C 为一个常数).

解　若 $C=-F(a)$结论正确,否则不正确.

(2) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int f(t)\mathrm{d}t=F'(x)$.

解　错误. $\int f(t)\mathrm{d}t=F(t)+C$ (C 为任意常数). 但是 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int f(t)\mathrm{d}t=0$.

(3) $\int f(x)\mathrm{d}x=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t+C$ (C 为任意常数).

解　正确. 由于 $f(x)\in C(I)$,由微积分第一基本定理知,$\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 是 $f(x)$ 的一个原函数.

(4) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int f(t)\mathrm{d}t=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int f(x)\mathrm{d}x$.

解　不正确. 因为 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int f(t)\mathrm{d}t=0$, $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int f(x)\mathrm{d}x=f(x)$.

(5) $\int_a^x F'(x)\mathrm{d}x=\int F'(x)\mathrm{d}x$.

解　不正确. $\int_a^x F'(x)\mathrm{d}x=F(x)-F(a)$, $\int F'(x)\mathrm{d}x=F(x)+C$ (C 为任意常数),

(6) $\int_0^x F'(x)\mathrm{d}x=F(x)$.

解　不正确. $\int_0^x F'(x)\mathrm{d}x=F(x)-F(0)$.

13. 求下列不定积分:

(4) $$\int 2^{x-1}\mathrm{e}^x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int 2^x\mathrm{e}^x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int(2\mathrm{e})^x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}(2\mathrm{e})^x\ln(2\mathrm{e})+C$$
$$=\frac{1}{2}(1+\ln 2)(2\mathrm{e})^x+C.$$

(6) $$\int\frac{\cos 2t}{\cos^2 t\sin^2 t}\mathrm{d}t=\int\frac{\cos^2 t-\sin^2 t}{\cos^2 t\cdot\sin^2 t}\mathrm{d}t=\int\frac{1}{\sin^2 t}\mathrm{d}t-\int\frac{1}{\cos^2 t}\mathrm{d}t$$
$$=-\cot t-\tan t+C.$$

14. 设 f 在$[a,b]$上连续，在(a,b)内可导，并且在(a,b)内，$f'(x)\leqslant 0$. 证明：$F(x)=\dfrac{1}{x-a}\displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 在(a,b)内单调减.

证 $$F'(x)=\frac{1}{(x-a)^2}\left[-\int_a^x f(t)\mathrm{d}t+f(x)(x-a)\right]$$
$$=\frac{1}{(x-a)^2}[-f(\xi)(x-a)+f(x)(x-a)] \qquad (a\leqslant\xi\leqslant x)$$
$$=\frac{f(x)-f(\xi)}{x-a}=f'(c)\frac{x-\xi}{x-a}\leqslant 0, \qquad c\in(\xi,x),$$
故 $F(x)$在(a,b)内单调减.

(B)

1. 设 f 在区间$[a,b]$上可积，证明函数 $F(x)=\displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 在$[a,b]$上连续.

证 由 $f\in\mathscr{R}[a,b]$知，f 在$[a,b]$上有界，即$\exists M>0,\forall x\in[a,b],|f(x)|\leqslant M$. 又 $\forall x_0\in[a,b]$，$|F(x)-F(x_0)|=\left|\displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t-\int_a^{x_0}f(t)\mathrm{d}t\right|=\left|\displaystyle\int_{x_0}^x f(t)\mathrm{d}t\right|\leqslant\left|\displaystyle\int_{x_0}^x|f(t)|\mathrm{d}t\right|\leqslant M|x-x_0|$. 从而$\forall\varepsilon>0$，取 $\delta=\dfrac{\varepsilon}{M}>0$，$\forall x\in U\left(x_0,\dfrac{\varepsilon}{M}\right)$恒有$|F(x)-F(x_0)|<\varepsilon$. 即$\lim\limits_{x\to x_0}F(x)=F(x_0)$. 也即 $F(x)$在 x_0 处连续. 由 x_0 的任意性知 $F(x)$在$[a,b]$上连续.

2. 试确定 a,b 的值，使 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\displaystyle\int_0^x\frac{t^2}{\sqrt{a+t}}\mathrm{d}t}{bx-\sin x}=1$.

解 因为 $$\lim_{x\to0}\frac{\displaystyle\int_0^x\frac{t^2}{\sqrt{a+t}}\mathrm{d}t}{bx-\sin x}\overset{\frac{0}{0}}{=\!=}\lim_{x\to0}\left(\frac{x^2}{\sqrt{a+x}}\right)\frac{1}{b-\cos x}=1,$$ 且

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2}{\sqrt{a+x}}=0$，所以$\lim\limits_{x\to0}(b-\cos x)=0$，即 $b=1$.

又因为当 $x\to0$ 时，$1-\cos x\sim\dfrac{1}{2}x^2$，于是

进而 $$\lim_{x\to0}\frac{x^2}{\sqrt{a+t}}\cdot\frac{1}{b-\cos x}=\lim_{x\to0}\frac{x^2}{\sqrt{a+t}}\cdot\frac{1}{\frac{1}{2}x^2}=\lim_{x\to0}\frac{2}{\sqrt{a+x}}=1,$$

进而$\lim\limits_{x\to0}\sqrt{a+x}=2$，即$\sqrt{a}=2$，从而 $a=4$.

3. 设函数 f 在 $x=1$ 的邻域内可导，且 $f(1)=0$，$\lim\limits_{x\to1}f'(x)=1$，计算 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\displaystyle\int_1^x\left(t\int_t^1 f(u)\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}t}{(1-x)^3}$.

解　原式$\xlongequal{\frac{0}{0}}\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x\int_x^1 f(u)\mathrm{d}u}{-3(1-x)^2}\xlongequal{\frac{0}{0}}\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\int_x^1 f(u)\mathrm{d}u-xf(x)}{6(1-x)}$

$$\xlongequal{\frac{0}{0}}\lim_{x\to1}\frac{-2f(x)-xf'(x)}{-6}=\lim_{x\to1}\frac{1}{6}xf'(x)=\frac{1}{6}.$$

4. 证明推论 1.2 中 ξ 可在开区间 (a,b) 内取得，即若 $f\in C[a,b]$，则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=f(\xi)(b-a)$.

证　$f\in C[a,b]$，由微积分第一基本定理，$\Phi(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 在 $[a,b]$ 上可导. 对 $\Phi(x)$ 在 $[a,b]$ 上运用 Lagrange 微分中值定理，$\exists\,\xi\in(a,b)$，使

$$\Phi(b)-\Phi(a)=\Phi'(\xi)(b-a).$$

注意到 $\Phi(a)=0$，$\Phi'(\xi)=f(\xi)$. 故 $\exists\,\xi\in(a,b)$，使 $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t=f(\xi)(b-a)$.

5. 设函数 f 在 $[a,c]$ 上连续，在 (a,c) 内可导，且 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_b^c f(x)\mathrm{d}x=0$，其中 $b\in(a,c)$，证明至少存在一点 $\xi\in(a,c)$，使 $f'(\xi)=0$.

证　因为 $f\in C[a,c]$，由上题知：$\exists\,\xi_1\in(a,b)$，$\xi_2\in(b,c)$，使 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=f(\xi_1)(b-a)$，$\int_b^c f(x)\mathrm{d}x=f(\xi_2)(c-b)$. 从而 $f(\xi_1)=f(\xi_2)=0$，对 $f(x)$ 在 $[\xi_1,\xi_2]$ 上应用 Rolle 定理，$\exists\,\xi\in(\xi_1,\xi_2)\subset(a,c)$，使 $f'(\xi)=0$.

6. 设 $f,g\in C[a,b]$，证明至少存在一点 $\xi\in(a,b)$ 使

$$f(\xi)\int_\xi^b g(x)\mathrm{d}x=g(\xi)\int_a^\xi f(x)\mathrm{d}x.$$

证　令 $F(u)=\int_a^u f(x)\mathrm{d}x\cdot\int_u^b g(x)\mathrm{d}x$，则 $F(u)$ 在 $[a,b]$ 上可导，且 $F(a)=F(b)=0$，于是 $F(u)$ 在 $[a,b]$ 上满足 Rolle 定理条件，故 $\exists\,\xi\in(a,b)$，使 $F'(\xi)=0$，即

$$f(\xi)\int_\xi^b g(x)\mathrm{d}x=g(\xi)\int_a^\xi f(x)\mathrm{d}x.$$

习　题　3.3

(A)

1. 利用不定积分换元法则(Ⅰ)计算下列不定积分：

(4) $\int x^2(3+2x^3)^{\frac{1}{5}}\mathrm{d}x=\int\frac{1}{6}(3+2x^3)^{\frac{1}{5}}\mathrm{d}(3+2x^3)$

$$= \frac{1}{7}(3+2x^3)^{\frac{7}{6}} + C$$

(5) $\int \frac{3x^3+x}{1+x^4}dx = \int \frac{3x^3}{1+x^4}dx + \int \frac{xdx}{1+x^4} = \frac{3}{4}\int \frac{d(x^4+1)}{1+x^4} + \frac{1}{2}\int \frac{dx^2}{1+(x^2)^2}$

$$= \frac{3}{4}\ln(1+x^4) + \frac{1}{2}\arctan x^2 + C.$$

(6) $\int \frac{\sqrt{1+\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx = 2\int \sqrt{1+\sqrt{x}}d(\sqrt{x}+1) = \frac{4}{3}(1+\sqrt{x})^{\frac{3}{2}} + C.$

(7) $\int \frac{\cos\ln|x|}{x}dx = \int \cos\ln|x|\,d\ln|x| = \sin(\ln|x|) + C.$

(8) $\int \frac{\ln\ln x}{x\ln x}dx = \int \ln\ln x\,d\ln\ln x = \frac{1}{2}(\ln\ln x)^2 + C.$

(9) $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^2 x}dx = \int \frac{1-\sin^2 x}{\sin^2 x}d\sin x = -\frac{1}{\sin x} - \sin x + C.$

(10) $\int \cos^4 x dx = \int \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 dx = \frac{1}{4}\int \left(1 + 2\cos 2x + \frac{\cos 4x + 1}{2}\right)dx$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{3}{2}x + \sin 2x + \frac{1}{8}\sin 4x\right) + C.$$

(12) $\int \sec^4 x dx = \int \sec^2 x \cdot \sec^2 x dx = \int (\tan^2 x + 1)d\tan x$

$$= \frac{1}{3}\tan^3 x + \tan x + C.$$

(13) $\int \csc^3 x \cot x dx = -\int \csc^2 x d\csc x = -\frac{1}{3}\csc^3 x + C.$

(14) **解法一** $\int \frac{dx}{1+e^x} = \int \frac{e^{-x}dx}{e^{-x}(1+e^x)} = -\int \frac{d(e^{-x}+1)}{e^{-x}+1}$

$$= -\ln(1+e^{-x}) + C.$$

解法二 $\int \frac{dx}{1+e^x} = \int \frac{(1+e^x)-e^x}{1+e^x}dx = \int dx - \int \frac{d(e^x+1)}{1+e^x}$

$$= x - \ln(1+e^x) + C.$$

解法三 $\int \frac{dx}{1+e^x} = \int \frac{e^x dx}{e^x(1+e^x)} = \int \left(\frac{1}{e^x} - \frac{1}{1+e^x}\right)de^x$

$$= x - \ln(1+e^x) + C.$$

(15) **解法一** $\int \frac{dx}{1+\sin^2 x} = \int \frac{\csc^2 x}{\csc^2 x + 1}dx = \int \frac{-d\cot x}{\cot^2 x + 2}$

$$= -\frac{\sqrt{2}}{2}\arctan\left(\frac{\cot x}{\sqrt{2}}\right) + C.$$

解法二 $\int \frac{dx}{1+\sin^2 x} = \int \frac{\sec^2 x\, dx}{\sec^2 x + \tan^2 x} = \int \frac{d\tan x}{1+2\tan^2 x}$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan(\sqrt{2}\tan x)+C.$$

(16) $\displaystyle\int\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}e^{-\sqrt{1+x^2}}dx=\int e^{-\sqrt{1+x^2}}d\sqrt{1+x^2}=-e^{-\sqrt{1+x^2}}+C.$

(18) $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{4-x^2}\arccos\frac{x}{2}}=\int\frac{-d\arccos\frac{x}{2}}{\arccos\frac{x}{2}}=-\ln\left|\arccos\frac{x}{2}\right|+C.$

(20) $\displaystyle\int\frac{dx}{x^2-2x+3}=\int\frac{dx}{2+(x-1)^2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{d\frac{x-1}{\sqrt{2}}}{1+\left(\frac{x-1}{\sqrt{2}}\right)^2}$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{x-1}{\sqrt{2}}+C.$$

(21) $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{1+x-x^2}}=\int\frac{dx}{\sqrt{\frac{5}{4}-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}}=\arcsin\frac{2}{\sqrt{5}}\left(x-\frac{1}{2}\right)+C.$

(22) $\displaystyle\int\frac{\sin x\cos x}{1-\sin^4 x}dx=\frac{1}{2}\int\frac{d\sin^2 x}{1-(\sin^2 x)^2}=\frac{1}{4}\ln\frac{1+\sin^2 x}{1-\sin^2 x}+C.$

(23) $\displaystyle\int\frac{\sin x+\cos x}{\sqrt[5]{\sin x-\cos x}}dx=\int(\sin x-\cos x)^{-\frac{1}{5}}d(\sin x-\cos x)$

$$=\frac{5}{4}(\sin x-\cos x)^{\frac{4}{5}}+C.$$

(24) $\displaystyle\int\frac{dx}{e^x+e^{\frac{x}{2}}}=\int\frac{dx}{e^{\frac{x}{2}}(e^{\frac{x}{2}}+1)}=\int e^{-\frac{x}{2}}dx-\int\frac{(1+e^{\frac{x}{2}})-e^{\frac{x}{2}}}{1+e^{\frac{x}{2}}}dx$

$$=-2e^{-\frac{x}{2}}-x+2\ln(1+e^{\frac{x}{2}})+C.$$

2. 证明下列各式($m,n\in\mathbf{N}_+$)：

(1) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\sin nx\,dx=\begin{cases}0, & m\neq n,\\ \pi, & m=n;\end{cases}$

(2) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\cos nx\,dx=\begin{cases}0, & m\neq n,\\ \pi, & m=n;\end{cases}$

(3) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\cos nx\,dx=0$

证　(1) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\sin nx\,dx=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}[\cos(m-n)x-\cos(m+n)x]dx$

$$=\begin{cases}\frac{1}{2}\left[\frac{\sin(m-n)x}{m-n}-\frac{\sin(m+n)x}{n+m}\right]_{-\pi}^{\pi}=0, & m\neq n,\\ \frac{1}{2}\left[x-\frac{1}{2m}\sin 2mx\right]_{-\pi}^{\pi}=\pi, & m=n.\end{cases}$$

(2) $\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\cos nx\,dx=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}[\cos(m+n)x+\cos(m-n)x]dx$

$$=\begin{cases}0, & m\neq n,\\ \pi, & m=n.\end{cases}$$

(3) $\int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\cos nx\,dx=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}[\sin(m+n)x+\sin(m-n)x]dx=0.$

3. 利用不定积分换元法则(Ⅱ)计算下列不定积分：

(4) $\int\frac{x^2dx}{\sqrt{a^2-x^2}}\xlongequal[t\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)]{x=a\sin t}\int\frac{a^2\sin^2t}{a\cos t}\cdot a\cos t\,dt=\frac{a^2}{2}\int(1-\cos 2t)dt$

$$=\frac{a^2}{2}t-\frac{a^2}{4}\sin 2t+C=\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}-\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+C.$$

(6) $\int\frac{x^3}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}dx=\frac{1}{2}\int\frac{x^2d(1+x^2)}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}\xlongequal{t=\sqrt{1+x^2}}\frac{1}{2}\int\frac{t^2-1}{t^3}\cdot 2t\,dt$

$$=t+\frac{1}{t}+C=\sqrt{1+x^2}+\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}+C.$$

(7) $\int\frac{\sqrt{x^2+2x}}{x^2}dx=\int\frac{1}{|x|}\sqrt{1+2x}\,dx.$

令 $u=\sqrt{1+\frac{2}{x}}=\frac{\sqrt{x^2+2x}}{|x|}$(当 $x\in(-\infty,-2]$时，取 $u\in[0,1)$；当 $x\in(0,+\infty)$时，取 $u\in(1,+\infty)$)，则 $dx=\frac{-4u\,du}{(u^2-1)^2}$，于是当 $x\in(-\infty,-2]$，即 $u=-\frac{1}{x}\sqrt{x^2+2x}$时，

$$\begin{aligned}\int\frac{1}{|x|}\sqrt{1+\frac{2}{x}}dx&=\int-\frac{2u^2}{1-u^2}du\\&=\int\left(2+\frac{1}{u-1}-\frac{1}{u+1}\right)du\\&=2u+\ln\left|\frac{u-1}{u+1}\right|+C\\&=-\frac{2\sqrt{x^2+2x}}{x}+\ln\left|\frac{x+\sqrt{x^2+2x}}{x-\sqrt{x^2-2x}}\right|+C.\end{aligned}$$

同理可得当 $x\in(0,+\infty)$时，上式也成立. 故

$$\int\frac{\sqrt{x^2+2x}}{x^2}dx=-\frac{2}{x}\sqrt{x^2+2x}+\ln\left|\frac{\sqrt{x^2+2x}+x}{\sqrt{x^2+2x}-x}\right|+C.$$

(8) $\int\frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+2x+3}}\xlongequal{x+1=u}\int\frac{\frac{1}{2}du^2}{u^2\sqrt{u^2+2}}$

$$\xlongequal{t=\sqrt{u^2+2}}\frac{1}{2}\int\frac{2t\mathrm{d}t}{(t^2-2)t}$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{t-\sqrt{2}}{t+\sqrt{2}}\right|+C$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{x^2+2x+3}-\sqrt{2}}{\sqrt{x^2+2x+3}+\sqrt{2}}\right|+C.$$

(9) $\int\frac{\sqrt{1+\ln x}}{x\ln x}\mathrm{d}x=\int\frac{\sqrt{1+\ln x}}{\ln x}\mathrm{d}\ln x\xlongequal{t=\sqrt{1+\ln x}}\int\frac{t}{t^2-1}\cdot 2t\mathrm{d}t$

$$=2\int\frac{(t^2-1)+1}{t^2-1}\mathrm{d}t=2t+\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+C$$

$$=2\sqrt{1+\ln x}+\ln\left|\frac{\sqrt{1+\ln x}-1}{\sqrt{1+\ln x}+1}\right|+C.$$

(10) $\int\frac{\mathrm{e}^{2x}}{\sqrt{3\mathrm{e}^x-2}}\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\int\frac{\mathrm{e}^x}{\sqrt{3\mathrm{e}^x-2}}\mathrm{d}(3\mathrm{e}^x-2)$

$$=\frac{1}{9}\int\left(\sqrt{3\mathrm{e}^x-2}+\frac{2}{\sqrt{3\mathrm{e}^x-2}}\right)\mathrm{d}(3\mathrm{e}^x-2)$$

$$=\frac{2}{27}(3\mathrm{e}^x-2)^{\frac{3}{2}}+\frac{4}{9}\sqrt{3\mathrm{e}^x-2}+C$$

$$=\frac{2}{27}(3\mathrm{e}^x+4)\sqrt{3\mathrm{e}^x-2}+C.$$

(11) $\int\frac{\mathrm{d}x}{1+\sin x+\cos x}=\int\frac{\mathrm{d}x}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}+2\cos^2\frac{x}{2}}$

$$=\int\frac{\frac{1}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}\left(1+\tan\frac{x}{2}\right)}\mathrm{d}x$$

$$=\int\frac{\mathrm{d}\tan\frac{x}{2}}{1+\tan\frac{x}{2}}=\ln\left|1+\tan\frac{x}{2}\right|+C.$$

(12) $\int x\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\mathrm{d}x=\int\frac{x(1-x)}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x=\int\frac{-\frac{1}{2}\mathrm{d}(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}}-\int\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$

$$=-\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}-\frac{1}{2}\arcsin x+C.$$

其中 $\int\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x\xlongequal[t\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)]{x=\sin t}\int\sin^2 t\mathrm{d}t=\frac{1}{2}t-\frac{1}{4}\sin 2t+C$

$$=\frac{1}{2}(\arcsin x-x\sqrt{1-x^2})+C.$$

(13) $\displaystyle\int\sqrt{e^{2x}+5}\,dx \xlongequal[t\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)]{\frac{1}{\sqrt{5}}e^x=\tan t}\int\sqrt{5}\sec t\,\frac{\sec^2 t}{\tan t}dt$

$$=-\sqrt{5}\int\left[\frac{1}{(1-\cos^2 t)}-\frac{1}{\cos^2 t}\right]d\cos t$$

$$=-\frac{\sqrt{5}}{2}\ln\left|\frac{1+\cos t}{1-\cos t}\right|+\sqrt{5}\,\frac{1}{\cos t}+C$$

$$=-\frac{\sqrt{5}}{2}\ln\left|(\sqrt{e^{2x}+5}+\sqrt{5})/(\sqrt{5}-\sqrt{e^{2x}+5})\right|$$

$$+\sqrt{e^{2x}+5}+C.$$

4. 求下列定积分的值：

(2) $\displaystyle\int_0^1\frac{dx}{e^x+e^{-x}}=\int_0^1\frac{de^x}{e^{2x}+1}=\arctan e^x\Big|_0^1=\arctan e-\frac{\pi}{4}.$

(4) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\cos x-\cos^3 x}\,dx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\cos x}\,|\sin x|\,dx$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\cos x}\sin x\,dx-\int_{-\frac{\pi}{2}}^0\sqrt{\cos x}\sin x\,dx=\frac{4}{3}.$$

(6) $\displaystyle\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1\frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}dx\xlongequal{x=\sin t}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\cot^2 t\,dt=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}(\csc^2 t-1)dt=1-\frac{\pi}{4}.$

(8) $\displaystyle\int_0^{\pi}\sqrt{1+\cos 2x}\,dx=\int_0^{\pi}\sqrt{2}\,|\cos x|\,dx$

$$=\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx+\sqrt{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(-\cos x)dx$$

$$=2\sqrt{2}.$$

5. 设 f 在$[-a,a]$上连续，利用定积分的换元法证明：

(1) 如果 $f(x)$为奇函数，那么 $\displaystyle\int_{-a}^a f(x)dx=0$；

(2) 如果 $f(x)$为偶函数，那么 $\displaystyle\int_{-a}^a f(x)dx=2\int_0^a f(x)dx$；

(3) 计算 $\displaystyle\int_{-1}^1|x|\left(x^2+\frac{\sin^3 x}{1+\cos x}\right)dx.$

证 (1) 由 $f(x)$为奇函数知：$\displaystyle\int_{-a}^a f(x)dx\xlongequal{t=-x}\int_a^{-a}-f(-t)dt=-\int_{-a}^a f(t)dt,$

故
$$\int_{-a}^a f(t)dt=0.$$

(2) 由 f 为偶函数知：$\displaystyle\int_{-a}^0 f(x)dx\xlongequal{x=-t}\int_a^0 f(-t)d(-t)=\int_0^a f(t)dt,$

从而 $$\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = \int_{0}^{a} f(x)\mathrm{d}x + \int_{-a}^{0} f(x)\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{a} f(x)\mathrm{d}x.$$

(3) 利用(1)、(2)结论,则

$$\int_{-1}^{1} |x| \left(x^2 + \frac{\sin^3 x}{1+\cos x}\right)\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{1} |x| x^2\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{1} x^3\mathrm{d}x = \frac{1}{2}.$$

6. 设 $f(x)$ 为连续的周期函数,其周期为 T,利用定积分换元法证明

$$\int_{a}^{a+T} f(x)\mathrm{d}x = \int_{0}^{T} f(x)\mathrm{d}x \quad (a\text{ 为常数}).$$

证　由于

$$\int_{T}^{a+T} f(x)\mathrm{d}x \xlongequal{x=T+t} \int_{0}^{a} f(T+t)\mathrm{d}t = \int_{0}^{a} f(t)\mathrm{d}t,$$

因而 $$\int_{a}^{a+T} f(x)\mathrm{d}x = \int_{a}^{0} f(x)\mathrm{d}x + \int_{0}^{T} f(x)\mathrm{d}x + \int_{T}^{a+T} f(x)\mathrm{d}x$$

$$= \int_{0}^{T} f(x)\mathrm{d}x.$$

7. 利用分部积分法计算下列积分:

(2) $$\int x^3 \mathrm{ch}\, x\mathrm{d}x = \int x^3 \mathrm{d}\,\mathrm{sh}\, x = x^3 \mathrm{sh}\, x - 3\int x^2 \mathrm{d}\,\mathrm{ch}\, x$$

$$= x^3 \mathrm{sh}\, x - 3x^2 \mathrm{ch}\, x + 6\int x\mathrm{d}\,\mathrm{sh}\, x$$

$$= x^3 \mathrm{sh}\, x - 3x^2 \mathrm{ch}\, x + 6x\,\mathrm{sh}\, x - 6\mathrm{ch}\, x + C.$$

(5) $$\int \frac{x\mathrm{e}^x}{(1+\mathrm{e}^x)^2}\mathrm{d}x = \int -x\mathrm{d}\frac{1}{1+\mathrm{e}^x} = -\frac{x}{1+\mathrm{e}^x} + \int \frac{\mathrm{d}x}{1+\mathrm{e}^x}$$

$$= -\frac{x}{1+\mathrm{e}^x} + \int \frac{1+\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+1}\mathrm{d}x$$

$$= -\frac{x}{1+\mathrm{e}^x} + x - \ln(1+\mathrm{e}^x) + C.$$

(6) $$\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x}}\mathrm{d}x = -2\int \arcsin x\mathrm{d}\sqrt{1-x}$$

$$= -2\sqrt{1-x}\arcsin x + 2\int \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$$

$$= -2\sqrt{1-x}\arcsin x + 4\sqrt{1+x} + C.$$

(8) $$\int \sqrt{x}\sin\sqrt{x}\mathrm{d}x \xlongequal{t=\sqrt{x}} \int (t\sin t)(2t\mathrm{d}t) = -2\int t^2 \mathrm{d}\cos t$$

$$= -2t^2\cos t + 4\int t\mathrm{d}\sin t$$

$$= -2t^2\cos t + 4t\sin t + 4\cos t + C.$$

$$= (4-2x)\cos\sqrt{x} + 4\sqrt{x}\sin\sqrt{x} + C.$$

(9) $\int_0^{e-1}\ln(1+x)dx=(x+1)\ln(1+x)\Big|_0^{e-1}-\int_0^{e-1}(1+x)d\ln(1+x)=1.$

(11) $\int x\sin x\cos x dx=\frac{1}{4}\int -xd\cos 2x=-\frac{1}{4}x\cos 2x+\frac{1}{8}\sin 2x+C.$

(12) $\int\sin(\ln x)dx=x\sin(\ln x)-\int\cos(\ln x)dx$

$$=x\sin(\ln x)-x\cos(\ln x)-\int\sin(\ln x)dx,$$

故 $$\int\sin(\ln x)dx=\frac{x}{2}[\sin(\ln x)-\cos(\ln x)]+C.$$

(13) $\int\left(\ln x+\frac{1}{x}\right)e^x dx=e^x\ln x+C.$

其中：$\int\frac{1}{x}e^x dx=\int e^x d\ln x=e^x\ln x-\int\ln x de^x=e^x\ln x-\int e^x\ln x dx.$

8. 证明下列递推公式($n=2,3,\cdots$)：

(1) 设 $I_n=\int\tan^n x dx$，则 $I_n=\frac{1}{n-1}\tan^{n-1}x-I_{n-2}$；

(2) 设 $I_n=\int\frac{dx}{\sin^n x}$，则 $I_n=\frac{1}{1-n}\cdot\frac{\cos x}{\sin^{n-1}x}+\frac{n-2}{n-1}I_{n-2}$.

证 (1) $I_n=\int\tan^{n-2}x(\sec^2x-1)dx=\int\tan^{n-2}x d\tan x-I_{n-2}$

$$=\frac{1}{n-1}\tan^{n-1}x-I_{n-2}.$$

(2) $I_n=-\int\frac{d\cot x}{\sin^{n-2}x}=-\frac{\cot x}{\sin^{n-2}x}-\int\frac{(\cot x)(n-2)\cos x}{\sin^{n-1}x}dx$

$$=-\frac{\cos x}{\sin^{n-1}x}-(n-2)\int\frac{1-\sin^2x}{\sin^n x}dx$$

$$=-\frac{\cos x}{\sin^{n-1}x}-(n-2)I_n+(n-2)I_{n-2},$$

从而 $$I_n=\frac{-1}{n-1}\frac{\cos x}{\sin^{n-1}x}+\frac{n-2}{n-1}I_{n-2}.$$

9. 计算下列积分：

(1) $\int\frac{dx}{x^4+3x^2}=\frac{1}{3}\int\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^2+3}\right)dx=-\frac{1}{3x}-\frac{1}{3\sqrt{3}}\arctan\frac{x}{\sqrt{3}}+C.$

(2) $\int\frac{t}{t^4+10t^2+9}dt=\frac{1}{8}\int\left(\frac{t}{t^2+1}-\frac{t}{t^2+9}\right)dt$

$$=\frac{1}{16}[\ln(1+t^2)-\ln(t^2+9)]+C.$$

(3) $\int\frac{x^2}{(x-1)^{100}}dx=\int\frac{(x^2-1)+1}{(x-1)^{100}}dx=\int\frac{(x-1)+2}{(x-1)^{99}}dx+\int\frac{dx}{(x-1)^{100}}$

$$=\int\frac{dx}{(x-1)^{98}}+\int\frac{2dx}{(x-1)^{99}}+\int\frac{dx}{(x-1)^{100}}$$

$$=-\frac{1}{97}\frac{1}{(x-1)^{97}}-\frac{1}{49(x-1)^{98}}-\frac{1}{99(x-1)^{99}}+C.$$

(4) $\int\frac{1-x^7}{x(1+x^7)}dx=\int\left(\frac{1}{x}-\frac{2x^6}{1+x^7}\right)dx=\ln|x|-\frac{2}{7}\ln(1+x^7)+C.$

(5) $\int\frac{dx}{3+2\cos x}=\int\frac{dx}{1+2(1+\cos x)}=\int\frac{dx}{1+4\cos^2\frac{x}{2}}=\int\frac{\sec^2\frac{x}{2}}{\sec^2\frac{x}{2}+4}dx$

$$=2\int\frac{d\tan\frac{x}{2}}{\tan^2\frac{x}{2}+5}=\frac{2}{\sqrt{5}}\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\tan\frac{x}{2}\right)+C.$$

(6) $\int\frac{\cos x-\sin x}{\cos x+\sin x}dx=\ln|\sin x+\cos x|+C.$

(7) $\int\frac{x^2}{a^2-x^6}dx=\frac{1}{3}\int\frac{dx^3}{a^2-(x^3)^2}=\frac{1}{6a}\ln\left|\frac{a+x^3}{a-x^3}\right|+C.$

(8) $\int\frac{x^{11}dx}{x^8+4x^4+5}=\frac{1}{4}\int\left(1-\frac{4x^4+5}{(x^4+2)^2+1}\right)\cdot dx^4$

$$=\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{4}\int\frac{4(x^4+2)-3}{(x^4+2)^2+1}dx^4$$

$$=\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{2}\ln|1+(x^4+2)^2|+\frac{3}{4}\arctan(x^4+2)+C.$$

(9) $\int\frac{\ln\tan x}{\sin x\cos x}=\int\frac{\ln\tan x}{\tan x}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}dx=\int\frac{\ln\tan x}{\tan x}d\tan x$

$$=\int\ln(\tan x)d\ln(\tan x)$$

$$=\frac{1}{2}\ln^2(\tan x)+C.$$

(10) $\int\frac{\cos 2x}{1+\sin x\cos x}dx=\int\frac{\cos 2x}{1+\frac{1}{2}\sin 2x}dx=\int\frac{d\frac{1}{2}\sin 2x}{1+\frac{1}{2}\sin 2x}$

$$=\ln\left|1+\frac{1}{2}\sin 2x\right|+C.$$

(11) $\int\frac{x+\sin x}{1+\cos x}dx=\int\frac{x}{2\cos^2\frac{x}{2}}dx-\int\frac{-\sin x}{1+\cos x}dx$

$$= \int x\mathrm{d}\tan\frac{x}{2} - \ln(1+\cos x)$$

$$= x\tan\frac{x}{2} - \int\tan\frac{x}{2}\mathrm{d}x - \ln(1+\cos x)$$

$$= x\tan\frac{x}{2} + 2\ln\left|\cos\frac{x}{2}\right| - \ln(1+\cos x) + C$$

$$= x\tan\frac{x}{2} + C' \quad (C' = C - \ln 2).$$

(12) $\int\frac{x^2+1}{x^4+1}\mathrm{d}x.$

解法一 $\frac{x^2+1}{x^4+1} = \frac{x^2+1}{(x^2+\sqrt{2}x+1)(x^2-\sqrt{2}x+1)}$

$$= \frac{1}{(\sqrt{2}x+1)^2+1} + \frac{1}{(\sqrt{2}x-1)^2+1},$$

原式 $= \frac{1}{\sqrt{2}}[\arctan(\sqrt{2}x+1) + \arctan(\sqrt{2}x-1)] + C.$

解法二 在任何不包含 0 的区间内

$$f(x) = \frac{x^2+1}{x^4+1} = \frac{1+\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}} = \frac{\left(x-\frac{1}{x}\right)'}{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2}$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{x^2-1}{\sqrt{2}x}\right)' \overset{\text{def}}{=} (F(x))',$$

故
$$\int f(x)\mathrm{d}x = \begin{cases} F(x)+C_1, & x\in(0,+\infty), \\ F(x)+C_2, & x\in(-\infty,0). \end{cases}$$

又由于被积函数 $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内连续,故应在$(-\infty,+\infty)$内求其原函数,因此应在上式补充定义原函数在 $x=0$ 点的值,使原函数在 $x=0$ 处连续. 又因为 $\lim\limits_{x\to0^+}(F(x)+C_1) = -\frac{\pi}{2\sqrt{2}}+C_1$, $\lim\limits_{x\to0^-}(F(x)+C_2) = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}+C_2$, 令 $-\frac{\pi}{2\sqrt{2}}+C_1 = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}+C_2 = C$, 于是
$$\int f(x)\mathrm{d}x = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{x^2-1}{\sqrt{2}x}+\frac{\pi}{2\sqrt{2}}+C, & x>0, \\ C, & x=0, \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{x^2-1}{\sqrt{2}x}-\frac{\pi}{2\sqrt{2}}+C, & x<0. \end{cases}$$

(14) $\int\frac{\sin x}{\sin x+\cos x}\mathrm{d}x.$

解法一 原式 $= I = \int\frac{(\sin x-\cos x)+\cos x}{\sin x+\cos x}\mathrm{d}x$

$$=-\int\frac{\mathrm{d}(\sin x+\cos x)}{\sin x+\cos x}+\int\frac{(\cos x+\sin x)-\sin x}{\sin x+\cos x}\mathrm{d}x$$

$$=-\ln|\sin x+\cos x|+x-I.$$

故 $$I=\int\frac{\sin x}{\sin x+\cos x}\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\ln|\sin x+\cos x|+\frac{1}{2}x+C.$$

解法二 $$I=\int\frac{\sin(\cos x-\sin x)}{\cos^2 x-\sin^2 x}\mathrm{d}x$$

$$=\int\left(\frac{\sin x\cos x}{2\cos^2 x-1}-\frac{1-\cos 2x}{2\cos 2x}\right)\mathrm{d}x$$

$$=-\frac{1}{4}\int\frac{\mathrm{d}(2\cos^2 x-1)}{2\cos^2 x-1}-\int\frac{1}{2}(\sec 2x-1)\mathrm{d}x$$

$$=-\frac{1}{4}\ln|2\cos^2 x-1|-\frac{1}{4}\ln|\sec 2x+\tan 2x|+\frac{1}{2}x+C.$$

解法三 $$I=\int\frac{\sin x(\cos x-\sin x)}{\cos^2 x-\sin^2 x}\mathrm{d}x=\int\left(\frac{\sin 2x}{2\cos 2x}-\frac{1-\cos 2x}{2\cos 2x}\right)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}\int(\tan 2x-\sec 2x+1)\mathrm{d}x$$

$$=-\frac{1}{4}\ln|\cos 2x|-\frac{1}{4}\ln|\sec 2x+\tan 2x|+\frac{x}{2}+C.$$

解法四 令 $\tan x=t$ 得

$$I=\int\frac{\tan x}{\tan x+1}\mathrm{d}x=\int\frac{t\mathrm{d}t}{(t+1)(t^2+1)}=\frac{1}{2}\int\left(\frac{t+1}{t^2+1}-\frac{1}{t+1}\right)\mathrm{d}t,$$ 可以积出.

解法五 令 $\cot x=t$,

$$I=\int\frac{\mathrm{d}x}{1+\cot x}=-\int\frac{\mathrm{d}t}{(1+t)(1+t^2)}=\frac{1}{2}\int\left(\frac{t-1}{1+t^2}-\frac{1}{1+t}\right)\mathrm{d}t,$$ 可以积出.

解法六 令 $\tan\frac{x}{2}=t$ 得.

$$I=\int\frac{\frac{2t}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}+\frac{1-t^2}{1+t^2}}\cdot\frac{2}{1+t^2}\mathrm{d}t=\int\left(\frac{1+t}{1+t^2}-\frac{1-t}{1+2t-t^2}\right)\mathrm{d}t,$$ 可以积出.

解法七

$$I=\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{\sin x}{\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}\mathrm{d}x\xlongequal{t=x-\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{\sin\left(t+\frac{\pi}{4}\right)}{\cos t}\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{\sin t+\cos t}{\cos t}\mathrm{d}t,$$ 可以积出.

解法八

$$I=\int\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}\right)}{\sin x\cos\frac{\pi}{4}+\cos x\sin\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}x=\int\frac{\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}{2\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}\mathrm{d}x,$$

$$=\frac{1}{2}\int\left(1-\cot\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\ln\left|\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right|+C.$$

(15) $$\int\frac{x^2-1+3}{(x-1)^4}\mathrm{d}x=\int\left(\frac{x-1+2}{(x-1)^3}+\frac{3}{(x-1)^4}\right)\mathrm{d}x$$

$$=\int\left(\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{2}{(x-1)^3}+\frac{3}{(x-1)^4}\right)\mathrm{d}x$$

$$=-\frac{1}{x-1}-\frac{1}{(x-1)^2}-\frac{1}{(x-1)^3}+C.$$

(16) $$\int\frac{1}{x}\sqrt{\frac{1+x}{x}}\mathrm{d}x\xlongequal{t=\frac{1}{x}}\int t\sqrt{t+1}\left(-\frac{1}{t^2}\right)\mathrm{d}t$$

$$=-\int\frac{1}{t}\sqrt{t+1}\mathrm{d}t\xlongequal{u=\sqrt{t+1}}-\int\frac{u}{u^2-1}2u\mathrm{d}u$$

$$=-\int\left(2+\frac{1}{u-1}-\frac{1}{u+1}\right)\mathrm{d}u$$

$$=-2u+\ln\left|\frac{u+1}{u-1}\right|+C$$

$$=-2\sqrt{\frac{1}{x}+1}+\ln\left|\frac{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}-1}\right|+C.$$

10. 证明下列积分等式(其中 f 为连续函数)：

(1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\sin x)\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\cos x)\mathrm{d}x.$

证 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\sin x)\mathrm{d}x\xlongequal{t=\frac{\pi}{2}-x}\int_{\frac{\pi}{2}}^0 f(\cos t)(-\mathrm{d}t)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\cos x)\mathrm{d}x.$

(2) $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=(b-a)\int_0^1 f[a+(b-a)x]\mathrm{d}x.$

证 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\xlongequal{x=a+(b-a)t}\int_0^1 f[a+(b-a)t][(b-a)\mathrm{d}t]$，得证.

(3) $\int_0^1 x^m(1-x)^n\mathrm{d}x=\int_0^1 x^n(1-x)^m\mathrm{d}x$

证 左 $\xlongequal{t=1-x}\int_1^0(1-t)^m t^n(-\mathrm{d}t)=\int_0^1 t^n(1-t)^m\mathrm{d}t=$右.

(4) $\int_0^a x^3 f(x^2)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^{a^2}xf(x)\mathrm{d}x.$

证 $$\int_0^a x^3 f(x^2)\mathrm{d}x = \int_0^a \frac{1}{2}x^2 f(x^2)\mathrm{d}x^2 \xlongequal{t=x^2} \int_0^{a^2} \frac{1}{2}tf(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_0^{a^2} xf(x)\mathrm{d}x.$$

(B)

1. 证明：$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x\cos^m x\mathrm{d}x = \frac{1}{2^m}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^m x\mathrm{d}x(m=0,1,2,\cdots)$.

证 $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x\cos^m x\mathrm{d}x = \frac{1}{2^m}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^m 2x\mathrm{d}x = \frac{1}{2^{m+1}}\int_0^{\pi}\sin^m t\mathrm{d}t(t=2x)$$
$$= \frac{1}{2^{m+1}}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^m t\mathrm{d}t + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin^m t\mathrm{d}t\right) = \frac{1}{2^m}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^m t\mathrm{d}t.$$

(由本习题(A)第 10 题(1)知 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^m t\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^m t\mathrm{d}t$，而

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin^m t\mathrm{d}t \xlongequal{u=t-\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\sin\left(u+\frac{\pi}{2}\right)\right]^m\mathrm{d}u = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^m u\mathrm{d}u.)$$

2. 计算 $\int_0^{n\pi}\sqrt{1-\sin 2x}\mathrm{d}x(n\in\mathbf{N}_+)$.

解 因为 $\sqrt{1-\sin 2x}$ 是周期函数，且最小正周期为 π，所以由习题 3.3(A)第 6 题

$$\int_0^{n\pi}\sqrt{1-\sin 2x}\mathrm{d}x = n\int_0^{\pi}\sqrt{1-\sin 2x}\mathrm{d}x = n\int_0^{\pi}|\sin x-\cos x|\mathrm{d}x$$
$$= n\left[\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\cos x-\sin x)\mathrm{d}x + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi}(\sin x-\cos x)\mathrm{d}x\right]$$
$$= 2\sqrt{2}n.$$

3. 计算 $\int_0^{10\pi}\frac{\sin^3 x+\cos^3 x}{2\sin^2 x+\cos^4 x}\mathrm{d}x$.

解 被积函数是周期为 $T=2\pi$ 的周期函数，且 $\sin^3 x$ 为奇函数，所以

$$\text{原式} = 5\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin^3 x}{2\sin^2 x+\cos^4 x}\mathrm{d}x + 5\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\cos^3 x}{2\sin^2 x+\cos^4 x}\mathrm{d}x$$
$$= 10\int_0^{\pi}\frac{\cos^3 x}{2\sin^2 x+\cos^4 x}\mathrm{d}x$$
$$= 10\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^3 x}{2\sin^2 x+\cos^4 x}\mathrm{d}x + 10\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{\cos^3 x\mathrm{d}x}{2\sin^2 x+\cos^4 x}.$$

又因为 $$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{\cos^3 x}{2\sin^2 x+\cos^4 x}\mathrm{d}x \xlongequal{-u=\frac{\pi}{2}-x} \int_0^{\frac{\pi}{2}} -\frac{\sin^3 u}{2\cos^2 u+\sin^4 u}\mathrm{d}u$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^3 x}{2\sin^2 x+\cos^4 x}dx \xlongequal{t=\frac{\pi}{2}-x} \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \frac{\sin^3 t}{2\cos^2 t+\sin^4 t}(-dt),$$

故原式$=0$.

4. 计算$\int_0^{n\pi} x\,|\sin x|\,dx \quad (n\in \mathbf{N}_+)$.

解 $I=\int_0^{n\pi} x\,|\sin x|\,dx \xlongequal{u=n\pi-x} \int_0^{n\pi}(n\pi-u)\,|\sin u|\,du$,

即 $I=n\pi\int_0^{n\pi}|\sin u|-I$,故 $I=\frac{1}{2}n\pi\int_0^{n\pi}|\sin u|\,du$.

又因为$|\sin u|$是周期为π的周期函数,故

$$I=\frac{1}{2}n^2\pi\left(\int_0^{\pi}\sin u du\right)=n^2\pi.$$

5. 计算$\int_{\frac{1}{2}}^{2}\left(1+x-\frac{1}{x}\right)e^{x+\frac{1}{x}}dx$.

解
$$\int_{\frac{1}{2}}^{2} e^{x+\frac{1}{x}}dx = xe^{x+\frac{1}{x}}\Big|_{\frac{1}{2}}^{2}-\int_{\frac{1}{2}}^{2}xe^{x+\frac{1}{x}}\left(1-\frac{1}{x^2}\right)dx$$
$$=\frac{3}{2}e^{\frac{5}{2}}-\int_{\frac{1}{2}}^{2}\left(x-\frac{1}{x}\right)e^{x+\frac{1}{x}}dx,$$

故原式 $=\frac{3}{2}e^{\frac{5}{2}}$.

6. 计算$\int\frac{xe^x}{(1+x)^2}dx$.

解 原式 $=\int\frac{(x+1-1)e^x}{(1+x)^2}dx=\int\frac{e^x}{1+x}dx+\int e^x\frac{-1}{(1+x)^2}dx$
$$=\int\frac{e^x}{1+x}dx+\frac{e^x}{1+x}-\int\frac{1}{1+x}de^x=\frac{e^x}{1+x}+C.$$

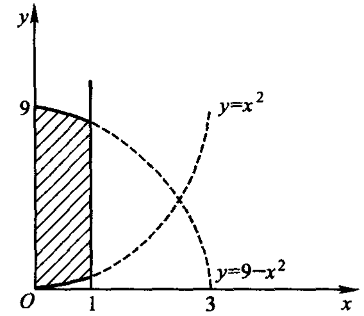
习 题 3.4

(A)

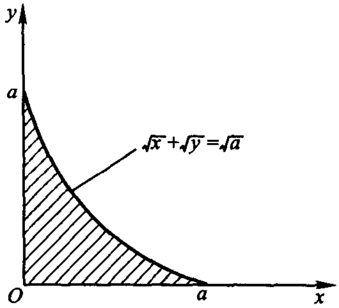
1. 求由下列各曲线围成平面图形的面积:

(1) 曲线 $y=9-x^2$,$y=x^2$ 与直线 $x=0$,$x=1$.

解 如图所示,面积元为 $dA=[(9-x^2)-x^2]dx=(9-2x^2)dx$,从而所求面积为 $A=\int_0^1(9-2x^2)dx=\frac{25}{3}$.



（第 1 题(1)）



（第 1 题(3)）

(3) 曲线$\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}(a>0)$与坐标轴.

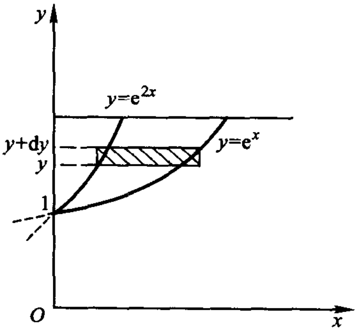
解 如图所示,面积元 $\mathrm{d}A=(\sqrt{a}-\sqrt{x})^2\mathrm{d}x$,于是所求面积为

$$A=\int_0^a(\sqrt{a}-\sqrt{x})^2\mathrm{d}x=\frac{1}{6}a^2.$$

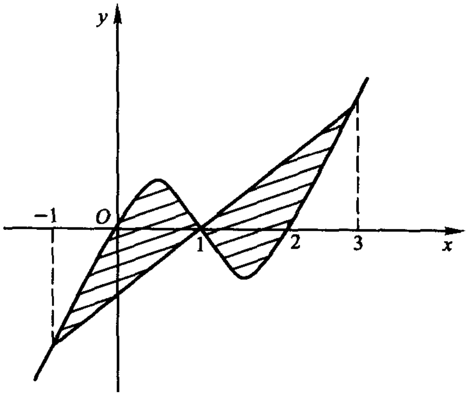
(4) 曲线 $y=\mathrm{e}^x,y=\mathrm{e}^{2x}$与直线 $y=2$.

解 面积元 $\mathrm{d}A=\left(\ln y-\frac{1}{2}\ln y\right)\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\ln y\mathrm{d}y$,

所求面积 $A=\int_1^2\frac{1}{2}\ln y\mathrm{d}y=\frac{1}{2}(2\ln 2-1)$.



（第 1 题(4)）



（第 1 题(5)）

(5) $y=x(x-1)(x-2)$与直线 $y=3(x-1)$.

解 面积元

$$\begin{aligned}\mathrm{d}A&=|x(x-1)(x-2)-3(x-1)|\mathrm{d}x\\&=-|x-1|(x^2-2x-3)\mathrm{d}x,x\in[-1,3].\end{aligned}$$

故所求面积

$$A=\int_{-1}^{3}-|x-1|(x^2-2x-3)\mathrm{d}x$$

$$=\int_{-1}^{1}(x-1)(x^2-2x-3)\mathrm{d}x+\int_{1}^{3}-(x-1)(x^2-2x-3)\mathrm{d}x=8.$$

(6) 闭曲线 $y^2=x^2-x^4$.

解 令 $x=\rho\cos\theta, y=\rho\sin\theta$,代入可得曲线的极坐标方程 $\rho^2\cos^4\theta=\cos 2\theta\geqslant 0$,故 $\theta\in\left(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)\cup\left(\frac{3}{4}\pi,\frac{5}{4}\pi\right)$,从而位于第一象限的面积 A_1.

$$A_1=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{2}\rho^2(\theta)\mathrm{d}\theta=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{2}\frac{\cos 2\theta}{\cos^4\theta}\mathrm{d}\theta=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos^2\theta-\sin^2\theta}{2\cos^2\theta}\mathrm{d}\tan\theta$$

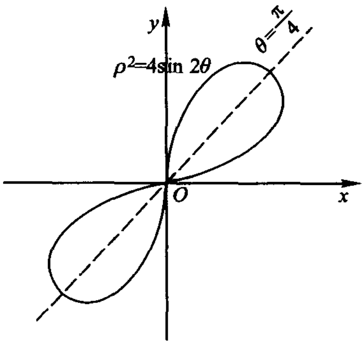
$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1-\tan^2\theta)\mathrm{d}\tan\theta=\frac{1}{3}.\text{于是总面积 }A=4A_1=\frac{4}{3}.$$

(7) 双纽线 $\rho^2=4\sin 2\theta$.

解 $\theta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\pi,\frac{3\pi}{2}\right)$.

如图所示位于第一象限的面积 A_1 等于总面积 A 的 $\frac{1}{2}$.

而 $A_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}\rho^2(\theta)\mathrm{d}\theta=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}4\sin 2\theta\mathrm{d}\theta=2$,故 $A=4$.



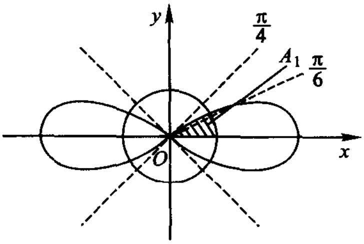
(第 1 题(7))

(8) 双纽线 $\rho^2=2\cos 2\theta$ 与圆 $\rho=1$ 围成图形的公共部分.

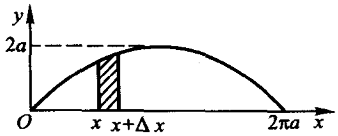
解 如图所示总面积 A 等于 A_1 的 4 倍.

$$A=4A_1=4\left[\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{6}}1^2\mathrm{d}\theta+\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}2\cos 2\theta\mathrm{d}\theta\right]$$

$$=2-\sqrt{3}+\frac{\pi}{3}.$$



(第 1 题(8))



(第 1 题(9))

(9) 摆线$\begin{cases}x=a(t-\sin t),\\ y=a(1-\cos t)\end{cases}$的一拱$(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$与 x 轴.

解　如图所示,所求面积为

$$A=\int_0^{2\pi a} y\mathrm{d}x=\int_0^{2\pi} a(1-\cos t)\mathrm{d}a(t-\sin t)=a^2\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^2\mathrm{d}t=3\pi a^2.$$

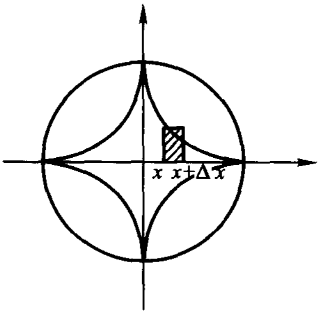
(10) 星形线$\begin{cases}x=a\cos^3 t,\\ y=a\sin^3 t\end{cases}$外,圆 $x^2+y^2=a^2$ 内的部分.

解　由星形线所围的区域的面积 A_0.

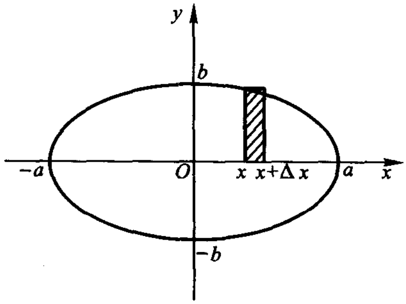
$$A_0=4\int_0^a y\mathrm{d}x=4\int_{\frac{\pi}{2}}^0 -a\sin^3 t\cdot(3a\cos^2 t\sin t)\mathrm{d}t=\frac{3}{8}\pi a^2,$$

故所求面积 $A=A_{圆}-A_0=\pi a^2-\frac{3}{8}\pi a^2$

$$=\frac{5}{8}\pi a^2.$$



(第 1 题(10))



(第 2 题(1))

2. 求下列各曲线围成的图形按指定轴旋转所产生旋转体的体积:

(1) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$分别绕 x 轴与 y 轴.

解　绕 x 轴旋转

$$\mathrm{d}V_x=\pi y^2\mathrm{d}x$$

$$V_x=\int_{-a}^a \pi b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)\mathrm{d}x=\frac{4}{3}\pi ab^2.$$

类似的方法可得绕 y 轴旋转的体积 $V_y=\frac{4}{3}\pi a^2 b$.

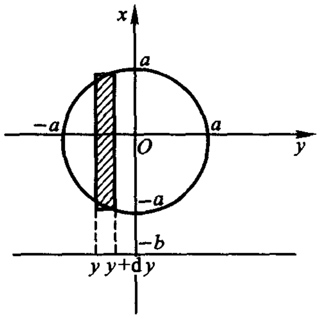
(3) $x^2+y^2=a^2$ 绕直线 $x=-b$　$(b>a>0)$.

$$\mathrm{d}V=\pi[(\sqrt{a^2-y^2}+b)^2-(-\sqrt{a^2-y^2}+b)^2]\mathrm{d}y$$

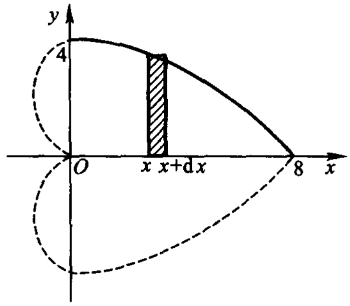
$$V=\pi\int_{-a}^a[(b+\sqrt{a^2-y^2})^2-(b-\sqrt{a^2-y^2})^2]\mathrm{d}y$$

$$=2\pi\int_0^a[(b+\sqrt{a^2-y^2})^2-(b-\sqrt{a^2-y^2})^2]\mathrm{d}y$$

$$=8b\pi\int_0^a\sqrt{a^2-y^2}\,\mathrm{d}y=2\pi^2a^2b.$$



(第 2 题(3))



(第 2 题(4))

(4) 心形线 $\rho=4(1+\cos\theta)$，射线 $\theta=0$ 及 $\theta=\frac{\pi}{2}$，绕极轴旋转的体积.

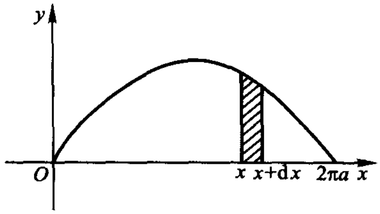
$$V=\int_0^8\pi y^2\,\mathrm{d}x$$

$$=\pi\int_{\frac{\pi}{2}}^0[4(1+\cos\theta)\sin\theta]^2\,\mathrm{d}4(1+\cos\theta)\cos\theta$$

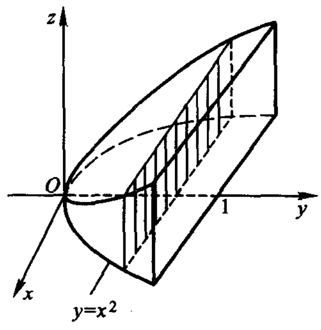
$$=64\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\theta(1+\cos\theta)^2(1+2\cos\theta)\mathrm{d}(-\cos\theta)$$

$$=64\pi\int_0^1(1-u^2)(1+u)^2(1+2u)\mathrm{d}u=160\pi.$$

(5) 摆线$\begin{cases}x=a(t-\sin t),\\ y=a(1-\cos t)\end{cases}$的一拱$(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$与 x 轴，绕 y 轴，其中 $a>0$.



(第 2 题(5))



(第 3 题(1))

解　$\Delta V \approx [\pi(x+\Delta x)^2 - \pi x^2]y$,

$$\mathrm{d}V = 2\pi xy\mathrm{d}x,$$

$$V = \int_0^{2\pi a} 2\pi xy\mathrm{d}x = \int_0^{2\pi} [2\pi a(t-\sin t)a(1-\cos t)]\mathrm{d}a(t-\sin t) = 3\pi^3 a^3.$$

3. 立体底面为抛物线 $y=x^2$ 与直线 $y=1$ 围成的图形，而任一垂直于 y 轴的截面分别是：(1) 正方形；(2) 等边三角形；(3) 半圆形. 求各种情况下立体的体积.

解　(1) 截面的边长为 $2\sqrt{y}$，则截面积为 $4y$，故立体体积为 $V=\int_0^1 4y\mathrm{d}y=2$.

(2) 由于截面为等边三角形，则截面面积 $\frac{1}{2}(2\sqrt{y})\left(\sqrt{y}\tan\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt{3}y$.

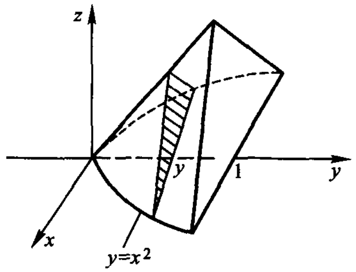
则宽度为 $\mathrm{d}y$ 的薄片体积

$$\Delta V \approx \sqrt{3}y\mathrm{d}y,$$

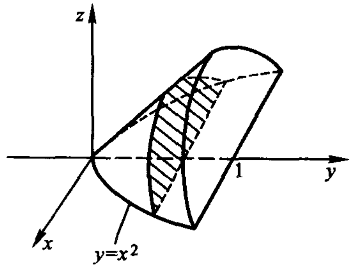
故

$$V=\int_0^1 \sqrt{3}y\mathrm{d}y=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

(3) 半圆形截面面积为 $\frac{1}{2}\pi(\sqrt{y})^2=\pi y/2$，故 $V=\int_0^1 \frac{1}{2}\pi y\mathrm{d}y=\frac{\pi}{4}$.



(第 3 题(2))



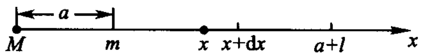
(第 3 题(3))

4. 两质点的质量分别为 M 和 m，相距为 a，现将质点 m 沿两质点连线向外移动距离 l，求克服引力所做的功.

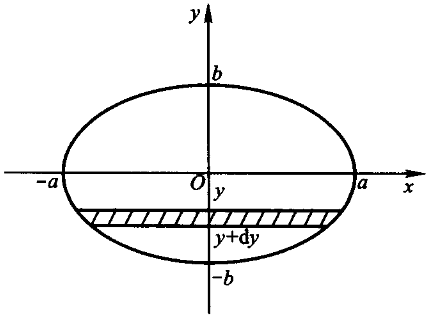
解　如图所示建立坐标系，由万有引力定律知：相距为 x 的质量为 m、M 的两质点间的引力大小为 $f=k\frac{Mm}{x^2}$（其中 k 为引力常数），于是将 m 由 x 移到 $x+\mathrm{d}x$ 时克服引力所做的功微元为

$\mathrm{d}W=f\cdot\mathrm{d}x=k\frac{Mm}{x^2}\cdot\mathrm{d}x$，故所求功为

$$W=\int_a^{a+l} kmM\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x=kmM\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{a+l}\right).$$



（第 4 题）



（第 6 题）

6. 将长、短半径分别为 a 与 b 的一椭圆板铅直放入水中，长为 $2a$ 的轴与水面平行.

（1） 如果水面刚好淹没该板的一半；

（2） 如果水面刚好淹没该板.

分别求两种情况下该板一侧受到的水压力.

解　如图所示建立坐标系，则椭圆的方程为

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

（1） 图中细条受到水压力的近似值（压力微元）为

$$\mathrm{d}F=P\cdot\mathrm{d}A=\rho g(-y)\cdot 2x\mathrm{d}y=-2gya\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}}\mathrm{d}y$$

P 为该细条上各点处压强的近似值，ρ 为水的密度，g 为重力加速度，$\mathrm{d}A=2x\mathrm{d}y$ 为该细条的面积. 故所受压力

$$F=\int_{-b}^{0}-2g\,\frac{a}{b}y\,\sqrt{b^2-y^2}\mathrm{d}y=\frac{2}{3}gab^2.$$

（2） 水面平行于 $y=b$ 时，细条受到的压力近似值

$$\mathrm{d}F=\rho g(b-y)\cdot 2x\mathrm{d}y=2g(b-y)\frac{a}{b}\sqrt{b^2-y^2}\mathrm{d}y.$$

故所求压力

$$F=\int_{-b}^{b}\frac{2ga}{b}(b-y)\sqrt{b^2-y^2}\mathrm{d}y=\pi gab^2.$$

7. 以下各种容器中均装满水，分别求把各容器中的水全部从容器口抽出克服重力所作的功：

（1） 容器为圆柱形，高为 H，底半径为 R；

（2） 容器为圆锥形，高为 H，底半径为 R；

（3） 容器为圆台形，高为 H，上底半径为 R，下底半径为 r，且 $R>r$；

(4) 容器为抛物线 $y=x^2(0\leqslant x\leqslant 2)$ 的弧段绕 y 轴旋转所产生的旋转面。

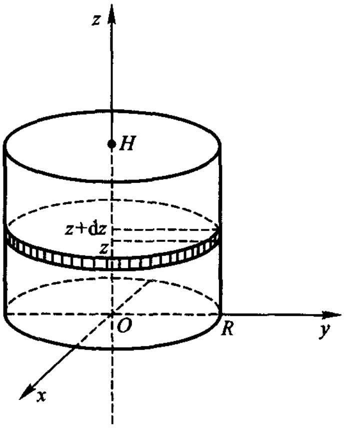
解　(1) 如图所示建立坐标系，与区间 $[z,z+\mathrm{d}z]$ 对应一薄层水体积的近似值 $\mathrm{d}V=\pi R^2\mathrm{d}z$. 将这一薄层水抽到容器口所经过的位移近似看作相同的，等于 $H-z$，则克服重力所做的功为

$$\mathrm{d}W=(\rho g\cdot\pi R^2\mathrm{d}z)(H-z),$$

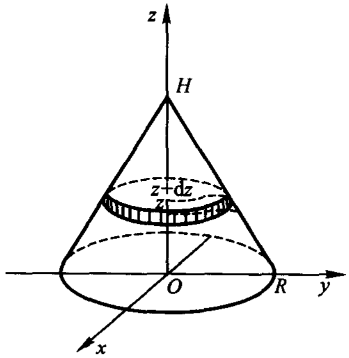
故

$$W=\int_0^H\pi\rho gR^2(H-z)\mathrm{d}z=\frac{1}{2}\pi\rho gR^2H^2=\frac{1}{2}\pi gR^2H^2.$$

其中 g 为重力加速度，ρ 为水的密度.



(第 7 题(1))



(第 7 题(2))

(2) 设水高为 z 的水面半径为 r_z，则 $\dfrac{H-z}{H}=\dfrac{r_z}{R}$，从而 $r_z=\dfrac{R}{H}(H-z)$，则功微元

$$\mathrm{d}W=\rho g\cdot\pi\left[\frac{R}{H}(H-z)\right]^2\mathrm{d}z\cdot(H-z)=\frac{\pi gR^2}{H^2}(H-z)^3\mathrm{d}z,$$

$$W=\int_0^H\frac{\pi gR^2}{H^2}(H-z)^3\mathrm{d}z=\frac{1}{4}\pi gR^2H^2.$$

(3) 如图所示建立坐标系，水深 $H-z$ 处的水面半径为 y. 则 $\dfrac{y-r}{R-r}=\dfrac{z}{H}$，

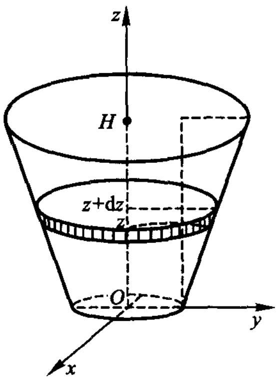
则

$$y=r+\frac{R-r}{H}z.$$

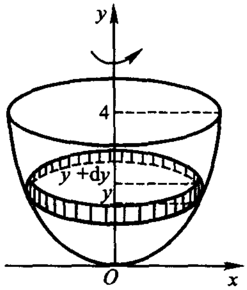
功微元

$$\mathrm{d}W=\rho g\cdot\pi\left[r+\frac{R-r}{H}z\right]^2\mathrm{d}z(H-z),$$

$$W=\int_0^H\frac{\pi g}{H^2}[(R-r)z+rH]^2(H-z)\mathrm{d}z=\frac{1}{12}\pi gH^2(R^2+2Rr+3r^2).$$



（第 7 题(3)）



（第 7 题(4)）

(4) 如图所示

$$dW = g\pi x^2(4-y)dy = \pi g y(4-y)dy,$$

$$W = \int_0^4 \pi g(4y-y^2)dy = \frac{32}{3}\pi g.$$

8. 一圆柱形物体，底半径为 R，高为 H，该物体铅直立于水中，且上底面与水面相齐. 现将它铅直打捞出来，试对下列两种情况分别计算使该物体刚刚脱离水面时需要作的功：

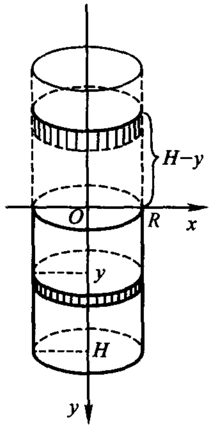
(1) 该物体的密度 $\mu=1$(与水的密度相等)；

(2) 该物体的密度 $\mu>1$.

解 如图所示建立坐标系.

将相应于$[y, y+\Delta y]$间的薄片铅直打捞出水面，既要克服自身的重力，又要克服浮力作功，在水中的位移为$(-y)$，出水后的位移为$[-(H-y)]$. 在水中所受合力微元为 $g(1-\mu)dV$. 出水后的受力微元为$-g\mu dV$. 于是

$$dW = (-y)g(1-\mu)dV + [-(H-y)(-g\mu dV)]$$
$$= g(H\mu - y)\cdot \pi R^2 dy.$$



（第 8 题）

(1) 若 $\mu=1$，则 $dW = g(H-y)\pi R^2 dy$，

$$W = \int_0^H \pi R^2 g(H-y)dy = \frac{1}{2}\pi R^2 g H^2.$$

(2) 若 $\mu>1$，则 $dW = \pi R^2 g(H\mu - y)dy$，

$$W = \int_0^H \pi R^2 g(H\mu - y)dy = \frac{1}{2}\pi g R^2 H^2(2\mu - 1).$$

9. 一个半径为 R 的半圆环导线，均匀带电，电荷密度为 δ. 在圆心处放置一个带电量为 q 的点电荷，求它们之间的作用力.

解　如图所示建立坐标系.在半圆周上点(x,y)处任取长度为$\mathrm{d}s$的弧段,则由Coulomb定律知,$\mathrm{d}s$对原点处点电荷引力的近似值为

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F}=k\frac{q(\delta\mathrm{d}s)}{x^2+y^2}\boldsymbol{r}_0=kq\delta\frac{(x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j})}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2},$$

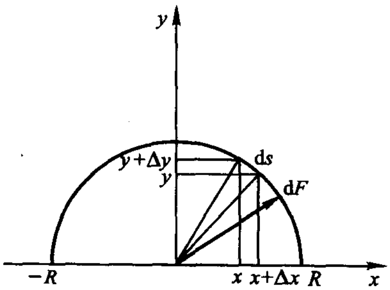
其中　$\Delta s^2\approx\Delta x^2+\Delta y^2\approx(\mathrm{d}x)^2+\mathrm{d}y^2=\left[1+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2\right](\mathrm{d}x)^2=\left(1+\frac{x^2}{y^2}\right)(\mathrm{d}x)^2$,

故
$$\mathrm{d}s=\frac{1}{|y|}\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{|y|}R\mathrm{d}y=\frac{1}{y}R\,\mathrm{d}y,$$

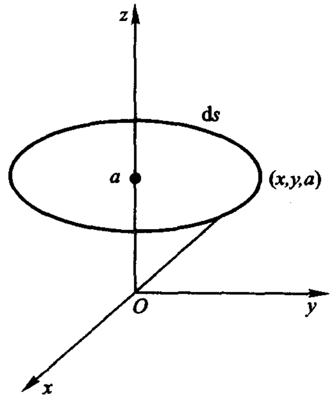
于是$\mathrm{d}\boldsymbol{F}$在x,y方向的分量分别为

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F}_y=\frac{kq\delta}{R^2}\frac{y}{|y|}\mathrm{d}x=\frac{kq\delta}{R^2}\mathrm{d}x,\mathrm{d}\boldsymbol{F}_x=\frac{kq\delta x}{R^2y}\mathrm{d}x.$$

由对称性可知,合力在x轴上的分量等于零.故合力大小$F=F_y=\int_{-R}^{R}\frac{kq\delta}{R^2}\mathrm{d}x=\frac{2kq\delta}{R}$,方向与$y$轴一致.



(第9题)



(第10题)

10. 一个半径为R的圆环导线,均匀带电,电荷密度为δ.在过圆心且垂直于环所在平面的直线上与圆心相距为a之处有一个带电量为q的点电荷.求导线与点电荷之间的作用力.

解　如图所示建立坐标系,则圆环的方程为$\begin{cases}z=a,\\x^2+y^2=R^2\end{cases}$在圆环上点$(x,y,a)$处取一小段圆弧$\mathrm{d}s$,则$\mathrm{d}s\approx\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}\approx\sqrt{\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2}=\sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}\,\mathrm{d}x=\sqrt{1+(-x/y)^2}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{|y|}\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x=\frac{R}{|y|}\mathrm{d}x$.将$\mathrm{d}s$视作一点.则点电荷$\delta\mathrm{d}s$对原点

处的点电荷的引力为 $\mathrm{d}\boldsymbol{F}=\dfrac{kq\delta\mathrm{d}s}{x^2+y^2+a^2}\boldsymbol{r}_0$（$\boldsymbol{r}_0$ 是与向径同向的单位向量，则 $\boldsymbol{r}_0=\dfrac{x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+a\boldsymbol{k}}{(x^2+y^2+a^2)^{\frac{1}{2}}}$，且 $x^2+y^2+a^2=R^2+a^2$）于是 $\mathrm{d}\boldsymbol{F}=\dfrac{kq\delta R}{(R^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}\cdot\dfrac{1}{|y|}\mathrm{d}x(x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+a\boldsymbol{k})$，由对称性可知. 合力在 x,y 方向的分量等于零，而且左半圆弧与右半圆弧对原点处点电荷的引力大小相等，故这个引力大小等于其在 z 轴上的分力 $F_z=F_{z左}+F_{z右}$，方向与 z 轴一致.

而
$$F_{z右}=\int_{-R}^{R}\mathrm{d}F_z=\int_{-R}^{R}\frac{kq\delta R}{(R^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}\cdot\frac{a}{y}\mathrm{d}x$$
$$=\frac{akq\delta R}{(R^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}\int_{-R}^{R}\frac{1}{\sqrt{R^2-x^2}}\mathrm{d}x$$
$$=\frac{2akq\delta R}{(R^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}\int_{0}^{R}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{R^2-x^2}}$$
$$=\frac{\pi akq\delta R}{(R^2+a^2)^{\frac{3}{2}}},$$

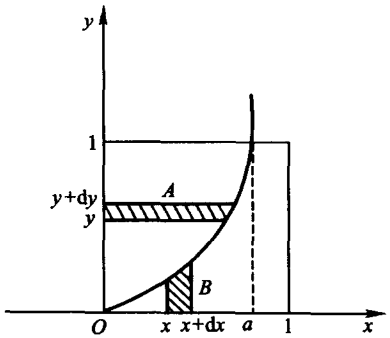
故
$$\boldsymbol{F}=\frac{2\pi akq\delta R}{(R^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}\boldsymbol{k}.$$

11. 曲线 $a^2y=x^2(0<a<1)$ 将图中边长为 1 的正方形分成 A,B 两部分.

(1) 分别求 A 绕 y 轴旋转一周与 B 绕 x 轴旋转一周所得两旋转体的体积 V_A 与 V_B；

(2) 当 a 取何值时，$V_A=V_B$？

(3) 当 a 取何值时，V_A+V_B 取得最小值？



（第 11 题）

解 (1) A 绕 y 轴一周的体积为 V_A，
$$V_A=\int_0^1\pi x^2\mathrm{d}y$$
$$=\pi\int_0^1 a^2y\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\pi a^2.$$

B 绕 x 轴一周的体积
$$V_B=\int_0^a\pi y^2\mathrm{d}x+\pi 1^2(1-a)=\int_0^a\pi\frac{x^4}{a^4}\mathrm{d}x+\pi(1-a)$$
$$=\frac{1}{5}\pi a+\pi-\pi a=\pi\left(1-\frac{4}{5}a\right).$$

(2) 要使 $V_a=V_B$. 则 $a=\dfrac{\sqrt{66}-4}{5}$.

(3) 令 $V(a)=V_a+V_B=\dfrac{1}{2}\pi a^2+\pi\left(1-\dfrac{4}{5}a\right)=\dfrac{\pi}{10}(5a^2-8a+10)$，$\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}a}=0$ 得

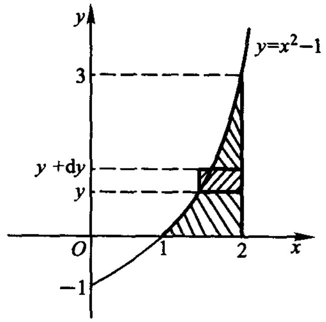
驻点 $a=\frac{4}{5}$，又 $\left.\frac{\mathrm{d}^2v}{\mathrm{d}a^2}\right|_{\frac{4}{5}}=\pi>0$，故 $a=\frac{4}{5}$ 处 $V(a)$ 取得最小值 $\frac{34}{50}\pi$.

12. 设有立体，过 x 轴上点 $x(a\leqslant x\leqslant b)$ 处作垂直于 x 轴的平面截该立体的截面面积为已知连续函数 $S(x)$，立体两端点处的截面（可以缩为一点）分别对应于 $x=a$ 与 $x=b$. 证明：该立体的体积 $V=\int_a^b S(x)\mathrm{d}x$.

解　当 $\mathrm{d}x$ 足够小时，介于截面 $S(x)$（过 x 轴上 x 点处垂直于 x 轴的平面截立体所得截面）与截面 $S(x+\Delta x)$（过 x 轴上的 $x+\Delta x$ 处垂直于 x 轴的平面截立体所得截面）之间的立体薄片可近似的看作以 $S(x)$ 为底面，高为 Δx 的柱体. 则此薄片体积的近似值 $\mathrm{d}V=S(x)\Delta x$. 故由定积分定义，立体的体积 $V=\int_a^b S(x)\mathrm{d}x$.

(B)

2. 一开口容器的侧面与底面分别为由曲线段 $y=x^2-1(1\leqslant x\leqslant 2)$ 和直线段 $y=0(0\leqslant x\leqslant 1)$ 绕 y 轴旋转而成. 现以 $2\mathrm{m}^3/\mathrm{min}$ 的速度向容器内注水. 试求当水面高度上升到容器深度一半时水面上升的速度. 设坐标轴上长度单位为 m.



（第 2 题）

解　t 时刻容器内水面的高度为 $h(t)(\mathrm{m})$，容器内水的体积为 $2t(\mathrm{m}^3)$. 于是有

$$2t=\int_0^{h(t)}\mathrm{d}V=\int_0^{h(t)}\pi(2^2-x^2)\mathrm{d}y$$

$$=\pi\int_0^{h(t)}(4-y-1)\mathrm{d}y,$$

从而
$$2t=\pi\left(3y-\frac{1}{2}y^2\right)\Big|_0^{h(t)},$$

即
$$2t=\left[3h(t)-\frac{1}{2}h^2(t)\right]\pi,$$

两边同时对 t 求导

$$2=[3h'(t)-h(t)h'(t)]\pi,$$

故
$$h'(t)=\frac{2}{[3-h(t)]\pi},$$

从而
$$h'(t_0)\big|_{h(t)=\frac{3}{2}}=\frac{4}{3\pi}(\mathrm{m/min}).$$

当水面高度升高到容器深度（3m）一半时，水面上升的速度为 $\frac{4}{3\pi}\mathrm{m/min}$.

3. （人口统计模型）我们知道，一般来说城市人口的分布密度 $P(r)$ 随着与

市中心距离 r 的增加而减小. 设某城市 1990 年的人口密度为 $P(r)=\frac{4}{r^2+20}$(10 万人/km^2)，试求该市距市中心 2 km 的范围内的人口数.

解　在 dr 足够小时. 近似的认为圆环(内半径 r，外半径 $r+dr$)上人口密度为 $P(r)=\frac{4}{r^2+20}$. 而将整个城市的人口看作分布在这些圆环上的人口之和. 圆环面积微元 $dA=2\pi r dr$. 则距市中心 2 km 范围内的人口数

$$M=\int_0^2 P(r)dA=\int_0^2 \frac{4(2\pi r dr)}{r^2+20}=4\pi\ln\frac{6}{5}(10\text{ 万人})$$
$$\approx 2.291(10\text{ 万人}).$$

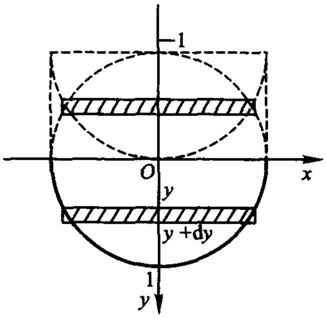
4. 设一半径为 1 的球有一半浸入水中，球的体密度为 1，问将此球从水中取出需作多少功?

解　如图所示建立坐标系，采用与练习 3.4(A)第 8 题的分析法可知：将下半球从水中拿出所做功微元

$$dW_1=(-y)g(1-\mu)dV$$
$$-[-(1-y)](-g\mu dV)$$
$$=g[(\mu-1)y+\mu(1-y)]dV,$$

dV 为图中阴影所示薄片的体积，即

$$dv=\pi x^2 dy=\pi\sqrt{1-y^2}dy.$$



(第 4 题)

由于 $\mu=1$，故将下半球从水中取出所做功为

$$W_1=\int_0^1 dW_1=\int_0^1 g(1-y)\pi\sqrt{1-y^2}dy=\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{3}\right)\pi g$$

上半球从原始位置升高 1 所做功

$$W_2=(-1)\left(-g\mu\cdot\frac{2}{3}\pi\cdot 1^3\right)=\frac{2}{3}\pi g$$

故将此球从水中拿出所做的功为

$$W=W_1+W_2=\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{3}\right)\pi g.$$

习　题　3.5

(A)

1. 利用定义判定下列无穷积分的收敛性，如果收敛，计算其值.

(1) $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}$;　　(3) $\int_0^{+\infty}e^{-\sqrt{x}}dx$;

(6) $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx$.

解　(1) $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}=\lim\limits_{b\to+\infty}\int_1^b\frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}=\lim\limits_{b\to+\infty}\int_1^b\frac{2d\sqrt{x}}{1+(\sqrt{x})^2}$

$=\lim\limits_{b\to+\infty}\left(2\arctan\sqrt{b}-\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}$. 故积分收敛，其值为$\frac{\pi}{2}$.

(3) 原式$=\lim\limits_{b\to+\infty}\int_0^b e^{-\sqrt{x}}dx=\lim\limits_{b\to+\infty}2\int_0^b\sqrt{x}e^{-\sqrt{x}}d\sqrt{x}$

$=\lim\limits_{b\to+\infty}\left[-2(\sqrt{x}+1)e^{-\sqrt{x}}\right]_0^b=\lim\limits_{b\to+\infty}2\left[1-(\sqrt{b}+1)e^{-\sqrt{b}}\right]=2$. 积分收敛.

(6) 因为 $\int_0^{+\infty}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx=\lim\limits_{b\to+\infty}\int_0^b\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx=\lim\limits_{b\to+\infty}(\sqrt{1+b^2}-1)$

$=+\infty$,

故$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}}$积分发散.

2. 利用定义判定下列无界函数积分的收敛性，如果收敛，计算它的值.

(1) $\int_0^1\frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}$;　　(3) $\int_1^2\frac{x}{\sqrt{x-1}}dx$;

(5) $\int_a^b\frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}(a<b)$;　　(8) $\int_1^3\ln\sqrt{\frac{\pi}{|2-x|}}dx$.

解　(1) $x=1$ 是$\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$的奇点. 由定义

$$\int_0^1\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx=\lim_{\varepsilon\to0^+}\int_0^{1-\varepsilon}\frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}=\lim_{\varepsilon\to0^+}(-\sqrt{1-x^2})\Big|_0^{1-\varepsilon}=1.$$

(3) $x=1$ 是$\frac{x}{\sqrt{x-1}}$的奇点，且$\frac{2}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}}+2\sqrt{x-1}=F(x)$是$\frac{x}{\sqrt{x-1}}$的一个原函数，由于$F(x)$在$x=1$处连续，故积分$\int_1^2\frac{xdx}{\sqrt{x-1}}=F(2)-F(1)=\frac{8}{3}$收敛.

(5) $x=a,x=b$ 都是函数$\frac{1}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}$的奇点，取$c=\frac{a+b}{2}$,

$$\int_a^{\frac{a+b}{2}}\frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}=\lim_{\varepsilon\to0^+}\int_{a+\varepsilon}^{\frac{a+b}{2}}\frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{b-a}{2}\right)^2-\left(x-\frac{b+a}{2}\right)^2}}$$

$$\xlongequal{\text{令 } x-\frac{b+a}{2}=\frac{b-a}{2}\sin\theta}\lim_{\varepsilon\to0^+}\int_{\arcsin\frac{\varepsilon-(b-a)/2}{(b-a)/2}}^{0}\mathrm{d}\theta$$

$$=\lim_{\varepsilon\to0^+}\left[-\arcsin\frac{\varepsilon-(b-a)/2}{(b-a)/2}\right]=\frac{\pi}{2},$$

又 $$\lim_{\delta\to0^+}\int_{\frac{a+b}{2}}^{b-\delta}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(b-x)(a-x)}}\xlongequal{x-\frac{a+b}{2}=\frac{b-a}{2}\sin\theta}\lim_{\delta\to0^+}\int_0^{\arcsin\frac{-\delta+(b-a)/2}{(b-a)/2}}\mathrm{d}\theta$$

$$=\lim_{\delta\to0^+}\arcsin\frac{(b-a)/2-\delta}{(b-a)/2}=\frac{\pi}{2},$$

故原积分收敛，且

$$\int_a^b\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(a-x)(b-x)}}=\lim_{\varepsilon\to0^+}\int_{a+\varepsilon}^{\frac{a+b}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(a-x)(b-x)}}+\lim_{\delta\to0^+}\int_{\frac{a+b}{2}}^{b-\delta}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(a-x)(b-x)}}=\pi,$$

(8) $x=2$ 为奇点. 且

$$\lim_{\varepsilon\to0^+}\int_1^{2-\varepsilon}\ln\sqrt{\frac{\pi}{|2-x|}}\mathrm{d}x=\lim_{\varepsilon\to0^+}\int_1^{2-\varepsilon}\ln\sqrt{\frac{\pi}{2-x}}\mathrm{d}x$$

$$=\lim_{\varepsilon\to0^+}\int_1^{2-\varepsilon}\frac{1}{2}[\ln\pi-\ln(2-x)]\mathrm{d}x$$

$$=\lim_{\varepsilon\to0^+}\frac{1}{2}[(1-\varepsilon)\ln\pi+\varepsilon\ln\varepsilon+1-\varepsilon]$$

$$=\frac{1}{2}(\ln\pi+1).$$

$$\lim_{\delta\to0^+}\int_{2+\delta}^3\ln\sqrt{\frac{\pi}{|2-x|}}\mathrm{d}x=\lim_{\delta\to0^+}\int_{2+\delta}^3\frac{1}{2}(\ln\pi-\ln(x-2))\mathrm{d}x$$

$$=\lim_{\delta\to0^+}\frac{1}{2}[(1-\delta)\ln\pi+1+\delta\ln\delta-\delta]$$

$$=\frac{1}{2}(\ln\pi+1)$$

故 $$\int_1^3\ln\sqrt{\frac{\pi}{|x-2|}}\mathrm{d}x=\lim_{\varepsilon\to0^+}\int_1^{2-\varepsilon}\ln\sqrt{\frac{\pi}{|x-2|}}\mathrm{d}x+\lim_{\delta\to0^+}\int_{2+\delta}^3\ln\sqrt{\frac{\pi}{|x-2|}}\mathrm{d}x=\ln\pi+1.$$

3. 利用定义判定下列反常积分的收敛性，如果收敛，计算它的值.

(1) $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{-\infty}\frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}\mathrm{d}x=\lim\limits_{b\to-\infty}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{b}\left(-\sin\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}\,\frac{1}{x}=\lim\limits_{b\to-\infty}\left(\cos\frac{1}{b}-\cos\frac{4}{\pi}\right)=1-\cos\frac{4}{\pi}$，故积分收敛.

(2) $\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x-1}}$.

$x=1$ 为奇点. 故 $\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x-1}}=\int_1^2\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x-1}}+\int_2^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x-1}}$.

因为 $$\int_1^2\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x-1}}=\lim_{\varepsilon\to0^+}\int_{1+\varepsilon}^2\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x-1}}\xlongequal{t=\sqrt{x-1}}\lim_{\varepsilon\to0^+}2\left(\frac{\pi}{4}-\arctan\varepsilon\right)=\frac{\pi}{2}.$$

又因为 $$\int_2^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x-1}}=\lim_{b\to+\infty}\int_2^b\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x-1}}=\lim_{b\to+\infty}2\left(\arctan\sqrt{b-1}-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{2},$$

故 $\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x-1}}$收敛,且 $\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x-1}}=\pi$.

4. 当 k 取何值时,反常积分 $\int_e^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x(\ln x)^k}$收敛,又当 k 为何值时发散.

解　$k=1$ 时, $\int_e^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x(\ln x)^k}=\lim_{b\to+\infty}\int_e^b\frac{\mathrm{d}\ln x}{\ln x}=\lim_{b\to+\infty}\ln(\ln b)=+\infty$,积分发散.

当 $k\neq1$ 时, $$\int_e^b\frac{\mathrm{d}x}{x(\ln x)^k}=\frac{1}{1-k}[(\ln b)^{1-k}-1].$$

如 $k>1$ $$\lim_{b\to+\infty}\int_e^b\frac{\mathrm{d}x}{x(\ln x)^k}=\lim_{b\to+\infty}\frac{1}{1-k}[(\ln b)^{1-k}-1]=\frac{1}{k-1}.$$

$k<1$ $$\lim_{b\to+\infty}\int_e^b\frac{\mathrm{d}x}{x(\ln x)^k}=\lim_{b\to+\infty}\frac{1}{1-k}[(\ln b)^{1-k}-1]=+\infty.$$

故 $k>1$ 时,积分收敛,且 $\int_e^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x(\ln x)^k}=\frac{1}{k-1}$. $k\leqslant1$ 时,积分发散.

5. 利用各种判别准则,讨论下列无穷积分的收敛性:

(1) $\int_0^{+\infty}\frac{x\mathrm{d}x}{x^3+x^2+1}$.

解　$g(x)=\frac{1}{x^2}$,则 $\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x^3+x^2+1}\Big/\frac{1}{x^2}=1$. 又因为 $\int_1^{+\infty}g(x)\mathrm{d}x$ 收敛,故 $\int_0^{+\infty}\frac{x\mathrm{d}x}{x^3+x^2+1}=\int_0^1\frac{x\mathrm{d}x}{x^3+x^2+1}+\int_1^{+\infty}\frac{x\mathrm{d}x}{x^3+x^2+1}$收敛.

(2) $\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x+1}}$.

解　取 $g(x)=\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}$,则 $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x\sqrt{x+1}}\Big/g(x)=1$,又因为 $\int_1^{+\infty}g(x)\mathrm{d}x$ 收敛,故 $\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x+1}}$收敛.

(3) $\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x\sqrt{x}}}=\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^{\frac{3}{4}}}$,因为 $p=\frac{3}{4}<1$. 故积分发散.

(4) $\int_0^{+\infty} e^{-kx}\cos x\mathrm{d}x, k>0$.

解 因为 $|e^{-kx}\cos x|\leqslant e^{-kx}$，而 $\int_0^{+\infty} e^{-kx}=-\left.\frac{e^{-kx}}{k}\right|_0^{+\infty}=\frac{1}{k}$ 收敛. 故 $\int_0^{+\infty} e^{-kx}\cos x\mathrm{d}x$ 绝对收敛.

6. 利用各种判别准则，讨论下列反常积分的收敛性.

(1) $\int_0^2 \frac{\mathrm{d}x}{\ln x}$.

解 $x=0, x=1$ 都是奇点，则 $\int_0^2 \frac{\mathrm{d}x}{\ln x}=\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{\ln x}+\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\mathrm{d}x}{\ln x}+\int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{\ln x}$.

又因为 $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{\ln x}\Big/\frac{1}{\sqrt{x}}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x}}{\ln x}=0$，而 $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}$ 收敛. 故 $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{\ln x}$ 收敛.

又因为 $\lim\limits_{x\to 1^+}\left[\frac{1}{\ln x}\Big/\frac{1}{(x-1)}\right]=\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{x-1}{\ln x}\overset{\frac{0}{0}}{=\!=}\lim\limits_{x\to 1^+}x=1$. 而 $\int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{x-1}$ 发散，故 $\int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{\ln x}$ 发散. 故原积分 $\int_0^2 \frac{\mathrm{d}x}{\ln x}$ 发散

(3) $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}\sqrt{1-x^2}}$.

解 $x=0, x=1$ 都是奇点，则 $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}\sqrt{1-x^2}}=\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}\sqrt{1-x^2}}+\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}\sqrt{1-x^2}}$.

由于 $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{1-x^2}}\Big/\frac{1}{\sqrt{x}}\right)=1$，而 $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}$ 收敛，从而 $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}\sqrt{1-x^2}}$ 收敛.

又由 $\lim\limits_{x\to 1^-}\left(\frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{1-x^2}}\Big/\frac{1}{\sqrt{1-x}}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}$，而 $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x}}$ 收敛，从而 $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}\sqrt{1-x^2}}$ 收敛.

故原积分 $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}\sqrt{1-x^2}}$ 收敛.

(5) $\int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^3\sqrt{x^2-3x+2}}$.

解 由于 $x=2$ 为 $f(x)=\frac{1}{x^3\sqrt{x^2-3x+2}}$ 的奇点，则

$$\int_2^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x=\int_2^3 f(x)\mathrm{d}x+\int_3^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x,$$

又由 $\lim\limits_{x\to 2^+}\left(f(x)\Big/\frac{1}{\sqrt{x-2}}\right)=\frac{1}{8}$ 及 $\int_2^3 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x-2}}$ 收敛知，$\int_2^3 f(x)\mathrm{d}x$ 收敛.

由 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)\Big/\frac{1}{x^4}\right)=1$ 及 $\int_3^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^4}$ 收敛知 $\int_3^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛.

故原积分$\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x^3\sqrt{x^2-3x+2}}$收敛.

7. 下列两种判定积分$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x}{1+x^2}dx$收敛性的做法哪一种是错误的？为什么？

解法一

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x}{1+x^2}dx&=\lim_{a\to+\infty}\int_{-a}^{+a}\frac{x}{1+x^2}dx\\&=\lim_{a\to+\infty}\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\Big|_{-a}^{a}\\&=\lim_{a\to+\infty}\frac{1}{2}\{\ln(1+a^2)-\ln[1+(-a)^2]\}=0,\end{aligned}$$

故该积分收敛.

解法二

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x}{1+x^2}dx&=\int_{-\infty}^{0}\frac{x}{1+x^2}dx+\int_{0}^{+\infty}\frac{x}{1+x^2}dx\\&=\lim_{a\to-\infty}\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\Big|_{a}^{0}+\lim_{b\to+\infty}\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\Big|_{0}^{b},\end{aligned}$$

由于两个极限都不存在，所以该积分发散.

解　解法一错误. 积分$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx$收敛的充分必要条件是极限$\lim\limits_{a\to-\infty}\int_a^c f(x)dx$与$\lim\limits_{b\to+\infty}\int_c^b f(x)dx$同时存在，且$a,b$各自独立地分别趋于$-\infty$与$+\infty$. 若两个极限中有一个不存在，则$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx$发散. 而解法一中的$x$趋于$\infty$速度一致导致错误.

8. 下列两种判定积分$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x(1+x)}dx$收敛性的做法哪一种是错误的？为什么？

解法一

$$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x(1+x)}dx=\int_1^{+\infty}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{1+x}\right)dx=\lim_{b\to+\infty}\ln\frac{x}{1+x}\Big|_1^b=\ln 2,$$

因而收敛.

解法二

$$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x(1+x)}dx=\lim_{b\to+\infty}\ln x\Big|_1^b-\lim_{b\to+\infty}\ln(1+x)\Big|_1^b,$$

两个极限都不存在，因而发散.

解　解法二是错误的. 错用极限的有理运算法则.

只有当 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to\infty}g(x)$ 都存在时，下列运算法则才成立.

$$\lim_{x\to\infty}(f(x)-g(x))=\lim_{x\to\infty}f(x)-\lim_{x\to\infty}g(x).$$

(B)

1. 设 f 在 $[a,c)\cup(c,b]$ 连续，且 $\lim\limits_{x\to c}f(x)=\infty$，那么反常积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 能否用极限

$$\lim_{\varepsilon\to0^+}\left\{\int_a^{c-\varepsilon}f(x)\mathrm{d}x+\int_{c+\varepsilon}^b f(x)\mathrm{d}x\right\}$$

来定义？为什么？讨论积分 $\int_0^2\frac{\mathrm{d}x}{1-x}$ 的收敛性.

解 不能. 如 $\int_0^2\frac{\mathrm{d}x}{1-x}$. 由反常积分收敛的定义知 $\int_0^2\frac{\mathrm{d}x}{1-x}=\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{1-x}+\int_1^2\frac{\mathrm{d}x}{1-x}$，又因为

$$\int_1^2\frac{\mathrm{d}x}{1-x}=\lim_{\varepsilon\to0^+}\int_{1+\varepsilon}^2\frac{\mathrm{d}x}{1-x}=\lim_{\varepsilon\to0^+}(\ln\varepsilon)=-\infty.$$

故 $\int_0^2\frac{\mathrm{d}x}{1-x}$ 发散.

因为 $\lim\limits_{\varepsilon\to0^+}\left[\int_0^{1-\varepsilon}\frac{\mathrm{d}x}{1-x}+\int_{1+\varepsilon}^2\frac{\mathrm{d}x}{1-x}\right]=\lim\limits_{\varepsilon\to0^+}(-\ln\varepsilon+\ln\varepsilon)=0.$

但如果用此题中的定义却得出 $\int_0^2\frac{\mathrm{d}x}{1-x}$ 收敛.

2. 讨论下列反常积分的收敛性：

(1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{\sin^p x\cos^q x}\quad(p,q>0).$

解 $x=0,x=\frac{\pi}{2}$ 为奇点，由 $\lim\limits_{x\to0^+}\left(\frac{1}{\sin^p x\cos^q x}\Big/\frac{1}{x^p}\right)=\lim\limits_{x\to0^+}\left(\frac{x}{\sin x}\right)^p\cdot\frac{1}{\cos^q x}=1$ 知，$\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{\sin^p x\cos^q x}$ 与 $\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{x^p}$ 收敛性相同. 故由 p 积分的收敛性知，$p<1$ 时，$\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{\sin^p x\cos^q x}$ 收敛；$p\geqslant1$ 时，$\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{\sin^p x\cos^q x}$ 发散.

又由 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\left(\frac{1}{\sin^p x\cos^q x}\Big/\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^{-q}\right)=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{1}{\sin^p x}\cdot\left[\frac{\frac{\pi}{2}-x}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}\right]^q=1$ 知 $\int_1^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{\sin^p x\cos^q x}$ 与 $\int_1^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^q}\mathrm{d}x$ 收敛性相同.

故　当 $q<1$ 时，$\int_1^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{\sin^p x\cos^q x}$收敛；$q\geqslant 1$ 时，$\int_1^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{\sin^p x\cos^q x}$发散.

综上所述，当 $0<p<1,0<q<1$ 时，$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{\sin^p x\cos^q x}$收敛. 其他情况下均发散.

(2) $\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^p\ln^q x}(p,q>0)$.

解　$x=1$ 为 $f(x)=\frac{1}{x^p\ln^q x}$的奇点，而$\int_1^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x+\int_2^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$.

由于 $\lim\limits_{x\to 1^+}\left[f(x)\Big/\frac{1}{(x-1)^q}\right]=\lim\limits_{x\to 1^+}\left(\frac{x-1}{\ln x}\right)^q=1$，$\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x$ 与 $\int_1^2\frac{1}{(x-1)^q}\mathrm{d}x$ 收敛性相同.

故积分 $\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x$ 当 $q<1$ 时收敛；$q\geqslant 1$ 时发散.

又当 $p>1$ 时，$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x^p\ln^q x}\Big/\frac{1}{x^p}\right)=0$，且 $\int_2^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^p}$收敛，故当 $p>1$ 时，积分 $\int_2^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^p\ln^q x}$收敛.

当 $0<p\leqslant 1,q<1$ 时，$\forall x\in[2,+\infty)$，

$$0<x^p\ln^q x\leqslant x\ln^q x\text{，从而}\frac{1}{x^p\ln^q x}\geqslant\frac{1}{x\ln^q x},$$

且
$$\int_2^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x\ln^q x}=\frac{(\ln x)^{1-q}}{1-q}\Bigg|_2^{+\infty}=+\infty,$$

故 $0<p\leqslant 1$ 且 $q<1$ 时，$\int_2^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^p\ln^q x}$发散.

综上所述，当 $p>1$ 且 $q<1$ 时，$\int_1^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 收敛. 其他情况均发散.

(3) $\int_0^{+\infty}\frac{\ln(1+x)}{x^\alpha}\mathrm{d}x\quad(0<\alpha<+\infty)$.

解　$x=0$ 为 $f(x)=\frac{1}{x^\alpha}\ln(1+x)$的奇点，而

$$\int_0^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x+\int_1^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x.$$

若 $\alpha>1$，取 $\varepsilon>0$，使 $\alpha-\varepsilon>1$，由

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln(1+x)}{x^\alpha}\Big/\frac{1}{x^{\alpha-\varepsilon}}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+x)}{x^\varepsilon}=0\text{ 及 }\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^{\alpha-\varepsilon}}\mathrm{d}x\text{ 收敛知，}$$

$$\int_1^{+\infty}\frac{\ln(1+x)}{x^\alpha}\mathrm{d}x\text{ 收敛；}$$

若 $\alpha\leqslant 1$，由 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln(1+x)}{x^\alpha}\Big/\frac{1}{x^\alpha}\right)=+\infty$及 $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^\alpha}\mathrm{d}x$ 发散得

$$\int_1^{+\infty}\frac{\ln(1+x)}{x^\alpha}\mathrm{d}x \text{ 发散；}$$

又由 $\lim\limits_{x\to0^+}\left(\dfrac{\ln(1+x)}{x^\alpha}\Big/\dfrac{1}{x^{\alpha-1}}\right)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1$ 知，$\int_0^1\dfrac{\ln(1+x)}{x^\alpha}\mathrm{d}x$ 与 $\int_0^1\dfrac{1}{x^{\alpha-1}}\mathrm{d}x$ 收敛性相同，即

$$\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{x^\alpha}\mathrm{d}x \text{ 当 }\alpha<2\text{ 时收敛，}\alpha\geqslant2\text{ 时发散.}$$

综上所述，$\int_0^{+\infty}\dfrac{\ln(1+x)}{x^\alpha}\mathrm{d}x$ 当 $1<\alpha<2$ 时收敛.

(4) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{\ln\sin x}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$.

解 $x=0$ 是奇点，又 $\lim\limits_{x\to0^+}\left[\dfrac{\ln\sin x}{\sqrt{x}}\Big/\left(\dfrac{1}{x}\right)^{\frac{2}{3}}\right]=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\ln\sin x}{\left(\dfrac{1}{x}\right)^{\frac{1}{6}}}\xlongequal{\frac{\infty}{\infty}}\lim\limits_{x\to0^+}\left(\dfrac{-\cot x}{\dfrac{1}{6}x^{-\frac{7}{6}}}\right)=$ $-6\lim\limits_{x\to0^+}\left(x^{\frac{1}{6}}\cdot\dfrac{x}{\sin x}\cdot\cos x\right)=0$，且 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{1}{x^{\frac{2}{3}}}\mathrm{d}x$ 收敛，故 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{\ln\sin x}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$ 收敛.

3. 证明：当 $p>0,q>0$ 时，反常积分 $\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\mathrm{d}x$ 收敛. 此时，该积分是参数 p,q 的函数，称为 Beta 函数，记作

$$B(p,q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\mathrm{d}x\qquad(p>0,q>0).$$

进而证明 Beta 函数有下列性质：

(1) $B(p,q)=B(q,p)$；

(2) 当 $q>1$ 时，$B(p,q)=\dfrac{q-1}{p+q-1}B(p,q-1)$；

当 $p>1$ 时，$B(p,q)=\dfrac{p-1}{p+q-1}B(p-1,q)$；

(3) 若 $m,n\in\mathbf{N}_+$，则 $B(n,m)=\dfrac{\Gamma(n)\Gamma(m)}{\Gamma(m+n)}$.

证 当 $p\geqslant1,q\geqslant1$ 时，$(1-x)^{q-1}x^{p-1}$ 在 $[0,1]$ 连续，则

在 $[0,1]$ 上可积. $\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\mathrm{d}x$ 为定积分. 当 $0<p<1,q\geqslant1$ 时，仅 $x=0$ 是 $f(x)=x^{p-1}(1-x)^{q-1}$ 的奇点. 由 $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)}{x^{p-1}}=1$ 及 $\int_0^1\dfrac{\mathrm{d}x}{x^{1-p}}$ 收敛知，$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ 收敛. 当 $p\geqslant1,0<q<1$ 时，仅 $x=1$ 是 $f(x)$ 的奇点，由 $\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{f(x)}{(1-x)^{q-1}}\mathrm{d}x=1$ 及 $\int_0^1\dfrac{\mathrm{d}x}{(1-x)^{1-q}}$ 收敛得

$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ 收敛.

当 $p<1,q<1$ 时，$x=0,x=1$ 均为 $f(x)$ 的奇点，而

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)\mathrm{d}x+\int_{\frac{1}{2}}^1 f(x)\mathrm{d}x.$$

由以上的讨论知，当 $p<1,q<1$ 时，$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ 收敛. 故当 $p>0,q>0$ 时，$\mathrm{B}(p,q)$ 收敛.

(1) $\mathrm{B}(p,q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\mathrm{d}x \xlongequal{t=1-x} \int_1^0 (1-t)^{p-1}t^{q-1}(-\mathrm{d}t)$

$$=\int_0^1 t^{q-1}(1-t)^{p-1}\mathrm{d}t=\mathrm{B}(q,p).$$

(2) 当 $q>1$，$\mathrm{B}(p,q)=\dfrac{1}{p}\int_0^1 (1-x)^{q-1}\mathrm{d}x^p$

$$\begin{aligned}&=\frac{1}{p}(1-x)^{q-1}x^p\Big|_0^1+\frac{q-1}{p}\int_0^1 x^p(1-x)^{q-2}\mathrm{d}x\\&=\frac{q-1}{p}\int_0^1 x^{p-1}[(x-1)+1](1-x)^{q-2}\mathrm{d}x\\&=\frac{q-1}{p}\left[\int_0^1 -x^{p-1}(1-x)^{q-1}\mathrm{d}x+\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-2}\mathrm{d}x\right]\\&=\frac{q-1}{p}[-\mathrm{B}(p,q)+\mathrm{B}(p,q-1)],\end{aligned}$$

故 $\mathrm{B}(p,q)=\dfrac{q-1}{p+q-1}\mathrm{B}(p,q-1)$.

同理可证：当 $p>1$ 时，$\mathrm{B}(p,q)=\dfrac{p-1}{p+q-1}\mathrm{B}(p-1,q)$.

(3) 由于 $m,n\in\mathbf{N}_+$，且 $\Gamma(k+1)=k!\ (k\in\mathbf{N}_+)$，所以

当 $m=n=1$，$\mathrm{B}(1,1)=\int_0^1 \mathrm{d}x=1=\dfrac{\Gamma(1)\Gamma(1)}{\Gamma(1+1)}$.

当 m、n 至少有一个不等于 1，不妨设 $n>1$，则由(2)可得

$$\begin{aligned}\mathrm{B}(m,n)&=\frac{n-1}{m+n-1}\mathrm{B}(m,n-1)=\frac{n-1}{m+n-1}\cdot\frac{(n-1)-1}{m+(n-1)-1}\mathrm{B}(m,n-2)\\&=\cdots=\frac{(n-1)(n-2)(n-3)\cdots2\cdot1}{(m+n-1)(m+n-2)\cdots(m+1)}\mathrm{B}(m,1)\\&=\frac{(n-1)!\ m!}{(m+n-1)!}\mathrm{B}(m,1)=\frac{(n-1)!\ (m-1)!}{(m+n-1)!}=\frac{\Gamma(n)\Gamma(m)}{\Gamma(m+n)},\end{aligned}$$

其中
$$\mathrm{B}(m,1)=\int_0^1 x^m\mathrm{d}x=\frac{1}{m}x^{m-1}\Big|_0^1=\frac{1}{m}.$$

习 题 3.6

(A)

1. 用分离变量法求下列微分方程的解：

(2) $x\mathrm{d}y-y\ln y\mathrm{d}x=0$.

解 方程变形为 $\dfrac{\mathrm{d}y}{y\ln y}=\dfrac{\mathrm{d}x}{x}$,

两端积分得 $\ln|\ln y|=\ln|x|+\ln|C|$,即 $\ln y=Cx$.

故所求通解为 $y=\mathrm{e}^{Cx}$.

(4) $\dfrac{x}{1+y}\mathrm{d}x-\dfrac{y}{1+x}\mathrm{d}y=0, y|_{x=0}=1$.

解 方程变形为 $x(1+x)\mathrm{d}x=(1+y)y\mathrm{d}y$,

两端积分得 $\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{1}{3}x^3=\dfrac{1}{2}y^2+\dfrac{1}{3}y^3+C$ 为原方程通解.

又 $y|_{x=0}=1$,于是 $C=-5$,故所求特解为

$$2(x^3-y^3)+3(x^2-y^2)+5=0.$$

(6) $\arctan y\mathrm{d}y+(1+y^2)x\mathrm{d}x=0$.

解 方程变形为 $\dfrac{\arctan y}{1+y^2}\mathrm{d}y=-x\mathrm{d}x$,

两端积分得 $\dfrac{1}{2}(\arctan y)^2=-\dfrac{1}{2}x^2+C$.

所求通解为 $(\arctan y)^2+x^2=C$.

2. 求解下列一阶线性微分方程的通解：

(2) $xy'-3y=x^4\mathrm{e}^x$.

解 方程变形为 $y'-\dfrac{3}{x}y=x^3\mathrm{e}^x$.

对应的齐次方程 $y'-\dfrac{3}{x}y=0$ 的通解为 $y=Cx^3$.

用常数变易法,设原方程的解为 $y=h(x)x^3$.

代入方程得 $h'(x)=\mathrm{e}^x$,于是 $h(x)=\mathrm{e}^x+C$.

故所求方程的通解为 $y=x^3(\mathrm{e}^x+C)$.

(4) $\cos^2 x\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+y=\tan x$.

解　对应的齐次方程 $\cos^2 x\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+y=0$ 的通解为　$y=C\mathrm{e}^{-\tan x}$.

设　$y=h(x)\mathrm{e}^{-\tan x}$为原方程的解.

代入非齐次方程得　$h'(x)=\tan x\sec^2 x\mathrm{e}^{\tan x}$.

于是　$h(x)=(\tan x-1)\mathrm{e}^{\tan x}+C$,

故所求非齐次方程通解为　$y=C\mathrm{e}^{-\tan x}+\tan x-1$.

(6) $xy'-y=\dfrac{x}{\ln x}$.

解　对应的齐次方程的通解为　$y=Cx$.

令 $y=h(x)x$ 为非齐方程 $xy'-y=\dfrac{x}{\ln x}$的解.

于是 $h'(x)=\dfrac{1}{x\ln x}$,从而　$h(x)=\ln|\ln x|+C$.

所求非齐方程的通解为　$y=x\ln|\ln x|+Cx$.

3. 求下列齐次微分方程的解:

(1) $(2x^2-y^2)+3xy\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=0$.

解　方程变形为 $2-\left(\dfrac{y}{x}\right)^2+3\dfrac{y}{x}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=0$. 令 $u=\dfrac{y}{x}$,则 $x\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}+u=\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$代入方程得$\dfrac{-2u}{1+u^2}\mathrm{d}u=\dfrac{4}{3}\dfrac{\mathrm{d}x}{x}$,两端积分得 $\ln(1+u^2)^{-1}=\ln(x^{\frac{4}{3}})+C$,即$(1+u^2)^{-1}=Cx^{\frac{4}{3}}$.

故所求通解为　$(x^2+y^2)^3=Cx^2$.

(4) $y'=\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}$, $y|_{x=-1}=2$.

解　令 $u=\dfrac{y}{x}$,则$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=u+x\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$代入原方程得 $u\mathrm{d}u=\dfrac{\mathrm{d}x}{x}$.

两边积分得　$\dfrac{1}{2}u^2=\ln|x|+C$.

原方程通解为　$y^2=2x^2\ln|x|+Cx^2$.

又因为 $y|_{x=-1}=2$ 代入通解得　$C=4$.

故满足条件 $y|_{x=-1}=2$ 的特解为　$y^2=2x^2\ln|x|+4x^2$.

4. 用适当的方法求下列微分方程的通解:

(1) $y'-x^2y^2=y$.

解　方程变形为　$\dfrac{1}{y^2}y'-\dfrac{1}{y}=x^2$　$(y\neq 0)$,

即令 $u=-\dfrac{1}{y}$,则$\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}+u=x^2$. 解之得

$$u=(x^2-2x+2)+C\mathrm{e}^{-x}.$$

所求通解为 $y=-\dfrac{1}{x^2+2-2x+Ce^{-x}}$，$y=0$ 也是其解.

(3) $y'=\dfrac{1}{e^y+x}$.

解 $\dfrac{dx}{dy}=e^y+x$，即$\dfrac{dx}{dy}-x=e^y$，故所求通解为 $x=e^{\int dy}\left[\int e^y e^{-y}dy+C\right]=$

$$e^y(y+C).$$

(4) $(\cos y-2x)'=1$.

解 由于$(\cos y-2x)'=1$，所以 $\cos y-2x=x+C$ 为所求通解.

(5) $\dfrac{dy}{dx}=(x+y)^2$.

解 令 $u=x+y$，则$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{du}{dx}-1$ 代入方程得$\dfrac{du}{dx}=1+u^2$ 解之得 $\arctan u=x+C$，原方程通解为 $\arctan(x+y)=x+C$.

(6) $y'=\sin^2(x-y+1)$.

解 令 $u=x-y+1$，则$\dfrac{dy}{dx}=1-\dfrac{du}{dx}$代入方程得$\dfrac{du}{dx}=\cos^2 u$，解之得 $\tan u=x+C$，或 $u=k\pi+\dfrac{\pi}{2}$，故所求通解为 $\tan(x-y+1)=x+C$. 而且 $x-y=k\pi+\dfrac{\pi}{2}-1$ 也是其解. 其中 $k=0,\pm1,\pm2,\cdots$.

(8) $xy'+y=y(\ln x+\ln y)$.

解 方程两边同乘 x 得 $x^2y'+xy=xy\ln(xy)$，令 $u=xy$，则 $x\dfrac{dy}{dx}=-y+\dfrac{du}{dx}=-\dfrac{u}{x}+\dfrac{du}{dx}$代入方程可得 $x\left(-\dfrac{u}{x}+\dfrac{du}{dx}\right)+u=u\ln u$. 即 $x\dfrac{du}{dx}=u\ln u$，解之可分离变量方程得 $u\neq1$，$\ln|\ln u|=\ln x+C$. 于是$\ln u=Cx$，即 $\ln xy=Cx$.

又因为 $u=1$ 也是方程 $x\dfrac{du}{dx}=u\ln u$ 的解. 即 $xy=1$ 也是原方程的解. 包含在 $\ln xy=Cx$ 中.

故所求通解为 $\ln xy=Cx$.

(9) $\cos y dx+(x-2\cos y)\sin y dy=0$;

解 $\dfrac{dx}{dy}+(\tan y)x=2\sin y$，对应的齐次方程$\dfrac{dx}{dy}=-x\tan y$ 的通解为 $x=C\cos y$.

设 $x=h(y)\cos y$ 为非齐次方程$\dfrac{dx}{dy}+(\tan y)x=2\sin y$ 的解，那么 $h'(y)\cos y=2\sin y$. 解之得

$$h(y)=-2\ln|\cos y|+C.$$

故原方程通解为　$x=(C-2\ln|\cos y|)\cos y$.

(10) $(x^2+y^2+2x)\mathrm{d}x+2y\mathrm{d}y=0$.

解　将方程变形可得

$$2y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+y^2=-(x^2+2x).$$

令 $y^2=u$ 可得　$\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}+u=-(x^2+2x)$.

解此一阶线性非齐次方程可得

$$\begin{aligned}u&=\mathrm{e}^{-\int\mathrm{d}x}\left[-\int(x^2+2x)\mathrm{e}^{\int\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right]\\&=\mathrm{e}^{-x}\left[-\int(x^2+2x)\mathrm{e}^{x}\mathrm{d}x+C\right]\\&=-x^2+C\mathrm{e}^{-x}\ ,\end{aligned}$$

故所求通解为$(x^2+y^2)\mathrm{e}^x=C$.

5. 设有微分方程$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\varphi\left(\dfrac{ax+by+c}{dx+ey+f}\right)$，其中 $\varphi(u)$为连续函数，a,b,c,d,e,f 为常数.

(1) 若 $ae\neq bd$，证明：可适当选取常数 h 与 k，使变换 $x=u+h,y=v+k$ 把该方程化为齐次微分方程；

(2) 若 $ae=bd$，证明：可用一适当的变换把该方程化为变量分离方程；

(3) 用(1)或(2)中的方法分别求微分方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{x+y+4}{x-y-6}\quad 与\quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{1+x-y}{x-y}$$

的通解.

解　(1) 若 $ae\neq bd$. 则方程$\begin{cases}ax+by+c=0,\\dx+ey+f=0\end{cases}$有唯一的一组解$(h,k)$，其中

$$h=\begin{vmatrix}-c&b\\-f&e\end{vmatrix}\bigg/\begin{vmatrix}a&b\\d&e\end{vmatrix}=\frac{bf-ce}{ea-bd},$$

$$k=\frac{\begin{vmatrix}a&-c\\d&-f\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a&b\\d&e\end{vmatrix}}=\frac{dc-af}{ea-bd}.$$

令 $x=u+h,y=v+k$，则原方程化为

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u}=\varphi\left(\frac{au+bv}{du+ev}\right)=\varphi\left(\frac{a+b\dfrac{v}{u}}{d+e\dfrac{v}{u}}\right)为齐次方程.$$

(2) 如果 $ae=bd=0$,则①$a=b=e=d=0$. 则方程化为$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\varphi\left(\frac{c}{f}\right)$可分离变量;②有三个为零,方程是可分离变量方程. ③两个等于零,如 $a=b=0(d=e=0)$. 则令 $u=dx+ey+f(u=ax+by+c)$可转化为可分离变量方程;如 $a=d=0(e=b=0)$,则方程本身可分离变量.

如果 $ae=bd\neq 0$,则$\frac{a}{d}=\frac{b}{e}=k$,进而 $ax+by=k(dx+ey)$.

令 $u=dx+ey$. 则方程化为

$$\frac{1}{e}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\varphi\left(\frac{ku+c}{u+f}\right)+\frac{d}{e}\text{为可分离变量方程.}$$

(3) 先求解$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{x+y+4}{x-y-6}$.

由于$\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{vmatrix}=-2=ae-bd$,$\begin{cases}x+y+4=0,\\ x-y-6=0\end{cases}$的交点为$(1,-5)$.

令 $x=u+1,y=v-5$,则方程化为

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u}=\frac{u+v}{u-v},\quad \text{即}\quad \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u}=\frac{1+\frac{v}{u}}{1-\frac{v}{u}}.$$

令 $z=\frac{v}{u}$,则$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u}=u\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}u}+z$,于是$(1-z)\frac{\mathrm{d}z}{1+z^2}=\frac{\mathrm{d}u}{u}$. 从而

$\tan z-\frac{1}{2}\ln(1+z^2)=\ln|u|+C$. 于是

$$\tan\left(\frac{y+5}{x-1}\right)-\ln\sqrt{1+\left(\frac{y+5}{x-1}\right)^2}=\ln|x-1|+C,$$

即 $\tan\left(\frac{y+5}{x-1}\right)=\ln\sqrt{(x-1)^2+(y+5)^2}+C$ 为所求通解.

再求$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{1+x-y}{x-y}$的通解.

令 $u=x-y$,则$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=1-\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$,于是方程化为 $1-\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\frac{1+u}{u}$,即 $u\mathrm{d}u=-\mathrm{d}x$ 解之得

$$u^2+2x=C.$$

原方程的通解为$(x-y)^2+2x=C$.

6. 求下列微分方程的通解:

(1) $y''=\frac{1}{1+x^2}$.

解　$y'=\int\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}+C_1=\arctan x+C_1$,

$$y=C_1x+x\arctan x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C_2.$$

(3)　$y'''=y''$.

解　由于$\frac{\mathrm{d}y''}{\mathrm{d}x}=y''$,则$\frac{\mathrm{d}y''}{y''}=\mathrm{d}x$.

$$\ln y''=x+C_1,y''=C_1\mathrm{e}^x,y'=C_1\mathrm{e}^x+C_2,$$

故 $y=C_1\mathrm{e}^x+C_2x+C_3$ 为原方程通解.

(5)　$yy''+1=(y')^2$.

解　令 $p=y'$,则 $y''=\frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}y}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$. 代入原方程

$$yp\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}+1=p^2.\ 于是\frac{p}{p^2-1}\mathrm{d}p=\frac{\mathrm{d}y}{y},$$

从而　$$\frac{1}{2}\ln|p^2-1|=\ln|y|+C\quad(p\neq\pm1).$$

于是若$|p|>1$,　$$p^2-1=(C_1y)^2,$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=p=\pm\sqrt{1+(C_1y)^2},$$

故　$$\frac{C_1\mathrm{d}y}{\sqrt{1+(C_1y)^2}}=\pm C_1\mathrm{d}x,$$

$$\mathrm{arcsh}C_1y=\pm C_1x+C_2,$$

于是　$y=\frac{1}{C_1}\mathrm{sh}(\pm C_1x+C_2)$为原方程通解.

又因为 $p=\pm1$ 时,$y=\pm x+C$ 是原方程的解.

若$|p|<1$,则 $1-p^2=(C_1y)^2$,解之得原方程通解为

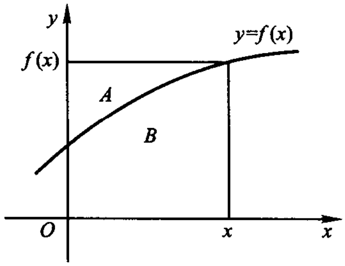
$$y=\frac{1}{C_1}\sin(\pm C_1x+C_2).$$

8. 一曲线经过点(2,8),曲线上任一点到两坐标轴的垂线与两坐标轴构成的矩形被该曲线分为两部分,其中一部分的面积恰好是另一部分面积的两倍,求该曲线的方程.

解　设曲线的方程为 $y=f(x)$. $P(x,f(x))$为其上任一点,如图所示,设上、下两部分的面积为 A 和 B,则 $A=xf(x)-\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$, $B=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$.
依题意有

$$A=2B\ 或\ B=2A.$$

(1) 如果 $A=2B$,那么 $xf(x)=3\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$,两边求导可得方程 $xf'(x)+f(x)=3f(x)$,即 $f'(x)=\frac{2}{x}f(x)$. 解此可分离方程得 $f(x)=Cx^2$ 又曲线过(2,8),知 $8=4C$,故 $C=2$,于是所求曲线为 $y=f(x)=2x^2$.



(第 8 题图)

(2) 如果 $2A=B$,那么 $2xf(x)-2\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$,两边对 x 求导整理得一阶微分方程:$f'(x)=\frac{1}{2x}f(x)$. 解之得 $f^2(x)=Cx$. 又由 $y|_{x=2}=8$ 知 $64=2C$,于是 $C=32$. 此种情况下,曲线方程为 $y^2=32x$.

综上所述,符合题意的曲线方程为 $y=2x^2$ 或 $y^2=32x$.

10. 容器内装有 10 L 盐水,其中含盐 1 kg,现以 3 L/min 的速度注入净水,同时以 2 L/min 的速度抽出盐水,试求 1 h 后容器内溶液的含盐量.

解 设 t min 时含盐量为 $x(t)$ kg,则 $x(0)=1$ 且 t min 时溶液的浓度为 $\frac{x}{10+3t-2t}$,当 Δt 足够小时,则可认为$[t,t+\Delta t]$内浓度不变,则 $\Delta x=x(t+\Delta t)-x(t)=\frac{x}{10+t}\cdot 2\Delta t$,于是 $\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{-2x}{10+t}$,所以 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{-2x}{10+t}$,即 $\frac{\mathrm{d}x}{2x}=\frac{-\mathrm{d}t}{10+t}$,即 $x=C(10+t)^{-2}$,又由 $x(0)=1$ 有 $1=\frac{C}{100}$,即 $C=100$,故 $x=100(10+t)^{-2}$,1 小时后溶液的含盐量 $x(C_0)=\frac{1}{49}$ kg.

11. 由经济学知,市场上的商品价格的变化率与商品的过剩需求量(即需求量与供给量的差)成正比. 假设某种商品的供给量 Q_1 与需求量 Q_2 都是价格 p 的线性函数:

$$Q_1=-a+bp,Q_2=c-dp,$$

其中 a,b,c,d 都是正常数,试求该商品价格随时间的变化规律.

解 依题意, $\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}=k(Q_2-Q_1)=k[a+c-(d+b)p]$,

其中$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}$为价格的变化率,$k$ 为比例常数,方程可变形为 $p'+k(d+b)p=k(a+c)$.

解此方程可得 $p=\mathrm{e}^{-\int k(b+d)\mathrm{d}t}\left[C+\int k(a+c)\mathrm{e}^{\int k(b+d)\mathrm{d}t}\mathrm{d}t\right]$,

故该商品价格随时间的变化率为

$$p=Ce^{-k(b+d)t}+\frac{a+c}{b+d}.$$

12. 海上的一只游船上有 800 人，其中一人患了某种传染病，12 小时后有 3 人被感染发病. 由于这种传染病没有早期症状，所以感染者未被及时隔离. 若疫苗能在 60 至 72 小时运到船上，传染病的传播速度与受感染的人数和未感染人数之积成正比，试估算疫苗运到时的发病人数.

解　设 t 时刻感染人数为 $s=s(t)$，则 $s(0)=1$，$s(12)=3$，且感染率 $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=k(800-s)s$. 此方程可变形为

$$\frac{\mathrm{d}\frac{1}{s}}{\mathrm{d}t}+800\,k\,\frac{1}{s}=k,\text{故}\frac{1}{s}=Ce^{-800\,kt}+\frac{1}{800}.$$

由 $s(12)=3$，$s(0)=1$ 可得　$C=\frac{799}{800}$，$k=\frac{1}{9\,600}\ln\frac{3\times 799}{797}$.

于是
$$s(t)=\frac{800}{799\left(\frac{797}{3\times 799}\right)^{\frac{t}{12}}+1}.$$

当 $t=60$ 小时，　$s=\frac{3^5\times 799^4\times 800}{797^5+3^5\times 799^4}\approx 188$（人）；

若 $t=72$ 小时，　$s\approx 385$（人）.

所以若疫苗 60 小时运到，约有 188 人感染；72 小时运到约 385 人感染.

(B)

1. 研究肿瘤细胞增殖动力学，能为肿瘤的临床治疗提供一定的理论依据. 试按下述两种假设分别建立肿瘤生长的数学模型并求解.

(1) 设肿瘤体积 V 随时间 t 增大的速率与 V^b 成正比，其中 b 为常数（称为形状参数）. 开始测得肿瘤体积为 V_0，试分别求当 $b=\frac{2}{3}$ 与当 $b=1$ 时 V 随时间变化的规律，以及当 $b=1$ 时肿瘤体积增加一倍所需的时间（称为倍增时间）；

(2) 设肿瘤体积 V 随时间 t 增大的速率与 V 成正比，但比例系数 k 不是常数，它随时间 t 的增大而减少，并且减小的速率与当时 k 的值成正比，比例系数为常数. 试求 V 随时间 t 的变化规律、倍增时间及肿瘤体积的理论上限值.

解　(1) 由题设可知 $V'=kV^b$，$V|_{t=0}=V_0$. 则当 $b=1$ 时，$\frac{V'}{V}=k$，即 $V=V_0e^{kt}$. $b=\frac{2}{3}$ 时，$\frac{\mathrm{d}V}{V^{\frac{2}{3}}}=k\mathrm{d}t$，即 $V=\left(\frac{kt+3V_0^{\frac{1}{3}}}{3}\right)^3$，

即当 $b=1, b=\frac{2}{3}$ 时，V 随时间变化的规律分别为

$$V=V_0 e^{kt} \text{与} \sqrt[3]{V}=\frac{1}{3}kt+\sqrt[3]{V_0}.$$

$b=1, V=2V_0$ 时，$t=\frac{\ln 2}{k}$. 即当 $b=1$ 时肿瘤倍增时间为$\frac{\ln 2}{k}$.

(2) 肿瘤体积 V 随时间 t 增大的速率为 $V'=k(t)V$，

而 $k'(t)=-\alpha k$(α 比例常数)，且设 $k(0)=A$.

求解 $k'(t)=-\alpha k$，可得 $k(t)=Ae^{-\alpha t}$代入 $V'=k(t)V$ 得

$$\ln V(t)=-\frac{A}{\alpha}e^{-\alpha t}+\ln V_0+\frac{A}{\alpha}, \text{即} V=V_0 e^{\frac{A}{\alpha}(1-e^{-\alpha t})}.$$

设倍增时间为 T，则 $2V_0=V_0 e^{\frac{A}{\alpha}(1-e^{-\alpha T})}$，即 $T=\frac{1}{\alpha}\ln\frac{A}{A-\alpha\ln 2}$. 又 $\lim\limits_{t\to+\infty}V(t)=V_0 e^{\frac{A}{\alpha}}$. 所以肿瘤体积的理论上限值为 $V_0 e^{\frac{A}{\alpha}}$.

2. (冷却定律与破案问题)按照 Newton 冷却定律，温度为 T 的物体在温度为 $T_0(T_0<T)$的环境中冷却的速度与温差 $T-T_0$ 成正比. 请你用该定律分析下面的条件. 某公安局于晚上 7 时 30 分发现一具女尸，当晚 8 时 20 分法医测得尸体温度为 32.6℃. 一小时后，尸体被抬走时又测得尸体温度为 31.4℃，假定室温在几个小时内均为 21.1℃. 由案情分析得知张某是此案的主要犯罪嫌疑人，但张某矢口否认，并有证人说："下午张某一直在办公室，下午 5 时打了一个电话后才离开办公室". 从办公室到凶案现场步行需 5 min，问张某是否能被排除在犯罪嫌疑人之外？

解 若死者在 5 时 5 分之前被杀，则张某不为嫌疑犯，若死于 5 时 5 分之后，则不能排除. 以晚上 7 时 30 分为 $t=0$ 时刻，并以分钟为单位时间，则由 Newton 冷却定律得

$$\frac{dT}{dt}=-k(T-21.1), \text{且} T(50)=32.6, T(110)=31.4,$$

求解方程得

$$T=11.5\, e^{\frac{50-t}{60}\ln\frac{115}{103}}+21.1,$$

即

$$T=11.5\left(\frac{115}{103}\right)^{\frac{50-t}{60}}+21.1.$$

又正常人体温在 35℃至 37℃间，设死者死亡时体温为 37℃，则由上式可知死亡时间 $t\approx-126.4$(min). 于是死者的死亡时刻为 $t_0=7:50-\frac{126.4}{60}=5.393(\text{h})\approx$ 5 时 24 分(下午). 如果死者被杀时体温低于 37℃，由 Newton 冷却定律，死亡时刻应比下午 5 时 24 分更晚，故张某不能被排除在嫌疑犯之外.

3. 设 $y=y(x)$在$(0,+\infty)$内可微，求 $y=y(x)$，使它满足

$$x\int_0^x y(t)\mathrm{d}t=(x+1)\int_0^x ty(t)\mathrm{d}t.$$

解　方程两端对 x 求导可得

$$\int_0^x y(t)\mathrm{d}x+xy(x)=\int_0^x ty(t)\mathrm{d}t+(x+1)xy(x),$$

再对 x 求导得

$$2y(x)+xy'(x)=2xy(x)+(x+1)y(x)+(x+1)xy'(x).$$

即　$x^2y'=(1-3x)y$,

解之得　$\ln y=\dfrac{-1}{x}-\ln x^3+C$,即 $y=\dfrac{1}{Cx^3}\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}$　$(x\neq 0)$.

又 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{Cx^3}\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}=0$,令 $y(0)=0$ 使 y 在 $(0,+\infty)$ 上连续可导.

4. 设 f 是 $C^{(1)}$ 类函数,且

$$f(x+t)=\frac{f(t)+f(x)}{1-f(x)f(t)},\quad f'(0)=3.$$

试导出 $f(x)$ 所满足的微分方程,并求 $f(x)$.

解　因为 $f\in C^{(1)}$,所以 f 在 $x=0$ 处连续,则 $f(0)=\dfrac{2f(0)}{1-f^2(0)}$.

于是 $f(0)=0$.

方程 $f(x+t)=\dfrac{f(t)+f(x)}{1-f(x)f(t)}$ 两边对 t 求导.

$$f'(x+t)=\frac{f'(t)[1-f(x)f(t)]+f(x)f'(t)[f(t)+f(x)]}{[1-f(x)f(t)]^2},$$

令 $t=0$ 得

$$f'(x)=\frac{f'(0)+f^2(x)f'(0)}{(1-f(x)f(0))^2}.$$

将 $f'(0)=3$,$f(0)$ 代入得 $f'(x)=3(1+f^2(x))$,解之得 $\arctan f(x)=3x+C$. 由 $x=0$ 时 $f(0)=0$ 知 $C=0$. 故所求函数为 $f(x)=\tan 3x$.

第四章 无穷级数

习题 4.1

(A)

3. 利用级数收敛的定义判别下列级数的敛散性，并对收敛级数求其和.

(1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{3^n+1}{q^n}(|q|>3)$； (2) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{(3n+1)(3n+4)}$；

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n})$； (4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\dfrac{n}{n+1}$.

解 (1) $$S_n=\frac{3+1}{q}+\frac{3^2+1}{q^2}+\cdots+\frac{3^n+1}{q^n}$$
$$=\frac{3}{q}+\left(\frac{3}{q}\right)^2+\cdots+\left(\frac{3}{q}\right)^n+\frac{1}{q}+\frac{1}{q^2}+\cdots+\frac{1}{q^n}$$
$$=\frac{\frac{3}{q}\left[1-\left(\frac{3}{q}\right)^n\right]}{1-\frac{3}{q}}+\frac{\frac{1}{q}\left(1-\frac{1}{q^n}\right)}{1-\frac{1}{q}},$$

从而 $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n=\dfrac{3}{q-3}+\dfrac{1}{q-1}$（因为 $|q|>3$），故原级数收敛. 和为 $\dfrac{3}{q-3}+\dfrac{1}{q-1}$.

(2) $$S_n=\frac{1}{3}\left[\left(\frac{1}{3n+1}-\frac{1}{3n+4}\right)+\left(\frac{1}{3n-2}-\frac{1}{3n+1}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{7}\right)+\left(1-\frac{1}{4}\right)\right]$$
$$=\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{3n+4}\right),$$

于是 $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n=\dfrac{1}{3}$，故 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{(3n+1)(3n+4)}$ 收敛于$\dfrac{1}{3}$.

(3) $a_n=\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n}=(\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1})-(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$，

$$S_n=[(\sqrt{3}-\sqrt{2})-(\sqrt{2}-\sqrt{1})]+[(\sqrt{4}-\sqrt{3})-(\sqrt{3}-\sqrt{2})]+\cdots+$$
$$[(\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1})-(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})]$$
$$=(\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1})-(\sqrt{2}-1),$$

$\lim\limits_{n\to+\infty} S_n=-\sqrt{2}+1$，故原级数收敛，和为 $1-\sqrt{2}$.

(4) $S_n=(\ln 1-\ln 2)+(\ln 2-\ln 3)+\cdots+[\ln n-\ln(n+1)]$
$=-\ln(n+1)\to-\infty(n\to+\infty)$，

故原级数发散.

4. 证明：数列$\{a_n\}$收敛$\Leftrightarrow$级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_{n+1}-a_n)$收敛. 利用这个结论能将研究数列的敛散性问题转化为研究级数敛散性问题.

证 设数列收敛于 A，即 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n=A$. 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_{n+1}-a_n)$前 n 项和 $S_n=a_{n+1}-a_1$，故 $\lim\limits_{n\to+\infty}(a_{n+1}-a_1)=A-a_1$. 于是 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_{n+1}-a_n)$ 收敛.

如果 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_{n+1}-a_n)$收敛，即 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\lim\limits_{n\to+\infty}(a_{n+1}-a_1)$存在. 从而 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_{n+1}$ 存在等于 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n+a_1$. 即$\{a_n\}$收敛.

5. 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛，证明 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n\pm b_n)$必发散. 若这两个级数都发散，上述结论是否成立？

证 用反证法. 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)-\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛. 推出矛盾. 所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$发散.

若两个均发散，则上述结论不一定成立.

如 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}$都发散，但 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}-\sum\limits_{n=1}^{n}\frac{1}{n+1}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$收敛.

6. 已知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n=2$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{2n-1}=5$，求 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 的和.

解 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n-\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{2n-1}=-\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{2n}=2-5=-3$，

故
$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n+\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n}=5+3=8.$$

7. 设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 的前 $2n$ 项之和 $S_{2n}\to A$，并且 $a_n\to 0(n\to\infty)$，证明该级数收敛且其和为 A.

证 $\lim\limits_{n\to+\infty} S_{2n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}(S_{2n}+a_{2n+1})=\lim\limits_{n\to\infty}S_{2n}+\lim\limits_{n\to+\infty}a_{2n+1}=A$,

于是数列$\{S_{2n}\}$与$\{S_{2n+1}\}$都收敛于A，故$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$收敛.

8. 利用级数的性质判断下列级数的敛散性：

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sqrt[n]{n}}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n}$； (3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{2^n}\right)$；

(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^2\ln\left(1+\dfrac{x}{n^2}\right)\quad(x\in\mathbf{R})$.

解 (1) $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[n]{n}}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n}=\dfrac{1}{\mathrm{e}}\neq0$,故原级数发散.

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$发散，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2^n}$收敛,故$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{2^n}\right)$发散.

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}n^2\ln\left(1+\dfrac{x}{n^2}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}x\ln\left(1+\dfrac{x}{n^2}\right)^{\frac{n^2}{x}}=x\quad(x\neq0)$,若$x\neq0$. 原级数发散. 若$x=0$. 则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^2\ln\left(1+\dfrac{x}{n^2}\right)$收敛,和为0.

10. 试用 Cauchy 收敛原理证明:若级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$收敛,则$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$.

证 设$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$收敛,由 Cauchy 收敛原理知,

$\forall\varepsilon>0$, $\exists N\in\mathbf{N}_+$,使$\forall p\in\mathbf{N}_+$,当$n>N$时,恒有$\left|\sum\limits_{k=n+1}^{n+p}a_k\right|<\varepsilon$.
特别地$p=1$,则$|a_{n+1}|<\varepsilon$,即$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$.

12. 判别下列正项级数的敛散性.

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{3^n+2}$.

解 $\dfrac{1}{3^n+2}\leqslant\dfrac{1}{3^n}$,而$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{3^n}$收敛. 由比较准则,原级数收敛.

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^{n+1}}{(n+1)^{n+2}}$.

解 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{n^{n+1}}{(n+1)^{n+2}}\Big/\dfrac{1}{n}\right]=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}(n+1)}=\dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

由$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$发散知,原级数发散.

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n-2}}{n^{\alpha}}(\alpha\in\mathbf{R})$.

解　取 $p=\alpha+\frac{1}{2}$，由于 $\lim_{n\to\infty}\left[\frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n-2}}{n^{\alpha}}\Big/\frac{1}{n^{p}}\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{4\sqrt{n}}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n-2}}=2$.
故当 $\alpha>\frac{1}{2}$ 时，$p=\alpha+\frac{1}{2}>1$，于是 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{p}}$ 收敛. 从而原级数收敛. 当 $\alpha\leqslant\frac{1}{2}$ 时，$p\leqslant 1$，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{p}}$ 发散，从而原级数发散.

(4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{n^{2}-\ln n}$.

解　因为 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt{n}}{n^{2}-\ln n}\Big/\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{n^{2}}{n^{2}-\ln n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1-\frac{\ln n}{n^{2}}}=1$，

而 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^{3}}}$ 收敛. 故原级数收敛.

(6) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{3}\left[\sqrt{2}+(-1)^{n}\right]^{n}}{3^{n}}$.

解　由 $0\leqslant a_{n}\leqslant\frac{n^{3}(\sqrt{2}+1)^{n}}{3^{n}}=b_{n}$，其中 $a_{n}=\frac{n^{3}\left[\sqrt{2}+(-1)^{n}\right]^{n}}{3^{n}}$.

而 $\lim_{n\to\infty}\frac{b_{n+1}}{b_{n}}=\frac{\sqrt{2}+1}{3}<1$，由 D'Alembert 准则，$\sum_{n=1}^{\infty}b_{n}$ 收敛.
进而由比较准则，$\sum_{n=1}^{\infty}a_{n}$ 收敛.

(8) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right)$.

解　因为 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n}{\pi}\right)^{2}\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{2\sin^{2}\frac{\pi}{2n}}{\left(\frac{\pi}{2n}\right)^{2}}=2$，而 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\pi^{2}}{4n^{2}}$ 收敛.

故 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right)$ 收敛.

(9) $\sum_{n=1}^{\infty}n\ln\left(1+\frac{2}{n^{3}}\right)$.

解　由 $\lim_{n\to\infty}\frac{n\ln\left(1+\frac{2}{n^{3}}\right)}{\frac{2}{n^{2}}}=1$，由于 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n^{2}}$ 收敛，原级数收敛.

(10) $\sum_{n=1}^{\infty}n\sin\frac{\pi}{3^{n}}$.

解 因为$0\leqslant n\sin\dfrac{\pi}{3^n}\leqslant\dfrac{n\pi}{3^n}$，$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{(n+1)\pi}{3^{n+1}}\Big/\dfrac{n\pi}{3^n}\right)=\dfrac{1}{3}$，

由 D'Alembert 判别法知，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n\pi}{3^n}$ 收敛，于是 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n\sin\dfrac{\pi}{3^n}$ 收敛.

(11) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n!\left(\dfrac{x}{n}\right)^n(x>0)$.

解 因为$\lim\limits_{n\to\infty}\left[(n+1)!\dfrac{x^{n+1}}{(n+1)^{n+1}}\Big/(n!x^n/n^n)\right]=\dfrac{x}{\mathrm{e}}$，

则 如果 $x>\mathrm{e}$，那么原级数发散；若 $x<\mathrm{e}$，原级数收敛.

当 $x=\mathrm{e}$，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\mathrm{e}}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n}=1$，D'Alembert 判别法失效.

因为当 $n\to+\infty$ 时，$\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ 是单调增趋于 e，所以 $\forall n\in\mathbf{N}_+$，$\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n<\mathrm{e}$，从而有$\dfrac{a_{n+1}}{a_n}>1$，这说明该级数通项 a_n 严格单调增，又 $a_n>0$，则 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=\sup\{a_n\}>0$，该级数通项 a_n 不趋于零，故原级数发散.

综上所述 $x<\mathrm{e}$ 时收敛；$x\geqslant\mathrm{e}$，发散.

(13) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(2n\tan\dfrac{1}{n}\right)^{\frac{n}{3}}$.

解 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(2n\tan\dfrac{1}{n}\right)^{\frac{1}{3}}=\lim\limits_{n\to\infty}2^{\frac{1}{3}}\left(\dfrac{\tan\dfrac{1}{n}}{\dfrac{1}{n}}\right)^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{2}>1$，

由 Cauchy 判别法. 原级数发散.

(14) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\alpha^n}{1+\alpha^{2n}}(\alpha>0)$.

解 由于$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\alpha^{n+1}}{1+\alpha^{2n+2}}\Big/\dfrac{\alpha^n}{1+\alpha^{2n}}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\alpha\cdot\dfrac{1+\alpha^{2n}}{1+\alpha^{2n+2}}\right)=\begin{cases}\alpha, & \alpha<1,\\ \dfrac{1}{\alpha}, & \alpha>1.\end{cases}$

故 $\alpha\neq1$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\alpha^n}{1+\alpha^{2n}}$收敛.

$\alpha=1$ 时，$\dfrac{\alpha^n}{1+\alpha^{2n}}=\dfrac{1}{2}$，由级数收敛的必要条件知，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2}$发散.

总之，当 $\alpha\neq1$ 时，原级数收敛. 当 $\alpha=1$ 时，原级数发散.

13. 设 $|r|<1$，利用级数理论证明$\lim\limits_{n\to\infty}nr^n=0$.

证 由 Cauchy 准则知. 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|nr^n|$收敛.

再由收敛的必要条件知$\lim\limits_{n\to\infty} nr^n=0$.

14. 讨论下列级数的敛散性. 并对收敛级数说明是绝对收敛,还是条件收敛:

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{n-\ln n}$.

解 此为交错级数,由 $0<\dfrac{1}{n-\ln n}<\dfrac{1}{n}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$发散知 $\sum\limits_{n=1}^{n}\dfrac{1}{n-\ln n}$发散. 故原级数非绝对收敛.

又因为
$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n-\ln n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}}{1-\frac{\ln n}{n}}=0.$$

又设 $f(x)=x-\ln x$, $f'(x)=1-\dfrac{1}{x}>0(x>1)$知$\dfrac{1}{n-\ln n}$单减,于是由 Leibniz 准则. 原级数条件收敛.

(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}(\sqrt[n]{a}-1)\quad(a>0,a\neq 1)$.

解 令 $f(n)=\sqrt[n]{a}-1$,当 $a>0$ 时,$\sqrt[n]{a}-1>0$.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(n)}{\frac{1}{n}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{\frac{1}{x}}\overset{\frac{0}{0}}{=\!=}\lim_{x\to+\infty}\frac{a^{\frac{1}{x}}\ln a}{-\frac{1}{x^2}}=\infty,\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\text{发散}.$$

故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{n-1}(\sqrt[n]{a}-1)\right|$发散. 即原级数非绝对收敛.

又因为$\lim\limits_{n\to\infty}f(n)=0$,且 $f'(x)=-\dfrac{1}{x^2}a^{\frac{1}{x}}<0$,即 $f(n)$单减,

由 Leibniz 准则,原级数条件收敛.

18. 下列级数中哪些是绝对收敛的? 哪些是条件收敛的?

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}\dfrac{n}{2^n}$;　　(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{\sqrt[4]{n}}$;

(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{\ln\left(2+\frac{1}{n}\right)}{\sqrt{9n^2-4}}$.

解 (2) $\left|(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}\dfrac{n}{2^n}\right|\leqslant\dfrac{n}{2^n}$,且 $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{n+1}{2^{n+1}}\Big/\dfrac{n}{2^n}\right)=\dfrac{1}{2}$,即 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{2^n}$收敛,

于是原级数绝对收敛.

(3) 由于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt[4]{n}}$发散,故原级数非绝对收敛.

又因为 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt[4]{n}}=0$,且$\dfrac{1}{\sqrt[4]{n}}>\dfrac{1}{\sqrt[4]{n+1}}$. 由 Leibniz 准则,原级数条件收敛.

(4) 因为$\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{\ln\left(2+\dfrac{1}{n}\right)}{\sqrt{9n^2-4}}\Big/\dfrac{1}{n}\right]=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\ln\left(2+\dfrac{1}{n}\right)\cdot\dfrac{1}{\sqrt{9-\dfrac{4}{n^2}}}\right]=\dfrac{\ln 2}{3}$,

且
$$\left|(-1)^{n+1}\frac{\ln\left(2+\frac{1}{n}\right)}{\sqrt{9n^2-4}}\right|=\frac{\ln\left(2+\frac{1}{n}\right)}{\sqrt{9n^2-4}},$$

所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\ln\left(2+\dfrac{1}{n}\right)}{\sqrt{9n^2-4}}$发散,原级数非绝对收敛.

又因为$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln\left(2+\dfrac{1}{n}\right)}{\sqrt{9n^2-4}}=0$,且$\dfrac{\ln\left(2+\dfrac{1}{n}\right)}{\sqrt{9n^2-4}}>\dfrac{\ln\left(2+\dfrac{1}{n+1}\right)}{\sqrt{9(n+1)^2-4}}$,由 Leibniz 准则,原级数条件收敛.

20. 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 及 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n$ 都收敛,且 $a_n\leqslant b_n\leqslant c_n$,证明 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛.

证 因为 $a_n\leqslant b_n\leqslant c_n$,所以 $0\leqslant c_n-b_n\leqslant c_n-a_n$.

又因为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n$ 均收敛. 所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(c_n-a_n)$收敛.

由正项级数的比较判别法知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(c_n-b_n)$收敛.

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n-\sum\limits_{n=1}^{\infty}(c_n-b_n)$知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛.

21. 设 $a_n>0$,证明:

(1) 若$\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\leqslant\lambda<1$(或$\sqrt[n]{a_n}\leqslant\lambda<1$),则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛;

(2) 若$\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\geqslant 1$(或$\sqrt[n]{a_n}\geqslant 1$),则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散.

证 $a_n>0$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 为正项级数.

(1) 若 $a_{n+1}\leqslant\lambda a_n$, $\lambda<1$, $\forall\, n\in\mathbf{N}_+$,那么

$$S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n\leqslant a_1+\lambda a_1+\cdots+\lambda^{n-1}a_1=a_1\,\frac{(1-\lambda^n)}{1-\lambda},$$

又因为$\lim\limits_{n\to\infty}a_1\,\dfrac{(1-\lambda^n)}{1-\lambda}=\dfrac{a_1}{1-\lambda}$,所以级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\lambda^{n-1}a_1$ 收敛.

从而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛.

同理可证 $\sqrt[n]{a_n}\leqslant\lambda<1$ 时 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛.

(2) 若 $a_{n+1}>a_n$，则 $\{a_n\}$ 为单增数列. 且 $a_n>0$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n\neq 0$ （即 0 不可能为单增数列的上确界).

22. 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 绝对收敛，令

$$a_n^+=\frac{|a_n|+a_n}{2}=\begin{cases}a_n, & a_n>0,\\ 0, & a_n\leqslant 0;\end{cases}\quad a_n^-=\frac{|a_n|-a_n}{2}=\begin{cases}-a_n, & a_n<0,\\ 0, & a_n\geqslant 0.\end{cases}$$

则 a_n^+ 与 a_n^- 分别称为 a_n 的正部和负部. 证明：

(1) 正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^+$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^-$ 都收敛；

(2) 任一绝对收敛的级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 都可以表示为两个收敛的正项级数之差：

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\sum_{n=1}^{\infty}a_n^+-\sum_{n=1}^{\infty}a_n^-.$$

证　(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 绝对收敛. 即 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 收敛.

又因为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^+=\frac{1}{2}\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n+\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|\right)$，所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^+$ 收敛. 同理可证 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^-$ 收敛.

(2) 因为
$$\begin{aligned}a_n&=\frac{a_n}{2}+\frac{a_n}{2}=\frac{a_n}{2}+\frac{|a_n|}{2}-\frac{|a_n|}{2}+\frac{a_n}{2}\\&=\frac{a_n+|a_n|}{2}-\frac{|a_n|-a_n}{2}=a_n^+-a_n^-,\end{aligned}$$

由(1)知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 收敛时. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^+$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^-$ 均收敛.(2)得证.

(B)

1. 设　$a_n>0,b_n>0,\frac{a_{n+1}}{a_n}\leqslant\frac{b_{n+1}}{b_n}$，若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛，证明 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 也收敛.

证　由 $a_n>0,b_n>0,\frac{a_{n+1}}{a_n}\leqslant\frac{b_{n+1}}{b_n}$ 可得 $0<\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}\leqslant\frac{a_n}{b_n}$，且 $0<\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}\leqslant\frac{a_n}{b_n}\leqslant\frac{a_{n-1}}{b_{n-1}}\leqslant\cdots\leqslant\frac{a_1}{b_1}$，则 $a_{n+1}\leqslant\frac{a_1}{b_1}b_{n+1}$. 由于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛，由比较判别法知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛. 原题得证.

2. 设　$a_n>0$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{-\ln a_n}{\ln n}=q$. 证明：

(1) 若 $q>1$,则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛; (2) $q<1$,则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

证 (1) 若 $q>1$. 令 $q=1+\alpha(\alpha>0)$. 因为 $a_n>0$, $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{-\ln a_n}{\ln n}=q$,

所以对 $\varepsilon=\frac{\alpha}{2}$, $\exists N\in\mathbf{N}_+$, 当 $n>N$ 时,

$$q+\frac{\alpha}{2}>\frac{-\ln a_n}{\ln n}>q-\frac{\alpha}{2}=1+\frac{\alpha}{2},$$

即 $-\ln a_n>\left(1+\frac{\alpha}{2}\right)\ln n$,

即 $0<a_n<\frac{1}{n^{1+\frac{\alpha}{2}}}$,

由级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1+\frac{\alpha}{2}}}$收敛知, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

(2) 若 $q<1$,由$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{-\ln a_n}{\ln n}=q$ 知,对 $\varepsilon=\frac{1-q}{2}>0$, $\exists N\in\mathbf{N}_+$,当 $n>N$ 时,

$$\frac{-\ln a_n}{\ln n}<q+\frac{1-q}{2}=\frac{1+q}{2}<1,$$

即 $a_n>\frac{1}{n}$,由于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散,故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

3. 设 $f(x)$在 $x=0$ 的某一邻域内具有二阶连续导数,且$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=0$. 证明:级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f\left(\frac{1}{n}\right)$绝对收敛.

证 由于$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=0$,所以 $f(0)=0$,于是 $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=0$. 由泰勒公式得 $f\left(\frac{1}{n}\right)=f''(0)\frac{1}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)$. 于是$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\left|f\left(\frac{1}{n}\right)\right|\Big/\frac{1}{n^2}\right)=|f''(0)|$. 由 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n^2}$收敛及比较准则, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f\left(\frac{1}{n}\right)$绝对收敛.

4. 判别下列级数的敛散性:

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^{1+\alpha}}(\alpha>0)$; (2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\ln(5+n^3)}$;

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\alpha^n}{n+1}\right)^n(\alpha>0)$; (4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\tan(\sqrt{n^2+1}\pi)$;

(5) $\sqrt{3}+\sqrt{3-\sqrt{6}}+\sqrt{3-\sqrt{6+\sqrt{6}}}+\cdots+\sqrt{3-\sqrt{6+\sqrt{6+\cdots+\sqrt{6}}}}+\cdots$;

(6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\tan\frac{x^n}{\sqrt{n}}(x\in\mathbf{R})$.

解 (1) 因为 $\alpha>0$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\ln n}{n^{1+\alpha}}\Big/\dfrac{1}{n^{1+\frac{\alpha}{2}}}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln n}{n^{\frac{\alpha}{2}}}=0$. 由正项级数收敛的比较准则，原级数收敛.

(2) 因为 $\dfrac{1}{n\ln(5+n^3)}>\dfrac{1}{n\ln n^3}>\dfrac{1}{3n\ln n}>\dfrac{1}{3n}$，当 $n>3$，而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{3n}$ 发散，故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n\ln(5+n^3)}$ 发散.

(3) $\sqrt[n]{a_n}=\dfrac{\alpha^n}{n+1}$.

若 $0<\alpha\leqslant1$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=0$，故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{n^\alpha}{n+1}\right)^n$ 收敛.

若 $\alpha>1$，由 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^\alpha}{x+1}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=\!=}\lim\limits_{x\to\infty}\alpha x^{\alpha-1}=+\infty$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=+\infty$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{n^\alpha}{n+1}\right)^n$ 发散.

(4) $a_n=\tan(\sqrt{n^2+1}\pi)=\tan\left[(\sqrt{n^2+1}-n)\pi\right]=\tan\dfrac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n}$,

因而 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{\frac{\pi}{2n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\tan\dfrac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n}\Big/\dfrac{\pi}{n+\sqrt{n^2+1}}\right)\cdot\left(\dfrac{\pi}{n+\sqrt{n^2+1}}\Big/\dfrac{\pi}{2n}\right)=1$

又因为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\pi}{2n}$ 发散，故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散.

(5) 令 $a_n=\sqrt{3-c_n}$，$n=0,1,2,\cdots$，则原级数为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$. 其中 $c_0=0$，$c_1=\sqrt{6}$，$c_2=\sqrt{6+\sqrt{6}}$，$\cdots$，$c_n=\sqrt{6+c_{n-1}}$. 由习题 1.2(B)第 4 题(2)，数列 $\{c_n\}$ 单增有界，且 $\lim\limits_{n\to\infty}c_n=3$.

又因为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{3-c_{n+1}}}{\sqrt{3-c_n}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{3-\sqrt{6+c_n}}{3-c_n}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{1}{3+\sqrt{6+c_n}}}=\frac{1}{\sqrt{6}}<1$$

由 D'Alembert 准则，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛.

(6) $a_n=\tan\dfrac{x^n}{\sqrt{n}}$. 若 $x=0$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n=0$ 收敛.

若 $|x|<1$. 由于 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{x^n}{\sqrt{n}}=0$，所以当 n 足够大时，$\dfrac{|x|^n}{\sqrt{n}}<\dfrac{\pi}{2}$，且 $|a_n|=$

$\tan\dfrac{|x|^n}{\sqrt{n}}$，

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\tan\dfrac{|x|^{n+1}}{\sqrt{n+1}}}{\tan\dfrac{|x|^n}{\sqrt{n}}}=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\tan\dfrac{|x|^{n+1}}{\sqrt{n+1}}}{\dfrac{|x|^{n+1}}{\sqrt{n+1}}}\cdot\frac{|x|^n/\sqrt{n}}{\tan(|x|^n/\sqrt{n})}\cdot\sqrt{\frac{n}{n+1}}\,|x|\right)$$

$$=|x|<1,$$

故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\tan\dfrac{|x|^n}{\sqrt{n}}$收敛，即原级数绝对收敛；

若$|x|>1$，$\lim\limits_{n\to+\infty}\tan\dfrac{x^n}{\sqrt{n}}\neq 0$，于是 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散；

$$x=1, a_n=\tan\frac{x^n}{\sqrt{n}}=\tan\frac{1}{\sqrt{n}}>0，由于\lim_{n\to\infty}\left(\tan\frac{1}{\sqrt{n}}\Big/\frac{1}{\sqrt{n}}\right)=1,$$

而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}}$发散，故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\tan\dfrac{1}{\sqrt{n}}$发散；

$$x=-1, a_n=(-1)^n\tan\frac{1}{\sqrt{n}}，\sum_{n=1}^{\infty}\tan\frac{1}{\sqrt{n}}发散，但\lim_{n\to\infty}\tan\frac{1}{\sqrt{n}}=0,$$

且 $\tan\dfrac{1}{\sqrt{n}}>\tan\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$，由 Leibniz 准则，

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\tan\dfrac{1}{\sqrt{n}}$条件收敛.

习　题　4.2

(A)

2. 证明 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n x^2}{(1+x^2)^n}$在$(-\infty,+\infty)$上收敛，并求它的和函数.

证　若 $x=0$，$f_n(0)=0$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_n(0)=0$ 收敛.

若 $x\neq 0$，$S_n(x)=\dfrac{-x^2}{1+x^2}\left(1-\dfrac{1}{1+x^2}+\dfrac{1}{(1+x^2)^2}+\cdots+\dfrac{(-1)^{n-1}}{(1+x^2)^{n-1}}\right)$

$$=\frac{-x^2}{1+x^2}\cdot\frac{1-\dfrac{(-1)^n}{(1+x^2)^n}}{1+\dfrac{1}{1+x^2}},$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n(x)=\dfrac{-x^2}{2+x^2}$，于是 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_n(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上收敛，和函数为 $\dfrac{-x^2}{2+x^2}$.

3. 求下列函数项级数的收敛域：

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin nx}{2^n}$；　　　(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}ne^{-nx}$.

解　(2) 由于 $\left|\dfrac{\sin nx}{2^n}\right|\leqslant\dfrac{1}{2^n}$，而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2^n}$ 收敛. 故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin nx}{2^n}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上收敛.

(4) 若 $x\leqslant 0$，则 $\lim\limits_{n\to+\infty}ne^{-nx}=\lim\limits_{n\to+\infty}ne^{n|x|}=+\infty$，从而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}ne^{-nx}$ 发散；

若 $x>0$，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)e^{-(n+1)x}}{ne^{-nx}}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+1}{n}\cdot\dfrac{1}{e^x}\right)=\dfrac{1}{e^x}<1$，

且 $|ne^{-nx}|=ne^{-nx}$，从而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}ne^{-xn}$ 当 $x>0$ 时收敛.

故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}ne^{-nx}$ 收敛域为 $(0,+\infty)$.

4. 证明下列级数在给定区间上一致收敛：

(1) $\dfrac{1}{1+x}-\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{(x+n-1)(x+n)}$，　$x\in[0,1]$.

证　因为 $\forall x\in[0,1]$，$0<\dfrac{1}{(x+n-1)(x+n)}\leqslant\dfrac{1}{n(n-1)}<\dfrac{1}{(n-1)^2}$，

而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(n-1)^2}$ 收敛，由 M 判别准则级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{(x+n-1)(x+n)}$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛. 设和为 $S(x)$. 故原级数在 $[0,1]$ 上一致收敛.

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x}{1+n^4x^2}$，$x\in(-\infty,+\infty)$.

证　$x=0$，原级数显然收敛于 0；

$x\neq 0$，$\left|\dfrac{x}{1+n^4x^2}\right|\leqslant\left|\dfrac{x}{2n^2x}\right|=\dfrac{1}{2n^2}$，

而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2n^2}$ 收敛，由 M 判别准则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x}{1+n^4x^2}$ 收敛. 故原级数在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致收敛.

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n^{\frac{3}{2}}}$，$x\in[-1,1]$.

证　由于 $\left|\dfrac{x^n}{n^{\frac{3}{2}}}\right|\leqslant\dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}}(x\in[-1,1])$，且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ 收敛，故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n^{\frac{3}{2}}}$ 在 $[-1,1]$ 上一致收敛.

(4) $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{n}\,2^{-nx}, x\in[\delta,+\infty)(\delta>0)$.

证 因为$\forall x\in[\delta,+\infty)$，及$\delta>0$，所以$0<\sqrt{n}2^{-nx}<\frac{\sqrt{n}}{2^{n\delta}}$.

又因为 $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\sqrt{n+1}}{2^{(n+1)\delta}}\Big/\frac{\sqrt{n}}{2^{n\delta}}\right)=\frac{1}{2^{\delta}}<1$，所以 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{2^{n\delta}}$收敛，

于是 $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{n}\,2^{-nx}$ 在$[\delta,+\infty)$上一致收敛.

(5) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos\frac{x}{n}\right), x\in[-\delta,\delta](\delta>0)$.

证 因为$0\leqslant 1-\cos\frac{x}{n}=2\sin^2\frac{x}{2n}\leqslant 2\cdot\left(\frac{x}{2n}\right)^2\leqslant\frac{\delta^2}{2n^2}$，且$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\delta^2}{2n^2}$收敛. 从而 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos\frac{x}{n}\right)$在$[-\delta,\delta](\delta>0)$上一致收敛.

5. 证明：级数 $\sum_{n=0}^{\infty}x^n$ 在$[-q,q](0<q<1)$上一致收敛，并且

(1) $\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\cdots, |x|<1$.

(2) $\frac{1}{(1-x)^2}=1+2x+3x^2+\cdots+(n+1)x^n+\cdots, |x|<1$.

证 因为当$0<q<1, x\in[-q,q]$时，$|x^n|\leqslant q^n$，且$\sum_{n=1}^{\infty}q^n$ 收敛，所以 $\sum_{n=0}^{\infty}x^n$ 在$[-q,q](0<q<1)$上一致收敛. 和函数 $S(x)=\frac{1}{1-x}$，即$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n, x\in[-q,q]$.

(1) 由 $\sum_{n=0}^{\infty}x^n$ 在$[-q,q]$上一致收敛于$\frac{1}{1-x}$可知$(0<q<1)$，

$\sum_{n=0}^{\infty}(-x)^n$ 在$[-q,q]$上一致收敛于$\frac{1}{1+x}$.

由定理 2.4(和函数的可积性)有

$\forall x\in[-q,q](0<q<1)$，$\int_0^x S(x)\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x(-x)^n\mathrm{d}x$，即$\forall x\in[-q,q]$，

$$\begin{aligned}\ln(1+x)&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}x^{n+1}\\&=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\cdots,\end{aligned}$$

即当$|x|<1$时，$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\cdots$.

(2) 因为$|(n+1)x^n|\leqslant(n+1)q^n$, $\forall x\in[-q,q]$,

且当 $0<q<1$ 时, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{[(n+1)+1]q^{n+1}}{(n+1)q^n}=q<1$,

故 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)q^n$ 收敛,从而 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n$ 在$[-q,q]$上一致收敛.

令 $u_n=x^n$,则$(n+1)x^n=u'_{n+1}$,又因为 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}u_n=\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^n$ 在$[-q,q]$上一致收敛于$\dfrac{1}{1-x}$,那么由和函数的可导性(定理 2.5)

$$\frac{1}{(1-x)^2}=\left(\frac{1}{(1-x)}\right)'=\sum_{n=0}^{\infty}(x^n)'=\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n.$$

6. 证明:$f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin nx}{n^4}$在$(-\infty,+\infty)$上有二阶连续导数,并且

$$f''(x)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^2}.$$

证 $\forall x\in(-\infty,+\infty)$, $|u_n(x)|=\left|\dfrac{\sin nx}{n^4}\right|\leqslant\dfrac{1}{n^4}$,而且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^4}$ 收敛,根据 M 判别准则, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin nx}{n^4}$在$(-\infty,+\infty)$上一致收敛,因而处处收敛. 又 $u_n(x)=\dfrac{\sin nx}{n^4}\in C^{(1)}(-\infty,+\infty)$,所以

$$\sum_{n=1}^{\infty}u'_n(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^3}\text{在}(-\infty,+\infty)\text{上一致收敛(例 2.6)},$$

由定理 2.5, $f\in{}^{(1)}(-\infty,+\infty)$,并且

$$f'(x)=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^4}\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\sin nx}{n^4}\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^3}.$$

又因为 $u'_n(x)=\dfrac{\cos nx}{n^3}\in C^{(1)}(-\infty,+\infty)$,且$\forall x\in(-\infty,+\infty)$,

$|(u'(x))'|=|u''_n(x)|=\left|\dfrac{-\sin nx}{n^2}\right|\leqslant\dfrac{1}{n^2}$,并且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ 收敛.

故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u''_n(x)$在$(-\infty,+\infty)$上一致收敛,由定理 2.5,

$f'\in C^{(1)}(-\infty,+\infty)$,即 $f\in C^{(2)}(-\infty,+\infty)$,且

$$f''(x)=(f'(x))'=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^3}\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\cos nx}{n^3}\right)'$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-\sin nx}{n^2}=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^2}.$$

(B)

3. 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 在开区间(a,b)内的任一闭子区间上一致收敛，则称该级数在(a,b)上内闭一致收敛，证明若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 在(a,b)上内闭一致收敛，则它在(a,b)内处处收敛.

证 $\forall x_0\in(a,b)$，令 $\alpha=\dfrac{x_0+a}{2}$，$\beta=\dfrac{x_0+b}{2}$，则 $\alpha,\beta\in(a,b)$，且 $x_0\in(\alpha,\beta)$.

由于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 在(a,b)上内闭一致收敛，且$[\alpha,\beta]\subset(a,b)$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 在$[\alpha,\beta]$上一致收敛，因而处处收敛，于是 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 在 $x_0\in[\alpha,\beta]$处收敛. 由 $x_0\in(a,b)$的任意性知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 在(a,b)上处处收敛.

4. 设有级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(x+\dfrac{1}{n}\right)^n$，证明：

(1) 该级数的收敛域为$(-1,1)$；

(2) 该级数在$(-1,1)$上内闭一致收敛；

(3) 该级数的和函数在$(-1,1)$内连续.

证 (1) 由于 $\sqrt[n]{|u_n(x)|}=\sqrt[n]{\left|\left(x+\dfrac{1}{n}\right)^n\right|}=\left|x+\dfrac{1}{n}\right|$，所以 $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|u_n(x)|}=|x|$. 于是 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(x+\dfrac{1}{n}\right)^n$ 当 $|x|<1$ 时收敛，$x>1$ 时发散（此时 $|u_n(x)|=u_n(x)$）.

当 $x<-1$ 时，$$\lim_{n\to+\infty}u_n(x)=\lim_{n\to+\infty}x^n\left[\left(1+\frac{1}{nx}\right)^{nx}\right]^{\frac{1}{x}}=\infty,$$

当 $x=1$ 时，$$\lim_{n\to+\infty}u_n(x)=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e}\neq0,$$

$x=-1$ 时，$$\lim_{n\to+\infty}u_n(x)=\lim_{n\to\infty}\left(-1+\frac{1}{n}\right)^n\text{不存在}.$$

于是当 $|x|\geqslant1$ 时，$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(x+\frac{1}{n}\right)^n\text{发散}.$$

综上所述 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(x+\dfrac{1}{n}\right)^n$ 的收敛区域为$(-1,1)$.

(2) $\forall[\alpha,\beta]\subset(-1,1)$，令 $\delta=\max\{|\alpha|,|\beta|\}$，则 $\delta>0$.

从而$\left|\left(x+\frac{1}{n}\right)^n\right|\leqslant\left(\delta+\frac{1}{n}\right)^n$. 对正项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\delta+\frac{1}{n}\right)^n$,

由于$\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\left(\delta+\frac{1}{n}\right)^n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\delta+\frac{1}{n}\right)=\delta<1$,所以$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\delta+\frac{1}{n}\right)^n$收敛.

由M判别准则,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(x+\frac{1}{n}\right)^n$在$[\alpha,\beta]$上一致收敛.

由于$[\alpha,\beta]\subset(-1,1)$的任一闭子区间,所以$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(x+\frac{1}{n}\right)^n$在$(-1,1)$上内闭一致收敛.

(3) 设$S(x)$为$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(x+\frac{1}{n}\right)^n$在$(-1,1)$上的和函数,即

$$\forall x\in(-1,1),S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(x+\frac{1}{n}\right)^n.$$

那么$\forall x_0\in(-1,1)$,由于$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(x+\frac{1}{n}\right)^n$在$(-1,1)$上内闭一致收敛,

所以$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(x+\frac{1}{n}\right)^n$在$\left[\frac{x_0-1}{2},\frac{x_0+1}{2}\right]$上一致收敛于$S_{x_0}(x)$.

其中$S_{x_0}(x)=S(x)$,当$x\in\left[\frac{-1+x_0}{2},\frac{1+x_0}{2}\right]$时.

并且$u_n(x)=\left(x+\frac{1}{n}\right)^n\in C\left[\frac{-1+x_0}{2},\frac{1+x_0}{2}\right]$. 由定理 2.3,

$S_{x_0}(x)\in C\left[\frac{-1+x_0}{2},\frac{1+x_0}{2}\right]$,从而$S(x)\in C\left[\frac{-1+x_0}{2},\frac{1+x_0}{2}\right]$.

故和函数$S(x)$在$x_0\left(\in\left[\frac{-1+x_0}{2},\frac{1+x_0}{2}\right]\right)$处连续.

由$x_0\in(-1,1)$的任意性知:$S(x)\in C(-1,1)$.

5. 证明:级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^2\mathrm{e}^{-nx}$在$[0,+\infty)$上一致收敛.

证 (1) 先证 $u>0$时,$\mathrm{e}^u>\frac{u^2}{2}$. 令$f(u)=\mathrm{e}^u-\frac{u^2}{2}$,则$f'(u)=\mathrm{e}^u-u$, $f''(u)=\mathrm{e}^u-1>0(u>0)$,从而$f'(u)$当$u>0$时严格单增,即$\forall u>0,f'(u)>f'(0)=1>0$,于是$f(u)$在$(0,+\infty)$上严格单增,从而当$u>0$时,$f(u)>f(0)=1>0$. 即当$u>0$时,$\mathrm{e}^u>\frac{u^2}{2}$.

(2) 证明$\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^2\mathrm{e}^{-nx}$在$[0,+\infty)$上一致收敛.

由(1)可得当$x>0$时, $|x^2\mathrm{e}^{-nx}|=\left|\frac{x^2}{\mathrm{e}^{nx}}\right|<\left|x^2\cdot\frac{2}{(nx)^2}\right|=\frac{2}{n^2}$,

且 $x=0$ 时， $|x^2\mathrm{e}^{-nx}|=0<\frac{2}{n^2}$. 于是

$\forall x\in[0,+\infty)$，$|x^2\mathrm{e}^{-nx}|<\frac{2}{n^2}$，且正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n^2}$ 收敛.

由 M 判别准则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^2\mathrm{e}^{-nx}$ 在 $[0,+\infty)$ 上一致收敛.

6. 如果 $\forall n\in\mathbf{N}_+$，$u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上是单调函数，并且级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 的端点绝对收敛，证明它在 $[a,b]$ 上绝对一致收敛(即绝对值级数一致收敛).

证 由于 $\forall n\in\mathbf{N}_+$，$u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上是单调函数.

所以 $|u_n(x)|\leqslant\max\{|u_n(a)|,|u_n(b)|\}\leqslant|u_n(a)|+|u_n(b)|$，

又因为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 的端点绝对收敛. 即

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n(a)|$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n(b)|$ 收敛. 从而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(|u_n(a)|+|u_n(b)|)$ 收敛.

于是 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n(x)|$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛. 即 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上绝对一致收敛.

习 题 4.3

(A)

2. 设幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 在 $x=-3$ 处条件收敛，你能确定该幂级数的收敛半径吗?

解 由阿贝尔定理，如果在点 x_0 处幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 收敛，那么对于一切满足 $|x|<|x_0|$ 的点，幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 绝对收敛. 因此，既然已知幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 在 $x=-3$ 处收敛，那么，对于满足 $|x|<|-3|$ 的一切点，幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 是绝对收敛的.

另一方面，注意到幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 在 $x=-3$ 处是条件收敛的，因此，任何 $|x|>3$ 的点都不可能使该幂级数收敛. 否则，据阿贝尔定理，该幂级数在 $x=-3$

处就不是条件收敛，而应是绝对收敛了，这与题设矛盾.

由于$|x|<3$时该幂级数收敛，$|x|>3$时该幂级数发散，因此该幂级数的收敛半径$R=3$.

3. 已知幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$的收敛半径$R=1$，有人采用下面的方法求幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} x^n$$

的收敛半径，你认为对吗？若不对，指出错在何处.

由于$R=1$，所以

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=1,$$

从而得

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{b_{n+1}}{b_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=0.$$

因此，级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n x^n$的收敛半径为$+\infty$.

解 结果正确，但解法不对. 因为$R=1$，不一定能得出$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=1$的结果. (例如对幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}[2+(-1)^n]x^n$，有

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\frac{2+(-1)^{n+1}}{2+(-1)^n}=\begin{cases}3,\text{当 } n \text{ 为奇数},\\ \dfrac{1}{3},\text{当 } n \text{ 为偶数}.\end{cases}$$

即$\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$不存在.

级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}[2+(-1)^n]x^n$的收敛半径可用下述方法得到

由 $$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n(x)}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{2+(-1)^n}\,|x|=|x|$$

可知当$|x|<1$时幂级数收敛，当$|x|>1$时幂级数发散，所以收敛半径$R=1$.)

此问题的正确解法如下

由$R=1$，任取$x_0\in(0,1)$，有$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$绝对收敛，因此$\{a_n x_0^n\}$有界，设$|a_n x_0^n|\leqslant M$. 于是

$$\left|\frac{a_n}{n!}x^n\right|=\left|\frac{a_n x_0^n}{n!x_0^n}x^n\right|\leqslant\frac{M}{n!x_0^n}|x|^n,$$

由比值审敛法知，$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{M}{n!x_0^n}x^n$ 对任何 x 都绝对收敛，从而由比较审敛法知，$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n!}x^n$ 也对任何 x 都绝对收敛，即级数 $\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n!}x^n$ 的收敛半径为 $+\infty$.

4. 求下列幂级数的收敛区间与收敛区域：

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n+\sqrt{n}}x^n$.

解　由于 $\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{n+1+\sqrt{n+1}}{n+\sqrt{n}}\right|=1$，所以该级数的收敛区间为 $(-1,1)$.

在 $x=1$，该级数变为　$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n+\sqrt{n}}$ 条件收敛.

在 $x=-1$，该级数变为　$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-1}{n+\sqrt{n}}$ 发散.

故收敛区域为 $(-1,1]$.

(5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}x^{2n-1}$.

解　由于 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)!x^{2n+1}}{(n+1)^{n+1}}\Big/\frac{n!x^{2n-1}}{n^n}\right|=\frac{x^2}{\mathrm{e}}$，故当 $\frac{x^2}{\mathrm{e}}<1$ 时，即 $|x|<\sqrt{\mathrm{e}}$ 时，原级数绝对收敛，当 $|x|>\sqrt{\mathrm{e}}$ 时发散.

$x=\pm\sqrt{\mathrm{e}}$，级数变为 $\pm\frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!\mathrm{e}^n}{n^n}$ 发散(习题 4.1 第 12 题(11))

故收敛区间与收敛区域均为 $(-\sqrt{\mathrm{e}},\sqrt{\mathrm{e}})$.

(6) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+(-2)^n}{n}(2x+1)^n$.

解　由例 3.1(3)知 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+(-2)^n}{n}y^n$ 收敛区间为 $\left(-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$.

收敛区域为 $\left[-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$. 于是 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+(-2)^n}{n}$ 收敛区间为 $\left(-\frac{2}{3},-\frac{1}{3}\right)$. 收敛区域为 $\left[-\frac{2}{3},-\frac{1}{3}\right)$.

(8) $\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})2^nx^{2n}$.

解　由于 $\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})2^n}{(\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1})2^{n+1}}\right|=\frac{1}{2}$，所以原级数当 $x^2<\frac{1}{2}$ 时收

敛，$x^2>\frac{1}{2}$时发散. 于是原级数收敛区间为$\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

当$x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$时，级数变为$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$. 由于$\sqrt{n+1}-\sqrt{n}=\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}<\frac{1}{\sqrt{n}}$，而$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$发散，所以$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$发散.

故原级数收敛区域为$\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

(10) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x+1)^n}{4^n+(-2)^n}$.

解 $\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\frac{4^{n+1}+(-2)^{n+1}}{4^n+(-2)^n}\right|=\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\frac{4-2\cdot\left(\frac{-2}{4}\right)^n}{1+\left(\frac{-2}{4}\right)^n}\right|=4.$

故收敛区间为$(-5,3)$.

$x=3$时，级数变为$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4^n}{4^n+(-2)^n}$，而$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4^n}{4^n+(-2)^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{1+\left(-\frac{1}{2}\right)^n}=1$，于是$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4^n}{4^n+(-2)^n}$发散.

$x=-5$，级数变为$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n4^n}{4^n+(-2)^n}$发散(通项极限不存在).

故收敛区域为$(-5,3)$.

5. 指出下列推导有什么错误?

由于$\frac{x}{1-x}=x+x^2+\cdots+x^n+\cdots$，

$$\frac{-x}{1-x}=\frac{1}{1-\frac{1}{x}}=1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\cdots+\frac{1}{x^n}+\cdots,$$

两式相加得

$$\cdots+\frac{1}{x^n}+\cdots+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}+1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots=0.$$

解 不能成立. 因为

$$\frac{x}{1-x}=x+x^2+\cdots+x^n+\cdots$$

只有在$|x|<1$时才成立，而

$$\frac{x}{x-1}=1+\frac{1}{x}+\cdots+\frac{1}{x_n}+\cdots$$

只有在$|x|>1$时才成立. 由于这两个级数的收敛域没有公共点，因此不能相加.

6. 求下列函数的 Maclaurin 展开式：

解　(1) xe^{-x^2}.

$$xe^{-x^2}=x\left[1-x^2+\frac{1}{2!}(-x^2)^2+\frac{1}{3!}(-x^2)^3+\cdots+\frac{1}{n!}(-x^2)^n+\cdots\right],$$

$x\in(-\infty,+\infty)$,

即 $xe^{-x^2}=x-x^3+\frac{1}{2!}x^5-\frac{1}{3!}x^7+\cdots+\frac{(-1)^n}{n!}x^{2n+1}+\cdots,\quad x\in(-\infty,+\infty)$.

(2) $\sin^2 x$.

由于 $\sin^2 x=\frac{1}{2}(1-\cos 2x)$，所以

$$\sin^2 x=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\left[1-\frac{1}{2!}(2x)^2+\frac{1}{4!}(2x)^4-\cdots+(-1)^k\frac{(2x)^{2k}}{(2k)!}+\cdots\right],\quad x\in(-\infty,+\infty),$$

即　$\sin^2 x=x^2-\frac{2^3}{4!}x^4+\cdots+(-1)^{k+1}\frac{2^{2k-1}}{(2k)!}x^{2k}+\cdots,\quad x\in(-\infty,+\infty)$.

(3) $\operatorname{ch}\frac{x}{2}=\frac{1}{2}(e^{\frac{x}{2}}+e^{-\frac{x}{2}})$.

$$e^{\frac{x}{2}}=1+\frac{x}{2}+\frac{1}{2!}\left(\frac{x}{2}\right)^2+\cdots+\frac{1}{n!}\left(\frac{x}{2}\right)^n+\cdots,\quad x\in(-\infty,+\infty),$$

$$e^{-\frac{x}{2}}=1-\frac{x}{2}+\frac{1}{2!}\left(-\frac{x}{2}\right)^2+\cdots+\frac{(-1)^n}{n!}\left(\frac{x}{2}\right)^n+\cdots,\quad x\in(-\infty,+\infty),$$

于是 $\operatorname{ch}\frac{x}{2}=1+\frac{1}{2!2^2}x^2+\frac{x^4}{2^4 4!}+\cdots+\frac{x^{2n}}{2^{2n}(2n)!}+\cdots,\quad x\in(-\infty,+\infty)$.

(4) $\arcsin x$.

解　由于
$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=[1+(-x^2)]^{-\frac{1}{2}}=1+\left(-\frac{1}{2}\right)(-x^2)+\frac{1}{2!}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)(-x^2)^2+\cdots+\frac{1}{n!}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)\cdots\left(-\frac{1}{2}-n+1\right)(-x^2)^n+\cdots,$$

$(-x^2)\in(-1,1)$,

即　$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=1+\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{8}x^4+\cdots+\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}x^{2n}+\cdots,\quad x\in(-1,1)$,

逐项积分得

$$\arcsin x=\int_0^x\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\int_0^x x^{2n}dx$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2(2n+1)}x^{2n+1},\quad x\in(-1,1).$$

(5) $\frac{1}{\sqrt{2-x}}$.

$$\frac{1}{\sqrt{2-x}}=\frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{1-\frac{x}{2}}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left[1+\left(-\frac{x}{2}\right)\right]^{-\frac{1}{2}},$$

$$\frac{1}{\sqrt{2-x}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left[1+\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{x}{2}\right)+\frac{1}{2!}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)\left(-\frac{x}{2}\right)^2+\cdots+\right.$$

$$\left.\frac{1}{n!}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)\cdots\left(-\frac{1}{2}-n+1\right)\left(-\frac{x}{2}\right)^n+\cdots,\right.$$

$$-\frac{x}{2}\in(-1,1),$$

故 $\frac{1}{\sqrt{2-x}}=\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{4\sqrt{2}}x+\frac{1}{2!}\frac{3}{2^4\sqrt{2}}x^2+\cdots+\frac{(2n)!}{2^{3n}(n!)\sqrt{2}}x^n+\cdots,\quad x\in(-2,2).$

(6) $\frac{x}{1+x-2x^2}$.

由于 $\frac{x}{1+x-2x^2}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{1}{1+2x}\right)$，而

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots,\quad x\in(-1,1),$$

$$\frac{1}{1+2x}=1-2x+(2x)^2+\cdots+(-1)^n(2x)^n+\cdots,\quad 2x\in(-1,1),$$

故
$$\frac{x}{1+x-2x^2}=x-x^2+\cdots+\frac{1-(-2)^n}{3}x^n+\cdots,\quad x\in\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right).$$

(7) 由于 $\frac{1}{1-x}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^n, x\in(-1,1), \frac{1}{1-2x}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-2x)^n,\quad 2x\in(-1,1)$，分别逐项积分两个幂级数得

$$-\ln(1-x)=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x t^n\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}x^{n+1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n},\quad x\in(-1,1).$$

$$-\frac{1}{2}\ln(1-2x)=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x(-2)^n t^n\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n2^n}{n+1}x^{n+1},\quad x\in\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right).$$

从而
$$\ln(1-x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{n}\right)x^n,\quad x\in(-1,1);$$

$$\ln(1-2x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n2^n}{n}x^n,\quad x\in\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right).$$

故
$$\ln(1-3x+2x^2)=\ln(1-x)+\ln(1-2x)$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-2)^n-1}{n}x^n,\quad x\in\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right).$$

(8) $\sqrt[3]{27-x^3}=3\sqrt[3]{1-\left(\frac{x}{3}\right)^3}$

$$=3\left[1+\frac{1}{3}\left(-\frac{x}{3}\right)^3+\frac{1}{2!}\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3}-1\right)\left(-\frac{x}{3}\right)^6+\cdots+\right.$$

$$\left.\frac{1}{n!}\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)\cdots\left(\frac{1}{3}-n+1\right)\left(-\frac{x}{3}\right)^{3n}+\cdots\right],\left(-\frac{x}{3}\right)^3\in(-1,1),$$

$$=3-\frac{1}{3^3}x^3-\frac{2}{2!3^7}x^6-\cdots-\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{3}\right)\cdots$$

$$\left(n-1-\frac{1}{3}\right)\frac{1}{(27)^n}x^{3n}+\cdots,\quad x\in(-3,3).$$

7. 设 $f(x)=x^3e^{-x^2}$，求 $f^{(n)}(0)\quad(n=2,3,\cdots)$.

解 由于 $e^{-x^2}=1-x^2+\frac{1}{2!}x^4+\cdots+\frac{(-1)^n}{n!}x^{2n}+\cdots,\quad x\in(-\infty,+\infty)$.

故 $$f(x)=x^3-x^5+\frac{1}{2!}x^7+\cdots+\frac{(-1)^n}{n!}x^{2n+3}+\cdots,\quad x\in(-\infty,+\infty),$$

于是 $$f^{(n)}(0)=\begin{cases}0, & n=2k,\\ (-1)^{k-1}\dfrac{(2k+1)!}{(k-1)!}, & n=2k+1,\end{cases}\quad k\in\mathbf{N}_+.$$

8. 求下列函数在给定点 x_0 处的 Taylor 展开式：

(3) $\ln x, x_0=1$； (4) $\frac{x}{x^2-5x+6}, x_0=5$；

(7) $\frac{1}{4}\ln\frac{1+x}{1-x}+\frac{1}{2}\arctan x-x, x_0=0$； (8) $\frac{x}{(1-x^2)^2}, x_0=0$.

解 (3) $\ln x=\ln[1+(x-1)]$

$$=(x-1)-\frac{1}{2}(x-1)^2+\frac{1}{3}(x-1)^3-\cdots+$$

$$\frac{(-1)^{n+1}}{n}(x-1)^n+\cdots,\quad x-1\in(-1,1]，即\ x\in(0,2].$$

(4) $\frac{x}{x^2-5x+6}=\frac{3}{x-3}-\frac{2}{x-2}$,

而 $$\frac{3}{x-3}=\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{1+\frac{x-5}{2}}=\frac{3}{2}\left[1-\frac{1}{2}(x-5)+\left(\frac{x-5}{2}\right)^2+\cdots+(-1)^n\left(\frac{x-5}{2}\right)^n+\cdots\right],$$

$$\frac{x-5}{2}\in(-1,1)，即\ x\in(3,7).$$

$$\frac{2}{x-2}=\frac{2}{3}\frac{1}{1+\frac{x-5}{3}}=\frac{2}{3}\left[1-\frac{x-5}{3}+\left(\frac{x-5}{3}\right)^2+\cdots+(-1)^n\left(\frac{x-5}{3}\right)^n+\cdots\right],$$

$$\frac{x-5}{3}\in(-1,1)，即\ x\in(2,8).$$

故 $$\frac{x}{x^2-5x+6}=\frac{5}{6}-\left(\frac{3}{2^2}-\frac{2}{3^2}\right)(x-5)+\left(\frac{3}{2^3}-\frac{2}{3^3}\right)(x-5)^2+\cdots+$$

$$(-1)^n\left(\frac{3}{2^{n+1}}-\frac{2}{3^{n+1}}\right)(x-5)^n+\cdots,x\in(3,7).$$

(7) 由于$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\cdots,x\in(-1,1]$.

$$\ln(1-x)=-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots-\frac{x^n}{n}+\cdots,-x\in(-1,1].$$

$\arctan x=x-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{7}x^7+\cdots+\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}+\cdots,x\in(-1,1)$.

故$\frac{1}{4}\ln\frac{1+x}{1-x}+\frac{1}{2}\arctan x-x$

$$=\frac{1}{2}\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{1}{5}x^5+\cdots+\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\cdots+x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\cdots+\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}+\cdots\right)-x$$

$$=\frac{1}{5}x^5+\frac{1}{9}x^9+\cdots+\frac{1}{4n+1}x^{4n+1}+\cdots,x\in(-1,1).$$

(8) $\frac{x}{(1-x^2)^2}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-x^2}\right)'=\frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{\infty}x^{2n}\right)'=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(x^{2n})'=\sum_{n=1}^{\infty}nx^{2n-1}$,

$x^2\in(-1,1)$，即 $x\in(-1,1)$.

9. 求下列幂级数的和函数：

(1) $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)x^n$；

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n^2x^n$；

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}x^n$；

(4) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n}}{(2n-1)3^{2n-1}}$；

(5) $\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)x^n$；

(6) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n2^n}x^{n-1}$.

解 (1) 由于$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n=1+x+x^2+x^3+x^4+\cdots+x^n+\cdots,\quad x\in(-1,1)$,

于是逐项求导可得

$$\frac{1}{(1-x)^2}=1+2x+3x^2+4x^3+\cdots+(n+2)x^{n+1}+\cdots,\quad x\in(-1,1),$$

再逐项求导

$$\frac{2}{(1-x)^3}=2+3\cdot 2x+4\cdot 3x^2+\cdots+(n+2)(n+1)x^n+\cdots,\quad x\in(-1,1).$$

(2) 由于$\frac{1}{1+x}-1=-x+x^2-x^3+\cdots+(-1)^nx^n+\cdots,\quad x\in(-1,1)$,

逐项求导 $\frac{-1}{(1+x)^2}=-1+2x-3x^2+\cdots+(-1)^nnx^{n-1}+\cdots,\quad |x|<1.$

于是 $\frac{-x}{(1+x)^2}=-x+2x^2-3x^3+\cdots+(-1)^nnx^n+\cdots,\quad |x|<1.$

逐项求导 $\dfrac{x-1}{(1+x)^3}=-1+2^2x-3^2x^2+\cdots+(-1)^n n^2 x^{n-1}+\cdots,\quad |x|<1.$

故 $\dfrac{x(x-1)}{(1+x)^3}=-x+2^2x^2-3^2x^3+\cdots+(-1)^n n^2 x^n+\cdots,\quad |x|<1.$

(3) 设和函数为 $S(x)$，则 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n(n+1)}$.

易知收敛域为 $[-1,1]$，且 $S(1)=1$（第四章例 1.3）.

$$xS(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n(n+1)},\quad x\in(-1,0),$$

逐项求导得
$$[xS(x)]'=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n(n+1)}\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x^{n+1}}{n(n+1)}\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n},\quad x\in(-1,1),$$

再逐项求导得
$$[xS(x)]''=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x^n}{n}\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1}=\frac{1}{1-x},\quad x\in(-1,1),$$

于是
$$xS(x)=(1-x)\ln(1-x)+x+C_1x+C_2,$$

故 由 $S(0)=0,S(1)=1$，且 $S(x)$ 在 $[-1,1]$ 上连续.

$$S(x)=\begin{cases}1, & x=1,\\ 0, & x=0,\\ \dfrac{1-x}{x}\ln(1-x)+1, & x\in[-1,0)\cup(0,1).\end{cases}$$

(4) 由于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{x^{2n}}{(2n-1)3^{2n-1}}=x\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{2n-1}\left(\dfrac{x}{3}\right)^{2n-1}$.

而
$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}\cdot\left(\frac{x}{3}\right)^{2n-1}\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}\left(\frac{x}{3}\right)^{2n-1}\right]'$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left[\left(\frac{x}{3}\right)^2\right]^{n-1}\cdot\frac{1}{3}.$$
$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1+\left(\dfrac{x}{3}\right)^2},\quad \frac{x}{3}\in(-1,1),\text{即 } x\in(-3,3).$$

故原级数的和函数

$$S(x)=x\int_0^x\frac{1}{3}\frac{\mathrm{d}x}{1+\left(\dfrac{x}{3}\right)^2}=x\arctan\frac{x}{3},\quad x\in[-3,3].$$

(5) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(2n+1)x^n=2x\sum\limits_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}+\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^n,$

又由于 $\sum_{n=0}^{\infty} x^n=\frac{1}{1-x}, x\in(-1,1)$，逐项求导可得：$\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}=\frac{1}{(1-x)^2}, x\in(-1,1)$. 故 $\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)x^n=\frac{2x}{(1-x)^2}+\frac{1}{1-x}=\frac{1+x}{(1-x)^2}, x\in(-1,1)$.

(6) 设和函数为 $S(x)$，则 $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n2^n}x^{n-1}$，　$S(0)=\frac{1}{2}$.

由于
$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{x}{2}}=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^n,\quad x\in(-2,2),$$

逐项积分得
$$\begin{aligned}-\ln(2-x)+\ln 2&=\int_0^x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{t}{2}\right)^n\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x\frac{1}{2}\left(\frac{t}{2}\right)^n\mathrm{d}t\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^{n+1}}\cdot\frac{1}{n+1}x^{n+1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n n}x^n\\&=x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n\cdot 2^n},\quad x\in[-2,2),\end{aligned}$$

故　$S(0)=\frac{1}{2}$，当 $x\in[-2,0)\cup(0,2)$ 时，$S(x)=\frac{1}{x}[\ln 2-\ln(2-x)]$.

10. 利用幂级数求下列常数项级数的和：

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)2^{n-1}}$；　　(2) $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{(n-2)n2^n}$；

(3) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n^2-n+1)\frac{1}{2^n}$；　　(4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(n+1)}{2^{n+1}}$.

解　(1) 由第四章例 3.8(或练习 4.3 第 8 题(7)求解过程)知，
$$\begin{aligned}\ln\frac{1+x}{1-x}&=2x\left(1+\frac{x^2}{3}+\frac{x^4}{5}+\cdots+\frac{x^{2n-2}}{2n-1}+\cdots\right)\\&=2x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-2}}{2n-1},\quad x\in(-1,1),\end{aligned}$$

于是当 $x=\frac{1}{\sqrt{2}}$ 时，
$$\ln\left(\frac{1+\frac{1}{\sqrt{2}}}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}\right)=\frac{2}{\sqrt{2}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}\cdot\frac{1}{2^{n-1}}.$$

故
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}\cdot\frac{1}{2^{n-1}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\ln\left(\frac{1+\frac{1}{\sqrt{2}}}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\ln\left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right)=\sqrt{2}\ln(\sqrt{2}+1).$$

(2) 由于
$$\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-2}-\frac{1}{n}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n=\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n(n-2)2^n},$$

由于
$$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n,\quad x\in(-1,1),$$

逐项积分得 $-\ln(1-x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}x^{n+1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}x^{n}$, $x\in(-1,1)$,

取 $x=\frac{1}{2}$ 得 $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}=-\ln\frac{1}{2}=\ln 2,$$

于是 $$\frac{1}{2}\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}=\frac{1}{2}\left(\ln 2-\frac{1}{2}-\frac{1}{2^3}\right).$$

又由 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}x^{n}=-\ln(1-x)$, $x\in(-1,1)$ 知

$$\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n-2}x^{n}=x^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}x^{n}=-x^2\ln(1-x),\quad x\in(-1,1).$$

于是 $$\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n-2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}=-\left(\frac{1}{2}\right)^{2}\ln\left(1-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}\ln 2.$$

故 $$\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n(n-2)2^n}=\frac{1}{2}\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n-2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}-\frac{1}{2}\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}$$
$$=\frac{1}{8}\ln 2-\frac{1}{2}\left(\ln 2-\frac{1}{2}-\frac{1}{8}\right)=\frac{5}{16}-\frac{3}{8}\ln 2.$$

(3) 由练习 4.3 第 9 题(2)知, $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n n^2x^n=\frac{x(x-1)}{(1+x)^3}$, $|x|<1$.

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n nx^n=-\frac{x}{(1+x)^2},\ \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n=\frac{1}{1+x},\quad x\in(-1,1)$$

取 $x=\frac{1}{2}$ 可得

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n^2-n+1)\frac{1}{2^n}=\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{\left(1+\frac{1}{2}\right)^3}+\frac{\frac{1}{2}}{\left(1+\frac{1}{2}\right)^2}+\frac{1}{1+\frac{1}{2}}=\frac{22}{27}.$$

(4) 由练习 4.3(A)第 9 题(1)知: $\sum_{n=1}^{\infty}n(n+1)x^{n-1}=\frac{2}{(1-x)^3}$, $x\in(-1,1)$.

取 $x=\frac{1}{2}$, 则 $$\sum_{n=1}^{\infty}n(n+1)\frac{1}{2^{n-1}}=\frac{2}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^3}=16,$$

故 $$\sum_{n=1}^{\infty}n(n+1)\frac{1}{2^{n+1}}=\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}n(n+1)\frac{1}{2^{n-1}}=4.$$

11. 设 $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}n3^{n-1}x^{n-1}$.

(1) 证明 $f(x)$ 在 $\left(-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$ 内连续; (2) 计算 $\int_0^{\frac{1}{8}}f(x)\mathrm{d}x$.

证

(1) 由于 $$\sum_{n=0}^{\infty}(3x)^n=\frac{1}{1-3x},\quad x\in\left(-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right),$$

逐项求导有 $3\sum\limits_{n=1}^{\infty}n(3x)^{n-1}=\dfrac{3}{(1-3x)^2}.\quad x\in\left(-\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{3}\right)$,

故 $$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}n(3x)^{n-1}=\frac{1}{(1-3x)^2},\quad x\in\left(-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right),$$

即 当 $x\in\left(-\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{3}\right)$时，$f(x)$为幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n(3x)^{n-1}$ 的和函数. 由定理 3.6，$f(x)\in C\left(-\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{3}\right)$.

(2) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{8}}f(x)\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{1}{8}}\frac{\mathrm{d}x}{(1-3x)^2}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{1-3x}\right)\Big|_0^{\frac{1}{8}}=\frac{1}{5}$.

14. 利用 Euler 公式将 $\mathrm{e}^x\cos x$ 与 $\mathrm{e}^x\sin x$ 展开成 x 的幂级数.

解 因为 $$\mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})x}=\mathrm{e}^x\cos x+\mathrm{i}\mathrm{e}^x\sin x.$$

又因为
$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})x}&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1+\mathrm{i})^n}{n!}x^n\\
&=1+(1+\mathrm{i})x+\frac{1}{2!}(1+\mathrm{i})^2x^2+\frac{1}{3!}(1+\mathrm{i})^3x^3+\\
&\quad\frac{1}{4!}(1+\mathrm{i})^4x^4+\frac{1}{5!}(1+\mathrm{i})^5x^5+\cdots\\
&=1+(1+\mathrm{i})x+\frac{1}{2!}(2\mathrm{i})x^2+\frac{2}{3!}(-1+\mathrm{i})x^3+\\
&\quad\frac{1}{4!}(-4)x^4+\frac{4}{5!}(-1-\mathrm{i})x^5+\cdots\\
&=\left(1+x-\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{6}x^4-\frac{1}{30}x^5+\cdots\right)+\\
&\quad\mathrm{i}\left(x+x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{30}x^5+\cdots\right)\end{aligned}$$

故
$$\mathrm{e}^x\cos x=1+x-\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{6}x^4-\frac{1}{30}x^5+\cdots,$$
$$\mathrm{e}^x\sin x=x+x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{30}x^5+\cdots.$$

(B)

1. 设幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛区间为$(-R,R)$，$0<R<+\infty$，并且在 $x=-R$ 处绝对收敛，证明它在$[-R,R]$上一致收敛.

证 由于$\forall x\in[-R,R]$，恒有$|a_nx^n|\leqslant|a_n|R^n$，且

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|R^n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n(-R)^n|$绝对收敛.

所以由M判别准则. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nx^n$在$[-R,R]$上一致收敛.

2. 证明：如果幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$的和函数在$x_0$的邻域内恒等于0，那么它的所有系数$a_n$都等于零.

证 设$S(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$，收敛区间为$(x_0-R,x_0+R)$.

由定理3.6 $S(x)$在(x_0-R,x_0+R)内连续，且有连续的导数，且可以逐项求导，求导后所得幂级数与原级数收敛半径相同，

于是，

$$S(x_0)=a_0,$$

$$S'(x_0)=\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n\right)'\Bigg|_{x=x_0}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}a_nn(x-x_0)^{n-1}\Big|_{x=x_0}=a_1$$

$$S''(x_0)=\left(\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x-x_0)^{n-1}n\right)'\Bigg|_{x=x_0}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}(a_nn(x-x_0)^{n-1})'\Big|_{x=x_0}=2a_2$$

…………

$$S^{(n)}(x_0)=a_nn!.$$

又由于$S(x)$在x_0的邻域内恒等于零，则$S(x_0)=S'(x_0)=\cdots=S^{(n)}(x_0)=\cdots=0$，从而$a_n=0$，$\forall n\in\mathbf{N}_+$.

3. 如果正项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$收敛，证明：$f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$在$(-1,1)$上连续.

证 由于$\forall x\in[-1,1]$，恒有$|a_nx^n|\leqslant a_n$，且正项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$收敛，所以由$M$判别准则，幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nx^n$在$[-1,1]$上绝对一致收敛. 即其收敛半径$R\geqslant1$，由定理3.6知，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nx^n$在$(-1,1)$上连续.

习 题 4.4

(A)

3. 设函数 f 在区间$[a,b]$($a,b\in\mathbf{R}$)上满足 Dirichlet 条件,如何求 f 在$[a,b]$上的 Fourier 展开式? 试写出它的 Fourier 系数公式.

解 由于$\forall t\in[-l,l]\left(l=\dfrac{b-a}{2}\right)$,$t+\dfrac{a+b}{2}\in[a,b]$.

取 $F(t)$是周期为 $T=2l$ 的周期函数,且 $F(t)=f\left(t+\dfrac{b+a}{2}\right)$,$t\in[-l,l]$. 由 f 在$[a,b]$上满足 Dirichlet 条件知,$F(t)$是在$[-l,l]$上满足 Dirichlet 条件的周期为 $T=2l$ 的周期函数,则 $F(t)$存在 Fourier 展开式,且此展开式也是 f(将 $F(t)$限定在其一个周期$[a,b]$上即为 $f(x)$)的 Fourier 展开式. 于是 Fourier 系数分别为

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}F(t)\cos\frac{n\pi t}{l}\mathrm{d}t=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f\left(t+\frac{b+a}{2}\right)\cos\frac{n\pi t}{l}\mathrm{d}t$$

$$\xlongequal{x=t+\frac{a+b}{2}}\frac{1}{l}\int_a^b f(x)\cos\frac{n\pi}{l}\left(x-\frac{a+b}{2}\right)\mathrm{d}x,\quad n=0,1,2,\cdots.$$

$$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}F(t)\sin\frac{n\pi t}{l}\mathrm{d}t=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f\left(t+\frac{b+a}{2}\right)\sin\frac{n\pi t}{l}\mathrm{d}t$$

$$\xlongequal{x=t+\frac{a+b}{2}}\frac{1}{l}\int_a^b f(x)\sin\frac{n\pi}{l}\left(x-\frac{a+b}{2}\right)\mathrm{d}x,n=1,2,\cdots.$$

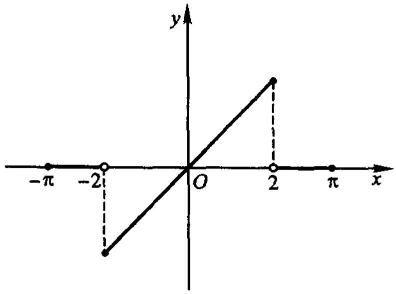
4. 设 $S(x)$是周期为 2π 的函数 $f(x)$的 Fourier 级数的和函数. $f(x)$在一个周期内的表达式为

$$f(x)=\begin{cases}0, & 2<|x|\leqslant\pi,\\ x, & |x|\leqslant 2,\end{cases}$$

写出 $S(x)$在$[-\pi,\pi]$上的表达式,并求 $S(\pi)$,$S\left(\dfrac{3}{2}\pi\right)$与 $S(-10)$的值.

解 $f(x)$在一个周期内图像如右图,

则 $$S(x)=\begin{cases}x, & |x|<2,\\ 1, & x=2,\\ -1, & x=-2,\\ 0, & 2<|x|\leqslant\pi.\end{cases}$$



(第 4 题)

所以 $$S(\pi)=0,S\left(\frac{3}{2}\pi\right)=S\left(2\pi-\frac{\pi}{2}\right)=S\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{\pi}{2}.$$

$$S(-10)=S(-10+4\pi)=0\quad(2<4\pi-10<\pi).$$

5. 求下列函数的 Fourier 级数，它们在一个周期内分别定义为：

(1) $f(x)=x^2,-\pi<x\leqslant\pi$；(3) $f(x)=e^x+1,-\pi\leqslant x<\pi$；

(5) $f(x)=|x|,-\pi\leqslant x\leqslant\pi$.

解 (1) Fourier 系数为

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^2\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^2\mathrm{d}x=\frac{2}{3}\pi^2,$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^2\cos nx\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^2\cos nx\mathrm{d}x=(-1)^n\frac{4}{n^2},$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^2\sin nx\mathrm{d}x=0,\quad n=1,2,\cdots.$$

所以 $f(x)$的 Fourier 级数为$\frac{1}{3}\pi^2+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{4}{n^2}\cos nx$.

(3) $$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(e^x+1)\mathrm{d}x=2+\frac{2}{\pi}\mathrm{sh}\,\pi,$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(e^x+1)\cos nx\mathrm{d}x=\frac{e^x}{\pi(1+n^2)}(\cos nx+n\sin nx)\Big|_{-\pi}^{\pi}$$
$$=\frac{(-1)^n2\mathrm{sh}\,\pi}{\pi(1+n^2)},$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(e^x+1)\sin nx\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi(1+n^2)}\left[e^x(\sin nx-n\cos nx)\right]_{-\pi}^{\pi}$$
$$=\frac{(-1)^{n+1}2n\mathrm{sh}\,\pi}{\pi(1+n^2)},$$

因此 当 $x\in(-\pi,\pi)$时，

$$f(x)=1+\frac{1}{\pi}\mathrm{sh}\,\pi+\frac{2\mathrm{sh}\,\pi}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1+n^2}(\cos nx-n\sin nx).$$

$x=\pm\pi$ 时，f 的 Fourier 级数收敛于$\frac{1}{2}[f(-\pi+0)+f(\pi-0)]=1+\mathrm{ch}\,\pi$.

(5) $a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\mathrm{d}x=\pi.\quad b_n=0,n=1,2,\cdots,$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\cos nx\mathrm{d}x=\frac{2}{n\pi}\left[x\sin nx+\frac{1}{n}\cos nx\right]_0^{\pi}=\frac{2}{n^2\pi}[(-1)^n-1]$$

$$=\begin{cases}\dfrac{-4}{n^2\pi}, & n\text{ 为奇数},\\ 0, & n\text{ 为偶数},\end{cases}\quad n=1,2,\cdots.$$

所以当 $x\in[-\pi,\pi]$，

$$|x|=\frac{\pi}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{-4}{(2k-1)^2\pi}\cos(2k-1)x.$$

6. 把下列函数展开为 Fourier 级数，它们在一个周期内的定义分别为：

(3) $f(x)=\begin{cases}2-x, & x\in[0,4],\\ x-6, & x\in(4,8).\end{cases}$

解 (3) $f(x)$是以 $T=8$ 为周期的周期函数. 利用其性质.

$$a_0=\frac{1}{4}\int_0^8 f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{4}\left[\int_0^4(2-x)\mathrm{d}x+\int_4^8(x-6)\mathrm{d}x\right]=0$$

$$a_n=\frac{1}{4}\int_0^8 f(x)\cos\frac{n\pi x}{4}\mathrm{d}x=\frac{1}{4}\int_0^4(2-x)\cos\frac{n\pi x}{4}\mathrm{d}x+$$

$$\frac{1}{4}\int_4^8(x-6)\cos\frac{n\pi x}{4}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{-8}{(n\pi)^2}[(-1)^n-1]=\begin{cases}0, & n\text{ 为偶数},\\ \dfrac{16}{n^2\pi^2}, & n\text{ 为奇数},\end{cases}\quad n=1,2,\cdots,$$

$$b_n=\frac{1}{4}\int_0^8 f(x)\sin\frac{n\pi x}{4}\mathrm{d}x=0, n=1,2,\cdots,$$

故当 $x\in[0,8]$时，$f(x)=\dfrac{16}{\pi^2}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2k-1)^2}\cos\dfrac{(2k-1)\pi}{4}x.$

另解 f 是以 $T=8$ 为周期的周函数. 所以 $f(x)=f(8+x)$得

$$f(x)=\begin{cases}2+x, & x\in(-4,0),\\ 2-x, & x\in(0,4]\end{cases}=2-|x|,\quad x\in(-4,4].$$

故

$$a_0=\frac{1}{4}\int_{-4}^{4}f(x)\mathrm{d}x=0,$$

$$a_n=\frac{1}{2}\int_0^4 f(x)\cos\frac{n\pi x}{2}\mathrm{d}x=\begin{cases}\dfrac{16}{(2k-1)^2\pi^2}, & n=2k-1,k=1,2,\cdots,\\ 0, & n=2k,\end{cases}$$

$b_n=0,$

故当 $x\in[-4,4]$时，$f(x)=\dfrac{16}{\pi^2}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2k-1)^2}\cos\dfrac{(2k-1)\pi x}{2}.$

7. 将下列函数展开为指定的 Fourier 级数：

(2) $f(x)=\begin{cases}0, & x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right),\\ \pi-x, & x\in\left[\dfrac{\pi}{2},\pi\right],\end{cases}$ 余弦级数.

(4) $f(x)=x-1, x\in[0,2]$，余弦级数，并求常数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$的和.

解 (2) 将 $f(x)$作偶延拓,因此有 $b_n=0$,

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (\pi-x)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4},$$

$$\begin{aligned}a_n&=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (\pi-x)\cos nx\mathrm{d}x\\&=-\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi}{2}-\frac{2}{n^2\pi}\left((-1)^n-\cos\frac{n\pi}{2}\right),\quad n=1,2,\cdots,\end{aligned}$$

故当 $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$时.

$$f(x)=\frac{\pi}{8}-\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi}{2}+\frac{2}{n^2\pi}\left((-1)^n-\cos\frac{n\pi}{2}\right)\right]\cos nx,$$

当 $x=\frac{\pi}{2}$,$f(x)$的 Fourier 级数收敛于

$$\frac{1}{2}\left[f\left(\frac{\pi}{2}-0\right)+f\left(\frac{\pi}{2}+0\right)\right]=\frac{\pi}{4}.$$

(4) 将 $f(x)$作偶延拓,则有 $b_n=0$,

$$a_0=\frac{2}{2}\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^2 (x-1)\mathrm{d}x=0$$

$$a_n=\int_0^2 (x-1)\cos\frac{n\pi}{2}x\mathrm{d}x=\frac{4}{(n\pi)^2}[(-1)^n-1]=\begin{cases}\dfrac{-8}{(n\pi)^2}, & n\text{ 为奇数},\\ 0, & n\text{ 为偶数}.\end{cases}$$

故当 $x\in[-2,2]$时,

$$f(x)=-\frac{8}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\cos\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi x.$$

于是 $f(0)=-1=-\frac{8}{\pi^2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$,即

$$S_1=1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{8}.$$

令
$$S_2=\frac{1}{2^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{6^2}+\cdots+\frac{1}{(2n)^2}+\cdots,$$

则
$$S_2=\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}+\cdots\right)=\frac{1}{4}(S_1+S_2),$$

于是
$$S_2=\frac{1}{3}S_1=\frac{\pi^2}{24},$$

故
$$S=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=S_1+S_2=\frac{4}{3}S_1=\frac{\pi^2}{6}.$$

8. 证明:在$[0,\pi]$上下列展开式成立:

(1) $x(\pi-x)=\frac{\pi^2}{6}-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2nx}{n^2}$; (2) $x(\pi-x)=\frac{8}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{(2n-1)^3}$.

解 (1) 将 $f(x)=x(\pi-x)$ 作偶延拓. 则有 $b_n=0, n=1,2,\cdots$.

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi x(\pi-x)\mathrm{d}x=\frac{\pi^2}{3},$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi x(\pi-x)\cos nx\mathrm{d}x=\begin{cases}0, & n=2k-1,\\ \dfrac{-4}{(2k)^2}, & n=2k, k=1,2,\cdots,\end{cases}$$

故 $x\in[0,\pi]$,

$$f(x)=x(\pi-x)=\frac{\pi^2}{6}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\cos 2nx.$$

(2) 将 $f(x)=x(\pi-x)$ 作奇延拓,则有 $a_n=0, n=0,1,2,\cdots$.

$$\begin{aligned}b_n&=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi x(\pi-x)\sin nx\mathrm{d}x=\frac{-4}{\pi n^3}[(-1)^n-1]\\&=\begin{cases}\dfrac{8}{\pi n^3}, & n\text{ 为奇数},\\ 0, & n\text{ 为偶数}.\end{cases}\end{aligned}$$

故 $x\in[0,\pi]$ 时, $f(x)=x(\pi-x)=\dfrac{8}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{(2n-1)^3}$.

9. 利用上题的结论证明:

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}=\frac{\pi^2}{12}$; (2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^3}=\frac{\pi^3}{32}$.

解 (1) 由上题的结论(1)可知,当 $x\in[0,\pi]$ 时,

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}\left(\pi-\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi^2}{6}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\cos\left(2n\cdot\frac{\pi}{2}\right)$$

从而
$$\frac{\pi^2}{4}-\frac{\pi^2}{6}=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2},$$

即
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}=\frac{\pi^2}{12}.$$

(2) 由上题(2)有

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}\left(\pi-\frac{\pi}{2}\right)=\frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\dfrac{(2n-1)\pi}{2}}{(2n-1)^3}=\frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^3},$$

于是 $\dfrac{\pi^2}{4}\times\dfrac{\pi}{8}=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^3}$, 即 $\dfrac{\pi^3}{32}=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^3}$.

(B)

1. 设 f 在 $[-\pi,\pi]$ 上可积,证明 Bessel 不等式

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)\leqslant\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\mathrm{d}x$$

成立，其中 a_0, a_n 与 $b_n(n=1,2,\cdots)$ 是 f 在 $[-\pi,\pi]$ 上的 Fourier 系数.

证 令 $S_n(x)=\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{k=1}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$ 为 f 在 $[-\pi,\pi]$ 上的 Fourier 级数的部分和，则 $[f(x)-S_n(x)]^2\geqslant 0$，于是

$$\begin{aligned}0&\leqslant\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)-S_n(x)|^2\mathrm{d}x\\&=\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\mathrm{d}x-2\int_{-\pi}^{\pi}f(x)S_n(x)\mathrm{d}x+\int_{-\pi}^{\pi}S_n^2(x)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

又因为 $1,\cos x,\sin x,\cos 2x,\sin 2x,\cdots,\cos kx,\sin kx,\cdots$ 是正交三角函数系，所以

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi}S_n^2(x)\mathrm{d}x&=\frac{a_0^2}{4}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{d}x+a_0\sum_{k=1}^{n}\left[a_k\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\mathrm{d}x+b_k\int_{-\pi}^{\pi}\sin kx\mathrm{d}x\right]+\\&\quad\int_{-\pi}^{\pi}\left[\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)\right]^2\mathrm{d}x\\&=\frac{\pi a_0^2}{2}+0+\sum_{k=1}^{n}\left[a_k^2\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 kx\mathrm{d}x+b_k^2\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 kx\mathrm{d}x\right]\\&=\frac{\pi a_0^2}{2}+\pi\sum_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2),\end{aligned}$$

由 $a_0,a_k,b_k(k=1,2,\cdots)$ 是 f 在 $[-\pi,\pi]$ 上的 Fourier 系数有

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)S_n(x)\mathrm{d}x&=\frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\mathrm{d}x+\\&\quad\sum_{k=1}^{n}\left[a_k\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos kx\mathrm{d}x+b_k\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin kx\mathrm{d}x\right]\\&=\frac{\pi a_0^2}{2}+\pi\sum_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2),\end{aligned}$$

于是
$$\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\mathrm{d}x-2\left[\frac{\pi a_0^2}{2}+\pi\sum_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2)\right]+\frac{\pi a_0^2}{2}+\pi\sum_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2)\geqslant 0,$$

即
$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2)\leqslant\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\mathrm{d}x.$$

又因为 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上可积，所以 $f^2(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上可积.
因此正项级数 $\dfrac{a_0^2}{2}+\sum\limits_{k=1}^{\infty}(a_k^2+b_k^2)$ 的部分和有界，因而该级数收敛，(正项级数部分和数列为单增数列)且其和

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2+b_k^2)=\lim_{n\to+\infty}\left[\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2)\right]\leqslant\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\mathrm{d}x.$$

2. 设 f 在 $[-\pi,\pi]$ 上的 Fourier 级数一致收敛于 f，并且 f 在 $[-\pi,\pi]$ 上平方可积，证明 Parseval 等式

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\mathrm{d}x$$

成立,其中 a_0,a_n 与 b_n 是 f 在$[-\pi,\pi]$上的 Fourier 系数.

证法一　由于 f 在$[-\pi,\pi]$上的 Fourier 级数$\frac{a_0}{2}+\sum\limits_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$一致收敛于 $f(x)$,所以其部分和函数列 $S_n(x)$一致收敛于函数 $f(x)$,即

$\forall\varepsilon>0,\exists N(\varepsilon)\in\mathbf{N}_+$,又 $\forall n>N(\varepsilon)$及 $\forall x\in[-\pi,\pi]$,恒有

$|S_n(x)-f(x)|<\sqrt{\varepsilon}$,即$|S_n(x)-f(x)|^2<\varepsilon$. 于是

$$\int_{-\pi}^{\pi}|S_n(x)-f(x)|^2\mathrm{d}x<\pi\varepsilon,$$

即
$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi}|S_n(x)-f(x)|^2\mathrm{d}x=0.$$

由上题的证明可知

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\mathrm{d}x.$$

证法二　$\overline{A}_n\xlongequal{\text{def}}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x+l)\cos nx\mathrm{d}x$,$l$ 为任一常数,则由周期函数的性质

$$\begin{aligned}\overline{A}_n&\xlongequal{t=x+l}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi+l}^{\pi+l}f(t)\cdot\cos n(t-l)\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\cos n(t-l)\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{\pi}(\cos nl)\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\cos nt\mathrm{d}t+\frac{1}{\pi}(\sin nl)\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\sin nt\mathrm{d}t\\&=a_n\cos nl+b_n\sin nl,\quad n=0,1,2,\cdots.\end{aligned}$$

记 $F(x)\xlongequal{\triangle}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)f(x+t)\mathrm{d}t$,$F(x)$的 Fourier 系数为 A_n,B_n,则

$$\begin{aligned}A_n&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F(x)\cos nx\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)f(x+t)\mathrm{d}t\right]\cos nx\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)f(x+t)\cos nx\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\cdot\left[\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x+t)\cos nx\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)(a_n\cos nt+b_n\sin nt)\mathrm{d}t\\&=a_n^2+b_n^2,\quad n=0,1,2,\cdots,b_0=0.\end{aligned}$$

又由于
$$F(-x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)f(-x+t)\mathrm{d}t$$
$$\xlongequal{u=-x+t}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi-x}^{\pi-x} f(x+u)f(u)\mathrm{d}u$$
$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)f(x+u)\mathrm{d}u=F(x),$$
所以 $F(x)$ 为偶函数，因此 $B_n=0,n=1,2,\cdots$. 由于 $f(x)$ 的 Fourier 级数一致收敛于 f，所以 f 在 $[-\pi,\pi]$ 上连续，$F(x)$ 在其上连续，则
$$F(x)=\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} A_n\cos nx$$
$$=\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)\cos nx,x\in(-\infty,+\infty).$$
令 $x=0$ 便得
$$F(0)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\mathrm{d}x=\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2).$$

综合练习题

在热辐射理论中，会遇到反常积分 $I=\int_0^{+\infty}\frac{x^3}{\mathrm{e}^x-1}\mathrm{d}x$ 的计算问题(见吴百诗主编《大学物理》下册，西安交通大学出版社，222～224 页)，试利用无穷级数的知识计算 I 的值.

解 当 $x>0$ 时，$0<\mathrm{e}^{-x}<1$，则
$$\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-x}}=1+\mathrm{e}^{-x}+(\mathrm{e}^{-x})^2+\cdots+(\mathrm{e}^{-x})^n+\cdots,\quad x>0,$$
$$\frac{\mathrm{e}^{-x}}{1-\mathrm{e}^{-x}}=\mathrm{e}^{-x}+\mathrm{e}^{-2x}+\cdots+\mathrm{e}^{-nx}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{e}^{-nx},\quad x>0,$$
从而
$$I=\int_0^{+\infty}\frac{x^3}{\mathrm{e}^x-1}\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}x^3\frac{\mathrm{e}^{-x}}{1-\mathrm{e}^{-x}}\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\left(x^3\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{e}^{-nx}\right)\mathrm{d}x$$
$$\xlongequal{\text{定理 3.6}}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_0^{+\infty}x^3\mathrm{e}^{-nx}\mathrm{d}x\right)\xlongequal{\text{分部积分}}6\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}.$$
下面计算 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$ 的值.

由练习 4.4(A)第 5 题(5)知
$$|x|=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\cos(2n-1)x,\quad x\in[-\pi,\pi],$$

即
$$b_n=0,a_0=\pi,a_n=\begin{cases}-\dfrac{4}{\pi}\cdot\dfrac{1}{(2k-1)^2}, & n=2k-1,k\in\mathbf{N}_+,\\ 0, & n=2k,\end{cases}$$

又$\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}|x|^2\mathrm{d}x=\dfrac{2}{3}\pi^2$，由 Parseval 等式

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|x|^2\mathrm{d}x=\frac{2}{3}\pi^2=\frac{1}{2}(\pi)^2+\sum_{k=1}^{\infty}\left(-\frac{4}{\pi}\frac{1}{(2k-1)^2}\right)^2 \text{成立.}$$

即
$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^4}=\frac{\pi^4}{6\times16}.$$

即
$$S_1=1+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{5^4}+\cdots+\frac{1}{(2k-1)^4}+\cdots=\frac{\pi^4}{6\times16},$$

$$S=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{5^4}+\frac{1}{6^4}+\cdots+\frac{1}{(2k-1)^4}+\frac{1}{(2k)^4}+\cdots,$$

即
$$S=S_1+S_2.$$

$$S_2=\frac{1}{2^4}+\frac{1}{4^4}+\cdots+\frac{1}{2^4k^4}+\cdots,$$

即
$$S_2=\frac{1}{2^4}\left(1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\cdots+\frac{1}{k^4}+\cdots\right)=\frac{1}{2^4}(S_1+S_2),$$

所以
$$S_2=\frac{1}{2^4-1}S_1=\frac{1}{15}S_1=\frac{1}{15}\times\frac{\pi^4}{6\times16},$$

所以
$$S=S_1+S_2=\left(\frac{1}{15}+1\right)S_1=\frac{16}{15}\times\frac{\pi^4}{6\times16}=\frac{\pi^4}{15\times6},$$

即
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{\pi^4}{15\times6},$$

故
$$I=6\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{\pi^4}{15}.$$

附录 1 讨论题与练习题的答案与提示

第一章 函数、极限、连续

第一讲 数列极限

3. 讨论题

1）(1)不能　　(2)能　　(3)不能　　(4)不能

3）这种说法不对，因为“越来越接近于 a”一般应理解为 $|a_n-a|$ 单调减，而 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=a$ 表示当无穷增大时，$|a_n-a|$ 趋于零，而 $|a_n-a|$ 单调减并不一定趋于零，同样，$|a_n-a|$ 趋于零并不一定单调减，如数列 $a_n=1+\dfrac{1}{n}$ 越来越接近于 0，事实上 $|a_n-0|=1+\dfrac{1}{n}$ 单调减，但 $a_n\nrightarrow 0$；而对数列 $b_n=\dfrac{1+(-1)^n}{n}$ 并不越来越接近于零，事实 $|b_n-0|$ 不单调减，但 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n=0$，因此，应当说 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=a$ 表示，只要 n 充分大，a_n 与 a 要多么接近都可以多么接近.

4）数列极限定义中的 ε 是用来刻画 a_n 与 a 的接近程度，其中 ε 的任意性刻画了 a_n 与 a 可任意接近. 而 a_n 与 a 可任意接近是要求 n 充分大以后，N 是用来刻画 n 无限增大，N 为 ε 有关，但 N 不是 ε 的函数，因为同一个 ε 对应的 N 不唯一.

5）“数列 $\{a_n\}$ 不以 A 为极限”与“数列 $\{a_n\}$ 发散”是完全不同的两个命题，数列 $\{a_n\}$ 不以 A 为极限包含两种情形，一种是数列 $\{a_n\}$ 不收敛，另一种是数列 $\{a_n\}$ 收敛但不收敛于 A.

如果用 $\varepsilon-N$ 语言刻画“数列 $\{a_n\}$ 不以 a 为极限”，那就是：$\exists\varepsilon_0>0$，$\forall N\in\mathbf{N}_+$，$\exists n>N$，使得 $|a_n-a|\geqslant\varepsilon_0$.

6）若数列 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 是两个发散数列，它们的和与积不一定发散，如 $a_n=(-1)^n$，$b_n=(-1)^{n-1}$ 都发散，但 $a_n+b_n=(-1)^n+(-1)^{n-1}=0$ 收敛，$a_nb_n=(-1)^n\cdot(-1)^{n-1}=-1$ 也收敛.

若数列$\{a_n\}$与$\{b_n\}$中有一个发散,另一个收敛,则它们的和一定发散,事实上,设$\{a_n\}$发散,$\{b_n\}$收敛,则$c_n=a_n+b_n$一定发散,否则$a_n=c_n-b_n$收敛,矛盾.

若数列$\{a_n\}$与$\{b_n\}$中有一个发散,另一个收敛,则它们的积可能收敛,也可能发散,如$a_n=(-1)^n$发散,$b_n=\dfrac{1}{n}$收敛,而$a_nb_n=\dfrac{(-1)^n}{n}$收敛,又如$a_n=(-1)^n$发散,$b_n=1+\dfrac{1}{n}$收敛,而$a_nb_n=(-1)^n+\dfrac{(-1)^n}{n}$发散.

7)(1)方法不正确,本题不能用极限的乘法法则,因为它不是有限项相乘.

(2)方法不正确.因为等式两端取极限要求等式两端极限需存在.但本题中$a_n=q^n(q>1)$.等式$a_{n+1}=qa_n$两端极限均不存在.

8)(1)正确

(2)当$a=0$时正确;当$a\neq0$时不正确.

(3)当$a\neq0$时正确;当$a=0$时不正确,如$a_n=\dfrac{1}{2^n}$.

9)从数列极限的定义可知,一个数列是否收敛,如果收敛,其极限值等于多少,与该数列的前有限项无关,因此,在单调有界准则中,若将"数列$\{a_n\}$单调"改为"从某一项之后数列$\{a_n\}$单调"结论仍成立.

数列$a_n=\dfrac{10}{1}\cdot\dfrac{11}{3}\cdot\cdots\cdot\dfrac{n+q}{2n-1}$不单调,收敛,且$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$.

10)不等价,两者有本质的区别.这里要求对每个固定的p,$\forall\varepsilon>0$,存在N(与ε有关,一般也与p有关),当$n>N$时,有$|a_{n+p}-a_n|<\varepsilon$,而Cauchy原理中要求$\forall\varepsilon>0$,存在$N$(仅与$\varepsilon$有关,与$p$无关),当$n>N$时,对一切的$p\in\mathbf{N}_+$,有$|a_{n+p}-a_n|<\varepsilon$,所以两者不等价,如数列$a_n=\sqrt{n}$发散,则肯定不满足Cauchy原理条件,但$a_{n+p}-a_n=\sqrt{n+p}-\sqrt{n}=\dfrac{p}{\sqrt{n+p}+\sqrt{n}}$,对任意自然数$p$,都有$\lim\limits_{n\to\infty}(a_{n+p}-a_n)=0$.

4. 练习题

1. 1)提示:$\left|\sqrt{n+1}-\sqrt{n}-0\right|=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}=\dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}<\dfrac{1}{\sqrt{n}}$.

2)提示:$\left|\dfrac{n^2-n+2}{3n^2+2n-4}-\dfrac{1}{3}\right|=\left|\dfrac{10-5n}{9n^2+6n-12}\right|<\dfrac{5n}{9n^2}\quad(n>2)$.

2. 1)1,提示:$\dfrac{2n+1}{n^2\times(n+1)^2}=\dfrac{1}{n^2}-\dfrac{1}{(n+1)^2}$

2)1,提示:利用本讲例1的3)中得到的结论.

3)1,提示:夹逼原理.

4)$\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}a_i$,提示:夹逼原理.

5) 0,提示:$0\leqslant(n+1)^{\alpha}-n^{\alpha}=n^{\alpha}\left[\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{\alpha}-1\right]$

$$\leqslant n^{\alpha}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)-1\right]=\frac{n^{\alpha}}{n}\to 0$$

6) 0,提示:利用本讲例 5 已证明的结论.

3. 略.

4. 提示:利用 Cauchy 原理.

5. 提示:由于$\{x_n\}$无上界,则对任意正整数 k,存在 x_{n_k},使 $x_{n_k}>k$.

6. 提示:必要性显然,充分性用反证法证明.

第二讲　函数的极限与函数的连续性

1. 讨论题

1) 存在 $\varepsilon_0>0$,$\forall\delta>0$,存在 x_1,虽有 $0<|x_1-x_0|<\delta$,但 $|f(x_1)-a|\geqslant\varepsilon_0$.

2) (1) 正确,由于 $g(x)=[f(x)+g(x)]-f(x)$,而 $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)+g(x)]$和 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$都存在,则 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$存在.

(2) 不正确,如 $f(x)=x$,$g(x)=\sin\dfrac{1}{x}$,则 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}x=0$ 存在,$\lim\limits_{x\to 0}f(x)g(x)=\lim\limits_{x\to 0}x\sin\dfrac{1}{x}=0$ 存在,但 $\lim\limits_{x\to 0}g(x)=\lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{1}{x}$不存在.若将条件 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在改为 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在且不为零,则原题结论正确.

3) 若 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)\neq 0$,由函数极限的局部保号性知,存在邻域 $\mathring{U}(x_0,\delta)$,$\forall x\in\mathring{U}(x_0,\delta)$,$g(x)\neq 0$,这就保证了分式$\dfrac{f(x)}{g(x)}$在 $\mathring{U}(x_0,\delta)$内有意义,且

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to x_0}f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0}g(x)}.$$

若只假设 $x\in\mathring{U}(x_0,\delta)$时,$g(x)\neq 0$,此时,有可能 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=0$,于是极限除法法则不成立,如 $g(x)=(x-x_0)^2$,当 $x\in\mathring{U}(x_0,\delta)$时,$g(x)\neq 0$,但 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=0$.

4) 不一定,例如,设 $u=f(x)=x\sin\dfrac{1}{x}$,$g(u)=\begin{cases}u, & u\neq 0,\\ 1, & u=0.\end{cases}$则 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}x\sin\dfrac{1}{x}=0$,$\lim\limits_{u\to 0}g(u)=\lim\limits_{u\to 0}u=0$.

而 $g[f(x)]=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq\dfrac{1}{n\pi}, \\ 1, & x=\dfrac{1}{n\pi} \end{cases}$　$(n=\pm1,\pm2,\cdots)$.

取 $x_n=\dfrac{1}{n\pi}$，$\lim\limits_{n\to\infty} g[f(x_n)]=1$，则 $\lim\limits_{x\to0} g[f(x)]=0$　不成立.

5）无穷大量一定是无界变量，但无界变量不一定是无穷大量，如数列 $x_n=[1+(-1)^n]n$ 是无界变量，但不是无穷大量.

6）不一定. 如数列 $x_n=[1+(-1)^n]n$，$y_n=[1+(-1)^{n-1}]n$ 都是无界变量，但 x_ny_n 不是无界变量，事实上 $x_ny_n=0$.

7）不成立.

8）一般不能. 如对极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}$，若将分子中的 $\tan x$ 和 $\sin x$ 用其等价无穷小 x 代换，将得到错误结果 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-x}{x^3}=0$，但事实上

$$\lim_{x\to0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{\tan x(1-\cos x)}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{x\cdot\frac{1}{2}x^2}{x^3}=\frac{1}{2}.$$

这才是正确的解法.

9）不一定. 如函数 $f(x)=\begin{cases} x^2, & x\text{ 为无理数}, \\ 0, & x\text{ 为有理数}, \end{cases}$ 只在 $x=0$ 处连续，其余点均不连续.

10）一般说来不成立，如 $f(x)=x^2$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续，但它在该区间无最大值，也无界，也不一致连续，但如果适当加强条件，这些性质仍然保留.

(1) 有界性定理：设 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上连续，且 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 存在，则 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上有界.

(2) 最大最小值定理：设 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上连续，$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$，且存在 $x_1,x_2\in[a,+\infty)$，使 $f(x_1)\geqslant A$，$f(x_2)\leqslant A$，则 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上必有最大值和最小值.

(3) 零点定理：设 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上连续，$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 存在且与 $f(a)$ 异号，则 $f(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 内必有零点.

(4) 一致连续性定理：设 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上连续，$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 存在，则 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上一致连续.

4. 练习题

1. 1）提示：$\left|\dfrac{x^2}{1+x}-\dfrac{1}{2}\right|=\left|\dfrac{2x^2-1-x}{2(1+x)}\right|=\left|\dfrac{2x+1}{2(1+x)}\right||x-1|$ 令 $|x-1|<1$，则 $\left|\dfrac{2x+1}{2(1+x)}\right|<1$，从而有 $\left|\dfrac{x^2}{1+x}-\dfrac{1}{2}\right|<|x-1|$.

2）提示：$\left|\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}-(-1)\right|=\left|\dfrac{x+\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}}\right|=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}(\sqrt{1+x^2}-x)}$

$$\leqslant\frac{1}{-x}\quad(x<0).$$

3）$\forall M>0$，要使 $e^{\frac{1}{x}}>M$，只要 $0<x<\dfrac{1}{\ln M}$.

2. 1）1.　　2）2.

3）$\dfrac{1}{2}$.　　4）1.

5）$\dfrac{1}{a}$.　　6）$-\dfrac{1}{6}$.

7）$e^{-\frac{1}{2}}$.　　8）$\dfrac{1}{3}$.

9）$\sqrt[3]{6}$.

3. $\dfrac{4}{3}$.

4. 1）$x=0$ 和 $x=1$ 为可去间断点；$x=-1$ 和 $x=\dfrac{1}{2}$ 为无穷间断点.

2）$x=0$　为可去间断点.

3）$x=0$　为无穷间断点.

5. $a=0,b=1$.

6. 提示：在区间 $(-\infty,-1]$，$[-1,1]$，$[1,+\infty)$ 上用零点定理.

7. 提示：考虑辅助函数 $F(x)=f(x+l)-f(x)$，在区间 $[0,1-l]$ 上用零点定理.

8. 提示：利用介值定理.

9. 提示：$\left|\sqrt{1+x_2^2}-\sqrt{1+x_1^2}\right|=\dfrac{|x_1+x_2|}{\sqrt{1+x_2^2}+\sqrt{1+x_1^2}}|x_1-x_2|\leqslant|x_1-x_2|$.

10. 提示：令 $x_n=e^{-n}$，$y_n=e^{-(n+1)}$，$x_n-y_n=\dfrac{1}{e^n}-\dfrac{1}{e^{n+1}}=\dfrac{e-1}{e^{n+1}}\to0(n\to\infty)$，但 $|f(x_n)-f(y_n)|=|-n+(n+1)|=1$.

第二章　一元函数微分学及其应用

第一讲　导数概念与求导基本法则

1. 讨论题

1）只有 D 是正确选项.

2）如果函数 $f(x)$ 在 x_0 点可导，既不能推出 $f(x)$ 在 x_0 某邻域可导，也不能推出 $f(x)$ 在 x_0 某邻域内连续，如函数 $f(x)=\begin{cases}x^2, & \text{当 } x \text{ 为有理数},\\ 0, & \text{当 } x \text{ 为无理数}.\end{cases}$ 仅在 $x=0$ 处可导，也仅在 $x=0$ 处连续.

3）如果函数 $f(x)$ 在 x_0 处左、右导数都存在，那么 $f(x)$ 在 x_0 处一定连续. 因为由左导数存在可推知左连续，由右导数存在可推知右连续，连续等价于左连续且右连续，反之则不然.

4）有区别. 符号 $f'_+(x_0)$ 表示函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的右导数，即极限

$$f'_+(x_0)=\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0},$$

而符号 $f'(x_0+0)$ 表示导函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的右极限，即

$$f'(x_0+0)=\lim_{x\to x_0^+}f'(x),$$

所以，$f'_+(x_0)$ 与 $f'(x_0+0)$ 不同. 一般说来 $f'_+(x_0)$ 与 $f'(x_0+0)$ 的存在性也不一定相同，例如，设

$$f(x)=\begin{cases}x^2+2, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

当 $x\neq 0$ 时，$f'(x)=2x$，则 $f'(0+0)=\lim\limits_{x\to 0^+}2x=0$.

而
$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x^2+1}{x}=+\infty$$

再例如：
$$\varphi(x)=\begin{cases}x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$$

$$\varphi'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{x^2\sin\dfrac{1}{x}}{x}=0,$$

当 $x\neq 0$ 时，$\varphi'(x)=2x\sin\dfrac{1}{x}-\cos\dfrac{1}{x}$，

$\varphi'(0+0)=\lim\limits_{x\to0^+}\left(2x\sin\dfrac{1}{x}-\cos\dfrac{1}{x}\right)$不存在，由此可见 $\varphi'_+(0)$与 $\varphi'(0+0)$不是一回事.

5）我们知道，可导与可微是等价的.也就是说导数与微分的存在性是一样的，但导数与微分有区别，函数 $f(x)$在点 x_0 处的导数 $f'(x_0)$是一个数，它是函数 $f(x)$在点 x_0 处的变化率；而函数 $f(x)$在点 x_0 处的微分 $\mathrm{d}y=f'(x_0)\Delta x$ 是函数 $f(x)$在点 x_0 处的改变量 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$的线性主部，微分 $\mathrm{d}y$ 是改变量 Δy 的近似值，微分 $\mathrm{d}y$ 是 Δx 的线性函数；从几何意义上说，导数 $f'(x_0)$是曲线 $y=f(x)$在点$(x_0,f(x_0))$处的切线斜率，而微分 $\mathrm{d}y=f'(x_0)\Delta x$ 则是曲线 $y=f(x)$在点$(x_0,f(x_0))$处的切线在点 x_0 处的纵坐标的改变量.

6）不一定成立.

7）不一定.

8）不一定.

9）(1)正确.(2)正确.(3)不正确，如 $f(x)=\ln x$ 单调增，但 $f'(x)=\dfrac{1}{x}$单调减.

10）不一定.如 $y=\sqrt[3]{x}$在 $x=0$ 处不可导，但该曲线在点(0,0)处存在切线，即 y 轴.

4. 练习题

1. D　　2. B

3. B　　4. C

5. B　　6. $(a+b)f'(x_0)$

7. $\varphi(x)=\mathrm{e}^{\frac{xf'(x)}{f(x)}}$，$\varphi'(x)=\mathrm{e}^{\frac{xf'(x)}{f(x)}}\cdot\dfrac{(f'(x)+xf''(x))f(x)-xf'^2(x)}{f^2(x)}$.

8. 1）$f(x)=kx(x+2)(x+4)$.　　2）$k=-\dfrac{1}{2}$.

9. 1）$\alpha>0$；　2）$\alpha>1$；　3）$\alpha>2$.

10. 1）$\sqrt{a^2+x^2}$；　2）$\dfrac{\mathrm{e}-1}{\mathrm{e}^2+1}$；

3）$-4x^2\sin[f(x^2)]f'^2(x^2)+4x^2\cos[f(x^2)]f''(x^2)+2\cos[f(x^2)]f'(x^2)$.

11. 1）$\dfrac{8(-1)^n n!}{(x-2)^{n+1}}-\dfrac{(-1)^n n!}{(x-1)^{n+1}}$；

2）$\dfrac{3}{8}4^n\cos\left(4x+n\cdot\dfrac{\pi}{2}\right)$；

3）$\dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!3^n}{2}\left[\dfrac{1}{(3x+2)^n}+\dfrac{1}{(3x-2)^n}\right]$.

12. $\dfrac{(-1)^{n-1}n!^2}{n-2}$.

13. 1) -2;　　2) $\dfrac{f''(y)-[1-f'(y)]^2}{x^2[1-f'(y)]^3}$.

14. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{2}+t^2, \dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{1}{2e^{2t^2}}$.

15. 提示：由 $f(0)=0$，$f'(0)$存在知，$f(x)=f'(0)x+o(x)(x\to 0)$，则 $f\left(\dfrac{k}{n^2}\right)=f'(0)\dfrac{k}{n^2}+o\left(\dfrac{k}{n^2}\right)$　$(k=1,2,\cdots)$，由此可推得 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\dfrac{f'(0)}{2}$.

第二讲　微分中值定理及 L'Hospital 法则

3. 讨论题

1) Rolle 定理有三个条件，缺少一个条件 Rolle 定理就可能不成立，具体例子见《教材》4.2.

尽管如此，但不能说这三个条件是 Rolle 定理的必要条件，例如，函数

$$\varphi(x)=\begin{cases}x^2, & -1\leqslant x\leqslant 1,\\ x+1, & 1<x\leqslant 2\end{cases}$$

在区间$[-1,2]$上 Rolle 定理的三个条件都不满足，但在开区间$(-1,2)$内存在点 $x=0$，使 $f'(0)=0$.

2) 不成立，如 $f(x)=x^3$ 在$[-1,1]$上连续，在$(-1,1)$内可导，且存在 $x=0$，使 $f'(0)=0$，但不存在两点 $\alpha,\beta\in[-1,1]$，使 $f(\alpha)=f(\beta)$，因为 $f(x)=x^3$ 是一个严格单调增的函数.

3) Rolle 定理的结论成立，事实上它是 Rolle 定理的一种推广，证明如下：令

$$F(x)=\begin{cases}f(a+0), & x=a,\\ f(x), & a<x<b,\\ f(b-0), & x=b.\end{cases}$$

由原题设可知 $F(x)$在$[a,b]$上满足 Rolle 定理的三个条件，则存在 $\xi\in(a,b)$，使 $F'(\xi)=0$，而 $F'(\xi)=f'(\xi)$，则 $f'(\xi)=0$.

4) 见本书第一部分，第二章中的“4. 中值定理在微分学中的地位和作用”

5) 若函数 $f(x)$在$[x_0,x_0+\delta)$上连续，在$(x_0,x_0+\delta)$内可导，且 $f'(x_0+0)=\lim\limits_{x\to x_0^+}f'(x)$存在，则 $f(x)$在 x_0 点处右导数 $f'_+(x_0)$一定存在，且 $f'_+(x_0)=f'(x_0+0)$.

6) 不会. 见本书第一部分第二章中的“7. 可微函数导函数几个重要性质中的性质 4°”.

7)（1）不正确. 错误出在第二和第三个等号，原题只假定 $f(x)$ 在 x_0 点二阶可导，而第二个等号右端出现了 $f''(x_0+h)$ 和 $f''(x_0-h)$，这两个二阶导数不一定存在；第三个等号需要条件 $f''(x)$ 在 x_0 处连续，而原题只假定 $f''(x_0)$ 存在，条件不满足.

（2）正确的解法有两种；

解法一　$\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(x_0+h)-2f(x_0)+f(x_0-h)}{h^2}=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f'(x_0+h)-f'(x_0-h)}{2h}$

$$=\lim_{h\to0}\frac{[f'(x_0+h)-f'(x_0)]-[f'(x_0-h)-f'(x_0)]}{2h}$$

$$=\frac{1}{2}[f''(x_0)+f''(x_0)]=f''(x_0).$$

解法二　由 Taylor 定理知

$$f(x_0+h)=f(x_0)+f'(x_0)h+\frac{f''(x_0)}{2!}h^2+o(h^2)$$

$$f(x_0-h)=f(x_0)-f'(x_0)h+\frac{f''(x_0)}{2!}h^2+o(h^2)$$

则 $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(x_0+h)-2f(x_0)+f(x_0-h)}{h^2}=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{\frac{f''(x_0)}{2!}h^2+\frac{f''(x_0)}{2!}h^2+o(h^2)}{h^2}$

$$=f''(x_0)$$

（3）若将原条件“$f(x)$ 在 x_0 处二阶可导”改为“$f(x)$ 在 x_0 点二阶导数连续”，原解法正确.

8）见本书第一部分第二章中的“6. L'Hospital 法则的几何意义和应用中应当注意的几个问题”.

9）见本书第一部分第二章中的“5. Taylor 定理的内涵及其应用”.

4. 练习题

1. 1）$\dfrac{1}{2}$；　　2）$\dfrac{1}{12}$；

　3）1；　　4）$-\dfrac{1}{2}$；

　5）$\dfrac{a^2}{2}$；　　6）$e^{\frac{1}{3}}$

2. -1.

3. $a=\dfrac{1}{2}$，$n=4$.

4. 提示：令 $f(x)=x+p+q\cos x$，注意到 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$. $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$，利用零点定理证明原方程至少有一实根. 又 $f'(x)=1-q\sin x\neq0$，由本讲例 12

所得结论知 $f(x)$ 最多一个零点，则原方程恰有一个实根.

5. 提示：不妨设 $c\in(a,b)$. $f(c)\neq f(a)$，若 $f(c)>f(a)$，在 $[a,c]$ 上对 $f(x)$ 用 Lagrange 定理原题得证；若 $f(c)<f(a)$，在 $[c,b]$ 上对 $f(x)$ 用 Lagrange 定理原题得证.

6. 提示：考虑辅助函数 $\varphi(x)=(b-x)[f(x)-f(a)]$，对 $\varphi(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上用 Rolle 定理.

7. 提示：1) 令 $F(x)=f(x)-x$，对 $F(x)$ 在 $\left[\frac{1}{2},1\right]$ 上用零点定理.

2) 构造辅助函数 $\varphi(x)=\mathrm{e}^{-\lambda x}[f(x)-x]$，对 $\varphi(x)$ 在 $[0,\eta]$ 上用 Rolle 定理.

8. 提示：事实上，由 $af(b)-bf(a)=0$ 知，$\dfrac{f(a)}{a}=\dfrac{f(b)}{b}$. 构造辅助函数 $F(x)=\dfrac{f(x)}{x}$，对 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上用 Rolle 定理本题即可得证.

9. 提示：对 $f(x)$ 分别在区间 $\left[0,\frac{1}{2}\right]$ 和 $\left[\frac{1}{2},1\right]$ 上用 Lagrange 定理.

10. 提示：由 Taylor 公式得，$f(x)=f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)+f'\left(\dfrac{a+b}{2}\right)\left(x-\dfrac{a+b}{2}\right)+\dfrac{f''(\xi)}{2!}\left(x-\dfrac{a+b}{2}\right)^2$. 在该式中分别令 $x=a$ 和 $x=b$，然后将两式相加.

11. 提示：设 $f(c)=\min\limits_{0\leqslant x\leqslant 1}f(x)=-1$，则 $c\in(0,1)$，且 $f'(c)=0$，$f(x)=f(c)+f'(c)(x-c)+\dfrac{f''(\xi)}{2!}(x-c)^2=-1+\dfrac{f''(\xi)}{2!}(x-c)^2$，在该式中分别令 $x=0$ 和 $x=1$.

12. 提示：由 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{(x-1)^2}=1$ 知，$f'(1)=0$. 对 $f'(x)$ 分别在区间 $[0,1]$ 和 $[1,a]$ 上用 Lagrange 定理.

第三讲　函数性态的研究

1. 讨论题

1) 不能. 如函数 $f(x)=\begin{cases}2-x^2\left(2+\sin\dfrac{1}{x}\right), & x\neq 0,\\ 2, & x=0,\end{cases}$ 它在 $x=0$ 处取得极大值 $f(0)=2$. 但由于

$$f'(x)=\begin{cases}-2x\left(2+\sin\dfrac{1}{x}\right)+\cos\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$$

则在 $x=0$ 的一个充分小的去心邻域内，$f'(x)$的符号决定于 $\cos\dfrac{1}{x}$的符号，而 $\cos\dfrac{1}{x}$在 $x=0$ 的任何去心邻域内都无限次的改变正负号，因此，$f(x)$在 $x=0$ 的任何左半邻域非单调增，而在 $x=0$ 的任何右半邻域非单调减.

2）不能. 如函数 $f(x)=\begin{cases}x+2x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$

$f'(x)=\begin{cases}1+4x\sin\dfrac{1}{x}-2\cos\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 1, & x=0,\end{cases}$ $f'(0)=1>0$，由 $f'(x)$的表达式可知，在 $x=0$ 的任何邻域内 $f'(x)$都可正可负，则 $f(x)$在 $x=0$ 的任何邻域都非单调增.

3）不一定. 因为函数 $f(x)$在区间$[a,b]$上的最大（小）值可能在区间$[a,b]$的端点处取到，按照极值的定义，端点不是极值点. 若函数 $f(x)$在$[a,b]$上的最大（小）值是在区间(a,b)内取到，则该最大（小）值一定是 $f(x)$的极大（小）值.

4）用反证法可以来说明. 设 $f(x)$在区间 I 上连续，只有唯一极小值点 x_0，而无极大值点. 如果 $f(x_0)$不是 $f(x)$在区间 I 上的最小值，则必存在 $x_1\in I$，使 $f(x_1)<f(x_0)$，不妨设 $x_1<x_0$.

因为 $f(x)$在$[x_1,x_0]$上连续，利用连续函数最大、最小值定理，存在 $\bar{x}\in[x_1,x_0]$，使 $f(x)$在 $x=\bar{x}$ 处取得它在区间$[x_1,x_0]$上的最大值. 现证 $\bar{x}\in(x_1,x_0)$. 这是因为

i）$f(x_1)<f(x_0)$，故 $\bar{x}\neq x_1$；

ii）若 $\bar{x}=x_0$，由于 x_0 为 $f(x)$的极小值点，而点 x_0 又是 $f(x)$在$[x_0,x_1]$上的最大值点，因此存在 $\delta>0$，使 $f(x)$在$[x_0,x_0+\delta)$内为常数，这与 x_0 为 $f(x)$在 I 上唯一的极小值点矛盾.

于是 $\bar{x}\in(x_1,x_0)$，从而 $\bar{x}$ 成为 $f(x)$的极大值点，这与 $f(x)$在区间 I 上不存在极大值点矛盾.

应当注意的是上述区间 I 为开区间、闭区间或无穷区间，结论都成立. 上述结论在最大（小）值问题中很有用处.

5）利用导数知识证明不等式常用的方法有以下五种.

（1）利用函数的单调性；

（2）利用 Lagrange 定理；

（3）利用函数的最大最小值；

（4）利用函数凸性；

（5）利用 Taylor 公式.

具体例子见本讲的例 9 至例 16.

6）讨论方程根的存在性常用的有以下两种方法：

（1）利用连续函数的零点定理；

（2）利用 Rolle 定理. 即：为讨论方程 $f(x)=0$ 根的存在性，构造函数 $F(x)$，使 $F'(x)\equiv f(x)$，对 $F(x)$ 用 Rolle 定理便可证明方程 $f(x)=0$ 根的存在性.

讨论方程根的个数常用的有以下两种方法：

（1）利用函数单调性；

（2）利用结论：若在区间 I 上 $f^{(n)}(x)\neq 0$，则方程 $f(x)=0$ 在区间 I 上最多 n 个实根（该结论已在第二章第二讲例 12 中证过）

4. 练习题

1. B.　　2. C.　　3. $a\geqslant 2$.　　4. $V_{\min}=\frac{8}{3}\pi r^3$.

5. 提示：证明 $\left(\frac{f(x)}{x}\right)'>0$.

6. 1）提示：考虑函数 $f(x)=\frac{\sin\frac{x}{2}}{x}-\frac{1}{\pi}$，利用单调性.

2）提示：考虑函数 $f(x)=(x^2-1)\ln x-(x-1)^2$，利用单调性.

3）提示：$\pi^e<e^\pi$ 等价于 $e\ln\pi<\pi\ln e$，也等价于 $\frac{\ln\pi}{\pi}<\frac{\ln e}{e}$，考虑函数 $f(x)=\frac{\ln x}{x}$，利用单调性.

4）提示. 令 $f(x)=(a+x)\ln\frac{x}{a}-2(x-a)$，利用 $f(x)$ 的单调性证明要证的不等式.

5）提示：利用函数 $f(x)=x\ln x$ 的凸性.

7. 在区间 $(0,e)$ 和 $(e,+\infty)$ 内分别各有一个实根.

8. $k=\frac{3}{9}\sqrt{3}$ 或 $k\leqslant 0$.

9. 提示：考虑辅助函数 $F(x)=e^x f(x)$，对 $F(x)$ 在方程 $f(x)=0$ 的两个实根为端点的区间上用 Rolle 定理.

10. 提示：考虑辅助函数 $F(x)=e^x f(x)$. 利用 $F(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上的单调性证明要证的不等式.

11. 提示：不妨设 $f'_+(a)>0$，$f'_-(b)<0$，则存在 $x_1\in(a,a+\delta)$，$x_2\in(b-\delta,b)$，使 $f(x_1)>f(a)$，$f(x_2)>f(b)$. 则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最大值不可能在区间 $[a,b]$ 的两个端点取得，故存在 $c\in(a,b)$，使 $f(c)$ 为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最大值，则 $f(c)$ 为极大值，又 $f(x)$ 可导. 故 $f'(c)=0$.

第三章 一元函数积分学及其应用

第一讲 微积分基本公式与基本定理

3. 讨论题

(1) 答:不一定.例如函数 $F(x)=\begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x^2}, & x\neq 0, \\ 0, & x=0, \end{cases}$ 易知 $F(x)$在$(-\infty,+\infty)$上可导,且 $f(x)=F'(x)$在 $x=0$ 的任一邻域内无界,故函数 $f(x)$在包含 $x=0$ 的区间上不可积.

(2) 答:首先要弄清楚是对哪个变量求导,把积分上限的函数的自变量与积分变量区分开来.其次要注意,若积分上限和下限分别是 x 的可导函数,则有下列求导公式:$\left[\int_{\psi(x)}^{\varphi(x)} f(t)\,\mathrm{d}t\right]'=f[\varphi(x)]\varphi'(x)-f[\psi(x)]\psi'(x)$.

(3) 答:1°是对的;2°是错的.这是因为 $\arctan x$ 在$[-1,1]$上是连续函数 $\dfrac{1}{1+x^2}$的一个原函数,可以用 Newton-Lebniz 公式.

在 2°中$-\arctan\dfrac{1}{x}$不是$\dfrac{1}{1+x^2}$在$[-1,1]$上的原函数,这是因为当 $x=0$ 时,$-\arctan\dfrac{1}{x}$不连续,不可导,不能用 Newton-Lebniz 公式.

(4) 答:一般情况下是不行的,如函数 $f(x)=\begin{cases} 1, & x=0, \\ 0, & x\neq 0 \end{cases}$ 在区间$[-1,1]$上非负,可积且不恒等于零,但是$\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x=0$.

(5) 答:用积分中值定理得到第一个等式是正确的,但是不能简单地断定 $\lim\limits_{p\to+\infty}(\sin\xi)^p=0$.

这里的$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^p x\,\mathrm{d}x=\dfrac{\pi}{2}(\sin\xi)^p$ 应当写成$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^p x\,\mathrm{d}x=\dfrac{\pi}{2}(\sin\xi_p)^p$.因为点 ξ_p 是对于函数 $\sin^p x$ 运用积分中值定理得到的,所以一般与 p 有关,当 $p\to+\infty$ 时,有可能 $\xi_p\to\dfrac{\pi}{2}$.从而 $\lim\limits_{p\to+\infty}\sin\xi_p=1$,于是 $\lim\limits_{p\to+\infty}(\sin\xi_p)^p$ 实际上是一个"1^∞"型不定式极限,不能直接断定 $\lim\limits_{p\to+\infty}(\sin\xi_p)^p=0$.

(6) 答:回答是肯定的,可以研究上限积分 $F(x)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ 对于这个函数

在区间$[a,b]$上运用拉格朗日定理，就知道存在$\xi\in(a,b)$，使得$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=F(b)-F(a)=F'(\xi)(b-a)=f(\xi)(b-a)$

附练习题的答案与提示：

① 1° $\sin 1$. 2° $\ln 2$

③ 1° $\frac{1}{20}$. 2° $-\frac{3}{2}$. 3° $2f(0)$

④ 由 L'Hospital 法则. $a=4,b=1$

⑤ $F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ $F(a)=0$ $F(b)=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x>0$. 据介值定理即可.

⑥ 求导即可.

⑦ 令 $g(x)=F(x)-\ln x$ $g(1)=0$ $g'(x)=\frac{\mathrm{e}^x}{x}-\frac{1}{x}>0(x>0)$

⑧ 求导然后再用积分中值定理即得唯一驻点 $x=0$.

⑨ 因为 $f(x)$可积，知$\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 连续，即得 $f(x)=\sqrt{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}$ 连续，从而知$\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 可导，将题设关系式两边同时平方，再对 x 求导，得 $2f(x)f'(x)=f(x)$，于是有 $f'(x)=\frac{1}{2}$，故 $f(x)=\frac{x}{2}+C$，又由关系式可得 $f(0)=0$，代入得 $C=0$，所以 $f(x)=\frac{x}{2}$，$x\in[0,a]$.

第二讲 积分法与定积分的应用

3. 讨论题

(1) 答：上述推理过程产生错误的原因是对于不定积分换元法的一些模糊认识.

在上式中，$I=\int\frac{\mathrm{d}x}{x+\sqrt{1+x^4}}$表示函数$\frac{1}{x+\sqrt{1+x^4}}$的不定积分；$\int\frac{\mathrm{d}t}{t+\sqrt{1+t^4}}$表示函数$\frac{1}{t+\sqrt{1+t^4}}$的不定积分. 如果这里的 x 和 t 是没有任何关系的变量，那么 $y=\frac{1}{x+\sqrt{1+x^4}}$和 $y=\frac{1}{t+\sqrt{1+t^4}}$为同一函数关系. 但是在上述推理过程中，$x$ 和 t 不是互相独立的变量，它们的关系是 $x=\frac{1}{t}$.

(2) 答：错误在于对$\int\frac{\cos x}{\sin x}\mathrm{d}x$ 的理解. $\int\frac{\cos x}{\sin x}\mathrm{d}x$ 并不是一个具体的函数，

而是彼此相差一个常数的函数族. 因此对于任意常数 C, $\int \frac{\cos x}{\sin x}dx = \int \frac{\cos x}{\sin x}dx + C$ 是正确的，因为等式两端是同一个函数族. 于是等式

$$\int \frac{\cos x}{\sin x}dx = 1 + \int \frac{\cos x}{\sin x}dx = 2 + \int \frac{\cos x}{\sin x}dx = \cdots = n + \int \frac{\cos x}{\sin x}dx$$

是正确的，但是不能简单地从每个等式两端中消去 $\int \frac{\cos x}{\sin x}dx$.

(3) 答：错误的原因是所用的变换不符合定积分换元公式成立的条件. 当用 $u = \tan x$ 变换原积分时，我们是将被积函数 $\frac{1}{1+\cos^2 x}$ 中的 x 用它的反函数代换，由于函数 $u = \tan x$ 在区间 $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi\right]$ 上有间断点 $x = \frac{\pi}{2}$，易知其反函数在区间 $[-1, 1]$ 上也必定有间断点，不满足定积分换元法的要求.

(4) 答：不对，在极坐标系中，函数 $\rho = \rho(\theta)$ 的周期并不等于使函数图形开始出现重叠的 θ 的变化周期. 比如本例中，虽然 $\rho\left(\theta + \frac{2}{3}\pi\right) = \rho(\theta)$，但 (ρ, θ) 和 $\left(\rho, \theta + \frac{2}{3}\pi\right)$ 并不表示同一个点. 然而，由于 $\rho(\theta + \pi) = \sin 3(\theta + \pi) = -\sin 3\theta = -\rho(\theta)$，而 (ρ, θ) 和 $(-\rho, \theta + \pi)$ 表示同一个点，故使图形开始出现重叠的 θ 的变化周期是 π，因此计算时需考虑的 θ 的变化，变化范围应该是 $[0, \pi]$. 容易确定三叶玫瑰线的三叶 θ 的范围分别为 $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$、$\left[\frac{\pi}{3}, \frac{2}{3}\pi\right]$、$\left[\frac{2}{3}\pi, \pi\right]$，由于三叶是对称的，因此有 $A = 3\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{2}\sin^2 3\theta d\theta$.

(5) 为什么在计算引力时，一定要将积分表达式建立在引力的各分量上？

答：这一问题可以两个方面来讲. 首先，定积分中的被积函数是数值函数，所以积分只能用于计算数量的累积，而不能用于计算向量的累积. 其次，也是更重要的，客观世界中力的合成并不是力的大小的叠加，而是要按平行四边形法则合成. 在建立了直角坐标系后，这一个平行四边形法则恰好与力的分量的简单叠加相一致，这一方面表明可以用积分来计算引力，但同时要求积分表达式必须建立在引力的各分量上.

4. 练习题

(1) 1°　令 $\sqrt{1+e^x} = t$.

2°　原式 $= \int \frac{(x^2 + 1 - x^2)\arctan x}{x^2(1+x^2)}dx$.

3°　$-\frac{1}{3x^2}\left(\ln^2 x + \frac{2}{3}\ln x + \frac{2}{9}\right) + C$.

4°　$-e^{\sqrt{1-x^2}} + C$.

5° $\dfrac{(x-2)e^x}{x+2}+C.$

6° $\ln\left|\dfrac{xe^x}{1+xe^x}\right|+C.$

7° $-\tan\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{x}{2}\right)+C.$

8° i) $a=0,b\neq 0$; ii) $a\neq 0,b=0$; iii) $ab\neq 0$, $\dfrac{1}{ab}\arctan\left(\dfrac{b}{a}\tan x\right)+C.$

9° $-\dfrac{1}{2}(e^{-2x}\arctan e^x+e^x+\arctan e^x+C).$

10° $-\dfrac{1}{x-1}\ln x+\ln(x-1)-\ln x+C.$

(2) $I_n=\dfrac{1}{m+1}(\ln^n x)x^{m+1}-\dfrac{n}{m+1}I_{n-1}$, $I_2=\dfrac{1}{6}x^6\ln^2 x-\dfrac{1}{18}x^6\ln x+\dfrac{1}{108}x^6+C.$

(3) 考察积分 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x-\sin x}{1+x^2}dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos x-\sin x}{1+x^2}dx+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x-\sin x}{1+x^2}dx.$

用变量代换 $x=\dfrac{\pi}{2}-t$ 将后一积分变形.

(4) $\dfrac{1}{2}(\ln x)^2$, $f\left(\dfrac{1}{x}\right)=\displaystyle\int_1^{\frac{1}{x}}\frac{\ln t}{1+t}dt\,(x>0)$ 用换元法 $\dfrac{1}{t}=u.$

(5) $\dfrac{2}{\pi}.$

(6) 2.

(7) $xf(x^2)$. 提示：令 $u=x^2-t^2$.

(8) $\displaystyle\int_a^b f(x)dx=\int_a^b\left(\int_a^x f'(t)dt\right)dx.\quad \int_a^x f'(t)dt=f'(\xi_x)(x-a).$

(9) 设 $f(x_0)=\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)dx.\ f(x)=f(x_0)+\int_{x_0}^x f'(t)dt,$

$$|f(x)|\leqslant|f(x_0)|+\left|\int_{x_0}^x |f'(t)|dt\right|\leqslant|f(x_0)|+\int_a^b|f'(t)|dt.$$

(10) 做辅助函数 $F(x)=\displaystyle\int_0^x f(t)dt-\frac{2}{3}x\int_0^x f(t)dt.$

(11) $S_{扇}=\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{\theta_0}r^2d\theta=\frac{1}{2}\int_0^{\theta_0}4\cos 2\theta d\theta=\sin 2\theta.\ S_D=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}r^2d\theta=1$

由条件 $S_{扇}=\dfrac{1}{2}S_D.\ \theta_0=\dfrac{\pi}{12}$. M 的极坐标为 $\left(\sqrt{2\sqrt{3}},\dfrac{\pi}{12}\right).$

(12) $V(\xi)=\pi\displaystyle\int_0^{\xi}\frac{x}{(1+x^2)^2}dx.\ \lim_{\xi\to+\infty}V(\xi)=\frac{\pi}{2}$, $V(a)=\dfrac{\pi}{2}\left(1-\dfrac{1}{1+a^2}\right)$, $a=1.$

(13) 椭圆方程为 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$，则 $p=2\rho g\displaystyle\int_0^a(c+x)\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}dx$

$$=2\rho gab\cdot\left(\frac{\pi}{4}c+\frac{1}{3}a\right).$$

(14) $\mathrm{d}F(t)=k\rho^2\mathrm{d}t\int_{-a}^{0}\frac{\mathrm{d}s}{(t-s)^2}=k\rho^2\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{t+a}\right)\mathrm{d}t$,

$$F=k\rho^2\int_{c}^{b+c}\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{t+a}\right)\mathrm{d}t=k\rho^2\ln\frac{(a+c)(b+c)}{c(a+b+c)}.$$

(15) 两部分体积相等. $\frac{2}{3}\pi+\int_0^h\pi(1-z^2)\mathrm{d}z=\frac{2}{3}\pi+\pi\left(h-\frac{h^3}{3}\right)$.

$$W=\int_0^1\left[\frac{2}{3}\pi+\pi\left(h-\frac{h^3}{3}\right)\right]\mathrm{d}h=\frac{2}{3}\pi+\pi\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{12}\right)=\frac{13}{12}\pi.$$

第三讲　微分方程及其反常积分

3. 讨论题

(1) 答:微分方程的通解不一定能够包含方程的所有解,例如微分方程 $(y')^2-4y=0$ 的通解为 $y=(x-C)^2$,就不包含其特解 $y=0$;并不是所有的微分方程都有通解,例如微分方程 $(y')^2+y^2=0$ 就只有特解 $y=0$,而没有通解.

(2) 答:微分方程能够解决许多领域中的实际问题. 利用微分方程解决实际问题的关键和难点都是建立合适的数学模型,即将问题中各个量的关系用微分方程表示出来. 建立问题的微分方程模型,需要多方面的知识,尤其要熟悉常见的导数所能表示的变化率,如切线的斜率 $k=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$,速度 $v=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$,加速度 $a=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}$,角速度 $\omega=\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$等. 除此之外,还需要熟悉一些常用的几何定律和物理原理,如运动学中的牛顿第二运动定律,热学中的牛顿冷却定律,弹性变形问题中的虎克定律,放射性问题中的衰变律,人口问题中的增长率等.

(3) 答:有可能. 如 $(y')^2-4y=0$ 通解 $y=(x-C)^2$ 就丢掉了 $y=0$,如方程 $yy'+x=0$ 满足 $y(0)=1$ 的解 $x^2+y^2=1$ 就增加了 $y=-\sqrt{1-x^2}$.

(4) 答:因为解微分方程的最终目的是得出满足方程的 x 与 y 之间的函数关系. 这种函数关系既可表达为 x,y 的显函数 $y=y(x)$,也可表达成 x 关于 y 的显函数 $x=x(y)$,甚至可表达为 x,y 满足的隐函数 $F(x,y)=0$,所以方程中什么量是自变量,什么量是未知函数,这都是"相对的",如果将微分方程中出现的 y' 视为 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$,即微分 $\mathrm{d}y$ 与 $\mathrm{d}x$ 之商,就会给解微分方程带来较大的灵活性. 例如解微分方程 $y'=\frac{y}{y^2+x}$ 时将 y' 看作 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$,就可把方程改写成 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}-\frac{1}{y}x=y$,即 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}+P(y)x=Q(y)$ 型一阶线性微分方程.

（5）答：已知方程的通解求微分方程的问题是微分方程求解的反问题，对于一般的 n 阶微分方程来说，其处理方法就是从通解 $y=\varphi(x,c_1,c_2,\cdots,c_n)$ 出发，通过 n 次求导运算，得到 $c_1,c_2,\cdots,c_n$ 满足的一个方程组，从中解得 $c_1,c_2,\cdots,c_n$，再代入通解表达式，从而得到一个 $y,y',y'',\cdots,y^{(n)}$ 满足的等式，这就是要求的 n 阶微分方程.

（6）答：确定常数 C 的取值范围，需要注意两点：第一是进行积分运算时，注意到常数 C 的来源；第二是注意通解表达式对于常数 C 的取值限制. 当然还可能会有一些其他的问题需要注意.

（7）答：这个做法是对的，因为

$$\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = \lim_{t\to 1^-}\int_0^t \frac{x^2\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} \xlongequal{x=\sin u} \lim_{t\to 1^-}\int_0^{\arcsin t}\sin^2 u\mathrm{d}u=\frac{\pi}{4}.$$

因此，问题中的做法只不过是略去了取极限的中间步骤而已，事实上在计算反常积分时也可以使用类似定积分计算中使用的换元积分法和分步积分法，但在使用时要注意验证所涉及的极限的存在性.

（8）答：不正确. 因为左端的积分是个反常积分，被积函数在积分区间 $\left[\frac{\pi}{2},2\pi\right]$ 上存在没有定义的点 $x=\frac{3}{2}\pi$，故不能直接套用 Newton-leibniz 公式，按反常积分的定义，当且仅当 $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi}\frac{\cos x}{1+\sin x}\mathrm{d}x$ 与 $\int_{\frac{3}{2}\pi}^{2\pi}\frac{\cos x}{1+\sin x}\mathrm{d}x$ 同时收敛时，反常积分 $\int_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi}\frac{\cos x}{1+\sin x}\mathrm{d}x$ 才收敛. 但 $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi}\frac{\cos x}{1+\sin x}\mathrm{d}x=\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi-\varepsilon}\frac{\cos x}{1+\sin x}\mathrm{d}x$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\left[\ln(1+\sin x)\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi-\varepsilon}\right]=-\infty,$$

故 $\int_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi}\frac{\cos x}{1+\sin x}\mathrm{d}x$ 发散.

注　由于有限区间上无界函数的反常积分在记法上与常义积分没有区别，故在计算时一定要细加辨认.

（9）答：得出 $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x=0$ 的结论是错的. 因为 $\int_0^t\frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\ln(1+t^2)$ 当 $t\to+\infty$ 时是发散的，因此由反常积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 的收敛定义，反常积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x$ 是发散的.

4. 练习题

（1）$f(x)=\mathrm{e}^{3x}$

（2）$\sqrt{1+y^2}+\sqrt{1+x^2}=C(C>2)$

(3) $y=\frac{1}{\arctan x}\left(x\arctan x-\ln\sqrt{1+x^2}-\frac{\pi}{4}\right)$.

(4) $x(y)=\frac{e^{-y}}{y}\left(C+\frac{b}{2}e^{2y}\right)$.

(5) $x=y(C-e^y)$.

(6) $y=1$.

(7) 利用一阶线性微分方程的通解公式.

(8) $t=2.796(\text{min})$.

(9) $\frac{1}{v}=\frac{f_0}{mv_0^3}x+\frac{1}{v_0}$.

(10) 曲线 L 在点 M 处的切线斜率 $k_{MT}=y'$，直线 OM 的斜率为 $k_{OM}=\frac{y}{x}$，依题意得 $\tan\frac{\pi}{4}=\frac{y'-\frac{y}{x}}{1+\frac{y}{x}y'}$，即

$$y'-\frac{y}{x}=1+\frac{y}{x}y',$$

或 $y'=\frac{1+\frac{y}{x}}{1-\frac{y}{x}}$，令 $u=\frac{y}{x}$，方程化为 $x\frac{du}{dx}=\frac{1+u^2}{1-u}$.

分离变量得 $\frac{1-u}{1+u^2}du=\frac{dx}{x}$. 积分得 $\arctan u-\frac{1}{2}\ln(1+u^2)=\ln x+C$，将 $u=\frac{y}{x}$ 代回，再注意 $y(1)=0$ 得 $C=0$，于是得 $\arctan\frac{y}{x}=\ln\sqrt{x^2+y^2}$，即曲线 L 的极坐标方程为 $r=e^{\theta}$. L 为对数螺线.

(11) 1° 收敛，值为 $\frac{a}{a^2+b^2}$.

2° 收敛，值为 π.

3° 提示：令 $\sqrt{\frac{x}{1-x}}=t$，收敛，值为 $\frac{\pi}{2}$.

第四章　无 穷 级 数

第一讲　常数项级数

3. 讨论题

（1）答：应该说，通过做了一定量的练习达到比较熟练的程度后，往往就能根据所给级数的特点，大致确定使用何种审敛法，并不需要按照某个刻板的程序来一步步地进行选择．一般地说，当一般项 a_n 中含有 $n!$、a^n、n^n 等因子或含有 n 的若干因子连乘积时，用比较审敛法较适宜；当 a_n 中含有以 n 为幂指数的因子（包括 n^n，a^n 等）而使用根值审敛法较适宜．

（2）答：不对．因为比值审敛法的逆命题不成立．即由正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛，不能得出 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{b_{n+1}}{b_n}$ 存在且小于 1 的结论．另外，由 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{b_{n+1}}{b_n}$ 存在，也不能得出 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ 存在的结论．正确的证明如下：

由已知条件可得 $\dfrac{a_{n+1}}{b_{n+1}}\leqslant\dfrac{a_n}{b_n}\leqslant\cdots\leqslant\dfrac{a_1}{b_1}$，于是 $a_n\leqslant\dfrac{a_1}{b_1}b_n$，$n=1,2,3,\cdots$ 又知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛，因此由比较审敛法知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛．

（3）答：对正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 而言，若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 必收敛，反之则不一定．因为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$，于是 $\exists N>0$，当 $n>N$ 时，总有 $0\leqslant a_n<1$，因而当 $n>N$ 时，$0\leqslant a_n^2<a_n$，故由比较审敛法知 $\sum\limits_{n=N+1}^{\infty}a_n^2$ 收敛，反之，由 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 收敛并不能推得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛．例如 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ 收敛．而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ 却发散．

注　以上结论不能推广到任意项级数，例如 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ 收敛，而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)^2=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ 却是发散的．

（4）答：比较审敛法只对正项级数适用．本问题中的两级数未指明为正项级数．仅凭所给条件不能断定两级数具有相同的收敛性．例如级数

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}+\frac{1}{n}\right]$及$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\cdot\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}+\frac{1}{n}\right]$发散.而$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$收敛.但是$\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}+\frac{1}{n}\right]\Big/\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}=1$.

(5) 答:由于数列$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$单减,且$a_n\geqslant 0$,因此$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a\geqslant 0$.又已知交错级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$发散,故$a>0$,否则由leibniz审敛法可知级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$收敛,与题设矛盾.

$\sqrt[n]{\left(\frac{1}{1+a_n}\right)^n}=\frac{1}{1+a_n}\to\frac{1}{1+a}<1(a_1\geqslant a_2\geqslant\cdots\geqslant a_n\to a)$且$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{a+1}\right)^n$收敛,故由检根法知$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{a_n+1}\right)^n$收敛.

附练习题的答案与提示:

(1) 1° 取$p=\frac{9}{8}$,$\lim\limits_{n\to\infty}n^{\frac{9}{8}}\cdot\frac{\ln n}{n^{\frac{5}{4}}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n^{\frac{1}{8}}}=0$,收敛.

2° 比值判别法,$\rho=0<1$,收敛.

3° 根值判别法,$\rho=0<1$,收敛.

4° 比值判别法,$\rho=\frac{5}{2\mathrm{e}}<1$,收敛.

(2) 1° 收敛; 2° 发散; 3° 收敛.

(3) 1° 收敛; 2° 发散; 3° 收敛;

4° 当$x\leqslant\mathrm{e}$时收敛,当$x\geqslant\mathrm{e}$时发散.

(4) 1° $|a_nb_n|\leqslant\frac{a_n^2+b_n^2}{2}$; 3° $\frac{|a_n|}{n}\leqslant\frac{1}{2}\left(a_n^2+\frac{1}{n^2}\right)$.

(5) 1° 绝对收敛; 2° 条件收敛; 3° 绝对收敛; 4° 绝对收敛.

(6) 据比值判别法知$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!}{a^{n!}}$收敛,利用级数收敛的必要性即得结果.

(7) $0\leqslant a_n\leqslant\int_0^{\frac{1}{n}}\frac{\sqrt{x}}{1+x^4}\mathrm{d}x\leqslant\int_0^{\frac{1}{n}}\sqrt{x}\mathrm{d}x=\frac{2}{3}\cdot x^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{\frac{1}{n}}\leqslant\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$.

(8) 由$\frac{-\ln a_n}{\ln n}\geqslant 1+\lambda$变形得$\ln a_n\leqslant-\ln n^{1+\lambda}$,即$a_n\leqslant\frac{1}{n^{1+\lambda}}$.当$\lambda>0$时,$1+\lambda>1$,故$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1+\lambda}}$收敛,从而$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$收敛,当$\lambda=0$时,若$a_n=\frac{1}{n}$,则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$发散.若$a_n<\frac{1}{n}$,则$\sum\limits_{n=2}^{\infty}a_n$收敛性不定,分别取$a_n=\frac{1}{n+1}$和$a_n=\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$.

综上讨论,当$\lambda>0$时,收敛;当$\lambda=0$时,收敛性不定.

第二讲 幂级数与 Fourier 级数

3. 讨论题

(1) 答：$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 I 上非一致收敛，则意味着存在某个正数 ε_0，不论自然数 N 多么大，总能找到 $x_0\in I$ 和 $n>N$，满足 $|r_n(x_0)|=\left|\sum_{k=n+1}^{\infty}u_k(x_0)\right|\geqslant\varepsilon_0$. 于是能够找到自然数 $n_1>1$ 和 $x_1\in I$，使得 $|r_1(x_1)|=\left|\sum_{i=2}^{\infty}u_i(x_1)\right|\geqslant\varepsilon_0$. 同样能够找到自然数 $n_2>2$ 和 $x_2\in I$. 使得 $|r_2(x_2)|=\left|\sum_{i=3}^{\infty}u_i(x_2)\right|\geqslant\varepsilon_0$ 于是找区间 I 的一列点 $\{x_k\}$（$k=1,2,\cdots$），满足 $|r_k(x_k)|=\left|\sum_{k=n_k+1}^{\infty}u_k(x_k)\right|\geqslant\varepsilon_0$，这是 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 I 上非一致收敛的充分必要条件还可以采用教材第四章第二节推论 2.1 的逆否命题证明级数不一致收敛. 方法更简单.

(2) 答：设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$、$\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}$ 和 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}$ 的收敛域依次为 I_0,I_1,I_2，则它们有如下的一般关系：

$I_2\supset I_0\supset I_1$. 这就是说，逐项积分后的幂级数的收敛域不会变小，而逐项求导后的幂级数的收敛域不会变大.

(3) 答：尽管结果正确，但论据是错误的. 因为极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\frac{1}{R}$ 是幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛半径为 R 的充分而非必要的条件. 故由 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛半径为 R，不能推得极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ 存在并等于 $\frac{1}{R}$.

正确的解法是：先设 $R>0$ 由于 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{kn+m}=\sum_{n=0}^{\infty}(a_nx^{kn})\cdot x^m$，故对任一取定的实数 $x\neq0$，$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{kn+m}$ 与 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{kn}$ 同时收敛，同时发散. 于是只需讨论幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{kn}$ 的收敛半径.

(4) 答：不是 . 若 $f(x)$ 在点 x_0 的某个邻域内有任意阶导数 $f^{(n)}(x)$，那么级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$ 就是 $f(x)$ 的 Taylor 级数. 但是，此级数是否在 x_0 的邻域内收敛，收敛时它的和函数是否就是 $f(x)$，还需要用收敛定理来检查. 只有当

级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$ 在某邻域 $U(x_0)$ 内收敛且收敛于 $f(x)$ 时，才可以说：$f(x)$ 在 $U(x_0)$ 内可展开成 Taylor 级数，并可以把 $f(x)$ 和它的 Taylor 级数用等号连接起来：$f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n, x\in U(x_0)$，这就是 $f(x)$ 的 Taylor 展开式.

由此可见，$f(x)$ 的"Taylor 级数"与 $f(x)$ 的"Taylor 展开式"不是一个概念. 根据 Taylor 级数的收敛定理，当且仅当在 $U(x_0)$ 内 Taylor 公式的余项 $R_n(x)\to 0(n\to\infty)$ 时，$f(x)$ 在该邻域内能展开成 Taylor 级数.

(5) 答：用间接法求函数的幂级数展开式的好处是既省去了直接法中计算各阶导数 $f^{(n)}(x_0)$ 的工作，又避开了验证余项 $R_n(x)$ 是否趋于零 $(n\to\infty)$ 的困难. 另外，据教材中的定理知，函数的幂级数展开式是唯一的，这个幂级数必定是函数的 Taylor 级数. 这就是间接展开法的理论依据.

一般说来，间接展开法就是根据一些证明了指数函数、三角函数、对数函数、二项式函数的幂级数展开式，利用变量代换，幂级数的四则运算法则，幂级数的逐项求导与逐项积分等方法，来获得所给函数的幂级数展开式.

(6) 答：Dirichlet 充分条件告诉我们，当周期函数 $f(x)$ 在一个周期内连续或只有有限个第一类间断点并且只有有限个极限点时，$f(x)$ 的 Fourier 级数处处收敛，即 Fourier 级数的和函数 $F(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 有定义，但是 $F(x)$ 未必与 $f(x)$ 处处相等. 当 x 是 $f(x)$ 的连续点时，$F(x)=f(x)$；当 x 是 $f(x)$ 的第一类间断点时，$F(x)=\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}$. 这就是 $F(x)$ 与 $f(x)$ 的关系.

(7) 答：首先，应该注意函数 $f(x)$ 的周期是什么，如果 $f(x)$ 的周期为 $2l$，则构成 Fourier 级数的三角函数系就是 $\left\{1,\cos\frac{\pi}{l}x,\sin\frac{\pi}{l}x,\cdots,\cos\frac{n\pi}{l}x,\sin\frac{n\pi}{l}x,\cdots\right\}$，因此周期不一样，Fourier 系数的计算公式和 Fourier 级数的形式也都要发生变化.

其次，应该注意 $f(x)$ 是否满足收敛定理的条件，如果满足，则可知道其 Fourier 级数处处收敛.

最后，找出 $f(x)$ 的全体连续点的集合 I. 在 I 上 Fourier 级数收敛于 $f(x)$，可用等式表示.

(8) 答：将 $f(x)$ 看成是以 2π 为周期的函数，由于 $f(x)$ 只在区间 $[0,\pi]$（半个周期）上有定义，在另外半个周期 $[-\pi,0)$ 上没有定义. 所以我们可以以任意方式将 $f(x)$ 的定义延拓到 $[-\pi,0)$. 如果将 $f(x)$ 延拓成 $[-\pi,\pi]$ 上的奇函数，那么将 $f(x)$ 在区间 $[-\pi,\pi]$ 上展开成 Fourier 级数就是一个正弦级数；如果将 $f(x)$ 延拓成 $[-\pi,\pi]$ 上的偶函数，那么将 $f(x)$ 在区间 $[-\pi,\pi]$ 上展开成 Fourier 级数就是一个余弦级数. 但无论是展开成正弦级数，还是展开成余弦级数，级数

的和函数在区间$[0,\pi]$上一定等于 $f(x)$(Dirichlet 定理的意义下).

4. 练习题

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=2x^2$,收敛域为$\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

(3) 令 $x-1=t$

$$f(x)=\frac{x+4}{2x^2-5x-3}=\frac{1}{t-2}-\frac{1}{2t+3}=-\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{t}{2}}-\frac{1}{3}\frac{1}{1+\frac{2}{3}t},$$

$$f(x)=-\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{n+1}}+(-1)^{n+1}\frac{2^n}{3^{n+1}}\right)(x-1)^n\quad\left(-\frac{1}{2}<x<\frac{5}{2}\right).$$

(4) $$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2n+1}{n}x^{2n}=2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^{2n}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n}}{n}$$
$$=\frac{2x^2}{1+x^2}+\ln(1+x^2)\quad(-1<x<1).$$

(5) 因为$\dfrac{e^x-1}{x}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^n}{(n+1)!}$,$\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{e^x-1}{x}\right)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{nx^{n-1}}{(n+1)!}$,$-\infty<x<\infty$,

故 $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)!}=\frac{d}{dx}\left(\frac{e^x-1}{x}\right)\bigg|_{x=1}=\frac{xe^x-e^x+1}{x^2}\bigg|_{x=1}=1.$$

(6) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{n+1}{n!\ 2^n}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{n+1}{n!}x^n\bigg|_{x=\frac{1}{2}}$,记 $S(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{n+1}{n!}x^n$,有

$\int_0^x S(t)dt=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^{n+1}}{n!}=xe^x$,求导得 $S(x)=(x+1)e^x$,

故 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{n+1}{n!\ 2^n}=S\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{3}{2}e^{\frac{1}{2}}$.

(7) 因为 $x=2\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{\sin nx}{n}(-\pi<x<\pi)$再求 $x\sin x$ 的 Fourier 级数得

$$x\sin x=2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\sin nx\sin x}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\cos(n-1)x-\cos(n+1)x}{n}$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}\cos nx-\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n-1}\cos nx$$
$$=1-\frac{1}{2}\cos x+2\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n^2-1}\cos nx,x\in(-\pi,\pi).$$

(8) 因为 $f(x)$为偶函数.在$\left[-\dfrac{3}{2},\dfrac{3}{2}\right]$上连续,展开式为余弦级数.

$$a_0=\frac{2}{\frac{3}{2}}\int_0^{\frac{3}{2}}f(x)dx=\frac{4}{3}\left[\int_0^1 xdx+\int_1^{\frac{3}{2}}dx\right]=\frac{4}{3},$$

$$a_n=\frac{4}{3}\left[\int_0^1 x\cos\frac{2n\pi}{3}x\,dx+\int_1^{\frac{3}{2}}\cos\frac{2}{3}n\pi x\,dx\right]=\frac{3}{n^2\pi^2}\left[\cos\frac{2n\pi}{3}-1\right]\quad(n=1,2,\cdots),$$

所以

$$f(x)=\frac{2}{3}+\frac{3}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\left(\cos\frac{2n\pi}{3}-1\right)\cos\frac{2n\pi}{3}x\quad\left(-\frac{3}{2}\leqslant x\leqslant\frac{3}{2}\right).$$

(9) 因为 $f(x)=3+|x|(|x|\leqslant 1)$是偶函数. 所以

$a_0=2\int_0^1(3+x)\mathrm{d}x=7$,

$a_n=2\int_0^1(3+x)\cos n\pi x\mathrm{d}x=2\int_0^1 x\cos n\pi x\mathrm{d}x=\frac{2(\cos n\pi-1)}{n^2\pi^2}(n=1,2,\cdots)$,

故 $3+|x|=\frac{7}{2}-\frac{4}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos(2k+1)\pi x}{(2k+1)^2},x\in[-1,1]$.

(10) 当 $x\in(-\pi,\pi)$时,有 $x=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\sin nx$.

$$\int_0^x t\mathrm{d}t=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\int_0^x\sin nt\mathrm{d}t=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}(1-\cos nx),$$

所以 $x^2=4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx=\frac{a_0}{2}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx$ 根据系数公式,应有 $a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^2\mathrm{d}x=\frac{2}{3}\pi^2$,故

$$x^2=\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx(-\pi<x<\pi).$$

(11) $$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\left[(-1)^{n-1}\frac{4}{(2n-1)^2\pi^2}+\frac{2}{(2n-1)\pi}\right]\cdot\sin\frac{(2n-1)\pi}{l}x-\frac{1}{n\pi}\sin\frac{2n\pi}{l}x\right\}\quad(0\leqslant x<l).$$

(12) 要证的等式左端是余弦级数,将等式改写为

$$-2\pi^2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{12\cos nx}{n^2}=3x^2-6\pi x\quad(0\leqslant x\leqslant\pi).$$

现考虑将函数 $f(x)=3x^2-6\pi x$ 在$[0,\pi]$上展开为余弦级数,则有

$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(3x^2-6\pi x)\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}(x^3-3\pi x^2)\Big|_0^{\pi}=-4\pi^2$,

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(3x^2-6\pi x)\cos nx\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\left[3\left(\frac{\pi}{n^2}2\cos n\pi\right)-6\pi\left(\frac{1}{n^2}\cos n\pi-\frac{1}{n^2}\right)\right]$$
$$=\frac{12}{n^2}\quad(n=1,2,\cdots),$$

于是 $3x^2-6\pi x=-2\pi^2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{12}{n^2}\cos nx.\quad(0\leqslant x\leqslant\pi)$,移项即证.

附录 2

自我检测题

期中自我检测题(一)

一、解答下列各题(每小题 7 分,共 70 分)

1) 设 $y=\arctan f(x^2)$,其中 $f(x)$可导,求 y'.

2) 设函数 $y=y(x)$由$\begin{cases}x=t-\ln(1+t),\\ y=t^2+t^3\end{cases}$所确定,求$\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}$.

3) 设 $y=y(x)$由方程 $\mathrm{e}^{\arctan\frac{y}{x}}=\sqrt{x^2+y^2}$所确定,求$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

4) 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{\mathrm{e}^{x^2}-1}\right)$.

5) 已知 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=a$,且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+f(x)\sin 2x}-1}{\mathrm{e}^{3x}-1}=2$,求 a.

6) 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{a^x+b^x+c^x}{3}\right)^{\frac{1}{x}}$,其中 $a>0,b>0,c>0$.

7) 求函数 $f(x)=2x^3-9x^2+12x-3$ 的单调区间和极值.

8) 求函数 $f(x)=\dfrac{\sin x}{\mathrm{e}^{\frac{x}{1-x}}-1}$的间断点并指出类型.

9) 求证方程 $x+\dfrac{1}{2}\sin x+5=0$ 有唯一实根.

10) 求证函数 $f(x)=\sqrt{2+x}$在区间$[0,+\infty)$上一致连续.

二、(8 分)证明:当 $0<x<1$ 时,$(1+x)\ln^2(1+x)<x^2$.

三、(9 分)一火箭发射升空后沿竖直方向运动,在距离发射台 4 000 m 处装有摄影机,摄影机对准火箭. 用 h 表示火箭高度,假设在时刻 t_0,火箭高度 $h=3\ 000$ m,运动速度等于 300 m/s,

(1) 用 l 表示火箭与摄影机的距离,求在 t_0. 时刻 l 的增加速度.

(2) 用 α 表示摄影机跟踪火箭的仰角(弧度),求在 t_0 时刻 α 的增加速度.

四、(8 分)设 $f(x)$在$[a,b]$上二阶可导,且 $f'\left(\dfrac{a+b}{2}\right)=0$,证明存在一点

$\xi\in(a,b)$，使 $|f''(\xi)|\geqslant\dfrac{4}{(b-a)^2}|f(b)-f(a)|$.

五、（5 分）设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $f(0)=0,f(1)=1$，证明存在两个不同的点 $x_1,x_2\in(0,1)$，使 $f'(x_1)f'(x_2)=1$.

期中自我检测题（二）

一、解答下列各题（每小题 7 分，共 70 分）

1）设 $y=x\arcsin\dfrac{x}{2}+\sqrt{4-x^2}$，求 $y'(1)$.

2）已知曲线 $\begin{cases}x-\mathrm{e}^x\sin t+1=0,\\ y=t^3+2t,\end{cases}$ 求该曲线在 $t=0$ 处的切线方程.

3）设 $y=y(x)$ 由方程 $\sin(xy)-\ln\dfrac{x+1}{y}=1$ 所确定，求 $\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}$.

4）求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}x(a^{\frac{1}{x}}-b^{\frac{1}{x}})\ (a>0,b>0)$.

5）设 $f(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^x, & x<0,\\ ax^2+bx+c, & x\geqslant0,\end{cases}$ 且 $f''(0)$ 存在，试确定常数 a,b,c.

6）求极限 $\lim\limits_{x\to1}(2-x)^{\tan\frac{\pi}{2}x}$.

7）设 $y=\ln\sqrt{x^2+a^2}+\arctan\dfrac{a}{x}$，求 $\mathrm{d}y$.

8）设 $x\in(0,\pi)$，试证明 $\dfrac{\sin x}{x}>\cos x$.

9）设落在平静水面上的石头，产生同心波纹，若最外一圈波纹半径的增大速率恒为 6 m/s. 问在 2 s 末扰动水面面积的增大速率为多少？

10）已知 $x_n\leqslant a\leqslant y_n$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}(y_n-x_n)=0$. 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}y_n=a$.

二、（8 分）指出函数 $f(x)=\dfrac{\sin x\cos\frac{\pi}{2}x}{|x|(x^2+x-2)}$ 的间断点及其类型.

三、（10 分）设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{g(x)-\cos x}{x}, & x\neq0\\ a, & x=0,\end{cases}$ 其中 $g(x)$ 具有二阶连续导数，且 $g(0)=1$.

（1）确定 a 的值，使 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续；

（2）求 $f'(x)$；

（3）讨论 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性.

四、（7 分）设数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_{n+1}=\dfrac{x_n}{2}+\dfrac{1}{x_n}\ (n=0,1,2,\cdots)$，其中 $x_0>0$，求

极限 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

五、(5 分)设 $f(x)$在$[0,1]$上连续,在$(0,1)$内二阶可导,$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)}{x}=1$,

$\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{f(x)}{x-1}=2$.

试证(1) 存在 $\xi\in(a,b)$,使 $f(\xi)=0$;

(2) 存在 $\eta\in(a,b)$,使 $f''(\eta)=f(\eta)$.

期末自我检测题(一)

一、解答下列各题(每小题 6 分,共 60 分)

1) 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}$.

2) 设 $y=\arctan\left(\dfrac{1}{2}\tan\dfrac{x}{2}\right)$,求 $\mathrm{d}y$.

3) 设 $f(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-x}, & x\geqslant 0,\\ x^2+1, & x<0,\end{cases}$求 $\int_{-1}^{2} f(x-1)\,\mathrm{d}x$.

4) 判定级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2^n}\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{\frac{n^2}{2}}$ 的敛散性.

5) 设 $y=y(x)$由方程 $y=\tan(x+y)$所确定,求 y'.

6) 计算不定积分 $\int\dfrac{(1+\mathrm{e}^x)^2}{1+\mathrm{e}^{2x}}\mathrm{d}x$.

7) 将 $f(x)=2+|x|$,$x\in[-\pi,\pi]$展开成以 2π 为周期的 Fourier 级数.

8) 将函数 $f(x)=\dfrac{1}{x^2+3x+2}$展成 $x+4$ 的幂级数,并指出收敛区间.

9) 求微分方程 $xy'-3y=x^4\mathrm{e}^x$ 的通解.

10) 设曲线 $y=ax^2(a>0,x\geqslant 0)$与曲线 $y=1-x^2$ 的交点为 A,过坐标原点 O 和点 A 的直线与曲线 $y=ax^2$ 围成一个平面图形. 问 a 为何值时,该图形绕 x 轴旋转一周所产生的旋转体的体积最大.

二、(8 分)试证明不等式:当 $x>0$ 时,$x^{\alpha}-\alpha x\leqslant 1-\alpha(0<\alpha<1)$.

三、(9 分)计算定积分 $\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x$,其中 $f(x)=\int_1^{x^2}\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$.

四、(9 分)一物体在某一介质中按 $x=ct^3$ 作直线运动,已知介质的阻力与物体速度的平方成正比,计算物体由 $x=0$ 移动到 $x=a$ 时克服阻力所作的功.

五、(9 分)证明:级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{n}2^{-nx}$ 在区间$[\delta,+\infty)(\delta>0)$上一致收敛,而在$(0,+\infty)$上不一致收敛.

六、(6 分)设 $a_n=\int_0^{n\pi} x\mid\sin x\mid \mathrm{d}x\ (n=1,2,\cdots)$,求极限

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_1}{2}+\frac{a_2}{2^2}+\cdots+\frac{a_n}{2^n}\right).$$

期末自我检测题(二)

一、填空题(每小题 3 分,共 15 分)

1) $\lim\limits_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{2}{\sin x}}=$________.

2) $y=x-2\sin x$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上的最小值为________.

3) 设 $\begin{cases}x=f(t)-\pi,\\ y=f(e^{3t}-1).\end{cases}$ $f'(0)\neq 0$,则 $\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{t=0}=$________.

4) 设 $f(x)=\int_0^{x^2} e^{t^2}\mathrm{d}t$,则 $\lim\limits_{\alpha\to 0}\frac{f(x)-f(x-\alpha)}{\alpha}=$________.

5) 设 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 在 $x=-1$ 条件收敛,则 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x-1)^n$ 的收敛区间为________.

二、选择题(每小题 3 分,共计 15 分)

1) 当 $x\to 0$ 时,变量 $\frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x^2}$ 是(　　)

A) 无穷小量,　　B) 无穷大量,

C) 有界但不是无穷小量,　　D) 无界但不是无穷大量.

2) $x=0$ 是函数 $f(x)=\frac{2}{1+e^{\frac{1}{x}}}+\frac{\sin x}{|x|}$ 的(　　)间断点.

A) 跳跃,　　B) 可去,　　C) 无穷,　　D) 振荡.

3) 若 $f(x)$ 的导函数是 $\sin x$,则 $f(x)$ 的一个原函数为(　　)

A) $1+\sin x$.　　B) $1-\sin x$　　C) $1+\cos x$　　D) $1-\cos x$.

4) 设 $f(x)=\begin{cases}\frac{(x^2-1)^2}{|x-1|}, & x\neq 1,\\ 0, & x=1,\end{cases}$ 则在 $x=1$ 处 $f(x)$(　　)

A) 不连续,　　B) 连续但不可导,

C) 可导但导数不连续,　　D) 可导且导数连续.

5) 设 $S(x)$ 是 $f(x)=\begin{cases}1, & 0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2},\\ x+1, & \frac{\pi}{2}<x\leqslant\pi\end{cases}$ 的以 2π 为周期的 Fourier 正弦级数的和函数,则 $S\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ 等于(　　)

A) $1+\frac{\pi}{4}$,　　B) 1,　　C) $-\left(1+\frac{\pi}{4}\right)$,　　D) -1.

三、(8 分)设 $y=y(x)$ 由方程 $y-xe^{xy}=1$ 所确定,求 $\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=0}$.

四、(8 分)计算定积分 $\int_0^{\pi}\sqrt{1-\sin x}\,dx$.

五、(8 分)计算不定积分 $\int\frac{\ln x}{\sqrt{x+1}}dx$.

六、(8 分)计算广义积分 $\int_3^{+\infty}\frac{dx}{(x-1)^4\sqrt{x^2-2x}}$.

七、(8 分)设方程 $x^3-3ax+2=0$ 有唯一实根,试确定 a 的取值范围.

八、(8 分)讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n n!}{n^n}(a>0)$ 的收敛性.

九、(8 分)求级数 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{2^n(n^2-1)}$ 的和.

十、(8 分)设平面区域 A 由 $x^2+y^2\leqslant 2x$ 与 $y\geqslant x$ 所确定,求该平面域 A 绕直线 $x=2$ 旋转一周所得旋转体的体积.

十一、(6 分)设 $f(x)$ 在$[a,b]$上二阶可导,且 $f(a)=f(b)=0$. $f'(a)f'(b)>0$,证明:存在 $\xi\in(a,b)$和 $\eta\in(a,b)$,使

$$f'(\xi)=0,\quad f''(\eta)=0.$$

自我检测题答案与提示

期中自我检测题(一)

一、1) $\frac{2\times f'(x^2)}{1+f^2(x^2)}$.　　2) $\frac{(5+6t)(1+t)}{t}$.　　3) $\frac{x+y}{x-y}$.

4) $\frac{1}{2}$.　　5) 6.　　6) $\sqrt[3]{abc}$.

7) 在区间$(-\infty,1)$和$(2,+\infty)$上单调增. 在区间$(1,2)$上单调减;在 $x=1$ 取得极大值 $f(1)=2$,在 $x=2$ 取得极小值 $f(2)=1$.

8) $x=0$ 为可去间断点,$x=1$ 为跳跃间断点.

9) 提示:令 $f(x)=x+\frac{1}{2}\sin x+5$,利用连续函数的零点定理证明根的存在性,利用 $f(x)$的单调性证明根的唯一性.

10）提示：

$$|f(x_2)-f(x_1)|=|\sqrt{2+x_2}-\sqrt{2+x_1}|$$
$$=\frac{|x_2-x_1|}{\sqrt{2+x_2}+\sqrt{2+x_1}}<|x_2-x_1|.$$

二、提示：令 $f(x)=x^2-(1+x)\ln^2(1+x)$. 利用 $f(x)$ 的单调性即可证明.

三、(1) 180(m/s).　　(2) 0.048(rad/s).

四、提示：由 Taylor 定理知，

$$f(x)=f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)+\frac{f''(\xi)}{2!}\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2,$$

在上式中分别令 $x=a$ 和 $x=b$ 得两式，两式相减后取绝对值即可证明本题.

五、提示：先证明存在 $\xi\in(0,1)$，使 $f(\xi)=1-\xi$，为此，构造辅助函数 $F(x)=f(x)+x-1$，对 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上用零点定理. 然后对 $f(x)$ 分别在区间 $[0,\xi]$ 和 $[\xi,1]$ 上用 Lagrange 中值定理即可证明.

期中自我检测题(二)

一、1) $\frac{\pi}{6}$.　　2) $y=2e(x+1)$.

3) $e(1-e)$.　　4) $\ln\frac{a}{b}$.

5) $a=\frac{1}{2},b=1,c=1$.　　6) $e^{\frac{2}{\pi}}$.

7) $\frac{x-a}{x^2+a^2}dx$.

8) 提示：令 $f(x)=\sin x-x\cos x$，利用 $f(x)$ 的单调性.

9) $144\pi(m^2/s)$

10) 提示：$0\leqslant a-x_n\leqslant y_n-x_n$，$0\leqslant y_n-a\leqslant y_n-x_n$.

二、$x=0$ 为跳跃间断点，$x=1$ 为可去间断点，$x=-2$ 为无穷间断点.

三、(1) $a=g'(0)$.

(2) $$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{x[g'(x)+\sin x]-[g(x)-\cos x]}{x^2}, & x\neq 0,\\ \dfrac{1}{2}[g''(0)+1], & x=0.\end{cases}$$

(3) 连续.

四、$\sqrt{2}$，提示：$x_{n+1}\geqslant\sqrt{2}$，$(n=0,1,2,\cdots)$，由此证明数列 $\{x_n\}$ 单调减.

五、(1) 提示：由 $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f(x)}{x}=1$ 可知，$f(0)=0$，且 $\exists x_1\in(0,\delta)$ 使 $f(x_1)>0$，

同理，由 $\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{f(x)}{x-1}=2$ 可知，$f(1)=0$，且 $\exists\, x_2\in(1-\delta,1)$，使 $f(x_2)<0$. 在区间 $[x_1,x_2]$ 上对 $f(x)$ 用连续函数零点定理即可得证.

(2) 提示：构造辅助函数 $\varphi(x)=e^x f(x)$，对 $\varphi(x)$ 分别在区间 $[0,\xi]$ 和 $[\xi,1]$ 用 Rolle 定理得，存在 $\xi_1\in(0,\xi)$，$\xi_2\in(\xi,1)$，使 $\varphi'(\xi_1)=0$，$\varphi'(\xi_2)=0$，即 $f'(\xi_1)+f(\xi_1)=0$，$f'(\xi_2)+f(\xi_2)=0$；

再构造辅助函数 $F(x)=e^{-x}[f'(x)+f(x)]$. 对 $F(x)$ 在区间 $[\xi_1,\xi_2]$ 上用 Rolle 定理得，$\exists\,\eta\in(\xi_1,\xi_2)$，使 $F'(\eta)=0$ 原题得证.

期末自我检测题(一)

一、1) $\dfrac{1}{2}$；　　2) $\dfrac{\sec^2\dfrac{x}{2}}{4+\tan^2\dfrac{x}{2}}$；

3) $\dfrac{17}{3}-\dfrac{1}{e}$；　　4) 收敛；

5) $-\csc^2(x+y)$；　　6) $x+2\arctan e^x+C$；

7) $f(x)=2+\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{4}{\pi}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}, x\in[-\pi,\pi]$；

8) $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\dfrac{1}{2^{n+1}}-\dfrac{1}{3^{n+1}}\right)(x+4)^n\ (2<x<6)$；

9) $y=x^3(e^x+C)$；

10) $a=4$.

二、提示：令 $f(x)=x^a-ax$，求 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上的最大值.

三、$\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{e}-1\right)$.

四、$\dfrac{27}{7}k\sqrt[3]{c^2a^7}$.

五、1) 提示：$\left|\sqrt{n}2^{-nx}\right|\leqslant\sqrt{n}2^{-n\delta}, x\in(\delta,+\infty)$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{n}2^{-n\delta}$ 收敛.

2) 令 $x=\dfrac{1}{n}$，则 $\sqrt{n}2^{-nx}=\dfrac{\sqrt{n}}{2}$，则当 $n\to\infty$ 时，$\sqrt{n}2^{-nx}$ 在 $(0,+\infty)$ 内不一致收敛于零.

六、提示：$a_n\xlongequal{x=n\pi-t}\int_0^{n\pi}(n\pi-t)|\sin t|\,dt=n\pi\int_0^{n\pi}|\sin t|\,dt-a_n$，$a_n=\dfrac{n\pi}{2}\int_0^{n\pi}|\sin t|\,dt=n^2\pi$.

考虑幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n$，求得其和函数 $S(x)=\dfrac{x+x^2}{(1-x)^3}$.

则 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{a_1}{2}+\dfrac{a_2}{2^2}+\cdots+\dfrac{a_n}{2^n}\right)=\pi S\left(\dfrac{1}{2}\right)=6\pi$.

期末自我检测题(二)

一、1) e^6.　2) $\dfrac{\pi}{3}-\sqrt{3}$.　3) 3.　4) $2xe^{x^4}$.　5) $(0,2)$.

二、1) D).　2) B).　3) B).　4) B).　5) C).

三、2.

四、$4(\sqrt{2}-1)$.

五、$2\ln x\sqrt{1+x}-4\sqrt{1+x}-2\ln\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt{1+x}+1}+C$.

六、$\dfrac{2}{3}-\dfrac{3\sqrt{3}}{8}$.

七、$a<1$.

八、$0<a<e$ 收敛，$a\geqslant e$ 发散.

九、$\dfrac{5}{8}-\dfrac{3}{4}\ln 2$.

十、$\dfrac{\pi^2}{2}-\dfrac{2\pi}{3}$.

十一、提示：不妨设 $f'(a)>0$，$f'(b)>0$，则 $\exists x_1\in(a,a+\delta)$ 使 $f(x_1)>0$，$\exists x_2\in(b-\delta,b)$，使 $f(x_2)<0$，在区间 $[x_1,x_2]$ 上对 $f(x)$ 用零点定理得 $\exists\xi\in(a,b)$. 使 $f(\xi)=0$. 然后利用 Rolle 定理可证明本题.