习题课

中值定理及导数的应用

一、 微分中值定理及其应用

二、 导数应用

注：常见的一些函数构 造技巧：

（1）证$\exists\xi\in(a,b)$使$f(\xi)=-f'(\xi)\xi \quad \Rightarrow F(x)=f(x)x$

（2）证$\exists\xi\in(a,b)$使$f(\xi)+f'(\xi)=0 \quad \Rightarrow F(x)=e^{x}f(x)$

若$F'(x)=e^{x}f'(x)+e^{x}f(x)=0\Rightarrow \quad f(x)+f'(x)=0$

（3）证$\exists\xi\in(a,b)$使$f(\xi)-f'(\xi)=0 \Rightarrow F(x)=e^{-x}f(x)$

（4）证$\exists\xi\in(a,b)$使$\dfrac{f(\xi)}{g(\xi)}=\dfrac{f''(\xi)}{g''(\xi)}$即$f(\xi)g''(\xi)-g(\xi)f''(\xi)=0$

$\Rightarrow F(x)=f(x)g'(x)-f'(x)g(x)$

$(F'(x)=f'(x)g'(x)+f(x)g''(x)-f'(x)g'(x)-f''(x)g(x))$

一、 微分中值定理及其应用

1. 微分中值定理及其相互关系

罗尔定理 $\quad \xleftarrow{f(a)=f(b)} \quad$ 拉格朗日中值定理

$$f'(\xi)=0$$

$$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

$F(x)=x$

$f(a)=f(b)$

$F(x)=x$

$n=0$

柯西中值定理 $\quad \dashrightarrow \quad$ 泰勒中值定理

$$\frac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)}=\frac{f'(\xi)}{F'(\xi)}$$

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$$
$$+\cdots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n$$
$$+\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi)(x-x_0)^{n+1}$$

2. 微分中值定理的主要应用

(1) 研究函数或导数的性态

(2) 证明恒等式或不等式

(3) 证明有关中值问题的结论

3. 有关中值问题的解题方法

利用**逆向思维**，设辅助函数．一般解题方法:

(1) 证明含一个中值的等式或根的存在，多用**罗尔定理**，可用原函数法找辅助函数．

(2) 若结论中涉及含中值的两个不同函数，可考虑用**柯西中值定理**．

(3) 若结论中含两个或两个以上的中值，必须**多次应用中值定理**．

(4) 若已知条件中含高阶导数，多考虑用**泰勒公式**，有时也可考虑**对导数用中值定理**．

(5) 若结论为不等式，要注意适当**放大**或**缩小**的技巧.

题型小结

1. 应用洛必达法则求未定式的极限

$\frac{0}{0}$型，$\frac{\infty}{\infty}$型，$0\cdot\infty$型，$\infty-\infty$型，1^{∞}型，0^{0}型，∞^{0}型

2. 函数性态的研究及作图

函数的单调性与函数的凹凸性，极值、极值点及拐点

3. 最大值、最小值及应用

4. 函数方程根的讨论

根的存在性，根的唯一性，根的个数

5. 等式、不等式的证明

微分中值定理，利用函数的性态（单调性，凹凸性，极值，最值）

例1. (1) 选择以下题中给出的四个结论中一个正确的结论:

设在$[0,1]$上$f''(x)>0$,则$f'(0), f'(1), f(1)-f(0)$或$f(0)-f(1)$几个数的大小顺序为（*B*）

(A) $f'(1)>f'(0)>f(1)-f(0)$　　(B) $f'(1)>f(1)-f(0)>f'(0)$

(C) $f(1)-f(0)>f'(1)>f'(0)$　　(D) $f'(1)>f(0)-f(1)>f'(0)$

分析: 由拉格朗日中值定理得:　　**P182 2**

$$f(1)-f(0)=f'(\xi)(1-0)=f'(\xi),\qquad 0<\xi<1$$

$\because f''(x)>0,\quad \therefore f'(x)$ 在 $[0,1]$单调增加,

$$f'(1)>f'(\xi)>f'(0).$$

$$\therefore f'(1)>f(1)-f(0)>f'(0).$$

例1. (2) 若$f(x)$在(a,b)内可导，则在(a,b)内（ **B** ）

A.至少存在一点ξ，使$f'(\xi)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$；

B.不一定存在ξ，使$f'(\xi)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$；

C.必存在ξ，使$f'(\xi)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$；

D.不可能存在ξ，使$f'(\xi)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$。

例如：$f(x)=\begin{cases} 1, x=0 \\ \dfrac{1}{x}, x\in(0,1) \end{cases}$

(3) 证明:函数$f(x)=x^3-3x^2+a$在$[0,1]$内不可能有两个零点，其中a为常数.

证: 假设$\exists x_1, x_2 \in [0,1]$, 使得$f(x_1)=f(x_2)=0$.

则$f(x)$在以x_1，x_2为端点的区间满足罗尔定理.

$\exists \xi \in (0,1)$, 使得$f'(\xi)=0$.

而$f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)<0, \forall x \in (0,1)$

矛盾. 所以$f(x)$在$[0,1]$内不可能有两个零点.

例2. 设函数$f(x)$ 在$[0,1]$ 上有三阶导数，且$f(1)=0$ ，又函数 $F(x)=x^3 f(x)$，证明在 $(0,1)$ 内至少存在一点 ξ，使得 $F'''(\xi)=0$.

证 由条件知函数$F(x)$ 在区间$[0,1]$上三阶可导，因

$$F(0)=F(1)=0,$$

故存在点 $\xi_1\in(0,1)$ ，使得 $F'(\xi_1)=0$，

$$F'(x)=3x^2 f(x)+x^3 f'(x),$$

由此得$F'(0)=F'(\xi_1)=0$，所以存在$\xi_2\in(0,\xi_1)$，使得

$$F''(\xi_2)=0,$$

又 $F''(x)=6xf(x)+6x^2f'(x)+x^3f(x)$，得 $F''(0)=0$，

由此得 $\exists\xi\in(0,\xi_2)\subset(0,1)$，使得

$$F'''(\xi)=0\,.$$

例3. 设函数$f(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)内二阶可导，且$f(a)=f(b)=0$，$f(c)<0\,(a<c<b)$.

证明：至少存在一点$\xi\in(a,b)$，使得$f''(\xi)>0$.

证 由拉格朗日中值定理知，存在$\xi_1\in(a,c)$，使得

$$f'(\xi_1)=\frac{f(c)-f(a)}{c-a}<0,$$ 同理，存在$\xi_2\in(c,b)$，使得

$$f'(\xi_2)=\frac{f(b)-f(c)}{b-c}>0,$$

在区间$[\xi_1,\xi_2]$上再一次使用拉格朗日中值定理，知存在$\xi\in(\xi_1,\xi_2)\subset(a,b)$，使得

$$f''(\xi)=\frac{f'(\xi_2)-f'(\xi_1)}{\xi_2-\xi_1}>0.$$

例4. 已知函数$f(x)$在$[0,1]$上连续，在$(0,1)$内可导，且$f(1)=0$，证明：在$(0,1)$内存在一点ξ，

使得$f'(\xi)=-\dfrac{f(\xi)}{\xi}$.

分析 问题转化为证 $\xi f'(\xi)+f(\xi)=0$.

证 **设$F(x)=xf(x)$，则$F(x)$在$[0,1]$上连续，**

在$(0,1)$内可导，$F(0)=F(1)=0$.

由罗尔定理可得：$\exists\xi\in(0,1)$，$F'(\xi)=0$

$F'(\xi)=f(\xi)+\xi f'(\xi)$，**即**$f'(\xi)=-\dfrac{f(\xi)}{\xi}$.

例4. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 在 $(0,1)$ 内可导, 且 $f(1)=0$, 证明至少存在一点 $\xi\in(0,1)$, 使

$$f'(\xi)=-\frac{2f(\xi)}{\xi}$$

证: 问题转化为证 $\xi f'(\xi)+2f(\xi)=0$.

设辅助函数 $\varphi(x)=x^2 f(x)$

显然 $\varphi(x)$ 在 $[\,0\,,\,1\,]$ 上满足罗尔定理条件, 故至少存在一点 $\xi\in(0,1)$, 使

$$\varphi'(\xi)=2\xi f(\xi)+\xi^2 f'(\xi)=0$$

即有 $$f'(\xi)=-\frac{2f(\xi)}{\xi}$$

例4. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 在 $(0,1)$ 内可导, 且 $f(1)=0$, 证明至少存在一点 $\xi\in(0,1)$, 使

$$f'(\xi)=-\frac{2f(\xi)}{\xi}$$

分析 问题转化为证 $\dfrac{f'(\xi)}{f(\xi)}+\dfrac{2}{\xi}=0.$ $\left(\dfrac{f'(x)}{f(x)}+\dfrac{2}{x}\right)\Big|_{x=\xi}=0$

$$\frac{f'(x)}{f(x)}+\frac{2}{x}=(\ln f(x)+2\ln x)'=(\ln f(x)+\ln x^2)'$$

$=(\ln x^2 f(x))'$ 卸磨杀驴，脱掉对数函数.

设辅助函数 $\varphi(x)=x^2 f(x)$

例5. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $f(0)=0$, $f(1)=0$, $f(\frac{1}{2})=1$.

证明：至少存在一点 $\xi\in(0,1)$ ，使得 $f'(\xi)=1$.

证： 问题转化为证 $(f(x)-x)'|_{x=\xi}=0$

设辅助函数 $\varphi(x)=f(x)-x$, $\varphi(0)=0$,

由 $\varphi(\frac{1}{2})=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}>0, \varphi(1)=-1<0$, 则由零点定理知存在 $\eta\in(0,1)$, 使得 $\varphi(\eta)=0$. 从而 $\varphi(x)$在$[0,\eta]$上满足罗尔定理的条件.至少存在一点 $\xi\in(0,\eta)\subset(0,1)$ 使得$\varphi'(\xi)=0$. 即 $f'(\xi)=1$.

例5. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,\frac{\pi}{2}]$上连续，在 $(0,\frac{\pi}{2})$内二阶可导，且 $f(0)=0,\ \ f(1)=3,\ \ f(\frac{\pi}{2})=1.$

证明：至少存在一点 $\xi\in(0,\frac{\pi}{2})$ ，使得

$$\cos\xi f'(\xi)+\sin\xi f''(\xi)=0.$$

分析 结论转化为 $(\sin xf'(x))'|_{x=\xi}=0$

设辅助函数 $\varphi(x)=\sin xf'(x)$ $\varphi(0)=0,$

$$\varphi(1)=\sin 1\cdot f'(1),\quad \varphi(\frac{\pi}{2})=\sin\frac{\pi}{2}\cdot f'(\frac{\pi}{2})=f'(\frac{\pi}{2}).$$

由$f(0)=0,\ f(1)=3,\ f(\frac{\pi}{2})=1.$知存在最大值点 $\eta\in(0,\frac{\pi}{2})$, $f(\eta)$是最大值，则由费马引理得 $f'(\eta)=0.$ 从而 $\varphi(\eta)=\sin\eta f'(\eta)$=0. $\varphi(x)$在$[0,\eta]$上满足罗尔定理的条件.

例5. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,\frac{\pi}{2}]$上连续，在 $(0,\frac{\pi}{2})$内二阶可导，且 $f(0)=0$, $f(1)=3$, $f(\frac{\pi}{2})=1$.

证明：至少存在一点 $\xi\in(0,\frac{\pi}{2})$ ，使得

$$\cos\xi f'(\xi)+\sin\xi f''(\xi)=0.$$

证： 问题转化为证 $(\sin x f'(x))'|_{x=\xi}=0$

设辅助函数 $\varphi(x)=\sin x f'(x)$, $\varphi(0)=0$,

由 $f(0)=0$, $f(1)=3$, $f(\frac{\pi}{2})=1$. 知存在最大值点 $\eta\in(0,\frac{\pi}{2})$,

则由费马引理得 $f'(\eta)=0$. 从而 $\varphi(\eta)=\sin\eta f'(\eta)=0$.

$\varphi(x)$在$[0,\eta]$上满足罗尔定理的条件. 至少存在一点 $\xi\in(0,\eta)$

$\subset(0,\frac{\pi}{2})$ 使得 $\varphi'(\xi)=0$. 即 $\cos\xi f'(\xi)+\sin\xi f''(\xi)=0$.

例6. 设 $0<a<b$, 函数 $f(x)$在 $[a, b]$上连续, 在 (a, b)内可导, 试证在(a, b)内至少存在一点 ξ, 使 $f(b)-f(a)=\xi f'(\xi)\ln\frac{b}{a}$成立.

分析： 将所证等式变形为 $\frac{f(b)-f(a)}{\ln b-\ln a}=\frac{f'(\xi)}{1/\xi}$ 或

$$\frac{f(b)-f(a)}{\ln b-\ln a}=\left.\frac{f'(x)}{[\ln x]'}\right|_{x=\xi}$$

,可见，应对$f(x)$与 $\ln x$在$[a, b]$上应用柯西中值定理.

证明: 设$g(x)=\ln x$, 由题设知, $f(x)$与$g(x)$在$[a, b]$上满足柯西中值定理的条件。由柯西中值定理可知,

在$(a,\ b)$内至少存在一点ξ，使 $\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$,

即
$$\frac{f(b)-f(a)}{\ln b-\ln a}=\frac{f'(\xi)}{1/\xi}$$

亦即
$$f(b)-f(a)=\xi f'(\xi)\ln\frac{b}{a}.$$

总结：利用中值定理证明相关命题，关键是根据题目的特点，寻找合适的定理及相应的辅助函数。步骤如下：（1）构造辅助函数；

（2）确定区间；

（3）验证定理条件。

例7. 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上可导, 且 $f(x)+f'(x)>0$, 证明 $f(x)$ 至多只有一个零点 .

证: 设 $\varphi(x)=\mathrm{e}^{x}f(x)$

则 $\varphi'(x)=\mathrm{e}^{x}[f(x)+f'(x)]>0$

故 $\varphi(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续单调递增, 从而至多只有一个零点 .

又因 $\mathrm{e}^{x}>0$, 因此 $f(x)$ 也至多只有一个零点 .

思考: 若题中 $f(x)+f'(x)>0$ 改为 $f(x)-f'(x)<0$, 其他不变时, 如何设辅助函数?

$\boxed{\varphi(x)=\mathrm{e}^{-x}f(x)}$

例8. 设 $f(0)=0$, 在 $[0,+\infty)$ 上 $f'(x)$ 存在 , 且单调递减 , 证明对一切 $a>0, b>0$ 有

$$f(a+b)<f(a)+f(b)$$

证: 设 $\varphi(x)=f(a+x)-f(a)-f(x)$, 则 $\varphi(0)=0$

$$\varphi'(x)=f'(a+x)-f'(x)<0 \quad (x>0)$$

所以当 $x>0$时, $\varphi(x)<\varphi(0)=0$

令 $x=b$, 得

$$\varphi(b)=f(a+b)-f(a)-f(b)<0$$

即所证不等式成立 .

例9' 设 $f''(x) < 0$, $f(0) = 0$, 证明 $\forall x_1 > 0, x_2 > 0$, 有 $f(x_1 + x_2) < f(x_1) + f(x_2)$.

证 不妨设 $0 < x_1 < x_2$

因为 $f(x_1 + x_2) - f(x_2) - f(x_1)$

$$= [f(x_1 + x_2) - f(x_2)] - [f(x_1) - f(0)]$$

$$= f'(\xi_2)x_1 - f'(\xi_1)x_1 \quad (x_2 < \xi_2 < x_1 + x_2,\ 0 < \xi_1 < x_1)$$

$$= x_1 f''(\xi)(\xi_2 - \xi_1) < 0 \qquad (\xi_1 < \xi < \xi_2)$$

所以 $f(x_1 + x_2) < f(x_1) + f(x_2)$.

例10. 设$e<a<b<e^2$，证明$\ln^2 b-\ln^2 a>\frac{4}{e^2}(b-a)$.

证明： 令$f(x)=\ln^2 x-\ln^2 a-\frac{4}{e^2}(x-a)$，$f(a)=0$,

则$f(x)$在$[a,e^2]$上连续，$f(x)$在(a,e^2)内可导,且

$$f'(x)=\frac{2\ln x}{x}-\frac{4}{e^2},\quad f'(e^2)=\frac{2\ln e^2}{e^2}-\frac{4}{e^2}=0,$$

$$f''(x)=\frac{2(1-\ln x)}{x^2}<\frac{2(1-\ln e)}{x^2}=\frac{2(1-1)}{x^2}=0$$

$\therefore$当$x\in(a,e^2)$时, $f'(x)$单调递减., $f'(x)>f'(e^2)=0.$

从而$f(x)$在$[a,e^2]$内单调增加,

因此当 $a<b<e^2$时, $f(b)>f(a)=0$,

即 $$\ln^2 b-\ln^2 a>\frac{4}{e^2}(b-a).$$

例10. 设$e<a<b<e^2$，证明$\ln^2 b-\ln^2 a>\frac{4}{e^2}(b-a)$.

证明: 令$f(x)=\ln^2 x$,

则$f(x)$在$[a,b]$上满足拉格朗日中值定理的条件.

$\therefore$存在$\xi\in(a,b)$, 满足$\frac{\ln^2 b-\ln^2 a}{b-a}=f'(\xi)=\frac{2\ln\xi}{\xi}$.

令$g(x)=\frac{2\ln x}{x}, x\in(e,e^2)$,

$\therefore$由$g'(x)=\frac{2(1-\ln x)}{x^2}$, 可得，当$x\in(e,e^2)$时, $g'(x)<0$.

$\therefore$当$x\in(e,e^2)$时, $g(x)$单调递减.

又$\because e<a<\xi<b<e^2$, $\therefore \frac{4}{e^2}<\frac{2\ln\xi}{\xi}$.

即 $\frac{\ln^2 b-\ln^2 a}{b-a}>\frac{4}{e^2}$. 从而 $\ln^2 b-\ln^2 a>\frac{4}{e^2}(b-a)$.

例11. 设实数 $a_0, a_1, \cdots, a_n$ 满足下述等式

$$a_0 + \frac{a_1}{2} + \cdots + \frac{a_n}{n+1} = 0$$

证明方程 $a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n = 0$ 在 $(0, 1)$ 内至少有一个实根 .

证: 令 $F'(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$, 则可设

$$F(x) = a_0 x + \frac{a_1}{2} x^2 + \cdots + \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$$

显然, $F(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 在 $(0, 1)$ 内可导, 且 $F(0) = F(1) = 0$, 由罗尔定理知存在一点 $\xi \in (0,1)$, 使 $F'(\xi) = 0$,

即 $a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n = 0$ 在 $(0, 1)$ 内至少有一个实根 ξ.

3. 已知函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 在 $(0,1)$ 内可导, 且 $f(0)=0,\ f(1)=1$, 证明

(1) 存在 $\xi\in(0,1)$, 使得 $f(\xi)=1-\xi$

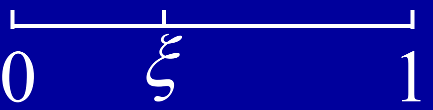
(2) 存在两个不同的点 $\eta,\zeta\in(0,1)$, 使得 $f'(\eta)f'(\zeta)=1$

(2005 考研)

证: (1) 令 $g(x)=f(x)+x-1$, 则 $g(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 且

$$g(0)=-1<0,\quad g(1)=1>0$$

故存在 $\xi\in(0,1)$ 使



$$g(\xi)=f(\xi)+\xi-1=0$$

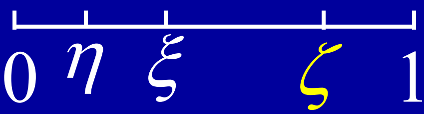
即 $$f(\xi)=1-\xi$$

3. 已知函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 在 $(0,1)$ 内可导, 且 $f(0)=0,\ f(1)=1$, 证明

(1) 存在 $\xi\in(0, 1)$, 使得 $f(\xi)=1-\xi$

(2) 存在两个不同的点 $\eta, \zeta\in(0, 1)$, 使得 $f'(\eta)f'(\zeta)=1$

(2) 根据拉格朗日中值定理, 存在 $\eta\in(0,\xi)\subset(0,1)$, $\zeta\in(\xi,1)\subset(0,1)$, 使



$$f'(\eta)=\frac{f(\xi)-f(0)}{\xi-0}=\frac{1-\xi}{\xi}$$

$$f'(\zeta)=\frac{f(1)-f(\xi)}{1-\xi}=\frac{\xi}{1-\xi}$$

$$\therefore\quad f'(\eta)f'(\zeta)=\frac{1-\xi}{\xi}\cdot\frac{\xi}{1-\xi}=1$$

4. 设函数 $f(x), g(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a,b) 内具有二阶导数, 且存在相等的最大值, 并满足 $f(a)=g(a)$, $f(b)=g(b)$, 证明存在 $\xi\in(a,b)$, 使 $f''(\xi)=g''(\xi)$.

(2007 考研)

证: 令 $F(x)=f(x)-g(x)$

情形1. $f(x), g(x)$ 在同一点 $c\in(a,b)$ 取得最大值, 则有

$$F(a)=F(b)=F(c)=0,\quad F'(c)=0$$

据泰勒定理, 存在 $\xi\in(a,c)\subset(a,b)$, 使

$$F(a)=F(c)+F'(c)(a-c)+\tfrac{1}{2!}F''(\xi)(a-c)^2$$

由此得 $$F''(\xi)=0$$

即有 $$f''(\xi)=g''(\xi), \xi\in(a,b)$$

4. 设函数 $f(x), g(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a,b) 内具有二阶导数, 且存在相等的最大值, 并满足 $f(a)=g(a)$, $f(b)=g(b)$, 证明存在 $\xi\in(a,b)$, 使 $f''(\xi)=g''(\xi)$.

情形2. $f(x), g(x)$ 分别在点 $c, d\in(a,b)$ 取得最大值, 无妨设 $c<d$, 则有

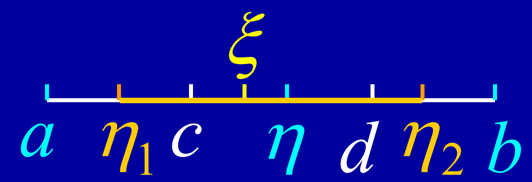
$$F(c)=f(c)-g(c)>0,\quad F(d)=f(d)-g(d)<0$$

因此据零点定理, 存在 $\eta\in(c,d)\subset(a,b)$ 使 $F(\eta)=0$

又 $F(a)=F(b)=0$, 分别在 $(a,\eta), (\eta,b)$ 上对 $F(x)$ 应用罗尔定理得

$$F'(\eta_1)=0,\ \eta_1\in(a,\eta);\quad F'(\eta_2)=0,\ \eta_2\in(\eta,b)$$

再对 $F'(x)$ 在 (η_1,η_2) 上用罗尔定理得



$$F''(\xi)=0,\quad \xi\in(\eta_1,\eta_2)\subset(a,b)$$

即有 $f''(\xi)=g''(\xi)\qquad \xi\in(a,b)$

例1. 设函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内可导, 且 $|f'(x)| \le M$, 证明 $f(x)$ 在 (a,b) 内有界.

证: 取点 $x_0 \in (a,b)$, 再取异于 x_0 的点 $x \in (a,b)$, 对 $f(x)$ 在以 x_0, x 为端点的区间上用拉氏中值定理, 得

$$f(x) - f(x_0) = f'(\xi)(x - x_0) \quad (\xi \text{ 界于 } x_0 \text{ 与 } x \text{ 之间})$$

$$\begin{aligned} \therefore \quad |f(x)| &= |f(x_0) + f'(\xi)(x - x_0)| \\ &\le |f(x_0)| + |f'(\xi)||x - x_0| \\ &\le |f(x_0)| + M(b-a) = K \quad (\text{定数}) \end{aligned}$$

可见对任意 $x \in (a,b)$, $|f(x)| \le K$, 即得所证 .

例3. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内可导, 且 $0<a<b$, 试证存在 $\xi,\eta\in(a,b)$, 使 $f'(\xi)=\dfrac{a+b}{2\eta}f'(\eta)$.

证: 欲证 $\dfrac{f'(\xi)}{a+b}=\dfrac{f'(\eta)}{2\eta}$, 即要证 $\dfrac{f'(\xi)(b-a)}{b^2-a^2}=\dfrac{f'(\eta)}{2\eta}$.

因 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上满足拉氏中值定理条件, 故有

$$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a),\quad \xi\in(a,b) \qquad ①$$

又因 $f(x)$ 及 x^2 在 $[a,b]$ 上满足柯西定理条件, 故有

$$\frac{f(b)-f(a)}{b^2-a^2}=\frac{f'(\eta)}{2\eta},\quad \eta\in(a,b) \qquad ②$$

将①代入②, 化简得 $f'(\xi)=\dfrac{a+b}{2\eta}f'(\eta)$, $\xi,\eta\in(a,b)$

例5. 设函数 $f(x)$ 在[0, 3]上连续, 在(0, 3)内可导, 且 $f(0)+f(1)+f(2)=3,\ f(3)=1,$ 试证必存在 $\xi\in(0,3)$, 使 $f'(\xi)=0.$ (2003考研)

证: 因 $f(x)$ 在[0, 3]上连续, 所以在[0, 2]上连续, 且在[0, 2]上有最大值 M 与最小值 m, 故

$$m\le f(0),\ f(1),\ f(2)\le M \Longrightarrow m\le\frac{f(0)+f(1)+f(2)}{3}\le M$$

由介值定理, 至少存在一点 $c\in[0,2]$, 使

$$f(c)=\frac{f(0)+f(1)+f(2)}{3}=1$$

$\because f(c)=f(3)=1$, 且 $f(x)$ 在 $[c,3]$ 上连续, 在 $(c,3)$ 内可导, 由罗尔定理知, 必存在 $\xi\in(c,3)\subset(0,3)$, 使 $f'(\xi)=0.$

例8. 证明 $f(x)=(1+\frac{1}{x})^x$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调增加.

证: $\ln f(x)=x\ln(1+\frac{1}{x})$

$$=x[\ln(1+x)-\ln x]$$

$$\therefore\quad f'(x)=(1+\frac{1}{x})^x[\ln(1+x)-\ln x-\frac{1}{1+x}]$$

令 $F(t)=\ln t$, 在 $[x,x+1]$上利用拉氏中值定理, 得

$$\ln(1+x)-\ln x=\frac{1}{\xi}>\frac{1}{1+x}\qquad(0<x<\xi<x+1)$$

故当 $x>0$ 时, $f'(x)>0$, 从而 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调增.

例1 设在 $[0,a]$ 上，$f(0)=0, f''(x)>0$，证明函数 $\varphi(x)=\dfrac{f(x)}{x}$ 在 $[0,a]$ 上是单调增加的.

证 当 $0<x<a$ 时，有 $\varphi'(x)=\dfrac{f'(x)x-f(x)}{x^2}$,

根据拉格朗日中值定理

$$f(x)-f(0)=f'(\xi)(x-0)\ (0<\xi<x).$$

因 $f''(x)>0$，即 $f'(x)$ 是单调增加的．因而

$$f'(x)-f'(\xi)>0,$$

故 $\varphi'(x)=\dfrac{f'(x)-[f(x)-f(0)]}{x^2}=\dfrac{f'(x)x-f'(\xi)(x-0)}{x^2}$

故 $\varphi'(x)=\dfrac{(f'(x)-f'(\xi))x}{x^2}=\dfrac{f'(x)-f'(\xi)}{x}>0,$

所以 $\varphi(x)=\dfrac{f(x)}{x}$在$[0,a]$ 上是单调增加的.

例1 设在 $[0,a]$ 上，$f(0)=0, f''(x)>0$ ，证明函数$\varphi(x)=\dfrac{f(x)}{x}$ 在$[0,a]$ 上是单调增加的.

证 当$0<x<a$时，有 $\varphi'(x)=\dfrac{f'(x)x-f(x)}{x^2}$,

设$F(x)=f'(x)x-f(x)(0\le x\le a)$.

因 $f''(x)>0$, 因而

$$F'(x)=f'(x)+xf''(x)-f'(\xi)=xf''(x)>0,$$

即 $F(x)$ 是单调增加的. 因而 $F(x)>F(0)=0$,

故 $\varphi'(x)>0$，所以 $\varphi(x)=\dfrac{f(x)}{x}$在$[0,a]$ 上是单调增加的.

练习

设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 连续, $(0,1)$ 可导， 且 $f(1)=0$,

证明:存在 $\xi\in(0,1)$, 使 $n f(\xi)+\xi f'(\xi)=0.$

证: 设辅助函数 $\varphi(x)=x^n f(x)$

显然 $\varphi(x)$ 在 $[0,1]$ 上满足罗尔定理条件,

因此至少存在 $\xi\in(0,1)$, 使得

$$\varphi'(\xi)= n\xi^{n-1}f(\xi)+\xi^n f'(\xi)=0$$

即

$$n f(\xi)+\xi f'(\xi)=0$$

例5. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 在 $(0,1)$ 内可导, 证明至少存在一点 $\xi \in (0,1)$, 使 $f'(\xi) = 2\xi[f(1) - f(0)]$.

证: 问题转化为证

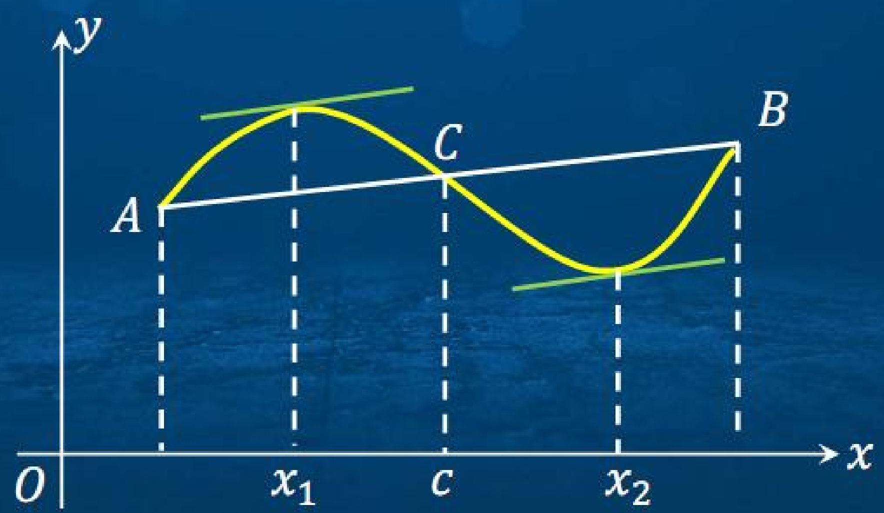
$$\frac{f(1)-f(0)}{1-0} = \frac{f'(\xi)}{2\xi} = \left.\frac{f'(x)}{(x^2)'}\right|_{x=\xi}$$

设 $F(x) = x^2$, 则 $f(x), F(x)$ 在 $[0, 1]$ 上满足柯西中值定理条件, 因此在 $(0, 1)$ 内至少存在一点 ξ, 使

$$\frac{f(1)-f(0)}{1-0} = \frac{f'(\xi)}{2\xi}$$

即 $$f'(\xi) = 2\xi[f(1) - f(0)]$$

例4 设$f(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)内二阶可导，又若$f(x)$的图形与联结 $A\big(a,f(a)\big),B\big(b,f(b)\big)$ 两点的弦交于点$C(c,f(c))$ $(a<c<b)$. 证明在(a,b)内至少存在一点ξ，使得$f''(\xi)=0$.



例5. 设 $f(x)$ 在$[a,b]$上连续, 在(a,b) 内二阶可导, 又若$f(x)$的图形与联结 A(a,f(a)),B(b,f(b))两点的弦交于点C(c,f(c)) $a<c<b$. 证明在(a,b)内至少存在一点 ξ, 使得 $f''(\xi)=0.$

证: 因为 $f(x)$ 在(a,b)内二阶可导, 则$f'(x)$ 在(a,b)内存在且连续, 所以$f(x)$在$[a,c]$和$[c,b]$上满足拉格朗日中值定理条件, 因此应有

$$f'(x_1)=\frac{f(c)-f(a)}{c-a},\quad a<x_1<c;\quad f'(x_2)=\frac{f(b)-f(c)}{b-c},\quad c<x_2<b$$

因为A,B,C三点在一条直线上，所以$f'(x_1)=f'(x_2)$,

由 $f'(x)$ 在$[x_1,x_2]$满足罗尔定理的条件, 由罗尔定理知至少存在一点$\xi\in(x_1,x_2)\subset(a,b)$, 使 $f''(\xi)=0.$

2. 设 $f(x)\in C[0,\pi]$, 且在 $(0,\pi)$ 内可导, 证明至少存在一点 $\xi\in(0,\pi)$, 使 $f'(\xi)=-f(\xi)\cot\xi$.

提示: 由结论可知, 只需证

$$f'(\xi)\sin\xi+f(\xi)\cos\xi=0$$

即 $$\left[f(x)\sin x\right]'\Big|_{x=\xi}=0$$

设 $$F(x)=f(x)\sin x$$

验证 $F(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上满足罗尔定理条件.

例5. 试证至少存在一点 $\xi \in (1, \mathrm{e})$ 使 $\sin 1 = \cos \ln \xi$.

证：法1 用柯西中值定理 . 令

$$f(x) = \sin \ln x, \quad F(x) = \ln x$$

则 $f(x)$, $F(x)$ 在 [1 , e] 上满足柯西中值定理条件,

因此
$$\frac{f(\mathrm{e}) - f(1)}{F(\mathrm{e}) - F(1)} = \frac{f'(\xi)}{F'(\xi)}, \quad \xi \in (1, \mathrm{e})$$

即
$$\sin 1 = \frac{\frac{1}{\xi}\cos \ln \xi}{\frac{1}{\xi}} = \cos \ln \xi$$

分析:

$$\sin 1 = \cos \ln \xi \iff \frac{\sin \ln \mathrm{e} - \sin \ln 1}{\ln \mathrm{e} - \ln 1} = \frac{\frac{1}{\xi}\cos \ln \xi}{\frac{1}{\xi}}$$

例5. 试证至少存在一点 $\xi \in (1, \mathrm{e})$ 使 $\sin 1 = \cos \ln \xi$.

法2 令 $f(x) = \sin \ln x - \sin 1 \cdot \ln x$

则 $f(x)$ 在 $[\,1\,,\,\mathrm{e}\,]$ 上满足罗尔中值定理条件,

因此存在 $\xi \in (1, \mathrm{e})$, 使

$$f'(\xi) = 0$$

$$f'(x) = \frac{1}{x} \cdot \cos \ln x - \sin 1 \cdot \frac{1}{x}$$

$$\sin 1 = \cos \ln \xi$$