西安交通大学
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY

高数期中讲座

王孟可

2020年11月

Contents Title

导数：高阶导数与隐函数求导

定义

导数定义　设函数 $y=f(x)$ 在 x_0 点的某邻域内有定义,当自变量 x 在 x_0 点处取得增量 $\Delta x(\Delta x\neq 0)$ 时，相应地,函数 y 取得增共 $\Delta y=f\left(x_0+\Delta x\right)-f\left(x_0\right)$, 如果极限

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f\left(x_0+\Delta x\right)-f\left(x_0\right)}{\Delta x}$$

存在,则称函数 $y=f(x)$ 在 x_0 点可导,并称这个极限值为函数 $y=f(x)$ 在 x_0 点处的导数,记為 $f'\left(x_0\right), y'\left(x_0\right), \left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}$

例如

设 $f(x)=x(x+1)(x+2)\cdots(x+n)$, 则 $f'(0)=$

解　根据 $f(x)$ 在点 $x=0$ 导数的定义

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}(h+1)(h+2)\cdots(h+n)=n!$$

故应填 $n!$.

定义

高阶导数是什么?

高阶导数　函数 $y=f(x)$ 的导数的导数，即 $(y')'$，称为 $f(x)$ 的二阶导数,记为 $y''=f''(x)$; 一般 $y=f(x)$ 的 $(n-1)$ 阶导数的导数称为 $f(x)$ 的 n 阶导数，记为 $y^{(n)}=f^{(n)}(x)$. 二阶及二阶以上的导数称为高阶导数.

重点

设函数 $u=u(x), v=v(x)$ 具有 n 阶导数,则

$[u\pm v]^{(n)}=u^{(n)}\pm v^{(n)}$

$[ku]^{(n)}=ku^{(n)}$

$[uv]^{(n)}=\sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(n-k)}v^{(k)} \quad =u^{(n)}v+nu^{(n-1)}v'+\frac{n(n-1)}{2!}u^{(n-2)}v''+\cdots+nu'v^{(n-1)}+uv^{(n)}$

称为莱布尼兹 n 阶导数公式.

例题

例1： 设 $y=\sin^4 x-\cos^4 x$, 则求 $y^{(n)}$

$y=\sin^4 x-\cos^4 x=\left(\sin^2 x-\cos^2 x\right)\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)=\sin^2 x-\cos^2 x$

$=-\cos 2x$

$y'=2\sin 2x$

……

$y^{(n)}=2\cdot 2^{n-1}\sin\left(2x+\frac{n-1}{2}\pi\right)=2^n\sin\left(2x+\frac{n-1}{2}\pi\right)\ 2^n\sin\left(2x+\frac{n-1}{2}\pi\right)$

例题

例2：求函数 $f(x)=x^2\ln(1+x)$ 在 $x=0$ 处的 n 阶导数 $f^{(n)}(0)(n\geq 3)$

解法一由莱布尼兹公式

$$(uv)^{(n)}=u^{(n)}v^{(0)}+C_n^1u^{(n-1)}v'+C_n^2u^{(n-2)}v''+\cdots+u^{(0)}v^{(n)}$$

及 $[\ln(1+x)]^{(k)}=\frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{(1+x)^k}$ （k 为正整数）得

$$f^{(n)}(x)=x^2\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}+2nx\frac{(-1)^{n-2}(n-2)!}{(1+x)^{n-1}}+n(n-1)\cdot\frac{(-1)^{n-3}(n-3)!}{(1+x)^{n-2}}$$

所以 $f^{(n)}(0)=(-1)^{n-3}n(n-1)(n-3)!=\frac{(-1)^{n-1}n!}{n-2}$

还有第二种解法?

例题

解法二由麦克劳林公式及

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+o(x^n)$$

$$x^2\ln(1+x)=x^2\left[x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^{n-2}}{n-2}+o(x^{n-2})\right]$$

$$=x^3-\frac{x^4}{2}+\frac{x^5}{3}+\cdots+(-1)^{n-1}\cdot\frac{x^n}{n-2}+o(x^n)$$

比较 x^n 的系数得 $\frac{f^{(n)}(0)}{n!}=\frac{(-1)^{n-1}}{n-2}$

所以 $f^{(n)}(0)=\frac{(-1)^{n-1}n!}{n-2}$

定义

隐函数的导数求由方程 $F(x,y)=0$ 所确定的隐函数 $y=y(x)$ 的导数 $y'(x)$,
可将方程 $F(x,y)=0$ 两端对 x 求导,并注意 y 是 x 的函数,最后解出 $y'(x)$.

例3：方程 $\sqrt[x]{y}=\sqrt[y]{x}(x>0,y>0)$ 确定函数 $y=f(x)$，求 $\frac{d^2y}{dx^2}$.

直接求导?

显然不是!

单击此处添加内容

eln大法！！！

例3：方程 $\sqrt[x]{y}=\sqrt[y]{x}(x>0,y>0)$ 确定函数 $y=f(x)$, 求 $\frac{d^2y}{dx^2}$.

解 $y^{\frac{1}{x}}=x^{\frac{1}{3}}, \frac{1}{x}\ln y=\frac{1}{y}\ln x, y\ln y=x\ln x$

等式两边对 x 求导,得($\ln y+1)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\ln x+1$, 即 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\ln x+1}{\ln y+1}$. 所以

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\frac{1}{x}(\ln y+1)-(\ln x+1)\cdot\frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx}}{(\ln y+1)^2}=\frac{y(\ln y+1)^2-x(\ln x+1)^2}{xy(\ln y+1)^3}$$

中值定理

Rolle、Lagrange与Cauchy

定义

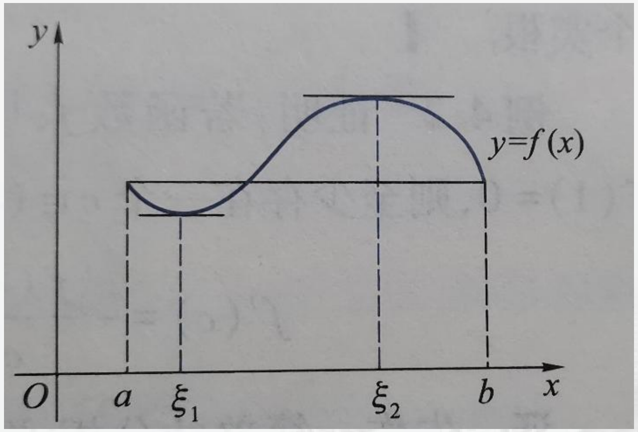
(Rolle 定理) 若函数 $f:[a,b]$满足下列条件:

(1) f 在 $[a,b]$ 上连续

(2) f 在 (a,b) 内可导

(3) $f(a)=f(b)$,

则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$, 使 $f'(\xi)=0$.



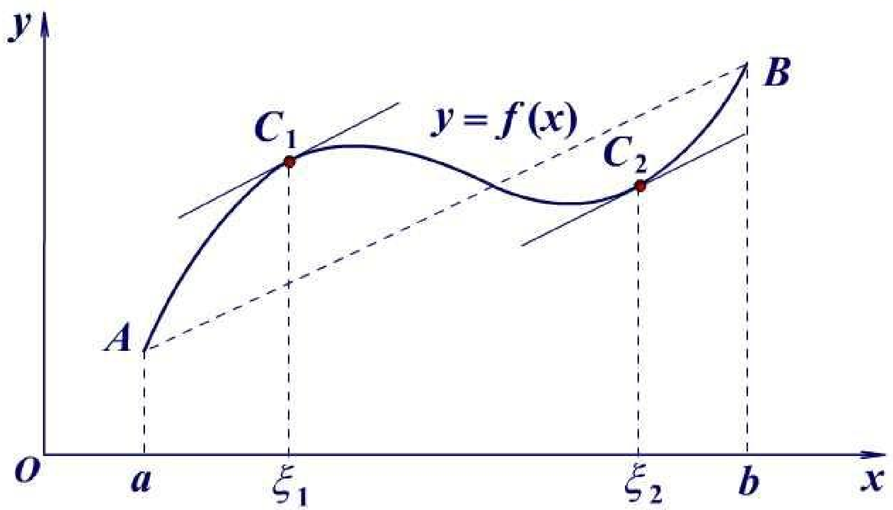
Lagrange? ——Rolle加强版

定义

Lagrange中值定理

弦 AB 的斜率 $=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi_1)=f'(\xi_2)$

在曲线弧 AB 上至少有一点，在该点处的切线平行于弦 AB.



Cauchy? ——Lagrange加强版

例题

例4：设 $f(x)$ 在 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 上一阶导函数连续，在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 上二阶可导，且 $f(0)=0, f(1)=3, f\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$，证明：存在 $\xi\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，使得：$f'(\xi)+f''(\xi)\tan\xi=0$.

中值定理我知道，但是怎么用？！

例题

当然是构造！

例4：设 $f(x)$ 在 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 上一阶导函数连续，在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 上二阶可导，且 $f(0)=0, f(1)=3, f\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$，证明：存在 $\xi\in(0,\frac{\pi}{2})$，使得：$f'(\xi)+f''(\xi)\tan\xi=0$.

证明：将 ξ 替换为 $x, f'(x)+f''(x)\tan x=0 \Longrightarrow f''(x)sinx+f'(x)cosx=0$,

令 $F(x)=f'(x)\sin x$,

因为 $F'(x)=f''(x)\sin x+f'(x)\cos x$

因此我们需要在区间上找到两个相等的点即可证明题中结论（Rolle定理），

且当$x=0$时，$sinx=0$,即$F(0)=0$,

$\sin x$ 在 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 上单调，应考虑 $f'(x)$ 另一个零点

由于 $f(x)$ 在 [0,1] 上连续，$f(0)=0, f(1)=3$，根据介值定理，存在 $\eta\in(0,1)$，

使得 $f(\eta)=1$，故存在 $\tau\in\left(\eta,\frac{\pi}{2}\right)$，使得 $f'(\tau)=0$（Rolle定理）。

于是有 $F(0)=0,\quad F(\tau)=f'(\tau)\sin x=0$，推出：存在 $\xi\in(0,\tau)\subset\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，

使得 $F'(\xi)=0$，即 $f''(\xi)\sin\xi+f'(\xi)\cos\xi=0$,

故存在 $\xi\in(0,\tau)\subset(0,\frac{\pi}{2})$ 使得 $f'(\xi)+f''(\xi)\tan\xi=0$

构造

1) 欲证 $\xi f'(\xi)+nf(\xi)=0$, 令 $F(x)=x^n f(x)$;

2) 欲证 $\xi f'(\xi)-nf(\xi)=0$, 令 $F(x)=\frac{f(x)}{x^n}$

3) 欲证 $f'(\xi)+\lambda f(\xi)=0$, 令 $F(x)=e^{\lambda x}f(x)$

特别的: $f'(\xi)+f(\xi)=0$, 令 $F(x)=e^{x}f(x)$

$f'(\xi)-f(\xi)=0$, 令 $F(x)=e^{-x}f(x)$

4) 欲证 $\alpha f'(\xi)+\beta f(\xi)=0$, 令$F(x)=e^{\frac{\beta}{\alpha}x}f(x);(\alpha\neq 0)$

5)欲证 $f''(x)sinx+f'(x)cosx=0$, 令 $F(x)=f'(x)\sin x$,

或者$f''(x)cosx-f'(x)sinx=0$, 令 $F(x)=f'(x)\cos x$,

6) 欲证 $f'(\xi)+g'(\xi)f(\xi)=0$, 令 $F(x)=e^{g(x)}f(x)$

7) 欲证$f'(\xi)+g(\xi)f(\xi)=0$, 令$F(x)=e^{\int_0^x g(t)dt}f(x)$;

例题

双值问题

设函数 $f(x)$ 在[a,b]上连续,在 (a,b) 内可导,且 $f'(x) \neq 0$. 试证：存在 $\xi, \eta \in (a,b)$, 使得 $\frac{f'(\xi)}{f'(\eta)} = \frac{e^b - e^a}{b-a} \cdot \mathrm{e}^{-\eta}$

例题

设函数 $f(x)$ 在[a,b]上连续,在 (a,b) 内可导,且 $f'(x)\neq 0$. 试证：存在 $\xi,\eta\in(a,b)$, 使得 $\frac{f'(\xi)}{f'(\eta)}=\frac{e^b-e^a}{b-a}\cdot \mathrm{e}^{-\eta}$

证　令 $g(x)=\mathrm{e}^x$, 则 $g(x)$ 与 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上满足柯西中值定理条件,故由柯西中值定理,存在 $\eta\in(a,b)$, 使得

$$\frac{f(b)-f(a)}{\mathrm{e}^b-\mathrm{e}^a}=\frac{f'(\eta)}{\mathrm{e}^\eta},\quad \frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{(\mathrm{e}^b-\mathrm{e}^a)\,\mathrm{e}^{-\eta}}{b-a}\cdot f'(\eta)$$

又 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上满足拉格朗日中值定理条件,故存在 $\xi\in(a,b)$, 使

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi)$$

由题设 $f'(x)\neq 0$ 知，$f'(\eta)\neq 0$, 从而 $\frac{f'(\xi)}{f'(\eta)}=\frac{e^b-e^a}{b-a}\cdot \mathrm{e}^{-\eta}$

例题

设 $f(x)\in C[a,b],D(a,b),0\le a\le b\le\frac{\pi}{2}$. 证明至少存在两点 $\xi_1,\xi_2\in(a,b)$,
使 $f'(\xi_2)\tan\frac{a+b}{2}=f'(\xi_1)\frac{\sin\xi_2}{\cos\xi_1}$

证明:先把相同变量的移到等式一边。

$$\frac{f'(\xi_2)}{\sin\xi_2}=\frac{f'(\xi_1)}{\cos\xi_1\tan\frac{a+b}{2}}$$

且 $\frac{f'(\xi_1)}{cos\xi_1}=\frac{f(b)-f(a)}{sinb-sina}$

$$\Rightarrow\frac{f(b)-f(a)}{(\sin b-\sin a)\tan\frac{a+b}{2}}\ \frac{f(b)-f(a)}{2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\sin\left(\frac{b-a}{2}\right)}=\frac{f(b)-f(a)}{\cos a-\cos b}=\frac{f'(\xi_2)}{\sin\xi_2}$$

巧妙运用和差化积

例题

例6：证明不等式

$$\frac{2a}{a^2+b^2} < \frac{\ln b - \ln a}{b-a} < \frac{1}{\sqrt{ab}}.$$

证根据Lagrange定理,至少存在一点 $\xi \in (a,b)$, 使

$$\frac{\ln b - \ln a}{b-a} = (\ln x)'|_{x=\xi} = \frac{1}{\xi}$$

且

$$\frac{1}{b} < \frac{1}{\xi} < \frac{1}{a}$$

然后呢？

例题

先证左边不等式

由于 $0<a<\xi<b$, 故 $\frac{1}{\xi}>\frac{1}{b}>\frac{2a}{a^2+b^2}$, 从而 $\frac{\ln b-\ln a}{b-a}>\frac{2a}{a^2+b^2}$

再证右边不等式.

$$\varphi(x)=\ln x-\ln a-\frac{x-a}{\sqrt{ax}} \quad (x>a>0),:$$
$$\varphi'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{\sqrt{a}}\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{a}{2x\sqrt{x}}\right)=-\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{a})^2}{2x\sqrt{ax}}<0$$

故当 $x>a$ 时 ,$\varphi(x)$ 单调减少,又 $\varphi(a)=0$, 所以，当 $x>a$ 时 ,$\varphi(x)<\varphi(a)=0$, 即

$$\ln x-\ln a<\frac{x-a}{\sqrt{ax}}$$

从而当 $b>a>0$ 时 ,$\ln b-\ln a<\frac{b-a}{\sqrt{ab}}$, 即 $\frac{\ln b-\ln a}{b-a}<\frac{1}{\sqrt{ab}}$. 综上,

$$\frac{2a}{a^2+b^2}<\frac{\ln b-\ln a}{b-a}<\frac{1}{\sqrt{ab}}$$

得证

治学团学业辅导群7.0

群号：796348624

扫一扫二维码，加入群聊。

11.8治学团高数讲座通

扫一扫二维码，加入群聊。

西安交通大學
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY

谢谢大家