高数期中讲座

极限计算

治学团　能动B92 苏亚霖

极限计算基本方法：

- 1.两个重要极限
- 2.洛必达法则
- 3.等价无穷小
- 4.其他方法

两个重要极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1,\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$$

这两个重要极限是必考内容，也是极限计算中使用最频繁的公式。但是这个公式不是任何时候看到直接代进去就可以的。下面这道题是有一天在群里看到的，当时我也没有解释的很清楚。

求 $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{(1+\frac{1}{x})^{x^2}}$

他的做法是利用 $\lim_{x\to+\infty}(1+\frac{1}{x})^x=e$，分母变为 e^x，从而原式为 $\frac{e^x}{e^x}=1$

看起来十分合理，但是这个答案是错误的，问题出在哪了？

两个重要极限

实际上，他的求解过程可以分解为

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{(1+\frac{1}{x})^{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}(\frac{e}{(1+\frac{1}{x})^x})^x=\lim_{x\to+\infty}(\frac{e}{e})^x=\lim_{x\to+\infty}(1)^x=1$$

看出来有什么问题了吗?

这个极限求解过程相当于在同一极限号后面先计算 $\lim_{x\to+\infty}(1+\frac{1}{x})^x=e$,再计算 $\lim_{x\to+\infty}(\frac{e}{e})^x=1$

这犯了原则性错误——同一极限号后的同一变量的趋向具有同时性，不能人为制造先后循序。

通俗的说，在同一个极限符号后的变量是同时趋近无穷大或者某个常数，我们不能人为先求一部分极限再将这个极限结果求后面的极限。

这时候，有些同学可能就要问了，那我们求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{1-\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{\frac{1}{2}x^2}=2$

过程中不就先计算分母，然后再做整体计算吗？实际上，这里完整的写法应该是

原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{\frac{1}{2}x^2}\cdot\dfrac{\frac{1}{2}x^2}{1-\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{\frac{1}{2}x^2}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{2}x^2}{1-\cos x}=2$

同时我们需要记住，如 果 $\lim A,\lim B$ 均存在，即可以写为

$\lim(A\cdot B)=\lim A\cdot\lim B$

其中 $\lim A,\lim B$ 可以分别算之，无所谓 先后

$\lim A,\lim B$ 有一个不存在，$\lim A\cdot B$ 就不能写成 $\lim A\cdot\lim B$，

我们需要对 $\lim(A\cdot B)$ 整体运算

从这个角度来看，如果 我们这样求解 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{(1+\frac{1}{x})^{x^2}}=\dfrac{\lim\limits_{x\to+\infty}e^x}{\lim\limits_{x\to+\infty}e^x}=1$ 也是错误的

两个重要极限

提示：利用重要极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}(1+\frac{1}{x})^x=e$，得 $\lim u^v=\lim\{[1+(u-1)]^{\frac{1}{u-1}}\}^{(u-1)v}=e^{\lim(u-1)v}$

求极限 $\lim\limits_{x\to0}(\frac{e^x+e^{2x}+\ldots\ldots+e^{nx}}{n})^{\frac{e}{x}}$，其中n为给定的正整数

答案 $=\exp\{\frac{n+1}{2}e\}$

洛必达法则

- 1.洛必达法则的内容:

(1)当$x \to a$(或者$x \to \infty$)时，函数$f(x)$及函数$g(x)$都趋近于0或者趋近无穷大;

(2)$f'(x)$和$g'(x)$在点a的某个去心邻域内存在,且$g'(x) \neq 0$;

(3)$\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = A$($A$为常数或者无穷大）

表面上看，洛必达法则使用起来十分方便，大家只要无脑求导就完事了，但是真的是这样吗?

实际上洛必达法则使用时要小心，千万不用掉进出题人埋下的坑!

洛必达法则

好了，如果我们先来观察一下题目：分母是无穷小量乘有界量，分子是无穷小量，满足0比0型。好，直接洛就完事了。然后我们就有如下结果

例题1：求极限：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\cdot\sin\frac{1}{x}}{x}$

原式 $=\lim\limits_{x\to 0}(2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x})$

你会发现，好家伙，极限不存在？(虽然有个别题目让你求极限结果答案是极限不存在，但是绝大部分情况下极限是存在的)

洛必达法则

- 实际上，这种做法犯了一个很隐蔽的错误
- 对于洛必达法则

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

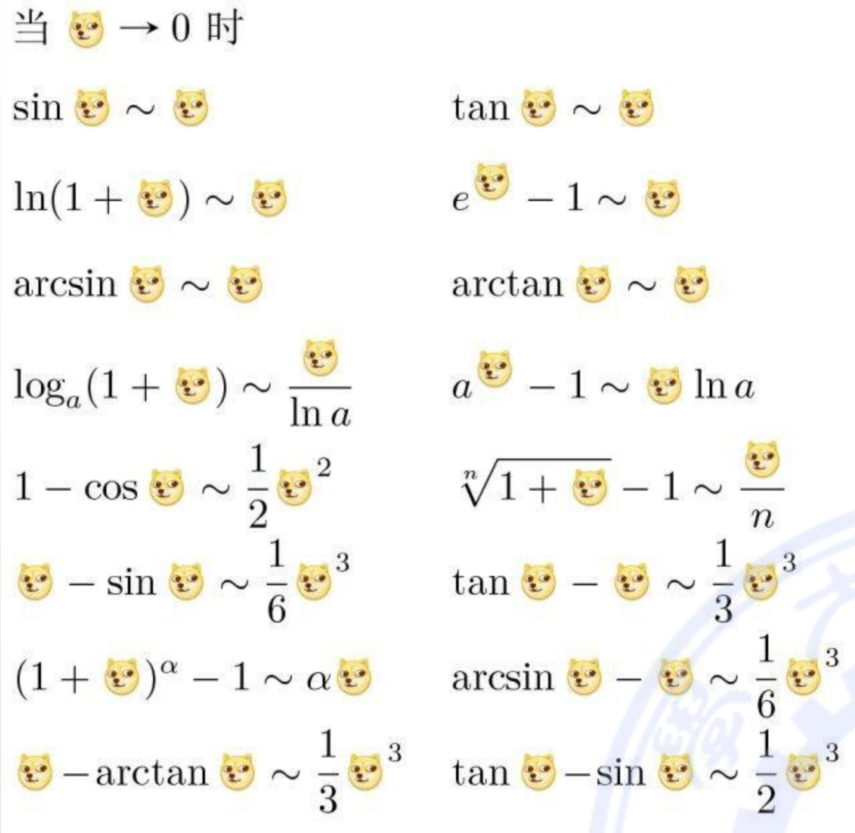
等式右边的极限存在，则左边的极限就存在，而左边的极限存在，并不意味着右边的极限存在。这是很容易忽略的地方！
因此，当我们使用洛必达法则求极限时，如果求出极限不存在的情况，我们就要考虑换一种方法计算。

等价无穷小替换

是时候祭出这张狗头图了

实际上，等价无穷小替换就是利用泰勒公式将分子分母变成上下同阶的结构求极限。

我们在考试的时候，只需要记好这张狗头图的等价无穷小替换式，在替换时注意阶数，就可以顺利求解出答案。如果我们在替换时不确定要替换到第几阶，就不妨多写几阶，大不了在最后在将高阶无穷小直接化为0.



等价无穷小替换

当 $x \to 0$ 时，$f(x) = x - (ax + b\sin x)\cos x$ 与 x^3 是等价无穷小，求常数 a, b

此题以及明确说和x^3为等价无穷小，所以我们在展开时只要展到三阶就可以了。

$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + o(x^3), \cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + o(x^2)$

因此，$f(x) = x - \{ax + b[x - \frac{1}{3!}x^3 + o(x^3)]\}[1 - \frac{1}{2!}x^2 + o(x^2)]$

$= [1-(a+b)]x + (\frac{2b}{3} + \frac{a}{2})x^3 + o(x^3)$

所以$1-(a+b)=0, \frac{2b}{3} + \frac{a}{2} = 1$, 于是$a = -2, b = 3$

其他方法

- 求极限其实是很灵活的，当我们发现有些题目无法用以上几种方法求解时，我们就要考虑使用其他方法来解题了。

求$\lim\limits_{n\to\infty} n^2(\arctan\frac{a}{n}-\arctan\frac{a}{n+1})$

令$f(t)=\arctan t, t\in[\frac{a}{x+1},\frac{a}{x}]$

$$\arctan\frac{a}{x}-\arctan\frac{a}{x+1}=\frac{1}{1+\varepsilon^2}(\frac{a}{x}-\frac{a}{x+1})$$

其中，$\varepsilon\in(\frac{a}{x+1},\frac{a}{x})$

那么，原极限为$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2}{1+\varepsilon^2}(\frac{a}{x}-\frac{a}{x+1})=\frac{ax^2}{x(x+1)}\cdot\frac{1}{1+\varepsilon^2}=a$

其他方法

求$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{n^2+1}+\dfrac{n}{n^2+2}+\ldots\ldots+\dfrac{n}{n^2+n}\right)$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^2+1}+\frac{n}{n^2+2}+\ldots\ldots+\frac{n}{n^2+n}\right)=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{n}{n^2+i}$$

对其做适当的放缩有

$$n\cdot\frac{n}{n^2+n}\le\sum_{i=1}^{n}\frac{n}{n^2+1}\le n\cdot\frac{n}{n^2+1}$$

根据夹逼准则，原式$=1$

常用放缩不等式

当$x>0$时，$\dfrac{x}{1+x}<\ln(x+1)<x$

阶乘不等式

$$\left(\frac{n+1}{e}\right)^n<n!<e\left(\frac{n+1}{e}\right)^{n+1}$$

$$\Leftrightarrow\frac{(n+1)^n}{n!}<e^n<\frac{(n+1)^{n+1}}{n!}$$

其他方法

求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n^2})(1+\frac{1}{n^2})\dots\dots(1+\frac{n}{n^2})$

$$=\lim_{n\to\infty}e^{\ln(1+\frac{1}{n^2})+\ln(1+\frac{2}{n^2})+\dots\dots\ln(1+\frac{n}{n^2})}$$

由于 $\ln(1+\frac{1}{n^2})+\ln(1+\frac{2}{n^2})+\dots\dots+\ln(1+\frac{n}{n^2})<\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\dots\dots+\frac{n}{n^2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2n}$

其又有 $>\frac{1}{n^2+1}+\frac{2}{n^2+2}+\dots\dots\frac{n}{n^2+n}>\frac{1}{n^2+n}+\frac{2}{n^2+n}+\dots\dots\frac{n}{n^2+n}$

$$=\frac{\frac{n(n+1)}{2}}{n^2+n}=\frac{1}{2}$$

求$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+x^n+(\frac{x^2}{2})^n}$在$x\geq 0$时的表达式

当$x\in[0,1)$时，1^n最大，则

$\sqrt[n]{1\cdot 1^n}\leq\sqrt[n]{1^n+x^n+(\frac{x^2}{2})^n}\leq\sqrt[n]{3\cdot 1^n}$，即$1\leq\sqrt[n]{1^n+x^n+(\frac{x^2}{2})^n}\leq 3^{\frac{1}{n}}$

所以，由夹逼准则，原　　极限 $=1$；

当$x\in[1,2)$时，　x^n最大，则

$\sqrt[n]{1\cdot x^n}\leq\sqrt[n]{1^n+x^n+(\frac{x}{2})^n}\leq\sqrt[n]{3\cdot x^n}$，因此有 $x\leq\sqrt[n]{1^n+x^n+(\frac{x}{2})^n}\leq 3^{\frac{1}{n}}\cdot x$，原极限 $=x$

当$x\in[2,+\infty)$，$(\frac{x^2}{2})^n$最大，则 $\sqrt[n]{1\cdot(\frac{x^2}{2})^n}\leq\sqrt[n]{1^n+x^n+(\frac{x^2}{2})^n}\leq\sqrt[n]{3\cdot(\frac{x^2}{2})^n}$

则有 $\frac{x^2}{2}\leq\sqrt[n]{1^n+x^n+(\frac{x^2}{2})^n}\leq 3^{\frac{1}{n}}\cdot\frac{x^2}{2}$，原极限 $=\frac{x^2}{2}$

利用倒代法

$$\lim_{x\to\infty} x\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}-e\right] = \lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-e}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0} e\frac{e^{\frac{\ln(1+x)}{x}-1}-1}{x} = \lim_{x\to 0} e\frac{\frac{\ln(1+x)}{x}-1}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0} e\frac{\ln(1+x)-x}{x^{2}} = \lim_{x\to 0} e\frac{\frac{1}{1+x}-1}{2x} = -\frac{e}{2}$$

所以 $\lim\limits_{n->\infty} n[(1+\frac{1}{n})^{n}-e]=-\frac{e}{2}$.

3. 极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}[(x^3+\frac{1}{2}x-tan\frac{1}{x})e^{\frac{1}{x}}-\sqrt{1+x^6}]$ 等于（ ）.

（A）1 （B）0 （C）e (D)$+\infty$

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\left(1+\frac{1}{2}t^2-t^3\tan t\right)e^t-\sqrt{1+t^6}}{t^3}$$

$$=\lim_{x\to0^+}\frac{\left(1+\frac{1}{2}t^2\right)e^t-1+1-\sqrt{1+t^6}}{t^3}-\lim_{x\to0^+}\frac{t^3\tan te^t}{t^3}$$

$$=\lim_{x\to0^+}\frac{\left(1+\frac{1}{2}t^2\right)e^t-1}{t^3}-\lim_{x\to0^+}\frac{\sqrt{1+t^6}-1}{t^3}$$

$$=\lim_{x\to0^+}\frac{\left(1+t+\frac{1}{2}t^2\right)e^t}{3t^2}-\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{2}t^6}{t^3}=+\infty.$$

1. 求极限$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{e^{\sin x}-\sqrt{\cos x}}{e^{\sin x}-1}\right)^{\frac{1}{x}}$.（原创）

因为

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{\cos x}}{e^{\sin x}-1}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\left(1+\sqrt{\cos x}\right)\left(e^{\sin x}-1\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{4}x=0,$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+\frac{1-\sqrt{\cos x}}{e^{\sin x}-1}\right)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+\frac{1-\sqrt{\cos x}}{e^{\sin x}-1}\right)}{\frac{1-\sqrt{\cos x}}{e^{\sin x}-1}}\cdot\frac{\frac{1-\sqrt{\cos x}}{e^{\sin x}-1}}{x}=\frac{1}{4},$$

所以

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^{\sin x}-\sqrt{\cos x}}{e^{\sin x}-1}\right)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}e^{\frac{\ln\left(1+\frac{1-\sqrt{\cos x}}{e^{\sin x}-1}\right)}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+\frac{1-\sqrt{\cos x}}{e^{\sin x}-1}\right)}{x}}=e^{\frac{1}{4}}.$$

令$y=(\cot x)^{\frac{1}{\ln x}}$,两边取对数，得$\ln y=\dfrac{\ln\cot x}{\ln x}$,

$\lim\limits_{x\to0^+}\ln y$是$\dfrac{\infty}{\infty}$型不定式，用洛必达法则：

$$\lim_{x\to0^+}\ln y=\lim_{x\to0^+}\frac{\ln\cot x}{\ln x}=\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{\cot x}\bullet(-\csc x)^2}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to0^+}\frac{-x}{\sin x\cos x}=-1$$

所以$\lim\limits_{x\to0^+}y=\lim\limits_{x\to0^+}(\cot x)^{\frac{1}{\ln x}}=e^{-1}$

祝大家可以在考试中取得好成绩！