期末复习习题课

一、定积分与不定积分及应用

二、综合题

三、往年考试题

一、定积分与不定积分及应用

例1 设$f(x)$连续，$F(x)=\int_0^x tf(x^2-t^2)dt$，求$F'(x)$

解 令$x^2-t^2=u$，则$dt=-\frac{1}{2t}du$

且当$t=0$时$u=x^2$；$t=x$时$u=0$；

$$F(x)=-\frac{1}{2}\int_{x^2}^{0} f(u)du=\frac{1}{2}\int_0^{x^2} f(u)du$$

故有 $F'(x)=xf(x^2)$

例2 (1) 证明 $\int_0^1 x^m(1-x)^n dx = \int_0^1 x^n(1-x)^m dx$;

(2) 求 $I_{m-1,n-1} = \int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1} dx \quad (m,n \in N_+)$.

证明 (1) 令$1-x=u$,则$dx=-du$,且当$x=0$时

$u=1$; $x=1$时$u=0$;于是有

$$\int_0^1 x^m(1-x)^n dx = -\int_1^0 u^n(1-u)^m du = \int_0^1 x^n(1-x)^m dx.$$

(2) $$I_{m-1,n-1} = \frac{1}{m}\int_0^1 (1-x)^{n-1} dx^m \underline{\underline{\text{分部积分}}} \frac{n-1}{m}\int_0^1 x^m(1-x)^{n-2} dx$$

$$\underline{\underline{\text{利用(1)}}} \frac{n-1}{m}\int_0^1 x^{n-2}(1-x)^m dx = \frac{n-1}{m}\int_0^1 x^{n-2}(1-x)^{m-1}(1-x)dx$$

$$= \frac{n-1}{m} I_{m-1,n-2} - \frac{n-1}{m} I_{m-1,n-1}$$

(2) 求 $I_{m-1,n-1}=\int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}dx \quad (m,n\in N_+)$.

于是有 $I_{m-1,n-1}=\dfrac{n-1}{m}I_{m-1,n-2}-\dfrac{n-1}{m}I_{m-1,n-1}$

$$\Rightarrow \quad I_{m-1,n-1}=\frac{n-1}{m+n-1}I_{m-1,n-2}$$

$$=\frac{n-1}{m+n-1}\frac{n-2}{m+n-2}I_{m-1,n-3}$$

$$=\cdots=\frac{n-1}{m+n-1}\frac{n-2}{m+n-2}\cdots\frac{1}{m+1}I_{m-1,0}$$

而 $I_{m-1,0}=\int_0^1 x^{m-1}dx=\dfrac{1}{m}$

$$\Rightarrow \quad I_{m-1,n-1}=\frac{n-1}{m+n-1}\frac{n-2}{m+n-2}\cdots\frac{1}{m+1}\frac{1}{m}=\frac{(n-1)!(m-1)!}{(m+n-1)!}$$

例3 已知函数$f(x)$在 $[0,+\infty)$ 上可导，并且$f(0)=1$

并满足等式：$f'(x)+f(x)-\dfrac{1}{1+x}\int_0^x f(t)dt=0$ ，求

$f'(x)$ 并证明：$e^{-x}\le f(x)\le 1\,(x\ge 0)$

证明：变形 $(1+x)[f'(x)+f(x)]-\int_0^x f(t)dt=0$

两边求导得 $f''(x)+\left(1+\dfrac{1}{1+x}\right)f'(x)=0 \Rightarrow f'(x)=\dfrac{C}{1+x}e^{-x}$

$f'(0)=-f(0)=-1$ $\Rightarrow f'(x)=-\dfrac{1}{1+x}e^{-x}$

当$x\ge 0$时，$f'(x)\le 0$，故 $f(x)\le f(0)=1$

当$x\ge 0$时，$\left[f(x)-e^{-x}\right]'=\dfrac{xe^{-x}}{x+1}\ge 0$，故$f(x)-e^{-x}\ge f(0)-e^{0}=0$

例4 设$f(x)=\int_1^x \frac{\ln x}{1+x}dx$,求$f(x)+f(\frac{1}{x})$. P243:9

解1

令$t=\frac{1}{y}$,则$f(\frac{1}{x})=\int_1^{\frac{1}{x}}=\int_1^x \frac{\ln\frac{1}{y}}{1+\frac{1}{y}}\left(-\frac{1}{y^2}\right)dy=\int_1^x \frac{\ln y}{y(y+1)}dy.$

则$f(x)+f(\frac{1}{x})=\int_1^x \frac{\ln x}{x}dx=\frac{1}{2}\ln^2 x.$

解2 由题设知：$x>0, f(x), f(\frac{1}{x})$可导，设$F(x)=f(x)+f(\frac{1}{x})$,则

$$F'(x)=\frac{\ln x}{1+x}+\frac{\ln\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}}\left(-\frac{1}{x^2}\right)=\frac{\ln x}{x}.$$

$F(1)=0$

解微分方程得

$$f(x)+f(\frac{1}{x})=\frac{1}{2}\ln^2 x.$$

例5 设$f(x)$在$[0,1]$上可微，且$f(1)=2\int_0^{\frac{1}{2}} xf(x)dx$,

证明：存在$\xi\in(0,1)$,使$f(\xi)+\xi f'(\xi)=0.$ P243:16

证明: 利用积分中值定理:

$$f(1)=\eta f(\eta),\quad \eta\in[0,\frac{1}{2}].$$

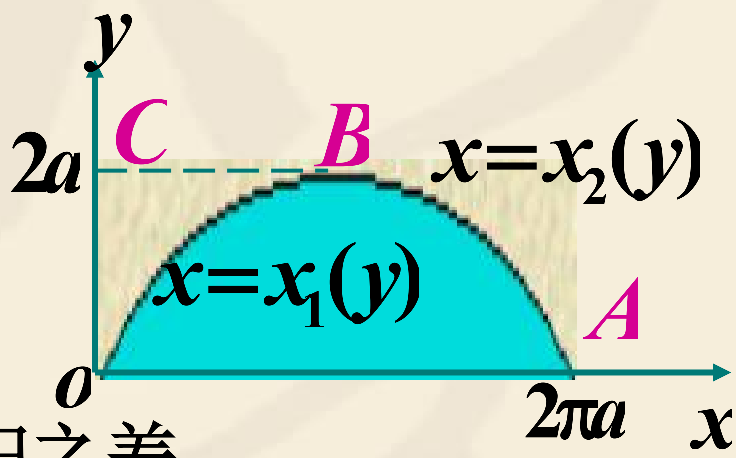
令$F(x)=xf(x)$,则 $F(1)=f(1)=\eta f(\eta);$

$$F(\eta)=\eta f(\eta)=F(1);$$

于是,$F(x)$在$[\eta,1]$上满足$Rolle$定理的条件,

$\therefore$存在$\xi\in(\eta,1)\subset(0,1)$ 使$F'(\xi)=f(\xi)+\xi f'(\xi)=0.$

例 6 求摆线 $x=a(t-\sin t)$，$y=a(1-\cos t)$ 的一拱与 $y=0$ 所围成的图形分别绕 x 轴 y 轴旋转构成旋转体的体积.



解 绕 y 轴旋转的旋转体体积

可看作平面图 $OABC$ 与 OBC

分别绕 y 轴旋转构成旋转体的体积之差.

$$V_y=\int_0^{2a}\pi x_2^2(y)dy-\int_0^{2a}\pi x_1^2(y)dy$$

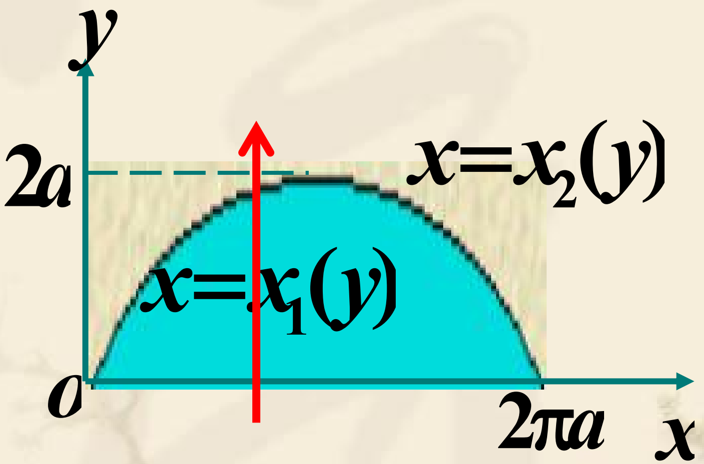
$$=\pi\int_{2\pi}^{\pi}a^2(t-\sin t)^2\cdot a\sin t dt-\pi\int_0^{\pi}a^2(t-\sin t)^2\cdot a\sin t dt$$

$$=\pi a^3\int_0^{2\pi}(t-\sin t)^2\sin t dt \;=6\pi^3a^3.$$

例 6 求摆线 $x = a(t - \sin t)$，$y = a(1 - \cos t)$ 的一拱与 $y = 0$ 所围成的图形分别绕 y 轴旋转构成旋转体的体积.

解2 绕 y 轴旋转的旋转体体积

（柱壳法）



$$V_y = \int_0^{2\pi a} 2\pi x \, | y(x) | \, dx$$

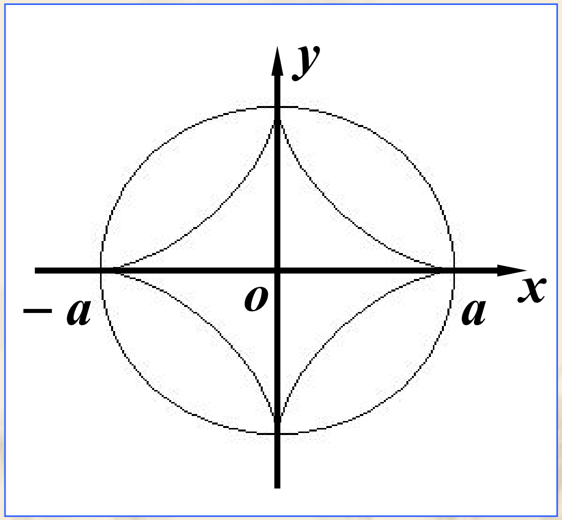
$$= 2\pi a^3 \int_0^{2\pi} (t - \sin t)(1 - \cos t)^2 \, dt$$

$$= 6\pi^3 a^3.$$

例 7 求星形线 $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}} (a > 0)$ 绕 x 轴旋转构成旋转体的体积.

解 $\because y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}$,

$$\therefore y^2 = \left(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}} \right)^3 \quad x \in [-a, a]$$



旋转体的体积

$$V = \int_{-a}^{a} \pi \left(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}} \right)^3 dx = \frac{32}{105} \pi a^3.$$

例8 $\int_0^{\pi}\sqrt{1-\sin x}dx$

解

$$\int_0^{\pi}\sqrt{1-\sin x}dx = \int_0^{\pi}\sqrt{(\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2})^2}dx$$

$$= \int_0^{\pi}\left|\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}\right|dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2})dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2})dx$$

$$= 4\sqrt{2}-4$$

例9 设$f(x)=\begin{cases}1+x^2 & x\le 0\\ e^{-x} & x>0\end{cases}$，求$\int_1^3 f(x-2)dx$

解 $\int_1^3 f(x-2)dx \underline{\underline{x-2=t}} \int_{-1}^1 f(t)dt$

$$=\int_{-1}^0 (1+t^2)dt+\int_0^1 e^{-t}dt$$

$$=\frac{7}{3}-\frac{1}{e}$$

例10 计算$\int \frac{1}{a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x}dx$

式中 a、b是不全为 0的非负常数

解 $a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x=\cos^2 x(a^2\tan^2 x+b^2)$

原积分 $=\int \frac{dx}{\cos^2 x(a^2\tan^2 x+b^2)}=\int \frac{d\tan x}{(a^2\tan^2 x+b^2)}$

由于 a、b是不全为 0的非负常数，所以

$a=0$时，原式 $=\frac{1}{b^2}\tan x+C$;

$b=0$时，原式 $=-\frac{1}{a^2}\frac{1}{\tan x}+C$;

$ab\neq 0$时，原式 $=\frac{1}{a^2}\int \frac{d\tan x}{\tan^2 x+\frac{b^2}{a^2}}=\frac{1}{ab}\arctan(\frac{a}{b}\tan x)+C$

例11. 设$F(x)=f(x)\,g(x)$, 其中函数 $f(x), g(x)$ 在$(-\infty,+\infty)$内满足以下条件: $f'(x)=g(x),\ g'(x)=f(x)$, 且 $f(0)=0$, $f(x)+g(x)=2e^x$.

(1) 求$F(x)$ 所满足的一阶微分方程；

(2) 求出$F(x)$ 的表达式 . (03考研)

解: (1) $\because\ F'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$

$$=g^2(x)+f^2(x)$$

$$=[g(x)+f(x)]^2-2f(x)g(x)$$

$$=(2e^x)^2-2F(x)$$

$F(0)=f(0)g(0)=0$ 一阶线性非齐次微分方程:

$$F'(x)+2F(x)=4e^{2x}$$

(2) 由一阶线性微分方程解的公式得

$$F(x)=e^{-\int 2\,\mathrm{d}x}\left[\int 4e^{2x}\cdot e^{\int 2\,\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x+C\right]$$

$$=e^{-2x}\left[\int 4e^{4x}\,\mathrm{d}x+C\right]$$

$$=e^{2x}+Ce^{-2x}$$

将 $F(0)=f(0)g(0)=0$ 代入上式， 得 $C=-1$

于是 $F(x)=e^{2x}-e^{-2x}$

例12 求 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^x}{1+e^x}\sin^4 x dx$ （$J.wallis$ 公式）

解 $\int = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{e^x}{1+e^x}\sin^4 x dx + \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^x}{1+e^x}\sin^4 x dx$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{e^x}{1+e^x}\sin^4 x dx = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+e^x}\sin^4 x dx$$

$$\Rightarrow \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^x}{1+e^x}\sin^4 x dx = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x dx = \frac{3\pi}{16}$$

例13 设$f(x)$在$[0,1]$上可微，且$f(0)=0, 0<f'(x)<1$,

证明: $\left[\int_0^1 f(x)dx\right]^2 \geq \int_0^1 f^3(x)dx.$

证明 $F(t)=\left[\int_0^t f(x)dx\right]^2-\int_0^t f^3(x)dx.$

例14 设$f(x)$在$[0,1]$上有连续的导数，且$f(0)=0$,

证明:$\int_0^1 f^2(x)dx \le \frac{1}{2}\int_0^1 [f'(x)]^2 dx.$

例14 设$f(x)$在$[a,b]$上有连续的导数，且$f(a)=0$,

证明:$\int_a^b f^2(x)dx \le \frac{(b-a)^2}{2}\int_a^b [f'(x)]^2 dx.$

证明 $f^2(x)=[f(x)-f(0)]^2=\left[\int_0^x f'(t)dt\right]^2 \le \int_0^x [f'(t)]^2 dt \int_0^x dt.$

$$\Rightarrow f^2(x) \le x\int_0^x [f'(t)]^2 dt.$$

$$\int_0^1 f^2(x)dx \le \int_0^1 \left(x\int_0^x [f'(t)]^2 dt\right)dx$$

$$=\int_0^\xi [f'(t)]^2 dt \int_0^1 x dx = \frac{1}{2}\int_0^\xi [f'(t)]^2 dt \le \frac{1}{2}\int_0^1 [f'(x)]^2 dx$$

例15 设$f(x)$在$[0,1]$上有连续的一阶导数，且$f(0)=0$,

证明：存在$\xi\in[0,1]$,使$f'(\xi)=2\int_0^1 f(x)dx$.

解 $\because f(x)$在$[0,1]$上有连续的一阶导数，且$f(0)=0$

$\therefore f(x)=f(x)-f(0)=f'(\theta x)x,\quad \theta\in(0,1)$

$\because f'(x)$在$[0,1]$上连续，且$g(x)=x\geq 0$

$$\therefore\quad 2\int_0^1 f(x)dx=2f'(\xi)\int_0^1 xdx=f'(\xi),\ \xi\in[0,1]$$

积分中值定理

$f(x)\in C[a,b],g\in\Re[a,b]$,且$g$在$[a,b]$上不变号,

则$\int_a^b f(x)g(x)dx=f(\xi)\int_a^b g(x)dx,(a\leq\xi\leq b)$

积分中值定理 $f(x)\in C[a,b], g\in\Re[a,b]$,且$g$在$[a,b]$上不变号,

则 $\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi)\int_a^b g(x)dx, (a\le\xi\le b)$

证明 设在$[0,1]$上$g(x)\ge 0, M=\max\limits_{x\in[a,b]}\{f(x)\}, m=\min\limits_{x\in[a,b]}\{f(x)\}$

则$\forall x\in[a,b], m\le f(x)\le M, mg(x)\le f(x)g(x)\le Mg(x)$

$$\Rightarrow m\int_a^b g(x)dx \le \int_a^b f(x)g(x)dx \le M\int_a^b g(x)dx$$

若$\int_a^b g(x)dx>0$, 则$m\le \dfrac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx}\le M$

则由连续函数的介值定 理,$\exists\xi\in[a,b]$,使$f(\xi)=\dfrac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx}$

若$\int_a^b g(x)dx=0$, 则 $\int_a^b f(x)g(x)dx=0$.

例16 设$f(x)$在$[0,2\pi]$上有二阶连续导数，且$f''(x)>0$,

证明:$\int_0^{2\pi} f(x)\cos x dx \ge 0.$

证明 左边$= \int_0^{2\pi} f(x) d\sin x = f(x)\sin x \Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} f'(x)\sin x dx$

$$= \int_0^{2\pi} f'(x) d\cos x = f'(x)\cos x \Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} f''(x)\cos x dx$$

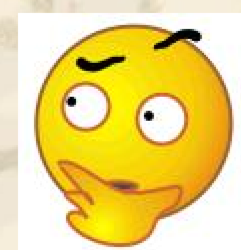
$$= \int_0^{2\pi} f'(x) d\cos x = f'(2\pi) - f'(0) - \int_0^{2\pi} f''(x)\cos x dx$$

$$= \int_0^{2\pi} f''(x) dx - \int_0^{2\pi} f''(x)\cos x dx \quad = \int_0^{2\pi} f''(x)(1-\cos x) dx \ge 0$$

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2} f''(\xi)x, \quad \xi \in [0, x]$$

$$\int_0^{2\pi} f(0)\cos x dx = 0 \qquad \int_0^{2\pi} f'(0)x\cos x dx = 0$$

$$\int_0^{2\pi} f''(\xi)x^2 \cos x dx = f''(\eta)\int_0^{2\pi} x^2 \cos x dx$$



例17 设$f(t)=\begin{cases}\sin\frac{1}{t}, & t\neq 0\\ 0, & t=0\end{cases}, F(x)=\int_0^x f(t)dt$,

则$F(x)$在$x=0$处（　　）.（A）不连续,（B）连续不可导

（C）可导且$F'(0)\neq 0$,（D）可导且$F'(0)=0$

证明

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{F(x)-F(0)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}\int_0^{x^2} f(t)dt+\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}\int_{x^2}^{x} f(t)dt$$

$$\left|\frac{1}{x}\int_0^{x^2} f(t)dt\right|\leq\frac{1}{x}\int_0^{x^2}|f(t)|dt\leq\frac{1}{x}x^2=x$$

$$\Rightarrow\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}\int_0^{x^2} f(t)dt=0$$

例17 设$f(t)=\begin{cases}\sin\dfrac{1}{t}, & t\neq 0\\ 0, & t=0\end{cases}$，$F(x)=\int_0^x f(t)dt$，

则$F(x)$在$x=0$处（　　）.（A）不连续,（B）连续不可导

（C）可导且$F'(0)\neq 0$,（D）可导且$F'(0)=0$

证明

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{F(x)-F(0)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}\int_0^{x^2} f(t)dt+\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}\int_{x^2}^{x} f(t)dt$$

$$\frac{1}{x}\int_{x^2}^{x} f(t)dt=\frac{1}{x}\int_{x^2}^{x}\sin\frac{1}{t}dt=\frac{1}{x}\int_{x^2}^{x}t^2 d\cos\frac{1}{t}=\frac{1}{x}\left[t^2\cos\frac{1}{t}\Big|_{x^2}^{x}-\int_{x^2}^{x}2t\cos\frac{1}{t}dt\right]$$

$$\left|\frac{1}{x}\int_{x^2}^{x}2t\cos\frac{1}{t}dt\right|\leq\frac{1}{x}\int_{x^2}^{x}2tdt=x-x^3\qquad\Rightarrow\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}\int_{x^2}^{x}f(t)dt=0$$

则$F_+'(0)=0$　同理可得：$F_-'(0)=0$

选:D

例18 求 $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\sin 2x dx.$

例19求 $\int_0^{n\pi} \sqrt{1+\sin 2x}\, dx$

例20求 $I=\int_0^{\pi} x\sin^n x dx$.

例21 求由曲线 $y=e^{-x}\sqrt{\sin x}\,(x\geq 0)$与$y$轴围成的图形绕 x轴旋转一周所得旋转体的体积.

例22求 $I=\int \frac{x^5}{\sqrt{1+x^2}} dx$

例23 设 $F(x)$ 为 $f(x)$ 的原函数，且当 $x\geq 0$ 时，

$$F(x)f(x)=\frac{xe^x}{2(1+x)^2}.$$ 已知 $F(0)=1, F(x)>0.$ 求 $f(x).$

例18 求 $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\sin 2x dx.$

解 令 $2x = t$, $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\sin 2x dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\sin t dt.$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\sin 2x dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(2\sin x\cos x) dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\ln 2 + \ln\sin x + \ln\cos x) dx$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\cos x dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \ln\sin t dt.$$

$$= \frac{\pi}{4}\ln 2 + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\sin x dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \ln\sin x dx$$

$$= \frac{\pi}{4}\ln 2 + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\sin x dx = \frac{\pi}{4}\ln 2 + 2I$$

$$\therefore I = -\frac{\pi}{4}\ln 2.$$

例19求 $\int_0^{n\pi}\sqrt{1+\sin 2x}\,\mathrm{d}x$ P216(B)2T

解: $\int_0^{n\pi}\sqrt{1+\sin 2x}\,\mathrm{d}x = n\int_0^{\pi}\sqrt{1+\sin 2x}\,\mathrm{d}x$

$$= n\int_0^{\pi}\sqrt{(\cos x+\sin x)^2}\,\mathrm{d}x = n\int_0^{\pi}\left|\cos x+\sin x\right|\mathrm{d}x$$

$$= n\sqrt{2}\int_0^{\pi}\left|\sin(x+\tfrac{\pi}{4})\right|\mathrm{d}x$$

令 $t = x+\frac{\pi}{4}$

$$= n\sqrt{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}}\left|\sin t\right|\mathrm{d}t = n\sqrt{2}\int_0^{\pi}\left|\sin t\right|\mathrm{d}t$$

$$= n\sqrt{2}\int_0^{\pi}\sin t\,\mathrm{d}t = 2\sqrt{2}\,n$$

$$\int_a^{a+T} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{T} f(x)\,\mathrm{d}x$$

例20 求 $I=\int_0^{\pi} x\sin^n x dx$.

解 $I=\int_0^{\pi} x\sin^n x\,dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\sin^n x\,dx = \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx$

若 $f(x)$ 在[0,1]上连续，证明

（1）$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)dx$；

（2）$\int_0^{\pi} xf(\sin x)dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)dx$. 并计算 $\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx$.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx = \begin{cases} \frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdots\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}, & n\text{为正偶数} \\ \frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdots\frac{2}{3}, & n\text{为大于1的奇数} \end{cases}$$

例21 求由曲线 $y=e^{-x}\sqrt{\sin x}\,(x\ge 0)$与$y$轴围成的图形绕 x轴旋转一周所得旋转体的体积.

解 $dV=\pi\left[e^{-x}\sqrt{\sin x}\right]^2dx$

$$\therefore V=V_1+V_2+\cdots$$

$$=\pi\int_0^{\pi}e^{-2x}\sin x dx+\pi\int_{2\pi}^{3\pi}e^{-2x}\sin x dx+\cdots$$

$$\int e^{-2x}\sin x dx=-\frac{1}{5}e^{-2x}(\cos x+2\sin x)+C$$

$$V_1=\frac{\pi}{5}(1+e^{-2\pi}),\ V_2=\frac{\pi}{5}(e^{-4\pi}+e^{-6\pi}),\cdots$$

$$=\frac{\pi}{5}(1+e^{-2\pi}+e^{-4\pi}+e^{-6\pi}+\cdots)=\frac{\pi}{5(1-e^{-2\pi})}$$

$y=e^{-x}\sqrt{\sin x}\,(x\ge 0)$的定义域$x\in[0,\pi]\cup[2\pi,3\pi]\cup[4\pi,5\pi]\cdots$

例22 求 $I=\int \frac{x^5}{\sqrt{1+x^2}}dx$

解1 令 $x=\tan t$, 则 $dx=\sec^2 t dt$

$$I=\int \frac{\tan^5 t\cdot \sec^2 t dt}{\sec t}=\int \tan^4 t\cdot(\tan t\cdot \sec t)dt=\int \tan^4 t d(\sec t)$$

$$=\int(\sec^2 t-1)^2 d(\sec t)=\int(u^2-1)^2 du \quad (u=\sec t)$$

解2

$$I=\frac{1}{2}\int \frac{x^4 dx^2}{\sqrt{1+x^2}}=\int x^4 d(\sqrt{1+x^2})$$

$$=x^4\sqrt{1+x^2}-4\int x^3\sqrt{1+x^2}dx$$

$$=x^4\sqrt{1+x^2}-2\int[(x^2+1)-1]\sqrt{1+x^2}d(1+x^2)$$

例23 设 $F(x)$ 为 $f(x)$ 的原函数，且当 $x \ge 0$ 时，

$$F(x)f(x) = \frac{xe^x}{2(1+x)^2}.$$ 已知 $F(0)=1, F(x)>0.$ 求 $f(x).$

解 由 $F(x)f(x) = \frac{1}{2}(F^2(x))' = \frac{xe^x}{2(1+x)^2}$

$$\therefore\ F^2(x) = \int \frac{xe^x}{(1+x)^2}dx = \int \frac{(x+1)-1}{(1+x)^2}e^x dx$$

$$= \int \frac{e^x}{1+x}dx - \int \frac{e^x}{(1+x)^2}dx$$

$$= \int \frac{de^x}{1+x} - \int \frac{e^x}{(1+x)^2}dx = \frac{e^x}{1+x} + C$$

例24 求下列广义积分：

$$(1)\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+4x+9};\quad (2)\int_{1}^{2}\frac{dx}{x\sqrt{3x^2-2x-1}}.$$

解： (1) 原式 $=\int_{-\infty}^{0}\frac{dx}{x^2+4x+9}+\int_{0}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+4x+9}$

$$=\lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{0}\frac{dx}{(x+2)^2+5}+\lim_{b\to+\infty}\int_{0}^{b}\frac{dx}{(x+2)^2+5}$$

$$=\lim_{a\to-\infty}\frac{1}{\sqrt{5}}\arctan\frac{x+2}{\sqrt{5}}\Big|_{a}^{0}+\lim_{b\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{5}}\arctan\frac{x+2}{\sqrt{5}}\Big|_{0}^{b}$$

$$=\frac{\pi}{\sqrt{5}}.$$

例24 求下列广义积分：

$$(1)\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+4x+9};\quad (2)\int_{1}^{2}\frac{dx}{x\sqrt{3x^2-2x-1}}.$$

(2) $\because \lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{1}{x\sqrt{3x^2-2x-1}}=\infty,$

$\therefore x=1$ 为 $f(x)$ 的瑕点.

$$\text{原式}=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{1+\varepsilon}^{2}\frac{dx}{x\sqrt{3x^2-2x-1}}$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\left[-\int_{1+\varepsilon}^{2}\frac{d(1+\frac{1}{x})}{\sqrt{2^2-(1+\frac{1}{x})^2}}\right]=-\lim_{\varepsilon\to 0^+}\arcsin\frac{1+\frac{1}{x}}{2}\Bigg|_{1+\varepsilon}^{2}$$

$$=\frac{\pi}{2}-\arcsin\frac{3}{4}.$$

例25 **判定反常积分** $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x\sqrt{x}}dx$ **的敛散性.**

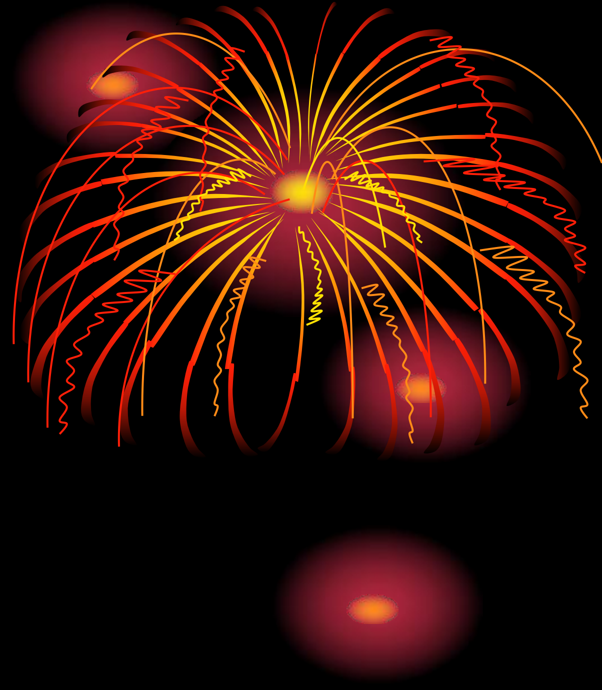
解: $$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x\sqrt{x}}dx=\int_0^1\frac{\sin x}{x\sqrt{x}}dx+\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x\sqrt{x}}dx$$

$\int_0^1\frac{\sin x}{x\sqrt{x}}dx$与$\int_0^1\frac{1}{\sqrt{x}}dx$进行比较,收敛

$\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x\sqrt{x}}dx$与$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x\sqrt{x}}dx$ **进行比较,绝对收敛**

故原反常积分收敛

预祝每位同学取得好成绩！



祝童鞋们天天快乐！