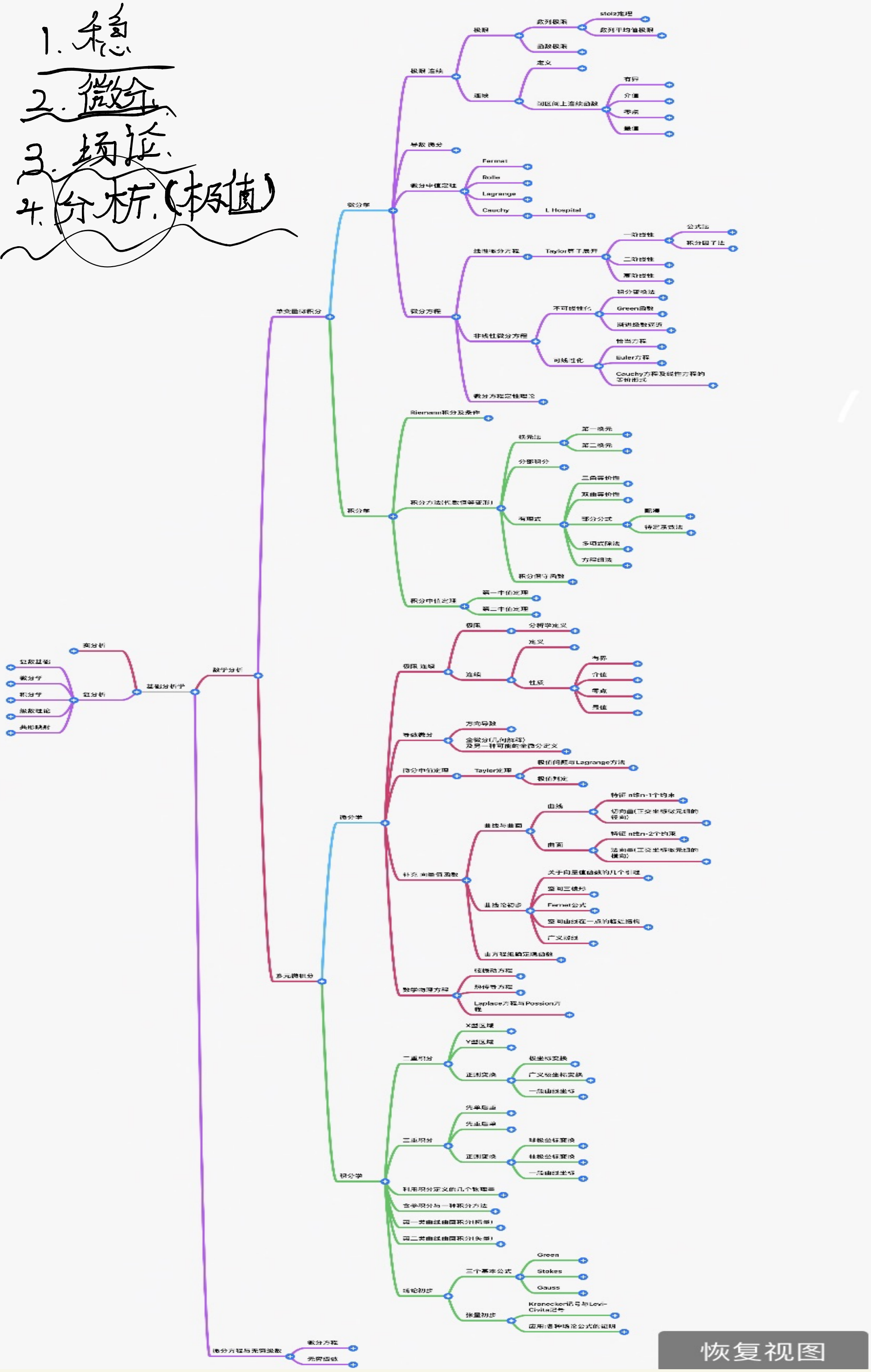
1. 稳
2. 微分
3. 场论
4. 分析.(极值)



导数的概念

邻域内函数改变量与自变量改变量比值的极限

单变量函数可导条件:左右导数存在且相等

问题 导数是谁的推广?

导数公式 双曲函数与反双曲函数的导数

基本初等函数求导公式

(1) $(C)'=0$

(2) $(x^\mu)'=\mu x^{\mu-1}$

(3) $(\sin x)'=\cos x$

(4) $(\cos x)'=-\sin x$

(5) $(\tan x)'=\sec^2 x$

(6) $(\cot x)'=-\csc^2 x$

(7) $(\sec x)'=\sec x\tan x$

(8) $(\csc x)'=-\csc x\cot x$

(9) $(a^x)'=a^x\ln a$

(10) $(e^x)'=e^x$

(11) $(\log_a x)'=\dfrac{1}{x\ln a}$

(12) $(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$,

(13) $(\arcsin x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

(14) $(\arccos x)'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

(15) $(\arctan x)'=\dfrac{1}{1+x^2}$

(16) $(\operatorname{arccot} x)'=-\dfrac{1}{1+x^2}$

函数的和、差、积、商的求导法则

设 $u=u(x)$， $v=v(x)$ 都可导，则

(1) $(u\pm v)'=u'\pm v'$

(2) $(Cu)'=Cu'$ (C 是常数)

(3) $(uv)'=u'v+uv'$

(4) $\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$

反函数求导法则

若函数 $x=\varphi(y)$ 在某区间 I_y 内可导、单调且 $\varphi'(y)\neq 0$，则它的反函数 $y=f(x)$ 在对应区间 I_x 内也可导，且

$$f'(x)=\frac{1}{\varphi'(y)} \quad \text{或} \quad \frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}$$

一元函数连续与可导关系

可导必然连续连续，连续不一定可导。

高阶导数公式

$$(e^x)^{(n)} = e^x$$

$$(a^x)^{(n)} = a^x(\ln a)^n$$

$$(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$$

$$(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$$

$$(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(n-k)} v^{(k)}$$

$$(x^a)^{(n)} = [\prod_{k=0}^{n-1}(a-k)]x^{a-n} = a(a-1)(a-2)\ldots(a-n+1)x^{a-n}$$

$$(\ln x)^{(n)} = (-1)^{n-1}(n-1)!x^{-n}$$

$$(Cf)^{(n)} = Cf^{(n)}$$

$$(\frac{1}{x+a})^{(n)} = (-1)^n \frac{n!}{(x+a)^{n+1}}$$

$$[u(ax+b)]^{(n)} = a^n \cdot u^{(n)}(ax+b)$$

$$[u(x) \pm v(x)]^{(n)} = u^{(n)}(x) \pm v^{(n)}(x)$$

莱布尼茨公式

$$(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(n-k)} v^{(k)}$$

问题？他的本质是什么？为什么和二项式公式对应？

定义运算： $\square' + \bigcirc'$

$(u+v)$, u, v, uv,

$(\square' + \bigcirc')^n$

证明留给读者. ▌ $(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(k)} v^{(n-k)}$ 莱布尼茨公式 $= \sum_{k=0} C_n u$

例 2.15 设 $f(x) = x^3 \sin x$，求 $f^{(n)}(x)$.

解 取 $u = \sin x$，$v = x^3$，根据 Leibniz 公式得

$\sum C_n^k (x^3)^{(n-k)} \sin\left[x + \frac{k}{2}\pi\right]$

$$f^{(n)}(x) = x^3(\sin x)^{(n)} + n \cdot 3x^2(\sin x)^{(n-1)} + \frac{n(n-1)}{2!} \cdot 6x(\sin x)^{(n-2)}$$

$x^3 \sin\left[x + \frac{n}{2}\pi\right]$

$$+ \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} \cdot 6(\sin x)^{(n-3)}$$

$x^3\left[x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + 3! \cdots\right]$

$n \cdot 3x^2 \cdot \sin[x+$

$$= x^3 \sin\left(x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right) + 3nx^2 \sin\left[x + (n-1) \cdot \frac{\pi}{2}\right]$$

$\frac{n(n-1)}{2} 6x \sin[x$

$$+ 3n(n-1)x \sin\left[x + (n-2) \cdot \frac{\pi}{2}\right]$$

$\frac{n(n-1)(n-2)}{6} 6 \sin[x$

$$+ n(n-1)(n-2) \sin\left[x + (n-3) \cdot \frac{\pi}{2}\right]. \quad ▌$$

由方程 $F(x,y)=0$ 所确定的函数 $y=y(x)$ 称 ~~$y=f(x)$~~ 为

2.6 隐函数求导法

$y=f(x)$ 形式的函数称为显函数

前面研究的函数都可以表示为 $y=f(x)$ 的形式，其中 $f(x)$ 是 x 的解析式，称之为显函数. 在实际问题中，常常碰到这样一类函数，它的因变量 y 与自变量

隐函数与参数方程求导

按部就班

微分

由于事物变化关系是非线性的，所以需要在一定范围内进行合理近似

有趣的例题

$$e^{\pi} > 22$$

微分中值定理

费马引理 可导且极值推出导函数零点

罗尔定理 闭区间连续 开区间可导 端点值相等 必然有导数零点

Lagrange定理 闭开条件 斜率存在中值 (Lagrange 公式 线性拟合)

Cauchy中值定理 闭开条件 分母导数非0 存在比值中值(辅助函数的构造)

L hospital 区间内可导的未定式 导数比值存在或者无穷大

Taylor 公式 更加精确的拟合 来源!

$$f(x) = \sum_{k=0} \underline{P(k)}(x-x_0)^k$$

泰勒中值公式

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x)$$

拉格朗日型余项 $$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

皮亚诺形式余项 $$R_n(x)=o[(x-x_0)^n].$$

$$e^x=1+\frac{1}{1!}x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+o\left(x^3\right)$$

$$\ln(1+x)=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+o\left(x^3\right)$$

$$\sin x=x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5+o\left(x^5\right)$$

$$\arcsin x=x+\frac{1}{2}\times\frac{x^3}{3}+\frac{1\times3}{2\times4}\times\frac{x^5}{5}+\frac{1\times3\times5}{2\times4\times6}\times\frac{x^7}{7}+o\left(x^7\right)$$

$$\cos x=1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4+o\left(x^4\right)$$

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+o\left(x^3\right)$$

$$(1+x)^a=1+\frac{a}{1!}x+\frac{a(a-1)}{2!}x^2+\frac{a(a-1)(a-2)}{3!}x^3+o\left(x^3\right)$$

有了泰勒公式，对于一般类型的极限，
我们就可以把它化为多项式形式

函数的性态　分段可导

最值：$[$极值，端点值$]_m$.

极值：图像定性+定量.

可导性：$f'_+(x_0)=f'_-(x_0)$

连续性：$f(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$

例题:

例 2.15 设 $f(x)=x^3\sin x$，求 $f^{(n)}(x)$.

解 取 $u=\sin x, v=x^3$，根据 Leibniz 公式得

$\sum C_n^k (x^3)^{(n-k)}$ Sin [

$$f^{(n)}(x) = x^3(\sin x)^{(n)} + n\cdot 3x^2(\sin x)^{(n-1)} + \frac{n(n-1)}{2!}\cdot$$

$x^3 \sin [x+$

$$+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\cdot 6(\sin x)^{(n-3)}$$

$x^3[x-\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{5!}x^5+3!\ldots]$

$$= x^3\sin\left(x+n\cdot\frac{\pi}{2}\right)+3nx^2\sin\left[x+(n-1)\cdot\frac{\pi}{2}\right]$$

$$+3n(n-1)x\sin\left[x+(n-2)\cdot\frac{\pi}{2}\right]$$

$$+n(n-1)(n-2)\sin\left[x+(n-3)\cdot\frac{\pi}{2}\right].$$

在其交点(x,y)处正交.

18. 求下列参数方程所确定的函数的导数:

(5) $\begin{cases} x=f(t), \\ y=tf(t)-f(t), \end{cases}$ 求$\dfrac{d^2y}{dx^2}$,其中$f''(t)$存在且$f'(t)$不为零.

3. 确定 a,b 的值,使函数

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}(1-\cos ax), & x<0,\\ 0, & x=0,\\ \dfrac{1}{x}\ln(b+x^2), & x>0\end{cases}$$

在$(-\infty,+\infty)$内处处可导,并求它的导函数.

$F(x)$在$[0,1]$区间上用 Rolle 定理即可证明.

米[redacted] 设 $f(x)$在$[0,1]$上连续,在$(0,1)$内可导,且 $f(0)=0$,当 $x\in(0,1)$ 时,$f(x)\neq 0$,证明:对一~~切自然数~~ n 在$(0,1)$内存在点 c,使$\dfrac{nf'(c)}{f(c)}=\dfrac{f'(1-c)}{f(1-c)}$.

猜 $\dfrac{f'(c)}{f'(1-c)}=\dfrac{1}{n}\dfrac{f(c)}{f(1-c)}$

分析 要证$\exists c\in(0,1)$,使$\dfrac{nf'(c)}{\dots}=\dfrac{f'(1-c)}{\dots}$

例 25 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $f(0)=0$, $f(1)=1$,

证明：1）存在 $c\in(0,1)$，使 $f(c)=1-c$；

2）存在两个不同的点 $\xi,\eta\in(0,1)$，使 $f'(\xi)f'(\eta)=1$.

例 28 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上一阶可导,在 (a,b) 内二阶可导,且 $f'(a)=f'(b)=0$,证明存在 $\xi\in(a,b)$,使

$f(x)=f(a)+\frac{f''(\xi)}{2}(x-a)^2$ ①

$f(x)=f(b)+\frac{f''(\eta)}{2}(x-b)^2$ ②

$$|f''(\xi)|\geqslant\frac{4}{(b-a)^2}|f(b)-f(a)|.$$