一 填空题:

$$\boxed{\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x = e}$$

1.已知 $\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{x+a}{x-a})^x = 9$, 则 $a =$ ______ .

$$\lim_{x\to\infty}(\frac{x+a}{x-a})^x = \lim_{x\to\infty}(1+\frac{2a}{x-a})^x = \lim_{x\to\infty}(1+\frac{2a}{x-a})^{\frac{x}{2a}\cdot 2a}$$

$$= \lim_{x\to\infty}(1+\frac{2a}{x-a})^{\frac{x}{2a}\cdot 2a} = \lim_{x\to\infty}[(1+\frac{2a}{x-a})^{\frac{x-a+a}{2a}}]^{2a}$$

$$= \lim_{x\to\infty}[(1+\frac{2a}{x-a})^{\frac{x-a}{2a}}\cdot(1+\frac{2a}{x-a})^{\frac{1}{2}}]^{2a} = e^{2a}$$

2. 设函数

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin ax}{2x}, & x>0\\ b+1, & x=0\\ (1-2x)^{\frac{1}{x}}, & x<0\end{cases}$$

$$\boxed{\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e}$$

在 $x=0$ 连续，则 $a=$ $2e^{-2}$ ，$b=$ $e^{-2}-1$.

提示: $f(0^-)=\lim\limits_{x\to 0^-}(1-2x)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{2x\to 0^-}[(1-2x)^{-\frac{1}{2x}}]^{-2}=e^{-2}$

$$f(0^+)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin ax}{2x}=\frac{a}{2}$$

$$e^{-2}=b+1=\frac{a}{2}$$

3 函数 $f(x)=\dfrac{e^{\frac{1}{1-x}}\sin x}{|x|}$ 的第一类间断点$x=$——,

第二类间断点 $x=$ ——.

解: 间断点 $x=0, x=1$

$\because \lim\limits_{x\to 1} f(x)=\infty$, $\therefore$ $x=1$ 为无穷间断点;

当$x\to 0^-$时, $f(x)\to -e$

当$x\to 0^+$时, $f(x)\to e$

故 $x=0$ 为跳跃间断点.

4. 当 $x \to 0$ 时，$\sin x$ 与 $\ln(1+ax)$是等价无穷小,a=?

$$\lim \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$$

$$\lim \frac{\beta(x)}{\alpha(x)} = \lim \frac{\beta'(x)}{\alpha'(x)}.$$

$$\sin x \sim x$$

$$\ln(1+x) \sim x$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{\ln(1+ax)} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{ax} = \frac{1}{a} = 1$$

5. 设$y=\log_a[x(\sec x+\tan x)]$,则$dy=$______.

$$(\log_a x)'=\frac{1}{x\ln a}\qquad(\tan x)'=\sec^2 x\qquad(\sec x)'=\sec x\tan x$$

6. $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^n})\cdot\frac{\sqrt{n^2+1}}{n+1}=$______.

7. 函数$y=x+2\cos x$在$[0,\frac{\pi}{2}]$上的最大值为______.

注意:如果区间内只有一个极值,则这个极值就是最值.(最大值或最小值)

二 计算或证明题:

$$1.\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x^2)}{x^3\sin x}.$$

$1-\cos x \sim \frac{1}{2}x^2$

2.已知 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+f(x)\sin x}-1}{e^x-1}=A$, 求 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

$e^x-1\sim x$

$$A=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)\sin x}{(e^x-1)(\sqrt{1+f(x)\sin x}+1)}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{\sqrt{1+f(x)\sin x}+1}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{2}$$

3.设数列$\{x_n\}$满足$x_1=1, x_{n+1}=\dfrac{x_n+2}{x_n+1}(n\in N_+)$,证明$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\sqrt{2}$.

$$\because x_1=1, x_{n+1}=\frac{x_n+2}{x_n+1}=1+\frac{1}{x_n+1}, \therefore x_n>1(n\in N_+)$$

$$|x_{n+1}-\sqrt{2}|=|1+\frac{1}{x_n+1}-\sqrt{2}|=|\frac{x_n+2-\sqrt{2}x_n-\sqrt{2}}{x_n+1}|$$

$$=|\frac{(x_n-\sqrt{2})(1-\sqrt{2})}{x_n+1}|\le\frac{\sqrt{2}-1}{2}|x_n-\sqrt{2}|$$

$$\le\cdots\le(\frac{\sqrt{2}-1}{2})^n|x_1-\sqrt{2}|=2\cdot(\frac{\sqrt{2}-1}{2})^{n+1}$$

4. 设$\begin{cases} x = a(\cos t + t\sin t) \\ y = a(\sin t - t\cos t) \end{cases}$,求$\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}$.

5. 设$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, x \neq 0 \\ 0, \quad x = 0 \end{cases}$,说明其导函数$f'(x)$在$x = 0$处连续.

6.证明当 $0 < x < \frac{\pi}{2}$时, $\sin x > \frac{2}{\pi}x$.

7.设$f(x)$在$[0,1]$上具有二阶导数,且满足条件$|f(x)|\le a, |f''(x)|\le b$,

其中a,b都是非负常数,c是$(0,1)$内任意一点,证:$|f'(c)|\le 2a+\frac{b}{2}$.

泰勒公式:若$f(x)$在区间I中$n+1$阶可导,$x_0\in I$,则$\forall x\in I$,至少存在一点ξ介于x与x_0之间,使得

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

$\forall x\in[0,1]$,由泰勒公式得:

$$f(x)=f(c)+f'(c)(x-c)+\frac{f''(\xi)}{2!}(x-c)^2$$

$$f(0)=f(c)+f'(c)(-c)+\frac{f''(\xi_1)}{2!}(-c)^2,0<\xi_1<c$$

$$f(1)=f(c)+f'(c)(1-c)+\frac{f''(\xi_2)}{2!}(1-c)^2,c<\xi_2<1$$

8.设$f(x)$在$x=0$的邻域内二阶可导，$f'(0)=0$，计算$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(\ln(1+x))}{x^3}$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(\ln(1+x))}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{f'(\xi)(x-\ln(1+x))}{x^3},(\ln(1+x)<\xi<x)$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{f'(\xi)}{x}\cdot\frac{x-\ln(1+x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{f'(\xi)-f'(0)}{\xi}\cdot\frac{\xi}{x}\cdot\frac{x-\ln(1+x)}{x^2}\right)$$

$$=f''(0)\cdot 1\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x-\ln(1+x)}{x^2}=\frac{1}{2}f''(0).$$

$$\ln(1+x)<\xi<x\Rightarrow\frac{\ln(1+x)}{x}<\frac{\xi}{x}<1$$

9.设$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内有界且可导,证明:方程$f'(x)(1+x^2)=2xf(x)$至少有一个实根.

设$F(x)=\dfrac{f(x)}{1+x^2}$, $F'(x)=\dfrac{f'(x)(1+x^2)-2xf(x)}{(1+x^2)^2}$,

若$F(x)\equiv 0$, 则$F'(x)=0$至少有一个实根

若$F(x)\neq 0$, 不妨设$F(x)>0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} F(x)=0$,

$\therefore$ 最大值在$(-\infty,+\infty)$内取到,

$\therefore \exists \xi \in (-\infty,+\infty)$使$F'(\xi)=0$.