1、设 $f(x)=\begin{cases} a+bx^2 & x\le 0 \\ \frac{\sin bx}{x} & x>0 \end{cases}$ 在（$-\infty$，$+\infty$）内连续，则常数 a 和 b 应满足______

2、$\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+\tan x)^{x}-1}{x\sin x}$=____________

3、曲线 y=$\frac{x^2+1}{x+1}$（$x\neq 1$）的斜渐近线方程为________

4、函数 y=x e^{-x}的凸区间是__________

5、若 f（x）=$\frac{e^x-a}{x(x-1)}$有无穷间断点 x=0 和可去间断点 x=1，则 a=________

二、单项选择题

1、 设 f（x），φ（x）在$-\infty$，$+\infty$）内有定义， f（x）为连续函数且 f（x）≠0，φ（x）有间断点则（ ）

A、 f（φ（x））必有间断点　　B、φ（x）/ f（x）必有间断点

C、φ（f（x））必有间断点　　D、（$\varphi(x)$）^{2} 必有间断点

2、设函数 f（x）可导且满足$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(1)-f(1-x)}{2x}=-1$，则过曲线 y=f（x）上点（1，f（1））处的切线的斜率为（ ）

A、-2　　B、-1　　C、1　　D、2

3、设 f（x）有任意阶导数，且 f′（x）=[f（x）]^2，则 $f^{(n)}$（x）=（ ）（n> 2）

A、[f（x）]^{2n}　　B、（n！）[f（x）]^{2n}

C、（n！）[f（x）]$^{n+1}$　　D、n[f（x）]$^{n+1}$

4、函数 f（x）=（x^2-x-2）|x^3-x|不可导点的个数是（ ）

A、3　　B、2　　C、1　　D、0

5、若$\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{(x-a)^2}=-1$，则在点 x=a 处（ ）

A、f（x）取得最小值　　B、f（x）的导数不存在

C、f′（a）存在，且 f′（a）≠0　　D、f（x）取得极大值

三、计算下列各题（每小题 7 分，共 35 分）

1、求极限$\lim\limits_{n\to\infty}(n\sin\frac{1}{n})^{n^2}$

2、设 y=（acrsin $\frac{1}{x}$）^{3}，求 y′

3、求曲线$\begin{cases} x = 3t^2 + 2t + 3 \\ e^y\sin t - y + 1 = 0 \end{cases}$ 在 t=0 处的切线方程

4、求由方程 acrtan $\frac{y}{x}$ = ln$\sqrt{x^2+y^2}$所确定的隐函数 y=y(x)的二阶导数

5、已知 f(x)=e^{x^2}，f[$\varphi(x)$]=1-x，且$\varphi(x)\geq 0$

（1）求$\varphi(x)$及其定义域；（2）求$\varphi'(-1)$

四、（9分）如图，从半径为 R 的圆铁片上剪去一个扇形做成一个漏斗，留下的扇形的中心角φ取多大时做成的漏斗容积最大？

五、（9分）设 f（x），g（x）在[a,b]上二阶可导，且 $g''(x)\neq0$，$f(a)=f(b)=g(a)=g(b)=0$，证明：（1）在(a,b)内 $g(x)\neq 0$；（2）存在$\xi\in(a,b)$，使 $\frac{f(\xi)}{g(\xi)}=\frac{f''(\xi)}{g''(\xi)}$

六、（7分）设 f（x）在$[a,+\infty)$上二阶可导，$f(a)>0$，$f'(a)<0$，$x>a$ 时 $f''(x)<0$，证明：$f(x)=0$ 在$(a,+\infty)$上有且只有一个实根。

西安交通大学 2015 年大一上期期中考试题答案与解析

一、填空题

1、b=a

解析：分段函数如果在总定义域 D 内连续

则应在①各个分段 D_n 内连续 ②在各分段之间的节点处连续--函数值相等

解答：易知各自分段内函数连续。故只需要求解$\lim_{x\to 0} a+bx^2=\lim_{x\to 0}\frac{\sin bx}{x}$

2、1

解析：①熟记求极限时用的几个常用求等价小公式，包括：

$e^x-1\sim x\ \ \ln(1+x)\sim x\ \ tanx\sim x\ sinx\sim x$ 等

求复杂极限前先观察式子的形式，寻找相关等价小的形式

②复杂幂函数形式 A^B 可化为指数形式$e^{B\ln A}$简化计算（A、B 可为多项式或单项式）

解答：本体分子为多项式，并且观察到分子为 A^x-1 的形式，首先联想到$e^x-1\sim x$

通过上述②对该式变形

原式$=\frac{e^{xln(1+\tan x)}-1}{x^2}=\frac{xln(1+\tan x)}{x^2}=\frac{ln(1+\tan x)}{x}=\frac{\tan x}{x}=1$

3、y=x-1

解析：求 f(x)的斜渐近线方程，可采用待定系数法

设 g(x)=（kx+b）为斜渐近线方程 当 x→∞时，［f(x)- g(x)］应趋于 0

即$\lim_{x\to\infty}f(x)-（kx+b）=0$ 根据极限性质解出 b、k 即可

4、(2，∞)

解析：根据凸函数的定义 f``(x)＞0

① 注意定义域区间 ② 注意不是闭区间

5、e

解答：若 $\lim\limits_{x\to1}\frac{e^x-a}{x(x-1)}$ 存在，则$\lim\limits_{x\to1}e^x-a$=0 解得 a=e

二、单项选择

1、B
2、A
解析：在用定义求极限的过程中若出现 f(a-x)而不是 f(a+x)的形式

灵活地用 t 代替-x，将 f(a-x)改为 f(a+t)

不过要注意定义域以及其他自变量的正负号会改变

解答：设 t=-x 则原式=$\lim\limits_{t\to0}\frac{f(t+1)-f(1)}{t}=-2$ 即为该处的切线

3、C
解析：当出现①求 n 阶导数并给出了②i 阶导数和 j 阶导数的关系式时

尽量采用递推代换的方法，归纳出 n 阶导数的表示形式

例如本题给出了 1 阶导数和 0 阶导数（原函数）的关系式时

则同时对两侧求导，再将其中的 1 阶导数用原函数替换，不停递推，归纳出用原函数表示 n 阶导数的函数式

4、B
解析：根据函数可导性的定义可知，函数在 x=a 处可导

需满足：①函数在 x=a 处连续②函数在 x→a 的左右两侧极限相等

由于题干出现了绝对值，则会出现左右两侧极限值不同的情况，分类讨论即可

如果式子是分母含自变量的分数形式，则会出现不连续的情况（这只是一种可能）

鉴于本题的绝对值形式比较简单可采用序轴标根法求解个数

解答：序轴标根法：

将 f(x)化为简单多项式乘积的形式：

（x+1）（x-2）|x（x+1）（x-1）| 并作图

该题可以对绝对值进行分类讨论，再分别求左右极限

得出原式只有x=0时和x=1时不可导，其他节点可导

5、D

解析：对于问极大值还是极小值问题，实际是问的该函数在 x=a 时，f``(x)与 0 的大小关系

即该函数在这一点是凸还是凹的

注意明确 f(x) 是个函数，而 f(a)是个函数值

解答：原式 = $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{2x-2a}=-1$ 设 x-a=t 则原式 = $\lim\limits_{t\to 0}\frac{f(t+a)}{t}=\frac{f`(t+a)}{1}=-2<0$

则该函数在此处取得极大值，且 f(x)的导数存在

由于 f`(a)是一个函数值，则 f`(a)=0

三、计算题：

1、解：原式=$\lim_{n\to\infty}e^{n^2\ln\left(n\sin\frac{1}{n}\right)}$，因为是指数形式故不能变形为$\frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}$化简，应先分部求幂部分，设 $x=\frac{1}{n}$

原式=$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\ln\left(\frac{1}{x}sinx\right)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\ln\left(1+\frac{sinx-x}{x}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\cdot\frac{sinx-x}{x}=-\frac{1}{6}$(洛必达) 结果为：$e^{-\frac{1}{6}}$

2、解：y`=$3(\arcsin\frac{1}{n})^2\times\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}\times(-\frac{1}{x^2})$

$=-\frac{3(\arcsin\frac{1}{n})^2}{x\sqrt{1-x^2}}$

3、解：$\dot{x}$=6t+2　隐函数求导可得 $\dot{y}=\frac{-e^y cost}{e^y sint-1}$

$k=\frac{dy}{dx}=\frac{\dot{y}}{\dot{x}}=\frac{-e^y cost}{(e^y sint-1)(6t+2)}$

当 t=0 时，x=3, y=1 有 y-1=k(x-3)

将 x, y 的值代入 k 中可得到

$y=\frac{e}{2}x-\frac{3}{2}e+1$

4、解：利用隐函数求导公式可得

$\frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}}\times\frac{y`x-y}{x^2}=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\times\frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}}\times(2x+2y`y)$

化简可得$y`=\frac{x+y}{x-y}$

再对两边求导有$y``=\frac{-2y+2xy`}{(x-y)^2}$

代入y`得到$y``=\frac{2x^2+2y^2}{(x-y)^3}$

注意复合函数求导时要对内部复合函数求导

5、解：①$e^{\varphi^2(x)}$=1-x　故$\varphi(x)=\sqrt{\ln(1-x)}$

$(1-x)>0$ 且 $\ln(1-x)\geq 0$ 解得 $x\leq 0$

② 对$\varphi(x)$求导并代入 x=−1 解得$\varphi'(-1)=-\frac{1}{4\sqrt{ln2}}$

四、解析：解应用题首先应对相应公式熟悉，例如本题圆锥体积公式为$\frac{1}{3}\pi r^2 h$

根据公式估算有多少个未知量，例如本题有 2 个未知量 r 与 h

由于已经给出了母线长度 R 和圆周角角度φ

则根据公式 $r=R\frac{\varphi}{2\pi}$求出底面半径 r，再用勾股定理求出高度 h

求 V 的最大值就是求函数 $V(\varphi)$在定义域内的最大值

解：根据上述公式可知

$V(\varphi)=\frac{\varphi^2R^3\sqrt{4\pi^2-\varphi^2}}{24\pi^2}$ 令$\varphi^2=t>0$ ，$R^3>0$，$\pi^2>0$

取 $g(t)=t\sqrt{4\pi^2-t}$ 求导有 $g`(t)=\frac{-3t+8\pi^2}{2\sqrt{4\pi^2-t}}=0$

解得$\varphi^2=t=\frac{8\pi^2}{3}$ 故在$\varphi=\frac{2\sqrt{6}\pi}{3}$时容积最大

注意适当换元，可以极大地简化计算

五、证明（1）由 g（x）在[a,b]上二阶可导，且 $g''(x)\neq 0$

可知 $g'(x)$在[a,b]上没有拐点并且是单调的，单增或单减

由于 g(a)=g(b)=0，则 g(x) 在[a,b]上只有一个拐点 g(z)

作图可知在（a,b）上 $g(x)\neq 0$

（2）有题目知只需要证明：

$f(\xi)g''(\xi)-g(\xi)f''(\xi)=0$ 即可

令 F(X)=g(x)f`(x)-f(x)g`(x) ，可知 F(a)=F(b)

由 Role 定理可知$\exists\ \xi\in(a,b)$,使 F`(ξ)=0

代入ξ后消去相同式子有$f(\xi)g''(\xi)-g(\xi)f''(\xi)=0$，得证

六、当有条件"f(x)在定义域上 n 阶可导时"，常常采用泰勒公式导出 n 阶导数

证明：由泰勒公式可得：

$f(x)=f(a)+f`(a)(x-a)+\frac{f``(\xi)}{2!}(x-a)!$

其中$\xi\in(a,x)$ 则 $f``(\xi)<0$，$\frac{f``(\xi)}{2!}(x-a)!<0$

设 $g(x)=f(a)+f`(a)(x-a)>f(x)$

（f(x)的零点求不出来，可以根据泰勒公式设 g(x)求出 f(x)的部分零点范围）

当 $g(x1)=0$ 时，$x1=-\frac{f(a)}{f`(a)}+a>a$

则 f(x)在(a, x1)上有一个零点

而当 x>x1 时，f(x) <g(x) <0，则不存在零点

由于 x>a 时 f''(x)<0，故 f`(x)单减，由因为 f'(a)<0，故 f`(x) <0

即该零点存在且唯一，得证

最后祝各位同学在期中考试中取得满意的成绩！

一定要细心地计算，耐心地检查，心态很重要~

----文治书院学生会学习部制

如果有仔细的同学发现了错误或者有其他的建议请联系我们~
信息 53 周寒松