西安交通大学考试题

成绩	

课　程　高等数学（Ⅰ.Ⅱ　）

系　别 ______　　　考试日期　2016 年 11 月 6 日

专业班号 ______

姓　名 ______　　　学　号______　　　期中 ✓　　　期末 ☐

一、填空（每小题 3 分，共 15 分）

1　若 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\cos x}{x+2}, & x\ge 0\\ \dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{a-x}}{x}, & x<0\end{cases}$ 有可去间断点 $x=0$，则 $a=$______.

2　若 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin 2x+e^{2ax}-1}{x} & x\ne 0\\ a & x=0\end{cases}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 连续，则 $a=$______.

3　曲线 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases}x=t^3+9t\\ y=t^2-2t\end{cases}$ 确定，则 $y=y(x)$ 的凸区间是______.

4　极限 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^x-1}{x\ln x}=$______.

5　曲线 $y=x\ln\left(e+\dfrac{1}{x}\right)(x>0)$ 的渐近线方程为______.

二、单项选择 (每小题 3 分，共 15 分)

1. 设 $f(x),\varphi(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有定义，$f(x)$ 为连续函数且 $f(x)\ne 0$, $\varphi(x)$ 有间断点，则（　　）

A. $\varphi(f(x))$ 必有间断点　　　B. $(\varphi(x))^2$ 必有间断点

C. $f(\varphi(x))$ 必有间断点　　　D. $\dfrac{\varphi(x)}{f(x)}$ 必有间断点

2. 设 $f(x)$ 为可导函数且满足 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(1)-f(1-x)}{2x}=-1$ ，则过曲线 $y=f(x)$ 上点 $(1,f(1))$ 处的切线的斜率为（　　）

A. 2　　　　B. -1　　　　C. 1　　　　D. -2

3. 若 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{(x-a)^2}=-1$，则在点 $x=a$ 处（　　）.

A. $f'(a)$ 存在，且 $f'(a)\neq0$　　　　B. $f(x)$ 取得极大值

C. $f(x)$ 取得极小值　　　　D. $f(x)$ 的导数不存在

4. 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos x}{\sqrt{x}}, & x>0\\ x^2g(x), & x\leq0\end{cases}$，其中 $g(x)$ 是有界函数，则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处（　　）.

A. 极限不存在　　　　B. 极限存在，但不连续

C. 连续，但不可导　　　　D. 可导

5. 下列命题中正确的是（　　）.

A. 若 $f''(x_0)=0$，则 $(x_0,f(x_0))$ 一定是曲线 $y=f(x)$ 的拐点.

B. 若 $f'(x_0)=0$，则 $f(x)$ 在 x_0 处一定取极值.

C. 若 $f(x)$ 可导，且在 x_0 处取得极值，则 $f'(x_0)=0$.

D. 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上取得最大值，则最大值一定是 $f(x)$ 在 (a,b) 内的极大值.

三、计算下列各题（每小题 9 分，共 45 分）

1. 求极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\arctan x-x}{\ln(1+2x^3)}$.

2. 设 $y=\tan 2x+2^{\sin x}$，求 $dy\Big|_{x=\frac{\pi}{2}}$.

3. 设函数 $y=y(x)$ 由 $e^{y}+6xy+x^{2}-1=0$ 确定，求 $y''(0)$.

4. 讨论函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x(1+x)}{\cos\dfrac{\pi}{2}x}, & x<0\\ \sin\dfrac{1}{x^{2}-4}, & x\geq 0\end{cases}$ 的连续性，并确定其间断点的类型.

5. 设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{g(x)-e^{-x}}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$，其中 $g(x)$ 具有二阶连续导数，且 $g(0)=1$，$g'(0)=-1$．（1）求 $f'(x)$；（2）讨论 $f'(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上的连续性.

四、(13 分)设 $f(x)=\dfrac{x^2}{2(x+1)^2}$，求(1)函数 $f(x)$ 的单调区间和极值;(2)曲线 $y=f(x)$ 的凹凸区间和拐点.

五、证明题（每小题 6 分，共计 12 分）.

1. 设 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上三阶可导，且 $f(-1)=0, f(0)=0, f(1)=1, f'(0)=0$，证明：存在 $\xi\in(-1, 1)$，使 $f'''(\xi)\geq 3$.

2. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且 $f(a)=f(b)=1$，试证：存在 $\xi,\eta\in(a, b)$，使 $e^{\xi-\eta}\left(f(\eta)-f'(\eta)\right)=1$.

课程名称：高等数学 I.II (上,中)　课时：______　考试时间：2016 年11月6日

一、(3'×5=15')

1. $a=1$.　2. $a=-2$.　3. $(-10, 54)$.　4. 1.　5. $y=x+\frac{1}{e}$.

二、(3'×5=15')　1. D.　2. D.　3. B.　4. D.　5. C

三、1. 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arctan x-x}{2x^3}\overset{3'}{=\!=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{1+x^2}-1}{6x^2}\overset{(6')}{=\!=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-1}{6(1+x^2)}=-\dfrac{1}{6}$ (8')

2. $dy=\left[2\sec^2(2x)+2^{\sin x}(\ln 2)\cos x\right]dx$ (7').　$dy\Big|_{x=\frac{\pi}{2}}=\cancel{(2\ln 2)}\ 2dx$ (9')

4. 1° $x=2$. $\lim\limits_{x\to 2}f(x)$ 不存在. $x=2$ 为振荡间断点或第二类 (2')

2° $x=0$. $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=-\sin\frac{1}{4}$, $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=0$. $x=0$ 为跳跃间断点

3° $x=-1$. $\lim\limits_{x\to -1}f(x)\overset{x+1=t}{=\!=}\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{(t-1)t}{\cos\frac{\pi}{2}(t-1)}=-\dfrac{2}{\pi}$　$x=-1$ 为可去

4° $x=-(2k+1)$, $k\in N_+$ 为无穷间断点或第二类 (8')

5. ① $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(x)-e^{-x}}{x^2}=\dfrac{g''(0)-1}{2}$ (4')

$$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{[g'(x)+e^{-x}]x-[g(x)-e^{-x}]}{x^2}, & x\neq 0.\\[2ex] \dfrac{g''(0)-1}{2}, & x=0.\end{cases}$$ (6')

② $\lim\limits_{x\to 0}f'(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x[g''(x)-e^{-x}]}{2x}=\dfrac{1}{2}[g''(0)-1]=f'(0)$

连续. (9')

3. 令 $x=0$ 得 $y=0$ (2′) 方程两边对 x 求导得:

$$e^{y}\cdot y'+6y+6xy'+2x=0 \quad (5') \qquad y'=-\frac{6y+2x}{e^{y}+6x} \quad y'(0)=0$$

$$y''=-\frac{(6y'+2)(e^{y}+6x)-(e^{y}\cdot y'+6)(6y+2x)}{(e^{y}+6x)^{2}} \quad (8') \qquad y''(0)=-2 \quad (9')$$

四. ① $f'(x)=\dfrac{2x(x+1)^{2}-2(1+x)x^{2}}{2(x+1)^{4}}=\dfrac{x}{(1+x)^{3}}$ (3′)

在 $(-\infty,-1)$ 和 $(0,+\infty)$ 上单增. 在 $(-1,0)$ 内单减 (5′)

极小值为 $f(0)=0$. (7′)

② $f''(x)=\dfrac{(1+x)^{3}-3(1+x)^{2}\cdot x}{(1+x)^{6}}=\dfrac{1-2x}{(1+x)^{4}}$ (9′)

在 $(-\infty,-1)$ 和 $(-1,\frac{1}{2})$ 为凸的. 在 $(\frac{1}{2},+\infty)$ 为凹的. (11′)

拐点为 $(\frac{1}{2},\frac{1}{18})$ (13′)

五. 1. $f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{1}{2}f''(0)x^{2}+\frac{1}{6}f'''(\xi)x^{3}$ (2′)

$f(-1)=f(0)+f'(0)\cdot(-1)+\frac{1}{2}f''(0)-\frac{1}{6}f'''(\xi_1)$. $-1<\xi_1<0$. ①

$f(1)=f(0)+f'(0)+\frac{1}{2}f''(0)+\frac{1}{6}f'''(\xi_2)$. $0<\xi_2<1$ ② (4′)

②−① 得. $1=\frac{1}{6}[f'''(\xi_2)-f'''(\xi_1)]\le\frac{1}{3}f'''(\xi)$ $f'''(\xi)=\max\{f'''(\xi_1),f'''(\xi_2)\}$ (6′)

2. $F(x)=e^{-x}f(x)$ (2′)

$$\frac{F(b)-F(a)}{b-a}=F'(\eta)=e^{-\eta}[f'(\eta)-f(\eta)] \quad (4')$$

而 $\dfrac{F(b)-F(a)}{b-a}=\dfrac{e^{-b}-e^{-a}}{b-a}=-e^{-\xi}$ (6′)